

METRICKÉ PROSTORY

V reálných číslech byla konvergence definována buď pomocí vzdálenosti dvou bodů nebo pomocí uspořádání. Druhý přístup už však nejde použít v euklidovských prostorech vyšší dimenze, a proto konvergence pomocí vzdálenosti je vhodnější.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr
konvergence
okolí

otevřené a uzavřené množiny
uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická vlastnost

hustá množina
řidká množina
1.kategorie

podprostor
kartézský součin
prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus
isometrie

stejnoměrná spojitost
stejn.ekvivalence
lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.
úplnost

rozšíření zobr.
zúplnění
Cantorova věta
Baireova věta
Banachova věta

kompaktnost

pokrytí
sít
Lebesgueovo číslo

totální omezenost
Tietzova věta

Stoneova–
Weierstrassova
věta

Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

METRICKÝ PROSTOR

Z chování vzdálenosti v euklidovských prostorech se vyberou základní vlastnosti, které se stanou axiomy pro abstraktní pojem vzdálenosti, nazvaný metrika.

Tvrzení dokázaná pro tento obecný pojem lze pak použít pro všechny struktury s konkrétní vzdáleností.

Důležitou aplikací budou metriky v prostorech funkcí.

DEFINICE. Necht' X je množina a d funkce přiřazující každé dvojici (x, y) z X nezáporné reálné číslo $d(x, y)$ mající vlastnosti:

1. pro $x, y \in X$ je $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. (symetrie) $d(x, y) = d(y, x)$ pro každé $x, y \in X$;
3. (trojúhelníková nerovnost) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $x, y, z \in X$.

Funkce d se pak nazývá **metrika** na X a dvojice (X, d) se nazývá **metrický prostor**.

Zřejmým způsobem se definuje vzdálenost bodu a a množiny A od množiny B a **průměr** množiny A :

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}, \quad d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\},$$

$$\text{diam } A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}.$$

DEFINICE. V metrickém prostoru (X, d) posloupnost $\{x_n\}$ **konverguje** k bodu $x \in X$ (nebo má za **limitu** bod $x \in X$), jestliže $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

Značení: $x_n \rightarrow x$ nebo $\lim x_n = x$.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řádká množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejnoměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Okolí bodu x v metrickém prostoru (X, d) je každá množina obsahující otevřenou kouli $B_{x,r} = \{y; d(x, y) < r\}$ pro nějaké $r > 0$.

Pomocí konvergence nebo okolí lze definovat všechny podstatné pojmy, které byly používány v euklidovských prostorech:

DEFINICE. Podmnožina A metrického prostoru (X, d) se nazývá **otevřená**, jestliže každý bod A má okolí celé ležící v A (tj. žádná posloupnost z $X \setminus A$ nekonverguje k bodu z A).

Podmnožina A metrického prostoru (X, d) se nazývá **uzavřená**, jestliže její doplněk $X \setminus A$ je otevřený (tj. limity konvergentních posloupností z A leží v A).

DEFINICE. **Uzavěr** množiny A v metrickém prostoru (X, d) je množina všech limitních bodů posloupností z A (a značí se \overline{A}).

VĚTA. Soubor všech otevřených množin v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. \emptyset a X jsou otevřené množiny;
2. sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina;
3. průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.

DŮSLEDEK. Soubor všech uzavřených množin v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené množiny

uzavěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejnoměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. \emptyset a X jsou uzavřené množiny;
2. průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina;
3. sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

VĚTA. Uzávěr v metrickém prostoru (X, d) má následující vlastnosti:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$ pro každé $A \subset X$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ pro každé $A, B \subset X$;
4. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ pro každé $A \subset X$.

Může se stát, že dvě různé metriky určují totožné konvergence (např. na \mathbb{R} obvyklá metrika $|x - y|$ a metrika $2|x - y|$).

Pokud je pro další potřebu hlavní konvergence a nikoli vzdálenost, je možné použít vhodnější metriku, která má stejnou konvergenci.

