Doc. RNDr. Zdeněk Vlášek, CSc (s použitím starších poznámek Doc. RNDr. Ondřeje Kalendy, PhD.):

Poznámky k přednášce Úvod do komplexní analýzy, zimní semestr 2011/12 (verze 2.3.2022)

Literatura v češtině, z mnoha učebnic, skript a sbírek:

[Ve] J. Veselý: Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, 2000 (jen do odst. 8.2 včetně a pak odst. 10.1 až 10.2), rozebráno, ale je na síti: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/kompl/kompl.pdf`

[Ru] W. Rudin: Reálná a komplexní analýza, Academia Praha, 2003 (jen Úvod a kap. 10)

[Če] I. Černý: Analýza v komplexním oboru, Academia Praha, 1983 (jen výběr z kap. 1 až 10)

[Je] M. A. Jevgrafov a kolektiv: Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné, SNTL Praha, 1976.

In English, e.g.:

[GK] R. E. Green and S. G. Krantz: Function Theory of One Complex Variable, AMS, 2nd Ed. 2002, 3rd Ed. 2006.

Free web textbook in English:

[AN] R. B. Ash and W. P. Novinger: Complex Variables (up to Ch.4.3) `http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/CV.html`

1. Těleso komplexních čísel, prostor $\mathbb{C}$

Definice. **Množina komplexních čísel** $\mathbb{C}$ (jiné názvy: **komplexní rovina, Gaussova rovina**) je množina $\mathbb{R}^2$ (tj. množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel) s následujícími operacemi a s rozšířeními:

- sčítání (definované stejně jako v $\mathbb{R}^2$), $(a,b)+(x,y) := (a+x, b+y)$;
- násobení libovolných dvou prvků z $\mathbb{C}$ definované vzorcem

$$(a,b)\cdot(x,y) := (ax-by,\ bx+ay), \quad a,b,x,y \in \mathbb{R}; \tag{*}$$

- množinu $\mathbb{R}$ považujeme za podmnožinu množiny $\mathbb{C}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, k tomu pro $a \in \mathbb{R}$ ztotožníme $(a,0) = a$;
- označíme $i := (0,1)$.

Navždy zapomeňte na historicky vzniklou „nedefinici“ čísla $i = \sqrt{-1}$. Číslo i tradičně nazýváme **imaginární jednotka**, ale nic imaginárního na něm není. Je $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

Základní vlastnosti tělesa $\mathbb{C}$.

(i) *Množina $\mathbb{C}$ s uvedenými operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso, nulovým prvkem je $(0,0) = 0$, jednotkovým prvkem je $(1,0) = 1$. Inverzním prvkem k prvku $(a,b) \neq 0$ je prvek $(a,-b)/(a^2+b^2)$.*

(ii) *Jak násobení v $\mathbb{R}$ tak násobení prvku z $\mathbb{R}^2$ reálným číslem jsou zahrnuty ve formuli (*).*

(iii) *$\mathbb{R}$ je podtěleso tělesa $\mathbb{C}$.*

(iv) *Na $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání. Na $\mathbb{C}$ ani nelze definovat uspořádání tak, aby bylo uspořádaným tělesem.*

Proč právě $\mathbb{R}^2$ a ne třeba $\mathbb{R}^3$? (Frobeniova věta, 1877)

- Pro $n > 2$ lze na $\mathbb{R}^n$ definovat „rozumné“ násobení jen pro $n = 4$ (kvaterniony, tvoří nekomutativní těleso, jsou užitečné v teoretické fyzice, v popisu prostorových rotací, ve 3D animaci i jinde - ve vyhledávači zadejte quaternion) a pro $n = 8$ (oktoniony, Cayleyho čísla, pro ně násobení není ani asociativní).

Zápisy komplexního čísla

(i) **Algebraický zápis komplexního čísla:** $(x,y) = x+iy$, $x+i0 = x$ a $0+iy = iy$. Umožňuje vyhnout se kolizím označení prvku $(a,b) \in \mathbb{C}$ a otevřeného intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (matematika má málo typů závorek). Definici (*) násobení v $\mathbb{C}$ teď můžeme zapsat obvyklým způsobem, jako násobení dvou dvoučlenů, kde nahradíme $i^2 = -1$:

$$(a+ib)\cdot(x+iy) := (ax-by) + i\,(bx+ay), \quad a,b,x,y \in \mathbb{R}\,. \tag{**}$$

(ii) **Zápis komplexního čísla v goniometrickém tvaru a v exponenciálním tvaru:** bude později, potřebujeme funkce log, arg.

(iii) **Maticová reprezentace komplexního čísla**: $(x,y) \approx \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Sčítání a násobení v $\mathbb{C}$ pak odpovídá sčítání a násobení takovýchto speciálních matic (ve vyhledávači zadejte representation of complex numbers).

Definice. Nechť $x,y \in \mathbb{R}$ a $z = (x,y) = x+iy$. Pak definujeme:

- $\operatorname{Re} z := x \ldots$ **reálná část** komplexního čísla z, první složka čísla z;
- $\operatorname{Im} z := y \ldots$ **imaginární část** komplexního čísla z, druhá složka čísla z, je to reálné číslo;
- $|z| := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\det\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}} \ldots$ **absolutní hodnota** komplexního čísla z;
- $\overline{z} := x - iy \ldots$ **komplexně sdružené číslo** ke komplexnímu číslu z.
- Označme $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, je to **horní** resp. **dolní polorovina**.

Pro každá $z,w \in \mathbb{C}$ platí

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(2) $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$,

(3) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ když $w \neq 0$,

(4) $|\overline{z}| = |z|$,

(5) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

$\mathbb{C}$ jako metrický prostor

Číslo $|z|$ je rovno eukleidovské normě prvku $z = (x, y)$. Funkce $\operatorname{dist}(z, w) := |z - w|$ je tedy **eukleidovská metrika** na $\mathbb{C}$. Tudíž víme například, co je v prostoru $\mathbb{C}$ **okolí bodu** $U(a, r)$, **otevřená množina**, **uzavřená množina**, **konvergence posloupnosti**, a také **spojitost** a **limita zobrazení** z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{R}$, z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Příklad. Funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \overline{z}$ a $z \mapsto |z|$ jsou spojité na $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ jako vektorový prostor

(1) $\mathbb{R}^2$ je vektorový prostor dimenze 2 nad tělesem $\mathbb{R}$, se standardní bazí $\{(1,0),(0,1)\}$. (Reálné) **lineární zobrazení prostoru $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$** má obecný tvar

$$L_{\mathbb{R}^2} : (x,y)^T \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot (x,y)^T, \quad \text{kde } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ jsou libovolná.}$$

(2) $\mathbb{C}$ je vektorový prostor dimenze 1 nad tělesem $\mathbb{C}$, s jednoprvkovou bazí $\{1\}$. (Komplexní) **lineární zobrazení prostoru $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$** má obecný tvar

$$L : z \mapsto w \cdot z, \quad \text{kde } w \in \mathbb{C} \text{ je libovolné,}$$

neboli, pro $w = (a,b)$, $z = (x,y)$,

$$L : (x,y)^T \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot (x,y)^T, \quad \text{kde } a,b \in \mathbb{R} \text{ jsou libovolná.}$$

Pak máme $L(1) = (a,b)$ a nutně $L(i) = L(i\,1) = i\,L(1) = (-b,a)$, druhý sloupec matice je tedy určen prvním sloupcem, zatímco v $L_{\mathbb{R}^2}$ byl libovolný.

Vidíme, že v $\mathbb{C}$ je „méně“ lineárních zobrazení než v $\mathbb{R}^2$, takže pro matematickou analýzu je v $\mathbb{C}$ k dispozici „méně“ totálních diferenciálů (tj. komplexních lineárních zobrazení) než v $\mathbb{R}^2$. Proto bude v $\mathbb{C}$ „méně“ diferencovatelných zobrazení než v $\mathbb{R}^2$, ale ta mohou mít „více“ užitečných vlastností - a právě těmito vlastnostmi se zabývá matematická analýza v $\mathbb{C}$.

2. Komplexní funkce reálné proměnné

V tomto odstavci bychom mohli postupovat i obecněji, namísto zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ uvažovat zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Definice.

(1) **Komplexní funkce reálné proměnné** je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.
(2) Nechť f je komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$. **Derivace funkce f v bodě x** je číslo

$$f'(x) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mathbb{R}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).
(3) Pro interval $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$, funkce $F : I \to \mathbb{C}$ je **primitivní funkce k f na I**, jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$. Analogicky pro uzavřené a jiné intervaly.

Věta 2.1 (limita, spojitost, derivace, primitivní funkce - vše po složkách). *Nechť $f : M \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné, $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$. Pak platí*

(1) $\lim_{x \to a+} f(x) = c$, *právě když* $\lim_{x \to a+} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} c$ *a* $\lim_{x \to a+} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} c$. *Podobně pro limity zleva a oboustranné.*
(2) *f je spojitá (zleva, zprava) v bodě a, právě když obě funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou spojité (zleva, zprava) v bodě a.*
(3) *$f'(x)$ existuje, právě když existují vlastní derivace $(\operatorname{Re} f)'(x)$ a $(\operatorname{Im} f)'(x)$. Pak $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i\,(\operatorname{Im} f)'(x)$.*
(4) *Funkce $F : (a,b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a,b), právě když $\operatorname{Re} F$ je primitivní funkcí k $\operatorname{Re} f$ na (a,b) a $\operatorname{Im} F$ je primitivní funkcí k $\operatorname{Im} f$ na (a,b). Analogicky pro uzavřené a jiné intervaly.*

Definice. Nechť f je komplexní funkce reálné proměnné, $a, b \in \mathbb{R}$. **Integrál (Riemannův, Newtonův) z funkce f od a do b** je

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f,$$

pokud oba integrály na pravé straně existují.

Lemma 2.2 (odhad abs. hodnoty integrálu z komplexní funkce, integrační proměnná je reálná). *Nechť $a \leq b$ jsou reálná čísla a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak platí*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq (b-a) \max_{[a,b]} |f|.$$

Důkaz. Je-li vlevo nula, odhad platí. Jinak označíme $c := \int_a^b f$, pak $|c|^2 = \overline{c} \cdot c = \overline{c} \int_a^b f = \int_a^b \overline{c} f = \int_a^b \operatorname{Re}(\overline{c} f) \leq \int_a^b |\overline{c} f| = |c| \int_a^b |f|$ (čtvrtá rovnost využívá toho, že zcela vlevo je reálné číslo). Dělením číslem $|c| > 0$ dokážeme odhad. $\square$

3. Derivace v $\mathbb{C}$, holomorfní funkce

Definice.

(1) **Komplexní funkce komplexní proměnné** je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $z \in \mathbb{C}$. **Derivace funkce f podle komplexní proměnné v bodě z** (stručně **derivace funkce f v bodě z**) je komplexní číslo

$$f'(z) := \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v $\mathbb{C}$). Žádné nevlastní derivace v $\mathbb{C}$ neuvažujeme.