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají (topologicky) **ekvivalentní**, jestliže metrické prostory (X, d) a (X, e) mají totožné konvergentní posloupnosti.

Ekvivalentní metriky (jinak řečeno: ekvivalentní metrické prostory) mají tedy stejné otevřené množiny, stejné uzavřené množiny, stejné uzávěry množin.

Pojmy, které se nezmění záměnou metrik za ekvivalentní, se nazývají **topologické**. Kromě již uvedených tam náleží i následující vlastnosti:

LEKCE29-MTR

metrika

průměr
konvergence
okolí
otevřené a uzavřené množiny
uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická vlastnost
hustá množina
řádká množina
1.kategorie

podprostor
kartézský součin
prostor funkcí
spojitost

homeomorfismus
isometrie

stejnoměrná spojitost
stejn.ekvivalence
lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.
úplnost

rozšíření zobr.
zúplnění
Cantorova věta
Baireova věta
Banachova věta

kompaktnost

pokrytí
sít'
Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–
Weierstrassova věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DEFINICE. Podmnožina metrického prostoru X se nazývá **hustá**, jestliže její uzávěr je celý prostor X .

Podmnožina metrického prostoru X se nazývá **řídka**, jestliže doplněk jejího uzávěr je hustý.

Podmnožina metrického prostoru X se nazývá **1.kategorie**, jestliže je sjednocením spočetně mnoha řídkých množin.

Metrický prostor se nazývá **separabilní**, jestliže má spočetnou hustou část.

Poznámky 1 Příklady 1 Otázky 1

Učení 1

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejnoměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Konstrukce

Je triviální, že zúžení d_Y metriky d z množiny X na množinu Y je opět metrika (přesněji by se mělo říci zúžení z $X \times X$ na $Y \times Y$).

DEFINICE. Je-li (X, d) metrický prostor a Y podmnožina X , nazývá se dvojice (Y, d_Y) metrický **podprostor** prostoru (X, d) .

DEFINICE. Jsou-li (X, d) a (Y, e) metrické prostory, pak jejich (kartézský) **součin** je metrický prostor $(X \times Y, \rho)$, kde $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + e(y_1, y_2)$.

DEFINICE. Jsou-li (X_n, d_n) pro $n \in \mathbb{N}$ metrické prostory, pak jejich (kartézský) **součin** je metrický prostor $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \rho)$, kde $\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n(1+d_n(x_n, y_n))}$.

POZOROVÁNÍ. Posloupnost $\{x_n\}$ v $(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, \rho)$ konverguje k bodu x právě když, pro každé $k \in \mathbb{N}$, projekce této posloupnosti do X_k konverguje k projekci bodu x do X_k .

Na nespočetných součinech aspoň dvoubodových prostorů nelze definovat metriku tak, aby platila předchozí věta.

Nicméně, pro speciální podmnožinu i nespočetných mocnin lze definovat velmi důležitou metriku, která dává stejnoměrnou konvergenci:

DEFINICE. Symbolem $\mathcal{F}_u(X, Y)$ se značí množina omezených funkcí z množiny X do metrického prostoru (Y, d) opatřená metrikou $\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$.

LEKCE29-MTR metrika

průměr
konvergence
okolí
otevřené a uzavřené množiny
uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická vlastnost
hustá množina
řídka množina
1.kategorie
podprostor
kartézský součin
prostor funkcí
spojitost
homeomorfismus
isometrie
stejnoměrná spojitost
stejn.ekvivalence
lipschitzovské zob.
cauchyovská posl.
úplnost
rozšíření zob.
zúplnění
Cantorova věta
Baireova věta
Banachova věta
kompaktnost
pokrytí
sít'
Lebesgueovo číslo
totální omezenost
Tietzova věta
Stoneova–Weierstrassova věta
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

Písmeno Y se v označení $\mathcal{F}_u(X, Y)$ vynechává, je-li $Y = \mathbb{R}$.

POZOROVÁNÍ. Posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathcal{F}_u(X, Y)$ konverguje k funkci f právě když konverguje stejnoměrně, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje k tak, že pro všechna $n > k$ a všechna $x \in X$ je $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Poznámky 2 Příklady 2 Otázky 2

LEKCE29-MTR

metrika

- průměr
- konvergence
- okolí
- otevřené a uzavřené množiny
- uzávěr množiny
- ekvivalentní metriky
- topologická vlastnost
- hustá množina
- řidká množina
- 1.kategorie
- podprostor
- kartézský součin
- prostor funkcí
- spojitost
 - homeomorfismus
 - isometrie
- stejnoměrná spojitost
- stejn.ekvivalence
- lipschitzovské zobr.
- cauchyovská posl.
- úplnost
 - rozšíření zobr.
 - zúplnění
 - Cantorova věta
 - Baireova věta
 - Banachova věta
- kompaktnost
 - pokrytí
 - sít'
 - Lebesgueovo číslo
- totální omezenost
 - Tietzova věta
- Stoneova–Weierstrassova věta
- Poznámky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
- 1 2 3 4 5 6 7 8 9

SPOJITÁ ZOBRAZENÍ

Protože je na metrických prostorech definována konvergence i okolí bodů, lze definovat spojitost stejně jako v euklidovských prostorech.

Vzhledem ke srovnání s dalšími definicemi je lépe volit $\varepsilon - \delta$ definici.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ mezi metrickými prostory se nazývá **spojité**, jestliže pro každé $x \in X$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li $d(x, y) < \delta$, je $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

POZOROVÁNÍ. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$:

1. f je spojité.
2. Pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v (Y, e) existuje okolí U bodu x v (X, d) , že $f(U) \subset V$.
3. Vzor $f^{-1}(G)$ každé otevřené množiny G v (Y, e) je otevřená množina v (X, d) .
4. Vzor $f^{-1}(G)$ každé uzavřené množiny G v (Y, e) je uzavřená množina v (X, d) .
5. f zachovává konvergenci, tj. $f(x_n) \rightarrow f(x)$ v prostoru (Y, e) pokud posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x v prostoru (X, d) .
6. Pro každou množinu $A \subset X$ je $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

DEFINICE. Má-li spojitě zobrazení inverzní spojitě zobrazení, nazývá se **homeomorfismus**.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejněměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

POZOROVÁNÍ. Metriky d, e na množině X jsou ekvivalentní právě když obě identická zobrazení $(X, d) \rightarrow (X, e)$ a $(X, e) \rightarrow (X, d)$ jsou spojitá (tj., identické zobrazení $(X, d) \rightarrow (X, e)$ je homeomorfismus).

Zobrazení mezi metrickými prostory je spojitě právě když je spojitě mezi prostory, které jsou jim ekvivalentní.

Existuje značně silnější pojem než ekvivalentní metriky, který dává jistou ekvivalenci mezi metrickými prostory.

Takto ekvivalentní prostory se nedají rozlišit metodami teorie metrických prostorů:

DEFINICE. Dva metrické prostory (X, d) a (Y, e) se nazývají **isometrické**, jestliže existuje zobrazení f z X na Y takové, že $e(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Zobrazení f se pak nazývá isometrie.

DEFINICE. Jsou-li X, Y metrické prostory, značí $\mathcal{C}_u(X, Y)$ podprostor $\mathcal{F}_u(X, Y)$ všech omezených spojitých zobrazení z X do Y .

POZOROVÁNÍ. $\mathcal{C}_u(X, Y)$ je uzavřený v $\mathcal{F}_u(X, Y)$.

[Poznámky 3](#) [Příklady 3](#) [Otázky 3](#)

[Cvičení 3](#)

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejněměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

STEJNOMĚRNÁ SPOJITOST

Stejně jako na \mathbb{R} lze definovat stejnoměrnou spojitost i v metrických prostorech.

Uvědomte si, že následující definice se liší od definice spojitosti jen v posunutí kvantifikátoru *pro každé* x .

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ mezi metrickými prostory se nazývá **stejněměrně spojitě**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li $x, y \in X$ a $d(x, y) < \delta$, je $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Zřejmě je každé stejnoměrně spojitě zobrazení spojitě.