Poznámky. (i) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí **věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce** ve stejné podobě jako pro vlastní derivaci v $\mathbb{R}$, i jejich důkazy jsou analogické.

(ii) Má-li f v bodě $z \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě z spojitá.

(iii) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3.1 (diferencovatelnost v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{C}$). *Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné, označme $f_1(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$, $f_2(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$, takže $f(x+iy) = f_1(x,y) + i\, f_2(x,y)$. Pak $\tilde{f} := (f_1, f_2)$ je funkce dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$, která odpovídá komplexní funkci f.*

(a) *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $c = a + ib$. Pak f má v bodě c derivaci podle komplexní proměnné právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a,b) totální diferenciál a příslušná Jacobiho matice má speciální tvar $J = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$, tj. v bodě (a,b) jsou splněny* **Cauchy-Riemannovy podmínky**

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y},\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}\ .$$

(b) *Pokud existuje $f'(c)$, je $f'(c) = p + iq$, Jacobiho determinant funkce $\tilde{f}$ v bodě (a,b) je $\det J = p^2 + q^2 = |f'(c)|^2$ a Jakobiho matice zobrazení $\tilde{f}$ v bodě (a,b) je regulární právě když $f'(c) \neq 0$.*

Důkaz. (a) Diferencovatelnost v $\mathbb{R}^2$ resp. v $\mathbb{C}$ lze definovat známým způsobem pomocí vyjádření přírůstku funkce, a to součtem lineárního zobrazení $L_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ resp. $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ přírůstku proměnné a zbytku zanedbatelného vůči přírůstku proměnné. Porovnáním oněch dvou lineárních zobrazení (viz kap.1) dokážeme tvrzení.

(b) Jde jen o jednoduché výpočty.

.... konec 1. přednášky 6.10.2011 ....

Poznámka. Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená konvexní množina a $f : G \to \mathbb{C}$ splňuje $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$, pak f je konstantní na G.

Definice. (holomorfní funkce). Jiné názvy: regulární funkce, (jednoznačná) analytická funkce.

- Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině** Ω, jestliže má všude v Ω derivaci, označení: $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Speciální případ: funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá funkce**.
- Funkce je **holomorfní v bodě** $c \in \mathbb{C}$, jestliže v nějakém jeho okolí má všude derivaci.
- Funkce je **holomorfní na množině** $M \subset \mathbb{C}$, je-li holomorfní v každém jejím bodě, tj. je-li holomorfní v nějaké otevřené množině Ω, $M \subset \Omega$.

Všimněme si, že inverzní matice k regulární Jacobiho matici $J = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ je matice $J^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} / (p^2 + q^2)$ a že i ta splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky. Vyžijeme-li větu o existenci a diferencování inverzní funkce pro případ zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (její pracný důkaz - viz přednášky z MA), dokážeme následující větu:

Věta 3.2 (lokální existence inverzní funkce k holomorfní funkci, derivace inverzní funkce). *Nechť f je holomorfní v bodě $c \in \mathbb{C}$, $f'(c) \neq 0$ a f' je v okolí bodu c spojitá. Pak existuje okolí bodu c, ve kterém je f prostá, příslušná inverzní funkce g je holomorfní a její derivace je $\quad g' = 1/(f' \circ g)$.*

Tuto větu později dokážeme znovu, nezávisle a jednoduše (věta 17.7), navíc předpoklad spojitosti f' bude splněn automaticky.

4. Mocninné řady v $\mathbb{C}$

Zatím známe jen málo holomorfních funkcí: polynomy v $\mathbb{C}$ a racionální funkce. Další nám poskytnou mocninné řady v $\mathbb{C}$, předpokládáme znalost jejich teorie v $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$, $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ je posloupnost komplexních čísel a z je komplexní proměnná. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$\text{(M)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

nazýváme **mocninná řada o středu a s koeficienty c_n**. Jejím součtem v bodě $z \in \mathbb{C}$ nazvu limitu (v $\mathbb{C}$) posloupnosti částečných součtů. **Poloměr konvergence** řady (M) je $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R := \sup\{r \in [0, +\infty);\ \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}.$$

Množinu

$$U(a, R) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z-a| < R\},$$

pak nazýváme **kruh konvergence** řady (M). Pro $R = 0$ je to prázdná množina, pro $R = +\infty$ je to $\mathbb{C}$, jinak je to otevřený kruh se středem a. Pro případy $|z-a| > R$ řada nekonverguje a o případech $|z-a| = R < +\infty$ obecně nic nevíme.

Kriteria konvergence pro řady komplexních funkcí (nejenom pro mocninné řady), kriteria pro absolutní resp. stejnoměrnou či lokálně stejnoměrnou konvergenci takové řady jsou stejná jako v $\mathbb{R}$ (pokud se v nich vyskytují nerovnosti, tak jen mezi reálnými čísly nebo absolutními hodnotami komplexních čísel).

Věta 4.1.

(1) *Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence. Její součet je tam holomorfní funkce.*

(2) *Položme* $L := \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Pak poloměr konvergence řady* (M) *je* $R = 1/L$, *kde (jen pro stručnost a jen zde) klademe* $1/+\infty = 0,\ 1/0 = +\infty$.

(3) *Existuje-li* $\lim_{n\to+\infty} |c_{n+1}|/|c_n|$, *rovná se číslu* L *z předchozího bodu.*

(4) *Mocninné řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ *mají stejný poloměr konvergence jako řada* (M).

(5) *Na kruhu konvergence lze* (M) *derivovat člen po členu a také integrovat člen po členu, tj.*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(c_n (z-a)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z-a)^{n-1}\,,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n\,.$$

Důkaz (5). Bez újmy na obecnosti položme $a = 0$. Označme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, $|z| < R$. Pro pevné $z, |z| < R$ zvolme reálné ρ tak, aby $|z| < \rho < R$. Pro libovolné w takové, že $|w| \le \rho$, $w \ne z$, upravíme zlomek $g(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (w^n - z^n)/(w-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n \sum_{j=0}^{n-1} (w^j z^{n-1-j})\right)$. Tato nekonečná řada polynomů v proměnné w konverguje i pro případ $w = z$, navíc je $|c_n \sum_{j=0}^{n-1}(w^j z^{n-1-j})| \le |c_n| n \rho^{n-1}$, takže konverguje absolutně a stejnoměrně pro $|w| \le \rho$, součet řady je tedy spojitá funkce a její limitu pro $w \to z$ spočteme dosazením $w = z$. Je tedy $f'(z) = \lim_{w\to z} g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n (z-a)^{n-1}$. K důkazu druhého řádku použijeme již dokázaný řádek první, jenže pro jinou řadu. $\square$

5. Exponenciála, hyperbolické a goniometrické funkce

Zapomeňte na všechny definice a vlastnosti exponenciály, goniometrických a hyberbolických funkcí, jak je znáte z reálné analýzy, zapomeňte i na definice čísel e, π. Všechno to vybudujeme znovu (a dokonce v $\mathbb{C}$), je to totiž ukryto v řadě (E):

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$\text{(E)} \qquad \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + z^4/4! + \dots$$

a označíme $e := \exp(1) = 2{,}7182818\dots$.

Funkci exp nazýváme **exponenciální funkce**, krátce **exponenciála**. Namísto $\exp(z)$ je zvykem psát e^z, i když (zatím) nejde umocňování kladného čísla e na komplexní exponent z.

Věta 5.1 (vlastnosti exponenciály - 1.část). *Platí:*

(E1) *Funkce* exp *je definována na* $\mathbb{C}$, *je tam spojitá,* $\exp(0) = 1$.

(E2) $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$ *pro* $z, w \in \mathbb{C}$.

(E3) *Funkce* exp *je v* $\mathbb{C}$ *holomorfní,* $\exp' = \exp$.

(E4) $\exp \ne 0$ *všude v* $\mathbb{C}$, $\quad 1/\exp(z) = \exp(-z)$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

(E5) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

(E6) *Funkce* exp *zobrazuje* $\mathbb{R}$ *na interval* $(0, +\infty)$, *je na* $\mathbb{R}$ *rostoucí a ryze konvexní.*

(E7) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz (E1). Sčítáme spojité funkce, při lokálně stejnoměrné konvergenci řady je součet spojitý.

Důkaz (E2). Vpravo je součin dvou absolutně konvergentních řad, násobíme je "člen po členu", provedeme dílčí součety pro pevná $n = j + k$, nakonec použijeme binomickou větu: $(\sum_{j=0}^{+\infty)} \frac{z^j}{j!})(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{k!}) = \sum_{n:=j+k=0}^{+\infty} (\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(n-j)!} z^j w^{n-j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n =: \exp(z+w)$.

Důkaz (E3). Buďto derivujeme řadu (E) člen po členu podle Věty 4.1 (5) anebo (bez této věty) upravíme pro $w \ne z$ zlomek $\frac{\exp(z+h)-\exp(z)}{h} = \frac{\exp(z)\exp(h)-\exp(z)}{h} = \exp(z)\frac{\exp(h)-1}{h} = \exp(z)\sum_{n=1}^{+\infty} h^{n-1}/n!$. Limitu zlomku pro $h \to 0$ spočteme dosazením $h = 0$ do této mocninné řady (její součet je spojitý).

Důkaz (E4). V (E2) položíme $w = -z$.

Důkaz (E5). Obecněji, pro každou mocninnou řadu a její součet $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$, v případě když $a \in \mathbb{R}$ a všechna $c_n \in \mathbb{R}$, je $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$: vlevo je zde $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{c_n}\ (\overline{z} - \overline{a})^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\overline{z} - a)^n = f(\overline{z})$.

Důkaz (E6). Pro $x \ge 0$ je $\exp'(x) = \exp(x) \ge 1 + x > 0$, takže exp je na intervalu $[0, +\infty)$ rostoucí, prostá, $\exp([0, +\infty)) = [1, +\infty)$. Pro $x <= 0$ je $\exp(x) = 1/\exp(-x)$, $-x \ge 0$, takže i tam je exp rostoucí, prostá, $\exp((-\infty, 0]) = (0, 1]$. Pro $x \in \mathbb{R}$ je tedy $\exp'' = \exp' = \exp > 0$.

Důkaz (E7). Vlevo i vpravo jsou kladná čísla, umocníme je na druhou a dokážeme jejich rovnost. Vlevo je pak $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\,\overline{\exp(z)} = \exp(z)\ \exp(\overline{z}) = \exp(z + \overline{z}) = \exp(2 \operatorname{Re} z)$.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ položme

- $\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}/(2n)!$, funkce **hyperbolický kosinus**, sudá část exponeciály;
- $\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n+1}/(2n+1)!$, funkce **hyperbolický sinus**, lichá část exponeciály;
- $\cos(z) := \cosh(iz) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}/(2n)!$, funkce **kosinus**;
- $\sin(z) := \sinh(iz)/i = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$, funkce **sinus**.