Stejněměrná spojitost má méně hezkých charakterizací než spojitost.

Nelze použít konvergenci posloupností, ale lze použít konvergence dvojice posloupností k diagonále, jak je uvedeno ve druhé položce. Třetí položka je velmi zajímavá a to, že implikuje stejnoměrnou spojitost není zcela snadné (důkaz tu nebude uveden. nicméně nevyžaduje žádných dalších znalostí a můžete se pokusit ho provést, návod je v *Poznámkách*).

POZOROVÁNÍ. Následující podmínky jsou ekvivalentní pro zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$:

1. f je stejnoměrně spojitě.
2. Jestliže $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, pak $e(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$, pro libovolné posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ v X .
3. Je-li $A, B \subset X$ a $d(A, B) = 0$, pak $e(f(A), f(B)) = 0$.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejněměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Pro definici stejnoměrné ekvivalence metrik se hodí použít analogie charakterizace topologické ekvivalence pomocí identických zobrazení:

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají **stejně ekvivalentní**, jestliže identická zobrazení $(X, d) \rightarrow (X, e)$ a $(X, e) \rightarrow (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Více než stejnoměrná ekvivalence metrik se používá tzv. lipschitzovská ekvivalence odvozená z lipschitzovských zobrazení.

DEFINICE. Zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ mezi metrickými prostory se nazývá **lipshitzovské**, jestliže existuje nezáporné číslo k tak, že $e(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

DEFINICE. Dvě metriky d, e na množině X se nazývají **lipschitzovsky ekvivalentní**, jestliže identická zobrazení $(X, d) \rightarrow (X, e)$ a $(X, e) \rightarrow (X, d)$ jsou lipshitzovské, tj. existují kladné konstanty k, l tak, že $k d(x, y) \leq e(x, y) \leq l d(x, y)$.

POZOROVÁNÍ. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojitě a tedy lipschitzovsky ekvivalentní metriky jsou stejnoměrně ekvivalentní.

Poznámky 4 Příklady 4 Otázky 4

Učení 4

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejně ekvivalentní

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ÚPLNOST

DEFINICE. Posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru (X, d) se nazývá **cauchyovská**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $m, n > k$ je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

DEFINICE. Metrický prostor (X, d) se nazývá **úplný**, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Prostory \mathbb{R}^n jsou úplné pro všechna přirozená n .

POZOROVÁNÍ.

1. Stejněměrně spojitě zobrazení $f : (X, d) \rightarrow (Y, e)$ zobrazuje cauchyovské posloupnosti v X do cauchyovských posloupností v Y .
2. Uzavřený podprostor úplného prostoru je úplný.
3. Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřený.
4. Součin úplných prostorů je úplný.

VĚTA. Prostor $\mathcal{F}_u(X, Y)$ (a tedy i prostory $\mathcal{C}_u(X, Y)$ a $\mathcal{U}_u(X, Y)$) je úplný, pokud je prostor Y úplný.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzavřen množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejněměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Necht' f je stejnoměrně spojitě zobrazení podmnožiny A metrického prostoru (X, d) do úplného metrického prostoru (Y, e) . Pak existuje stejnoměrně spojitě zobrazení $F : \overline{A} \rightarrow (Y, e)$, které se na A shoduje s f .

Zobrazení na množině B , které se shoduje na množině $A \subset B$ se zobrazením f se nazývá **rozšířením** zobrazení f (z množiny A) na množinu B .

Reálná čísla byla konstruována jako jisté úplné rozšíření racionálních čísel. Tento postup lze použít i obecněji v metrických prostorech.

VĚTA. Každý metrický prostor je (hustým) podprostorem nějakého úplného prostoru.

VĚTA. Je-li metrický prostor (X, d) hustým podprostorem dvou úplných prostorů Z_1, Z_2 , pak existuje isometrické zobrazení Z_1 na Z_2 , které je identické na X .

DEFINICE. Úplný prostor, který obsahuje metrický prostor X jako hustý podprostor, se nazývá **zúplnění** prostoru X .