Věta 5.2 (vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí, vlastnosti exponenciály - 2.část).

(1) *Funkce* cosh, sinh, cos, sin *jsou definovány na* $\mathbb{C}$, *přičemž funkce* cosh, cos *jsou sudé a funkce* sinh, sin *jsou liché.*
(2) $\cosh(0) = \cos(0) = 1, \quad \sinh(0) = \sin(0) = 0.$
(3) *Funkce* cosh, sinh, cos, sin *nabývají na* $\mathbb{R}$ *jen reálných hodnot.*
(4) *Funkce* cosh, sinh, cos, sin *jsou holomorfní na* $\mathbb{C}$, *jejich derivace jsou*

$$\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh, \quad \cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos$$

a stejné formule platí tedy i pro jejich derivování v $\mathbb{R}$.
(5) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí rozklady na součet sudé funkce a liché funkce,*

(E8) $$\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z), \quad \textbf{Eulerova identita: } \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

(6) *Součtový vzorec* (E2) pro exponenciálu je ekvivalentní jak se součtovými vzorci pro hyperbolické funkce tak se součtovými vzorci pro goniometrické funkce. Pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w), \qquad \sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w),$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \qquad \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).$$

(7) Identita z (E2), $\exp(z)\exp(-z) = 1$, má pro hyperbolické resp. goniometrické funkce tvar

$$\cosh^2 - \sinh^2 = 1, \qquad \cos^2 + \sin^2 = 1.$$

Bylo by ale chybou odtud usuzovat, že $|\cos| \le 1$ všude v $\mathbb{C}$, čísla $\cos(z)$, $\sin(z)$ totiž nemusí být reálná.
(8) $\cos(2) < 0$, takže můžeme definovat

$$\pi := 2 \cdot \min\{x > 0 : \cos(x) = 0\} \in (0, 4).$$

(9) Na intervalu $[0, \pi/2]$ je funkce sin rostoucí a konkávní, funkce cos klesající a konkávní; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. S využitím sudosti cos a lichosti sin získáme jejich průběh v $[-\pi/2, 0]$, pomocí součtových vzorců $\cos(z+\pi) = -\cos(z), \sin(z+\pi) = -\sin(z)$ jejich průběh v sousedních intervalech a v celém $\mathbb{R}$.
(10) Funkce sin a cos jsou v $\mathbb{C}$ periodické s periodou 2π; funkce cosh, sinh jsou v $\mathbb{C}$ periodické s periodou $2\pi i$.
(11) Funkce

(E9) $$\exp \text{ je v } \mathbb{C} \text{ periodická s periodou } 2\pi i.$$

(12) Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Pak

$$\exp(z) = 1 \text{ právě když } z/(2\pi i) \in \mathbb{Z},$$

obecněji

(E10) $$\exp(z) = \exp(w) \text{ právě když } (z-w)/(2\pi i) \in \mathbb{Z}.$$

.... konec 2. přednášky 13.10.2011 ....

(13) Pro $z \in \mathbb{C}$ je $\sin z = 0$ právě když $z/\pi \in \mathbb{Z}$, takže všechny kořeny komplexní funkce sin (a tedy i cos) leží v $\mathbb{R}$.
(14) Pro pevné $\alpha \in \mathbb{R}$ zobrazuje exponenciála orientovanou přímku $z = r + i\alpha$, $r \in \mathbb{R}$, na orientovanou polopřímku $\exp(r)(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, $x \in \mathbb{R}$.
(15) Pro pevné $r \in \mathbb{R}$ zobrazuje exponenciála orientovanou přímku $z = r + i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, na „nekonečněkrát proběhnutou" kružnici $\exp(r)(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
(16) Funkce

(E11) $$\exp \text{ zobrazuje } \mathbb{C} \text{ na } \mathbb{P} := \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(17) Funkce exp není v $\mathbb{C}$ prostá, ale například

(E12) $$\exp \text{ je prostá v pásu } P_{\exp} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]\}, \text{ jeho obrazem je } \mathbb{P}.$$

Důkazy jsou elementární, lze je provést na cvičeních.

6. Logaritmus, argument, obecná mocnina

Definice.

- **Reálný logaritmus**, ln, je inverzní funkce k funkci $\exp_{|\mathbb{R}}$. (Odtud $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.)
- **Komplexní logaritmus (hlavní hodnota logaritmu)**, log, je inverzní funkce k funkci $\exp_{|P_{\exp}}$. (Odtud $\log : \mathbb{P} \to P_{\exp}$.)
- **Množina všech logaritmů čísla** $z \in \mathbb{P}$ je $\mathrm{Log}(z) = \exp_{-1}(z) = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\} = \{\log(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.
- **Argument (hlavní hodnota argumentu, úhel)** je reálná funkce $\arg = \mathrm{Im} \log$ komplexní proměnné.
- **Množina všech argumentů čísla** $z \in \mathbb{P}$ je $\mathrm{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Zatímco log, arg jsou funkce komplexní proměnné, jsou $\mathrm{Log}(z)$, $\mathrm{Arg}(z)$ pro pevné z podmnožinami prostoru $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$. Funkce log je v souladu s naší definicí implementována i v softvérech provádějících numerické či symbolické výpočty v $\mathbb{C}$.

Pozor, formule $\log(z^w) = w \log(z)$ v $\mathbb{C}$ obecně neplatí: zatímco levá strana má imaginární část v $(-\pi, \pi]$, pravá strana (díky násobení číslem w) ji tam mít nemusí. Platí jen $\log(z^w) = w \log(z) \mod 2\pi i$.

Příklad. $\log((-1)^4) = \log 1 = 0$ zatímco $4 \log(-1) = 4\pi i$.

Věta 6.1.

(1) *Pro* $z \in \mathbb{P}$ *platí* $\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$.

(2) *Pro* $z \in \mathbb{P}$ *označme* $\alpha = \arg(z)$. *Pak* $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ **(goniometrický zápis komplexního čísla z)** *a také* $z = \exp(\log(z)) = \exp(\ln|z| + i\alpha)$ **(exponenciální zápis komplexního čísla z)**.

(3) *Funkce* arg, log *jsou spojité na otevřené množině* $M = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, log *je holomorfní na* M *a na této množině platí* $\log'(z) = 1/z$.

(4) *Pro* $x \in (-\infty, 0)$, $y \in \mathbb{R}$ *je* $\lim\limits_{y \to 0+} \arg(x + iy) = \pi = \arg(x)$, $\lim\limits_{y \to 0-} \arg(x + iy) = -\pi = -\arg(x)$, *takže funkce* arg, log *nejsou v bodě* $x < 0$ *spojité. Jsou tam však spojité vzhledem k uzavřené horní polorovině.*

(5) *Pro* $a, b \in \mathbb{P}$ *je* $\log(ab) = \log(a) + \log(b) + 2k\pi i$, *kde* $k \in \{-1, 0, 1\}$. *Příklady: pro* $a = b = -1$ *je* $k = -1$, *pro* $a = b = -i$ *je* $k = 1$, *pro* $\mathrm{Re}\ a > 0, \mathrm{Re}\ b > 0$ *je* $k = 0$.

Definice. Nechť $z \in \mathbb{P}$ a $w \in \mathbb{C}$. Pak definujeme

- $z^w = m_w(z) = \exp(w \log(z)) \ldots$ **hlavní hodnota w-té mocniny komplexního čísla z.**
- $M_w(z) = \{\exp(w\, b) : b \in \mathrm{Log}(z)\} = \{\exp(w \log(z) + w\, 2k\pi i);\ k \in \mathbb{Z}\} \ldots$ **množina všech w-tých mocnin čísla** $z \in \mathbb{C}$.

Věta 6.2 (vlastnosti obecné mocniny).

(1) *Máme* $e^z = \exp(z)$ *(konečně jsme se dočkali).*

(2) *Definice mocniny* z^w *je pro reálná* z, w *pro* $z > 0$ *souladu s definicí obecné mocniny v* $\mathbb{R}$. *Pro* $z \in \mathbb{C}, w = n \in \mathbb{Z}$ *je* z^w *v souladu s celočíselnou mocninou* z^n *ve smyslu algebry v* $\mathbb{C}$.

(3) *Při pevně zvoleném základu* $z \in \mathbb{P}$ *je* $g(w) = z^w$ *spojitou funkcí komplexní proměnné* w. *Při pevně zvoleném exponentu* $w \in \mathbb{C}$ *může mít funkce* $f(z) = z^w$, $z \in \mathbb{P}$, *nespojitost v bodech* $z \in \mathbb{R}, z < 0$, *ale pro* $w = n \in \mathbb{Z}$ *je i tam spojitá (např.* z^{-4}*).*

(4) *Je-li* $n \in \mathbb{Z}$, *obsahuje množina* $M_n(z)$ *právě jeden prvek, a to prvek* z^n.

(5) *Je-li* $w = p/q$ *racionální,* p, q *celá nesoudělná,* $q \in \mathbb{N}$, *pak* $M_w(z)$ *obsahuje právě* q *prvků.*

(6) *Součtový vzorec: pro* $z \in \mathbb{P}$ *a libovolná* $a, b \in \mathbb{C}$ *je* $z^{a+b} = z^a z^b$.

(7) *(!) Při umocňování mocniny na neceločíselný exponent* $w \notin \mathbb{Z}$ *obecně neplatí formule* $(z^v)^w = z^{vw}$, *např. pro* $z = -1, v = 2, w = 1/2$.

.... konec 3. přednášky 20.10.2011, Johanis ....

Cvičení 6.1

(1) Pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, z \in \mathbb{P}$ označme $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$, ačkoli pro $z < 0$, n liché to není n–tá odmocnina ze záporného čísla jak ji (možná) známe z $\mathbb{R}$.

(2) Pro $a \in \mathbb{P}$ řešte rovnici $z^n = a$ s neznámou $z \in \mathbb{C}$.

(3) Pro $a \in \mathbb{P}$ řešte rovnici $\mathrm{zuk}(z) = a$ s neznámou $z \in \mathbb{P}$, kde $\mathrm{zuk}(z) = \dfrac{1}{2}(z + 1/z)$ je **Žukovského funkce**.

(4) Pro $a \in \mathbb{C}$ řešte rovnici $f(z) = a$ s neznámou $z \in \mathbb{C}$, kde $f = \cosh, \sinh, \cos, \sin$. Návod: je $\cosh z = \mathrm{zuk}(\exp(z))$, $\sinh z = -i\, \mathrm{zuk}(i \exp(z))$, $\cos z = \mathrm{zuk}(\exp(iz))$, $\sin z = -\mathrm{zuk}(i \exp(iz))$.

(5) Definujme $\mathrm{tgh} = \cosh / \sinh$, $\mathrm{cotgh} = \cosh / \sinh$, $\mathrm{tg} = \cos / \sin$, $\mathrm{cotg} = \cos / \sin$ všude v $\mathbb{C}$, kde nedělíme nulou. Kde jsou tyto funkce holomorfní?

(6) Pro $a \in \mathbb{C}$ řešte rovnici $f(z) = a$ s neznámou $z \in \mathbb{C}$, kde $f = \mathrm{cotgh}, \tanh, \mathrm{cotg}, \mathrm{tg}$. Návod: je $\tanh z = (u-1)/(u+1)$, kde $u = \exp(2z)$, $\coth z = (u+1)/(u-1)$, $\mathrm{tg}\, z = -i(w-1)/(w+1)$, kde $w = \exp(2iz)$, $\mathrm{cotg}\, z = i(w+1)/(w-1)$.

7. Křivky a křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Definice. Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$, tj. spojitou funkci $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- **obrazem křivky** φ rozumíme její obor hodnot, tj. množinu

$$\langle \varphi \rangle := \varphi([a, b]) = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\};$$

- **počátečním bodem křivky** φ rozumíme bod $\mathrm{pb}\, \varphi := \varphi(a)$, **koncovým bodem** bod $\mathrm{kb}\, \varphi := \varphi(b)$;
- křivku φ nazýváme **uzavřenou**, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **opačnou křivkou k** φ rozumíme křivku $\dot{-}\varphi : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $(\dot{-}\varphi)(t) := \varphi(-t)$;

- je-li navíc $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak jejich **spojením** (nalepením) $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a,\, b+(d-c)]$ vzorcem

$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b], \\ \psi(t-b+c), & t \in [b,\, b+(d-c)]; \end{cases}$$

- **délkou křivky** φ rozumíme (je to supremum délek příslušných lomených čar)

$$V(\varphi) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\} \in [0, +\infty]\,.$$

Uzavřenou křivku $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme **kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r**. Opačnou křivku $\dot{-}\,\varphi$ nazýváme **záporně orientovaná kružnice**.

Křivku $\varphi(t) = z + t(w-z)$, $t \in [0,1]$, kde $z, w \in \mathbb{C}$, nazýváme **orientovaná úsečka** $[z;w]$. $[z;w]$ je tedy funkce (parametrický popis orientované úsečky), cesta, zatímco $\langle [z;w] \rangle \subset \mathbb{C}$ je úsečka v klasickém smyslu. Obecněji, např. $[z;w;u;v]$ je parametricky popsaná **orientovaná lomená čára** určená body $z, w, u, v \in \mathbb{C}$ (v tomto pořadí), je definovaná jako spojení tří orientovaných úseček $[z;w] \dot{+} [w;u] \dot{+} [u;v]$. Označení $[z;w]$ (oddělovačem je středník) nám nekoliduje s intervalem $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Cesta neboli **po částech hladká křivka** v $\mathbb{C}$, je křivka $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ pro kterou existuje takové dělení $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[t_{j-1}, t_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (t_{j-1}, t_j) a má v krajních bodech t_{j-1} a t_j jednostranné konečné limity). Cesty budeme potřebovat při práci s křivkovým integrálem v $\mathbb{C}$. Možné nespojitosti derivace v dělících bodech lze odstranit volbou jiné parametrizace, viz věta 7.1.(5).

Definice. (křivkový integrál v $\mathbb{C}$) Pro cestu φ a spojitou funkci $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ definujeme **integrál funkce f podél cesty φ** vzorcem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \ \in \mathbb{C}\,.$$

Integrál na pravé straně je Riemannův či zobecněný Newtonův, jeho integrand je po částech spojitý.

Příklad 7.1. Pro $n \in \mathbb{Z}$ a kružnici $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je

$$\int_\varphi (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n e^{itn} rie^{it}\,\mathrm{d}t = \cdots = 2\pi i \ (\text{pro } n = -1) \text{ resp. } 0 \ (\text{pro ostatní } n \in \mathbb{Z})\,.$$

Poznámka. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak **délka cesty** φ je $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Věta 7.1 (základní vlastnosti křivkového integrálu). *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta a $f : \langle \varphi \rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá.*

(1) **(změna parametrizace, ale ne orientace)** *Nechť g je rostoucí zobrazení intervalu $[c,d]$ na interval $[a,b]$, které je třídy C^1. Pak* $\int_\varphi f = \int_{\varphi \circ g} f$.

(2) **(změna orientace)** $\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_\varphi f$.

(3) **(integrál přes spojení dvou cest)** *Je-li $\varphi = \psi \dot{+} \omega$, kde ψ, ω jsou cesty, pak* $\int_\varphi f = \int_\psi f + \int_\omega f$.

(4) **(odhad abs.hodnoty integrálu)** $\left| \int_\varphi f \right| \le \int_a^b |f(\varphi(t))\,\varphi'(t)|\,dt \le V(\varphi) \cdot \max_{\langle \varphi \rangle} |f|$.

(5) **(změna parametrizace po částech hladké křivky na hladkou křivku)** *Není-li křivka φ hladká (je jen po částech hladká), pak lze v (1) zvolit takovou substituci g, že křivka $\varphi \circ g$ je hladká.*

Důkaz (5). Nechť $[u,v] = [t_{j-1}, t_j]$ je j-tý dílčí interval. Funkce $g(\tau) := u + (v-u)\left(1 - \cos(\frac{\pi(\tau-u)}{v-u})\right)/2$, $\tau \in [u,v]$, je rostoucí, spojitě diferencovatelná, $g'(u+) = g'(v-) = 0$, takže $\varphi \circ g$ má jednostranné derivace v $u+$ a $v-$ rovny nule a ty tedy budou spojitě navazovat na nulové jednostranné derivace takto definované funkce g na sousedních dílčích intervalech. $\square$

Poznámka. Vlastnost (5) umožňuje zjednodušení mnoha dalších důkazů, kde namísto po částech hladkých křivek lze uvažovat jen hladké křivky.

Lemma 7.2. *Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné spojitá na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Pak pro $h \in \mathbb{C}$ je*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[a;a+h]} f \ = f(a)\,.$$

Důkaz. $\frac{1}{h} \int_{[a;a+h]} f - f(a) = \frac{1}{h} \int_{[a;a+h]} (f(z) - f(a))\,dz = \int_0^1 (f(a+th) - f(a))\,dt =: c$. Je $|c| \le \max_{z \in \overline{U(a,|h|)}} |f(z) - f(a)| \to 0$ pro $h \to 0$. $\square$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazýváme **primitivní funkcí k f na** G, pokud $f'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Věta 7.3 (výpočet křivkového integrálu pomocí primitivní funkce, Newtonův vzorec). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a, b] \to G$ platí $\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ (přírůstek primitivní funkce od počátečního do koncového bodu křivky). Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\int_\varphi f = 0$.*

Poznámka. Z příkladu 7.1 pro $n = -1$ nyní vidíme, že $1/z$ nemá na $\mathbb{P}$ primitivní funkci. Zatímco v $\mathbb{R}$ pro existenci primitivní funkce stačila spojitost, v $\mathbb{C}$ spojitost nestačí a věta o existenci primitivní funkce asi bude mít jinou podobu.

.... konec 4. přednášky 27.10.2011 (zatím bez Věty 7.1 a 7.2, které budou v 5. přednášce) ....

Věta 7.4. *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta.*

(1) **(záměna pořadí integrálu a limity posloupnosti)** *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle\varphi\rangle$ konvergují stejnoměrně k funkci f. Pak $\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$ neboli $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\varphi f_n = \int_\varphi \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.*

(2) **(spojitost integrálu s komplexním (resp. reálným) parametrem,** *tj.* **záměna pořadí integrálu a limity funkce)** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina (resp. G je libovolný interval v $\mathbb{R}$) a $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak funkce*

$$g(w) = \int_\varphi F(z, w)\,\mathrm{d}z, \qquad w \in G$$

je spojitá na G neboli $\lim\limits_{w\to w_0, w\in G} \int_\varphi F(z, w)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \lim\limits_{w\to w_0, w\in G} F(z, w)\,\mathrm{d}z$, $w_0 \in G$.

(3) **(derivace integrálu podle komplexního parametru,** *tj.* **záměna pořadí derivace a integrálu)** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a parciální derivace funkce F podle druhé proměnné (tj. derivace funkce $w \mapsto F(z, w)$ podle komplexní proměnné w) je spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$. Potom funkce*

$$g(w) = \int_\varphi F(z, w)\,\mathrm{d}z, \qquad w \in G$$

je holomorfní na G a platí

$$g'(w) = \frac{d}{dw} \int_\varphi F(z, w)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial w}(z, w)\,\mathrm{d}z \quad \text{pro } w \in G\,.$$

Důkaz. (1), (2) dokazujeme analogicky jako v $\mathbb{R}$. Pro důkaz (3) ale **nemáme větu o střední hodnotě pro komplexní funkci reálné proměnné** (pro $f(t) = e^{it}$ není $f(\pi) - f(0) = \pi f'(\theta\pi)$). Proto přírůstek funkce F nahradíme integrálem. Derivaci funkce F podle druhé proměnné označme F_2. Pro pevné $w \in G$ dokazujeme $g'(w) = \int_\varphi F_2(z, w)\,\mathrm{d}z$. K tomu pro proměnnou $h \neq 0$ odhadujeme absolutní hodnotu zlomku $h^{-1}(g(w + h) - g(w)) = h^{-1} \int_\varphi (F(z, w + h) - F(z, w))\,\mathrm{d}z = h^{-1} \int_\varphi \Big(\int_0^1 (F_2(z, w + ht)\, h\,\mathrm{d}t \Big)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi \Big(\int_0^1 F_2(z, w + ht)\,\mathrm{d}t \Big)\,\mathrm{d}z$. Vzhledem ke spojitosti a tedy i stejnoměrné spojitosti integrandu pro $[z, h, t] \in \langle\varphi\rangle \times \overline{U(0)} \times [0, 1]$ je pro $h \to 0$ limita integrálů rovna integrálům z limity, číslu $\int_\varphi \int_0^1 F_2(z, w)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z = \int_\varphi F_2(z, w)\,\mathrm{d}z$. $\square$

Definice. Otevřenou souvislou podmnožinu prostoru $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina. Množinu $A \subset M$ nazveme **komponentou množiny** M, je-li maximální souvislou podmnožinou M (tj. je-li A souvislá a přitom každá množina B splňující $A \subsetneq B \subset M$ je nesouvislá).

Lemma. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak každá její komponenta je oblast.*

Věta 7.5 (charakterizace oblasti). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *Ω je* **souvislá** *(tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).*
(b) *Ω je* **křivkově souvislá** *(tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje spojité zobrazení $\varphi : [0, 1] \to \Omega$, pro které $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = w$).*
(c) *Každé dva body v Ω lze* **spojit lomenou čárou** *v Ω (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje konečná posloupnost bodů $z = u_0, u_1, \ldots, u_n = w$ taková, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je $[u_{j-1}, u_j] \subset \Omega$).*

Věta 7.6 (primitivní funkce a nezávislost integrálu na cestě). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *f má v Ω primitivní funkci.*
(ii) *Pro každou uzavřenou cestu $\omega : [a, b] \to \Omega$ je $\int_\omega f = 0$.*
(iii) *Křivkový integrál v Ω* **nezávisí na cestě**, *tj. kdykoli $\varphi : [a, b] \to \Omega$ a $\psi : [c, d] \to \Omega$ jsou dvě cesty splňující $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*

Důkaz (i)⇒(ii): viz Věta 7.3.