Na závěr této části o úplnosti budou uvedena některá tvrzení platná v úplných prostorech.

První dvě tvrzení byla dokazována v části o reálných číslech.

VĚTA. (Cantor) Metrický prostor (X, d) je úplný, právě když každá monotónní posloupnost neprázdných uzavřených množin, jejichž průměry konvergují k 0, má neprázdný průnik.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr

konvergence

okolí

otevřené a uzavřené

množiny

uzávěr množiny

ekvivalentní metriky

topologická

vlastnost

hustá množina

řídka množina

1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejněměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova

věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. (Baire) Průnik spočetně mnoha hustých otevřených množin v úplném metrickém prostoru je hustý.

Lipschitzovské zobrazení s konstantou menší než 1 se nazývá **kontrakce**.

VĚTA. (Banach) Necht' f je kontrakce v neprázdém úplném metrickém prostoru X . Pak existuje $x_0 \in X$ tak, že $f(x_0) = x_0$.

Bod x_0 s vlastností z předchozí věty se nazývá **pevný bod** zobrazení f .

[Poznámky 5](#) [Příklady 5](#) [Otázky 5](#)

[Cvičení 5](#)

LEKCE29-MTR metrika

- průměr
- konvergence
- okolí
- otevřené a uzavřené množiny
- uzávěr množiny
- ekvivalentní metriky
- topologická vlastnost
- hustá množina
- řidká množina
- 1.kategorie
- podprostor
- kartézský součin
- prostor funkcí
- spojitost
 - homeomorfismus
 - isometrie
- stejnoměrná spojitost
- stejn.ekvivalence
- lipschitzovské zobr.
- cauchyovská posl.
- úplnost
 - rozšíření zobr.
 - zúplnění
 - Cantorova věta
 - Baireova věta
 - Banachova věta
- kompaktnost
 - pokrytí
 - sít'
 - Lebesgueovo číslo
- totální omezenost
 - Tietzova věta
- Stoneova–Weierstrassova věta
- Poznámky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Příklady
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Otázky
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Cvičení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- Učení
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9

KOMPAKTNOST

V úplných prostorech má každá cauchyovská posloupnost hromadný bod.

Jestliže se tato vlastnost zesílí na libovolné posloupnosti, dostane se značně silnější vlastnost, která do jisté míry nahrazuje konečnost v nekonečných prostorech.

DEFINICE. Metrický prostor se nazývá **kompaktní**, jestliže každá jeho posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost.

Některé následující vlastnosti jsou podobné vlastnostem úplnosti.

POZOROVÁNÍ.

1. Uzavřený podprostor kompaktního prostoru je kompaktní.
2. Kompaktní podprostor metrického prostoru je uzavřený.
3. Součin kompaktních prostorů je kompaktní.
4. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní.
5. Podprostor euklidovského prostoru je kompaktní právě když je uzavřený a omezený.

Nyní budou uvedeny hlubší vlastnosti kompaktnosti. K tomu je potřeba několika definic.

Soustava \mathcal{S} (otevřených) podmnožin X se nazývá (otevřená) **pokrytí** X , jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$.

Podmnožina A metrického prostoru X se (pro $r > 0$) nazývá **r -sít'**, jestliže vzdálenosti různých bodů množiny A jsou alespoň r . Podle Zornova lemmatu existuje v X maximální r -sít', tj. taková r -sít', že každý bod X je od nějakého bodu této sítě vzdálen o méně než r .

VĚTA.

LEKCE29-MTR metrika

průměr
konvergence
okolí
otevřené a uzavřené množiny
uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická vlastnost
hustá množina
řídka množina
1.kategorie
podprostor
kartézský součin
prostor funkcí
spojitost
homeomorfismus
isometrie
stejnoměrná spojitost
stejn.ekvivalence
lipschitzovské zobr.
cauchyovská posl. úplnost
rozšíření zobr. zúplnění
Cantorova věta
Baireova věta
Banachova věta
kompaktnost
pokrytí
sít'
Lebesgueovo číslo
totální omezenost
Tietzova věta
Stoneova-Weierstrassova věta
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. Kompaktní prostor je separabilní.
2. Pro každé otevřené pokrytí kompaktního prostoru X existuje kladné číslo r (tzv. **Lebesgueovo číslo**) takové, že libovolná podmnožina X o průměru nejvýš r je obsažena v nějaké množině z daného pokrytí.