(ii)⇒(iii): označíme $\omega = \varphi \dot{-} \psi$, ω je uzavřená, podle předpokladu je $\int_\omega f = 0$, takže $\int_\varphi f - \int_\psi f = 0$.

(iii)⇒(i): zvolíme pevně $z_0 \in \Omega$ a definujeme funkci $F(z) = \int_{\varphi_z} f(w)\,dw$, $z \in \Omega$, kde φ_z je libovolná cesta v Ω ze z_0 do z. Pro dostatečně malá $h \neq 0$ si cestu ze z_0 do $z+h$ slepíme z cesty φ_z a orientované úsečky $[z; z+h]$, pak snadno upravíme zlomek $h^{-1}(F(z+h) - F(z)) = h^{-1}\int_{[z,z+h]} f$, který má (Lemma 7.2) limitu $f(z)$, takže $F' = f$ všude v Ω. □

8. Lokální Cauchyova věta a její důsledky

Definice. Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$. **Trojúhelníkem** $\triangle abc$ rozumíme konvexní obal množiny $\{a, b, c\}$, tj. nejmenší konvexní množinu obsahující body a, b, c. **Obvodem trojúhelníka** $\triangle abc$ rozumíme uzavřenou křivku (orientovanou lomenou čáru)

$$\partial\triangle abc = [a; b] \dot{+} [b; c] \dot{+} [c; a].$$

Věta 8.1 (Cauchyova věta pro trojúhelník). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak*

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \subset \Omega\,.$$

Důkaz. Nejprve uvažujme jednodušší případ $p \notin \triangle abc$. Označme $T_0 = \partial\triangle abc$ a $M = |\int_{\partial T_0} f|$. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ nyní postupně opakujeme následující algoritmus:

Středními příčkami rozdělíme trojúhelník T_k na čtyři menší pomocné trojúhelníky $P_1, P_2, P_3, P_4 \subset T_k$. Integrujeme-li funkci f ve vhodném směru po jejich obvodech $\partial P_1, \partial P_2, \partial P_3, \partial P_4$, pak v součtu se integrály přes střední příčky odečtou, takže bude $\int_{\partial T_k} f = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial P_j} f$, odtud $|\int_{\partial T_k} f| \leq \sum_{j=1}^4 |\int_{\partial P_j} f|$ a napravo nemohou být všichni sčítanci menší než $M/4^{k+1}$.

Existuje tedy m takové, že $|\int_{\partial P_m} f| \geq M/4^{k+1}$, označme $T_{k+1} = P_m$.

Výsledkem uvedeného postupu je posloupnost trojúhelníků $T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ v jejichž průniku je právě jeden bod s. Definujeme spojitou funkci $g(z) = \frac{f(z)-f(s)}{z-s} - f'(s)$ pro $z \in \Omega$, $z \neq s$ a $g(s) = 0$, takže $f(z) = f(s) + f'(s)(z-s) + g(s)(z-s)$, jde o Taylorův polynom stupně nejvýše 1 se středem s (ten má primitivní funkci) a o jeho zbytek.

Zvolme libovolně $\varepsilon > 0$. Existuje okolí $U(s)$ takové, že v něm $|g| < \varepsilon$ a existuje index K takový, že $T_K \subset U(s)$. Pro všechna $k \geq K$ odhademe $|\int_{\partial T_k} f| \leq V(\partial T_k) \max_{T_k} |g| \max_{T_k} |z-s| \leq \varepsilon V(\partial T_k)^2 \leq \varepsilon V(\partial T_0)^2/4^k$.

Současně (z předchozí konstrukce) máme $|\int_{\partial T_k} f| \geq M/4^k$, porovnání obou odhadů dá $M \leq \varepsilon V(\partial T_0)^2$ a tedy $M = 0$.

Zbývá zvládnout případy, kdy $p \in \triangle abc$. Pokud leží body a, b, c v přímce (T_0 je buďto jednobodová anebo je to obraz úsečky), pak tvrzení platí pro každou funkci spojitou na T_0 a bod p zde není vyjímečný. V opačném případě, pro tři různé body a, b, c nastane jedna ze tří situací:

(i) Bod p je vrcholem trojúhelníka, například $p = c$. Pak pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ označme $A = c + \varepsilon(a-c)$, $B = c + \varepsilon(b-c)$, pro trojúhelníky $\triangle abA$, $\triangle AbB$ máme větu již dokázánu, pro zbývající trojúhelník $\triangle ABc$ odhadujeme

$$|\textstyle\int_{\partial\triangle ABc} f| \leq V(\partial\triangle ABc) \max_T |f| = \varepsilon V(\partial\triangle T) \max_T |f| \to 0 \text{ pro } \varepsilon \to 0+\,.$$

Součet integrálů po obvodech všech tří uvedených trojúhelníků je $\int_{\partial T} f$, ten na ε nezávisí a je tedy nula.

(ii) Bod p je na hranici trojúhelníka T mimo jeho vrcholy, je například někde mezi body b, c. Pak pro trojúhelníky $\triangle abp$, $\triangle apc$ použijeme (i).

(iii) Bod p je uvnitř trojúhelníka. Pak pro trojúhelníky $\triangle abp$, $\triangle pbc$, $\triangle apc$ použijeme (i). □

.... konec 5. přednášky 3.11.2011 ....

Definice. Množina $M \subset \mathbb{C}$ (obecněji $M \subset \mathbb{R}^n$) se nazývá **hvězdovitá**, pokud existuje takové $a \in M$, že pro každé $b \in M$ je úsečka $[a; b] \subset M$. (Názorně: z bodu a je vidět celá množina M).

Věta 8.2 (Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina, $p \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která je holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f má na Ω primitivní funkci, tj.*

pro každou uzavřenou cestu φ v Ω je $\int_\varphi f = 0$.

Důkaz. Vzpomeneme si na to, že v $\mathbb{R}$ je derivace určitého integrálu podle horní meze rovna integrandu. Tady zkonstruujeme primitivní funkci analogicky, jako křivkový integrál po úsečce z bodu a do proměnného konce z. Pro každé $z \in \Omega$ označme $F(z) = \int_{[a;z]} f$ a derivujme F. Pro pevné $z \in \Omega$ a pro všechna dostatečně malá h je také $z + h \in \Omega$, takže trojúhelník s vrcholy $a, z, z+h$ je také v Ω a podle předchozí věty máme $\int_{[a;z]} f + \int_{[z;z+h]} f = \int_{[a;z+h]} f$. Toho využijeme při úpravě zlomku $(F(z+h) - F(z))/h = h^{-1}\int_{[z;z+h]} f \to f(z)$ pro $h \to 0$ podle věty 7.2. □

Poznámka 8.1 (důkaz při silnějším předpokladu). Kdybychom do definice holomorfnosti přidali předpoklad, že funkce f' nejenom existuje, ale že je spojitá, pak by namísto pracného důkazu Cauchyovy věty pro trojúhelník a této věty stačilo použít stejnolehlost se středem a a derivaci podle reálného parametru p: Pro $p \in [0, 1]$ definujme cesty $\varphi_p = a + p\,(\varphi - a)$, takže $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_0 = a$. Nechť cesta φ má definiční obor $[\alpha, \beta]$. Definujeme $g(p) = \int_{\varphi_p} f = \int_\alpha^\beta f(a + p\,(\varphi(t) - a))p\varphi'(t)dt$. Pak $g'(p) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial p}\Big(f(a + p\,(\varphi(t) - a))p\,\varphi'(t)\Big)dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}\Big(f(a + p\,(\varphi(t) - a))\varphi(t)\Big)dt = 0$. Funkce g je tedy konstantní a sice nula, protože $g(0) = 0$. □

Takovéto zjednodušení důkazu by se ale později nevyplatilo: při důkazech holomorfnosti bychom kromě existence derivace ještě museli dokazovat spojitost derivace.

Poznámka (nalepování primitivních funkcí). Nechť Ω_1 a Ω_2 jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{C}$, pro které $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je souvislá množina. Nechť funkce f má primitivní funkci v Ω_1 i v Ω_2. Pak f má primitivní funkci v $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Poznámka. Výjimku z holomorfnosti v předchozích dvou větách, bod p, potřebujeme jen v důkazu následující věty.

Věta 8.3 (Cauchyův vzorec pro kruh). *Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a f je holomorfní na uzavřeném kruhu $\overline{U(a, r)}$. Označme $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \quad z\in U(a,r)\,.$$

Vidíme, že z hodnot funkce f na hranici kruhu lze dopočítat její hodnoty uvnitř. (Podobnou vlastnost v $\mathbb{R}$ - kdy z hodnot v krajních bodech intervalu lze dopočítat hodnoty uvnitř intervalu - mají jen funkce tvaru $f(x)=ax+b$.)

Důsledek (vlastnost průměru pro holomorfní funkce). *Pro speciální případ $z=a$ je*

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,\mathrm{d}t,$$

tj. hodnota uprostřed je aritmetickým průměrem hodnot na kružnici.

Důsledek (Cauchyův vzorec pro kruh, i pro všechny derivace). *f má na $U(a,r)$ derivace všech řádů a platí*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w, \quad z\in U(a,r), \quad n\in\mathbb{N}_0\,,$$

symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f.

Důkaz. Pro $n=0$ je to Cauchyův vzorec pro kruh. Pro $n\in\mathbb{N}$ pravou stranu (křivkový integrál s komplexním parametrem z) derivujeme n-krát podle z. Podle Věty 7.4 (3) tyto derivace existují (tedy existují i derivace levé strany) a pořadí derivace a integrálu lze zaměnit. Přitom pro $z\neq w$ je $\frac{\partial^n}{\partial z^n}(w-z)^{-1}=n!\,(w-z)^{-1-n}$. □

Věta 8.5 (rozvoj holomorfní funkce do mocninné řady). *Nechť $a\in\mathbb{C}$, $R\in(0,+\infty]$ a f je holomorfní na kruhu $U(a,R)$. Pak f je na $U(a,R)$ součtem mocninné řady tvaru*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

Přitom koeficienty této řady jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Název: **Taylorova řada funkce f se středem a.**

Důkaz. Zvolme pevně $z\in U(a,R)$ a číslo $r\in(|z-a|,R)$, označme $\rho=|z-a|$. Pro integrační proměnnou w v Cauchyově vzorci pro kruh je $w\in\langle\varphi\rangle$, tedy $|w-a|=r$, $|w-z|>r-\rho$. V Cauchyově vzorci upravíme zlomek $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}$. Je $|(z-a)/(w-a)|<\rho/r<1$, takže můžeme pokračovat (součet geometrické řady) $\dots=\frac{1}{w-a}\,\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z-a}{w-a})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$. Vynásobením této úpravy funkcí $f(w)$ spojitou na kompaktu $\langle\varphi\rangle$ (a tedy omezenou) nepokazíme stejnoměrnou konvergenci řady, výsledek tedy můžeme integrovat člen po členu a vyjde nám

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((z-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right),$$

v posledním kroku jsme použili Cauchyův vzorec pro $f^{(n)}(a)$. Právě nalezené koeficienty c_n u $(z-a)^n$, $n\in\mathbb{N}_0$, přitom nezávisí na volbě z, takže opravdu jde o mocninnou řadu.