VĚTA. Metrický prostor X je kompaktní právě když z každého otevřeného pokrytí X lze vybrat konečné pokrytí X .

Když se v definici kompaktnosti uvažují pokrytí jen koulemi se stejnými poloměry, dostane se větší třída prostorů, která je také důležitá:

DEFINICE. Metrický prostor X se nazývá **totálně omezený**, jestliže, pro každé $r > 0$, z libovolného pokrytí X otevřenými koulemi s průměrem alespoň r lze vybrat konečné pokrytí X .

POZOROVÁNÍ.

1. Metrický prostor je totálně omezený právě když, pro každé $r > 0$, libovolná r -sít' v X je konečná.
2. Podprostor totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
3. Uzávěr totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
4. Součin totálně omezených prostorů je totálně omezený.
5. Stejněměrně spojitý obraz totálně omezeného prostoru je totálně omezený.
6. Podmnožina euklidovského prostoru je totálně omezená právě když je omezená.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr
konvergence
okolí
otevřené a uzavřené množiny
uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická vlastnost
hustá množina
řídka množina
1.kategorie
podprostor
kartézský součin
prostor funkcí
spojitost
homeomorfismus
isometrie
stejněměrná spojitost
stejn.ekvivalence
lipschitzovské zobr.
cauchyovská posl.
úplnost
rozšíření zobr.
zúplnění
Cantorova věta
Baireova věta
Banachova věta
kompaktnost
pokrytí
sít'
Lebesgueovo číslo
totální omezenost
Tietzova věta
Stoneova–
Weierstrassova věta
Poznámky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Příklady
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Otázky
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cvičení
1 2 3 4 5 6 7 8 9
Učení
1 2 3 4 5 6 7 8 9

VĚTA. Metrický prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.

DŮSLEDEK. Zúplnění totálně omezeného prostoru je kompaktní.

LEKCE29-MTR

metrika

průměr
konvergence

okolí
otevřené a uzavřené
množiny

uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická

vlastnost
hustá množina
řidká množina
1.kategorie

podprostor
kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus
isometrie

stejnoměrná spojitost

stejn.ekvivalence
lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.
zúplnění

Cantorova věta
Baireova věta
Banachova věta

kompaktnost

pokrytí
sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova
věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

DODATKY

VĚTA. (Tietze) Každé spojitě zobrazení z uzavřené podmnožiny metrického prostoru X do \mathbb{R} lze spojitě rozšířit na celé X .

VĚTA. (Stone, Weierstrass) Necht' X je kompaktní metrický prostor a \mathcal{A} je podokruh $\mathcal{C}_u(X)$ obsahující konstantní zobrazení a oddělující body X . Pak \mathcal{A} je hustý v $\mathcal{C}_u(X)$.

Poznámky 6 Příklady 6 Otázky 6

Cvičení 6

LEKCE29-MTR

metrika

průměr
konvergence
okolí
otevřené a uzavřené množiny
uzávěr množiny
ekvivalentní metriky
topologická vlastnost
hustá množina
řádká množina
1.kategorie

podprostor

kartézský součin

prostor funkcí

spojitost

homeomorfismus

isometrie

stejněměrná spojitost

stejn.ekvivalence

lipschitzovské zobr.

cauchyovská posl.

úplnost

rozšíření zobr.

zúplnění

Cantorova věta

Baireova věta

Banachova věta

kompaktnost

pokrytí

sít'

Lebesgueovo číslo

totální omezenost

Tietzova věta

Stoneova–

Weierstrassova věta

Poznámky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklady

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otázky

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cvičení

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Učení

1 2 3 4 5 6 7 8 9