Zbývá dokázat jejich jednoznačnost, tedy že neexistuje jiná sada koeficientů takové řady, třeba b_n. Kdyby v nějakém $U(a)$ bylo $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(z-a)^n$, pak derivováním této mocninné řady člen po členu, Věta 4.1 (5), spočteme pro $n\in\mathbb{N}_0$: $f^{(n)}(a)=n!\,b_n$, takže $b_n=c_n$. □

Důsledek (holomorfní funkce a mocninné řady). *Funkce f je holomorfní v otevřené $\Omega\subset\mathbb{C}$ právě když v každém kruhu $U(a,R)\subset\Omega$ je součtem mocninné řady se středem a.*

Věta 8.6 (Cauchyovy odhady koeficientů Taylorovy řady). *Za předpokladů a označení z* Věty 8.5, *pro každé $r\in(0,R)$ označme $M_r=\max\{|f(z)|:|z-a|=r\}$. Pak*

$$|c_n|\le M_r/r^n, \qquad r\in(0,R),\ n\in\mathbb{N}_0.$$

.... konec 6. přednášky 10.11.2011, navíc Weierstarssova věta ....
.... státní svátek 17.11.2011 ....

Věta 8.7 (Liouvilleova věta). *Každá omezená celá funkce je konstantní.*

Důkaz. V Cauchyových odhadech položíme $R=+\infty$, $a=0$, odhadneme $M_r\le\max_{\mathbb{C}}|f|=M$ a pro $n\in\mathbb{N}$, $r\to+\infty$ spočteme $c_n\to0$. Přitom c_n nezávisí na r, takže $c_n=0$. Proto $f(z)=c_0$, $z\in\mathbb{C}$.

Jiný důkaz. V Cauchyových odhadech zvolme pevně $a\in\mathbb{C}$. Je $f'(a)=c_1$, přitom (viz předchozí důkaz pro $n=1$) $c_1=0$, takže $f'=0$ všude a f je konstantní.

Věta 8.7a (obecnější Liouvilleova věta). *Nechť f je celá funkce a existuje $n\in\mathbb{N}$ takové, že pro $|z|=r\to+\infty$ je $f(z)=o(r^n)$. Pak f je polynom stupně menšího než n.*

Důkaz. Z Cauchyových odhadů je $c_k=o(r^{n-k})$, takže pro $k\ge n$ je $c_k=0$. □

Podrobnější informace o chování celé funkce pro velká $|z|$ nám později dá Casorati-Weierstrassova věta.

Věta 8.8 (t.zv. základní věta algebry). *Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden kořen.*

Důkaz. Nechť P je takový polynom, má stupeň nejméně 1, takže $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|P(z)|=+\infty$. Kdyby neměl v $\mathbb{C}$ žádný kořen, pak $Q=1/P$ by byla celá funkce, přitom $\lim\limits_{|z|\to+\infty}Q(z)=0$, takže Q by byla omezená, tedy podle Liouvilleovy věty konstantní a P také konstantní, spor.

Důsledek (rozklad polynomu na kořenové činitele). *Nechť $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ je polynom s komplexními koeficienty, přičemž $n\ge1$ a $a_n\neq0$. Pak existují $w_1,\dots,w_n\in\mathbb{C}$ taková, že*

$$P(z)=a_n(z-w_1)(z-w_2)\cdots(z-w_n)\,, \quad z\in\mathbb{C}\,.$$

Čísla $w_1,\dots,w_n$ (kořeny polynomu) jsou určena jednoznačně až na pořadí.

Věta 8.9 (násobnost kořene, kořen je izolovaný). *Nechť pro $a\in\mathbb{C}$, $r>0$ je funkce f holomorfní na $U(a,r)$ a není to konstantní nula. Pak existuje právě jedno $p\in\mathbb{N}_0$ a funkce g holomorfní na $U(a,r)$ taková, že $g(a)\neq0$ a*

$$f(z) = (z-a)^p g(z) \text{ pro } z \in U(a,r).$$

*Pro $p > 0$ říkáme, že bod a je p-***násobný kořen funkce** *f.*
Existuje prstencové okolí $P(a)$ takové, že je v něm všude $f(z) \neq f(a)$.

Důkaz. Taylorova řada funkce f se středem a nejsou samé nuly, existuje tedy nejmenší index $p \in \mathbb{N}_0$, pro který je koeficient $c_p \neq 0$. Vytkneme-li z Taylorovy řady výraz $(z-a)^p$, bude v $U(a,r)$ $f(z) = (z-a)^p \Big(c_p + c_{p+1}(z-a) + \dots \Big)$. Řada v závorce je hledaná funkce $g(z)$, přitom $g(a) = c_p \neq 0$. Ze spojitosti funkce g odvodíme její nenulovost v nějakém okolí bodu a. První činitel $(z-a)^p$ je roven nule jen v bodě a. □

Definice. (Připomenutí z metrických prostorů) Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M, jestliže každé prstencové okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M. Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M, říkáme, že M je **izolovaná v** Ω, jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Věta 8.10 (věta o jednoznačnosti). *Nechť funkce f, g jsou holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a shodují se na množině $M \subset \Omega$, která má v Ω hromadný bod (tj. není izolovaná v Ω). Pak $f = g$ všude na Ω.*

Důkaz. Pomocná funkce $h = f - g$ má všude v M hodnoty nula. Nechť $a \in \Omega$ je hromadný bod množiny M. Existuje tedy posloupnost $z_k \in M \setminus \{a\}$, $z_k \to a$, pro kterou je $h(z_k) = 0$. Podle věty 8.9 je tedy $h = 0$ všude v každém $U(a) \subset \Omega$.

Označme $A = \{z \in \Omega : h = 0 \text{ všude v nějakém } U(z)\}$, je to neprázdná otevřená podmnožina oblasti Ω. Vzhledem ke spojitosti funkce h lze předchozí úvahu zopakovat i v každém bodě uzávěru v Ω množiny A, takže A je také uzavřená v Ω. Proto je $A = \Omega$ a $f = g$ všude v Ω.

Důsledek. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f : (a,b) \mapsto \mathbb{C}$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ obsahuje interval (a,b), pak existuje nejvýše jedno holomorfní rozšíření funkce f do Ω. Tedy: holomorfní rozšíření (pokud existuje) je hodnotami v (a,b) určeno jednoznačně (odtud tradiční název věty).*

Věta 8.11 (princip maxima modulu).

(1) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je nekonstantní holomorfní funkce na Ω. Pak $|f|$ nenabývá nikde v Ω lokálního maxima.

(2) Nechť Ω je omezená oblast a f je funkce spojitá na $\overline{\Omega}$ a holomorfní na Ω. Pak $|f|$ nabývá svého maxima v $\overline{\Omega}$ na hranici oblasti Ω.

(3) Je-li navíc $f \neq 0$ všude v Ω resp. v $\overline{\Omega}$, pak (1) resp. (2) platí i pro lokální minimum funkce $|f|$.

Důkaz. (1), sporem: nechť $|f|$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální maximum $M = |f(a)|$. Pak existuje $R > 0$, $\overline{U(a,R)} \subset \Omega$ takové, že $M = \max_{U(a,R)} |f|$. Pro každý poloměr $r \in (0,R)$ použijeme pro $f(a)$ větu o průměru a odhadujeme $M = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|dt \leq \max_{U(a,R)} |f| = M$. Nalevo i napravo je M, proto všechny nerovnosti v těchto odhadech lze nahradit rovnostmi. Spojitý integrand $|f(a+re^{it})|$ (omezený shora číslem M) nemá tedy žádnou hodnotu menší než M a proto je všude v $U(a,R)$ $|f| = M$ a $|f|^2 = f\overline{f} = M^2$. Pro $M = 0$ máme $f = 0$ a nejsou splněny předpoklady věty. Pro $M > 0$ jsou jak f tak $\overline{f} = M^2/f$ holomorfní funkce a z Cauchy-Riemannových podmínek odvodíme, že je to možné jen pro konstantní f - spor.

(2). Spojitá reálná funkce $|f|$ nabývá na kompaktu $\overline{\Omega}$ svého maxima. Pokud ho nenabývá na hranici, pak ho nabývá uvnitř a podle (1) je konstantní na souvislé Ω a tedy i na $\overline{\Omega}$ - spor. □

(3). Pro pomocnou funkci $h = 1/f$ použijeme (2) resp. (3).

Příklad. Je-li všude na hranici $f = 0$, je f konstantní, nula.

Věta 8.12a (Weierstrassova věta, záměna pořadí derivace a limity). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou holomorfní na Ω a konvergují k funkci f lokálně stejnoměrně v Ω. Pak f je holomorfní v Ω a pro každé $p \in \mathbb{N}$ funkce $f_n^{(p)}$ konvergují k $f^{(p)}$ lokálně stejnoměrně v Ω.*

Důkaz. Zvolme libovolně $a \in \Omega$, zvolme $\overline{U(a,r)} \subset \Omega$ a označme $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. V Cauchyově vzorci se integrační proměnná w a parametr z mohou ocitnout libovolně blízko sebe, jejich rozdíl je přitom ve jmenovateli. Proto uvažujeme jenom $z \in A = U(a, r/2)$, pak $|1/(w-z)| \leq 2/r$. Podle Cauchyova vzorce, pro každé $z \in A$ je $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int f_n(w)/(w-z)dw$. Pro $n \to +\infty$ konverguje integrand k $f(w)/(w-z)$ stejnoměrně na kompaktu $\langle\varphi\rangle \times A$, takže při limitním přechodu $n \to +\infty$ lze napravo zaměnit pořadí limity a integrálu, vyjde $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int f(w)/(w-z)dw$. Pravá strana má derivaci podle parametru z, má ji tedy i levá strana a f je proto na A holomorfní.

Pro funkce f, f_n lze nyní použít Cauchyův vzorec pro p-té derivace a odhadovat pro $z \in A$: $|f^{(p)}(z) - f_n^{(p)}(z)| \leq \frac{p!}{2\pi} 2\pi r \max_{\langle\varphi\rangle\times A} \left| \frac{f^{(p)}(w) - f_n^{(p)}(w)}{(w-z)^{p+1}} \right| \leq p!\, r\, (2/r)^{p+1} \max_{\langle\varphi\rangle} |f^{(p)}(w) - f_n^{(p)}(w)| \to 0$ stejnoměrně pro všechna $z \in A$. □

Věta 8.12b (Weierstrassova věta, záměna pořadí derivace a sumy). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, funkce g_k, $k \in \mathbb{N}$ jsou holomorfní na Ω a řada $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k$ konverguje k funkci f lokálně stejnoměrně v Ω. Pak f je holomorfní v Ω a pro každé $p \in \mathbb{N}$ řada $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}$ konverguje k $f^{(p)}$ lokálně stejnoměrně v Ω.*

Důkaz. Částečné součty řady označíme $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$ a použijeme předchozí větu.

Příklad. Dokázali jsme i možnost derivování mocninné řady člen po členu, a to bez použití vět 4.1 (5), 8.5.

Věta 8.13 (Morerova věta, kriterium holomorfnosti bez užití derivace). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce taková, že buďto*

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \quad \text{pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

nebo

$$\int_{[A;B;C;D;A]} f = 0 \quad \text{pro každý obdélník } ABCD \text{ obsažený v } \Omega, \text{ jehož strany jsou rovnoběžné s osami.}$$

Pak f je holomorfní na Ω.

Důkaz pro trojúhelníky. Zvolme libovolně $U(a,r) \subset \Omega$ a definujme tam funkci $F(z) = \int_{[a;z]} f$. Stejně jako v důkazu Cauchyovy věty pro hvězdovitou oblast dokážeme, že $F' = f$, takže F je holomorfní. Nyní už víme, že F má derivace všech řádů a tedy f je holomorfní.

Důkaz pro obdélníky. Postupujeme analogicky, jen integrační cesty budou slepeny z úseček rovnoběžných s osami. Podrobně: zvolíme libovolně $U(a,r) \subset \Omega$ a definujeme tam funkci $F(z) = \int_{[a;A;z]} f$, kde $A = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} a$. Pro dostatečně malá $h \in \mathbb{C}$ je $F(z+h) = \int_{[a;B;z+h]} f$, kde $B = \operatorname{Re}(z+h) + i \operatorname{Im} a$. Označme ještě $C = \operatorname{Re}(z+h) + i \operatorname{Im} z$. Pak ABCz je obdélník (kreslete) a podle předpokladu je integrál přes cestu $[A;B;C]$ stejný jako přes cestu $[A;z;C]$. To nám dává možnost upravit výraz $F(z+h) - F(z) = \int_{[a;A;z;C;z+h]} f - \int_{[a;A;z]} f = \int_{[z;C;z+h]} f(w)\,dw$. Máme $f(z) = h^{-1} \int_{[z;C;z+h]} f(z)\,dw$, takže pro $h \neq 0$ je $|h^{-1}(F(z+h) - F(z)) - f(z)| = |h^{-1} \int_{[z;C;z+h]} (f(w) - f(z))\,dw| \leq |h|^{-1} 2|h| \max_{w \in \overline{U(z,|h|)}} |f(w) - f(z)| \to 0$, tedy $F' = f$ a odtud $F'' = f'$. □

.... konec 7. přednášky 24.11.2011 ....

Pomocí Morerovy věty lze dokázat třeba následující vlastnost holomorfních funkcí.

Věta 8.14 (spojité nalepování holomorfních funkcí). *Nechť f je spojitá v oblasti Ω, p je přímka protínající Ω a $\Omega \setminus p$ je sjednocením dvou oblastí Ω_1 a Ω_2. Je-li f holomorfní na $\Omega_1 \cup \Omega_2$, je holomorfní v Ω.*

Důkaz. Stačí uvažovat $p = \mathbb{R}$. Každý obdélník $O \subset \Omega$ jehož strany jsou rovnoběžné s osami je buďto disjunktní s $\mathbb{R}$ (a pak podle Cauchyovy věty integrál z f po jeho hranici ∂Oje nula) anebo namísto O uvažujeme jeden či dva obdélníky O_k s jednou stranou v $\mathbb{R}$. Odsunutí této strany od $\mathbb{R}$ dá nulový integrál a limitní přechod (s integrandem stejnoměrně spojitým na O) zpět na $\mathbb{R}$ dá tedy nulu. Podle Morerovy věty pro obdélníky je f holomorfní.

Věta 8.15 (o otevřeném zobrazení). *Nechť f je holomorfní a nekonstantní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak $f(\Omega)$ je otevřená.*

Důkaz. Podle věty 8.9 pro každé $a \in \Omega$ existuje uzavřený kruh $A = \overline{U(a,r)} \subset \Omega$ takový, že na jeho hranici K je všude $f(z) \neq f(a)$. Pro každé $w \notin f(A)$ je pomocná funkce $g(z) = 1/(f(z) - w)$ holomorfní na A, $g(a) \neq 0$. Podle principu maxima modulu je $|g(a)| \leq \max_K |g|$ a pro převrácené hodnoty $1/|g(a)| \geq \min_K |g|$, tj.

$$|f(a) - w| \geq \min_{z \in K} |f(z) - w| = \operatorname{dist}(f(K), w).$$

Nápad: pro $w \to f(a)$ je vlevo 0 a vpravo $\operatorname{dist}(f(K), f(a)) = 2v > 0$, spor. Podrobněji, pro každé $w \in B = U(f(a), v)$ je vlevo $|f(a) - w| < v$ a vpravo $\operatorname{dist}(f(K), w) > v$, spor, takže je $w \in f(A)$, $B \subset f(A) \subset f(\Omega)$. □

V $\mathbb{R}$ podobná věta neplatí. V příkladech $x^2 : (-1,1)$ na $[0,1)$, $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$, $\cos((-\pi/2, \pi/2)) = (0,1]$ zřejmě vadí globální extrémy v kořenech derivace. U holomorfních funkcí tedy ani kořeny derivace nebrání otevřenosti zobrazení.

Příklad. Funkce z^2 zobrazuje kruh $U(0,1)$ na sebe.

9. Riemannova sféra $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

K prostoru $\mathbb{C}$ je vhodné definovat **nekonečný prvek** ∞, ale jen jediný (nemáme lineární uspořádání), ten bude jiný(!!) než jsou $\pm\infty \in \mathbb{R}^*$ (i když v matematice nemá jiné označení). Označme $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, název **Riemannova sféra**, **sféra komplexních čísel**. Proč sféra? V $\mathbb{R}^3$ uvažujme sféru $S_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + (c - 1/2)^2 = (1/2)^2\}$ a její bod $N = (0,0,1)$. (Jindy se uvažuje jednotková sféra a tentýž bod N). Středovým promítáním z bodu N přiřadíme body množiny $S_3 \setminus \{N\}$ vzájemně jednoznačně bodům komplexní rovniny $\mathbb{C}$ (**stereografická projekce**) a navíc bodu N přiřadíme $\infty \in \mathbb{S}$. Na S_3 použijeme eukleidovskou metriku dist_3 a metriku dist^* v prostoru $\mathbb{S}$ pak definujeme tak, aby oba prostory byly při stereografické projekci izometrické.

Kromě dosavadních tří metrických prostorů

- $(\mathbb{R}, \operatorname{dist}_1)$ s eukleidovskou metrikou dist_1;
- $(\mathbb{R}^*, \operatorname{dist}_1^*)$ izometrický s $([-\pi/2, \pi/2], \operatorname{dist}_1)$ při zobrazení $x \mapsto \operatorname{arctg} x \in (-\pi/2, \pi/2)$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $\pm\infty \mapsto \pm\pi/2$ ve zbývajících dvou případech (jiná izometrie mu přiřazuje uzavřenou dolní půlkružnici se středem i a poloměrem 1 pomocí středového promítání, vzdálenost na půlkružnici měříme jako délku oblouku);
- $(\mathbb{C}, \operatorname{dist})$ s eukleidovskou metrikou dist

tak začneme používat čtvrtý

- $(\mathbb{S}, \operatorname{dist}^*)$ izometrický s $(S_3, \operatorname{dist}_3)$; v něm je např. $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ totéž co $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z)$, $\lim\limits_{k \to +\infty} z_k = \infty$ totéž co $\lim\limits_{k \to +\infty} |z_k| = +\infty$.

Prostor $\mathbb{C}$ má příjemné algebraické vlastnosti (na rozdíl od $\mathbb{S}$), ale $\mathbb{S}$ je (na rozdíl od $\mathbb{C}$) kompaktní.

V prostoru $\mathbb{S}$ definujeme $|\infty| = +\infty$, takže $|\ |$ je zobrazení prostoru $\mathbb{S}$ na $[0, +\infty] \subset \mathbb{R}^*$.

Zobrazení $1/z$ **dodefinujeme** i v bodech 0 a ∞ jeho limitou v $\mathbb{S}$, tj. $1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$ a získáme tak spojitou prostou funkci $f : \mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$, přitom inverzní funkcí k f je opět f.

Podobně dodefinujeme limitou (v $\mathbb{S}$) všechny funkce, které tuto limitu mají: každá racionální funkce (podíl dvou polynomů, ve jmenovateli není konstantní nula) pak je spojitým zobrazením $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$, tg je spojitým zobrazením $\mathbb{C}$ do $\mathbb{S}$, máme $\operatorname{tg}(\pm\pi/2) = \infty$, atd.

Složením dvou racionálních funkcí získáme buďto racionální funkci anebo konstantní ∞ (např. když do $1/z$ dosadíme za z konstantní funkci 0, obecně: když do $f(z)$ při $f(a) = \infty$ dosadíme za z konstantní funkci rovnou $a \in \mathbb{C}$).

Okolí bodu ∞ v prostoru $\mathbb{S}$ je obrazem nějakého okolí nuly při zobrazení $1/z$, $U(\infty) = 1/U(0)$. Vyšetřování vlastností funkce $f(z)$ v $P(\infty)$ lze převést na vyšetřování vlastností funkce $g(w) := f(1/w)$ v $P(0)$.

Podobně, pro každé $a \in \mathbb{S}$, vyšetřování vlastností spojité funkce $f(z)$ v $U(a)$ když $f(a) = \infty$ lze převést na vyšetřování vlastností funkce $h(z) := 1/f(z)$ v $U(a)$, je $h(a) = 0$.

Rovnice sféry S_3 je $a^2 + b^2 = c(1-c)$ a stereografická projekce zobrazí bod $(a,b,c) \in S \setminus \{N\}$ na bod $x + iy := (a + ib)/(1-c) \in \mathbb{C}$, t.j. při pohledu na sféru shora se bod (a,b) jen násobí kladným faktorem $1/(1-c)$. Obráceně, bod $x + iy \in \mathbb{C}$ je vzorem bodu $(a,b,c) := (x, y, x^2 + y^2)/(1 + x^2 + y^2)$.

Věta 9.1. (**obraz kružnice při stereografické projekci**) *Je-li $K_3 \subset S_3$ kružnice, pak jejím obrazem při stereografické projekci je* **zobecněná kružnice v** $\mathbb{S}$, *což je buďto kružnice v $\mathbb{C}$ anebo přímka v $\mathbb{C}$ doplněná o bod ∞ a tím uzavřená v $\mathbb{S}$.*

Důkaz. K_3 je průnik sféry s jistou rovinou, jejíž vzdálenost od bodu $(0,0,1/2)$ je menší než $1/2$. Rovnice takové roviny je $\alpha a+\beta b+\gamma(c-1/2)-d=0$, kde $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $|d|<1/2$. Obraz bodů množiny $K\setminus\{N\}$ najdeme tak, že do rovnice roviny dosadíme za a,b,c jejich vyjádření pomocí x,y a po úpravě máme $(\gamma-2d)(x^2+y^2)+2\alpha x+2\beta=\gamma+2d$. Pro $\gamma\neq 2d$ je to kružnice v $\mathbb{C}$. Pro $\gamma=2d$ je $N\in K$ a obrazem je přímka v $\mathbb{C}$, ke které přidáme ∞ jako obraz bodu N. $\square$

Definice. Říkáme, že funkce $f(z)$ je **holomorfní v bodě** ∞, jestliže je funkce $g(w):=f(1/w)$ holomorfní v bodě 0. Říkáme, že funkce f má p-**násobný kořen v bodě** ∞, jestliže funkce g má p-násobný kořen v nule.

Příklad. $f(z)=1/z^3+1/z^2$ má 2-násobný kořen v ∞, protože $g(w)=w^3+w^2=w^2(1+w)$ má 2-násobný kořen v 0.

10. Izolované singularity holomorfních funkcí

Věta 10.1 (Casorati-Weierstrassova). *Nechť $a\in\mathbb{S}$ a funkce f je holomorfní na $P(a)$. Pak nastává právě jedna z následujících tří možností:*

(1) *f je omezená na nějakém $P(a,r)$. Pak existuje $\lim\limits_{z\to a} f(z)=b\in\mathbb{C}$ (konečná limita). Dodefinujeme-li $f(a)=b$, je f holomorfní na $U(a,r)$. Říkáme, že f má v bodě a* **odstranitelnou singularitu**.

(2) *$\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$. Pak pro $a\neq\infty$ má f tvar $f(z)=(z-a)^{-p}\,g(z)$ a pro $a=\infty$ tvar $f(z)=z^p\,g(z)$, kde $p\in\mathbb{N}$, g holomorfní v $U(a)$, $g(a)\neq 0$. (Jak p tak g jsou určeny jednoznačně). Dodefinujeme-li $f(a)=\infty$, říkáme, že f má v bodě a* p-**násobný pól**. *(Dodefinovaná funkce $1/f$ má v bodě a p-násobný kořen.)*

(3) *$\lim\limits_{z\to a} f(z)$ v prostoru $\mathbb{S}$ neexistuje. Pak pro každé $r>0$ je $f(P(a,r))$ hustá v $\mathbb{S}$, tj. $\overline{f(P(a,r))}=\mathbb{S}$. Jinými slovy, každý bod $w\in\mathbb{S}$ je hromadným bodem funkčních hodnot. Říkáme, že f má v bodě a* **podstatnou singularitu**.

Důkaz. (1) Pro $a\in\mathbb{C}$ je pomocná funkce $h(z)=(z-a)^2 f(z)$, $h(a)=0$ holomorfní na $P(a)$, spojitá v bodě a, z definice derivace spočteme $h'(a)=0$, tedy h je holomorfní na $U(a)$ a její Taylorova řada se středem a má první dva koeficienty nulové: $h(z)=(z-a)^2(c_2+c_3(z-a)+\ldots)$, takže součet řady v závorce je tou dodefinovanou funkcí $f(z)$. Pro $a=\infty$ položíme $\tilde f(w)=f(1/w)$, $\tilde a=0$ a pro $\tilde f,\tilde a$ použijeme (1).

(2) Existuje $P(a,r)$, kde je všude $f\neq 0$, tam je $h=1/f$ holomorfní a $\lim\limits_{z\to a} h(z)=0$. Pro h použijeme (1), po dodefinování je h holomorfní v $U(a,r)$, $h(a)=0$ a přitom h není konstantní nula. h má tedy v bodě a pro právě jedno $p\in\mathbb{N}$ p-násobný kořen. Pro $a\in\mathbb{C}$ tedy $h(z)=(z-a)^pH(z)$, $H(a)\neq 0,\infty$, proto $f(z)=(z-a)^{-p}/H(z)$ a $g=1/H$. Pro pro $a=\infty$ je $h(z)=z^{-p}H(z)$, $H(a)\neq 0,\infty$, proto $f(z)=z^p/H(z)$ a $g=1/H$.

(3) Množina $B=\overline{f(P(a,r))}$ je uzavřená, její doplněk do $\mathbb{S}$ je otevřená. Dál sporem: je-li tento doplněk neprázdný, existuje bod $w\in\mathbb{C}\setminus B$ a také nějaký kruh $U(w,\rho)\subset\mathbb{C}\setminus B$. Pomocná funkce $h(z)=1/(f(z)-w)$ je v $P(a)$ holomorfní a omezená číslem $1/\rho$, tedy podle (1) má h konečnou limitu a f má v $\mathbb{S}$ limitu (pro $h(a)=0$ je to ∞), spor. $\square$

Důsledek. *Celá funkce je buďto polynom anebo má v ∞ podstatnou singularitu.*

Poznámka. *Platí dokonce* **Velká Picardova věta**: *Má-li f v bodě $a\in\mathbb{S}$ podstatnou singularitu, pak množina $\mathbb{C}\setminus f(P(a))$ je buďto prázdná anebo jednoprvková.*

Příklady. $\exp(P(\infty))=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\sin(P(\infty))=\mathbb{C}$.

Příklad (na cvičení). **Fresnelovy integrály** $C:=(N)\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$ a $S:=(N)\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$ (jde o Newtonovy integrály).

K jejich výpočtu budeme integrovat funkci e^{iz^2} po obvodu kruhové výseče o úhlu $\pi/4$. Označíme $b:=e^{i\pi/4}$ (odtud $b^2=i$) a pro libovolné $r>0$ definujeme cesty $\varphi_1(t):=t$, $t\in[0,r]$, $\varphi_2(t):=re^{it}$, $t\in[0,\pi/4]$, $\varphi_3(t):=bt$, $t\in[0,r]$. Podle Cauchyovy věty pro uzavřenou cestu $\varphi_1\dotplus\varphi_2\dot-\varphi_3$ je

$$(*)\qquad \int_{\varphi_1} e^{iz^2}\,dz+\int_{\varphi_2} e^{iz^2}\,dz-\int_{\varphi_3} e^{iz^2}\,dz=0$$

a v této rovnosti chceme přejít k limitě pro $r\to+\infty$.

Máme $\int_{\varphi_3} e^{iz^2}\,dz=b\int_0^r e^{-t^2}\,dt\to b\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=b\sqrt{\pi/4}$ (použili jsme Laplaceův integrál, viz níže). Odhadneme $|\int_{\varphi_2}e^{iz^2}\,dz|=|\int_0^{\pi/4}\exp(ir^2e^{2it})rie^{it}\,dt|\le\int_0^{\pi/4}e^{-r^2\sin 2t}r\,dt\le r\int_0^{\pi/4}e^{-r^2(4t/\pi)}\,dt\le r\int_0^{+\infty}e^{-4\pi r^2\,t}\,dt=r/(4\pi r^2)\to 0$.

Existuje tedy také konečná limita integrálu přes φ_1, tou jsou Fresnelovy integrály $C+iS$ (jejich existenci jsme právě dokázali). Platí pro ně $(C+iS)-b\sqrt{\pi/4}=0$, přitom je $b=(1+i)/\sqrt{2}$ takže $C=S=\sqrt{\pi/8}$.

Zopakujme si ještě jak lze spočítat **Laplaceův integrál** $I:=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi/4}$ použitím Fubiniho věty, substitucí $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$ do polárních souřadnic a druhým použitím Fubiniho věty:
$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\,dy=\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_{(0,+\infty)\times(0,\pi/2)}e^{-r^2}r\,dr\,d\alpha=\frac{\pi}{2}\int_{(0,+\infty)}e^{-r^2}r\,dr=\pi/4.$

11. Laurentovy řady a funkce holomorfní na mezikruží

V mocninných řadách uvažujeme jen nezáporné mocniny výrazu $(z-a)$, přitom substituce $z-a=1/w$ vede k řadám, kde jsou i záporné mocniny proměnné w. Prostudujme tedy řady, kde jsou celočíselné mocniny výrazu $z-a$.

Příklad. $a=0$, $e^z+e^{1/z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n/n!+\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-n}/n!$, $0<|z|<+\infty$.

Definice. **Laurentovou řadou (v proměnné z) o středu** $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

kde $c_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady (*) rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n,$$

hlavní částí řady (*) rozumíme symbol

$$(**) \qquad \sum n = -\infty^{-1} c_n(z-a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady** (*) **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} w^m, \text{ kde } w := 1/(z-a).$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** (*) a značíme jej rovněž (**).

Říkáme, že **řada** (*) **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** (*) rozumíme součet součtů obou jejích částí, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n.$$

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $0 \le r < R \le +\infty$. Pak označme

$$P(a,r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikruží o středu** a, **vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Věta 11.1. *Mějme Laurentovu řadu (*). Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:*

- *Regulární část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $|z-a| < R$ a diverguje pro $|z-a| > R$.*
- *Hlavní část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně pro $|z-a| > r$ a diverguje pro $|z-a| < r$.*

Je-li $r < R$, pak řada (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a,r,R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikruží konvergence řady** *(*).*

Důkaz. Regulární část je mocninná řada, o ní toho již víme dost. Hlavní část nejprve substitucí $z = a + 1/w$ pro $w \in \mathbb{P}$, tj. $z \in P(a, +\infty)$ převedeme na mocninnou řadu v proměnné w, příslušná tvrzení o ní transformujeme zpět pomocí inverzní substituce, $w = 1/(z-a)$, která je v daném mezikruží jak holomorfní tak lokálně omezená, takže nepokazí holomorfnost sumy, absolutní konvergenci ani lokálně stejnoměrnou konvergenci.

.... konec 8. přednášky 1.12.2011 ....

Věta 11.2. *Nechť f je holomorfní na mezikruží $P(a,r,R)$. Pro $p \in (r,R)$ označme φ_p kladně orientovanou kružnici o středu a a poloměru p. Pak platí:*

(a) *$\int_{\varphi_p} f$ nezávisí na p, tj. nabývá stejné hodnoty pro každé $p \in (r,R)$.*

(b) *(**Cauchyův vzorec pro mezikruží**) Nechť $r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Pak*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right), \quad z \in P(a, \rho_1, \rho_2)\,.$$

Důkaz (a). Označme $g(p) = \int_{\varphi_p} f$, $p \in (r,R)$, tedy $g(p) = \int_0^{2\pi} f(a + p\,e^{it})\,p\,i\,e^{it}\,dt$ a derivujme zde podle parametru p, podle věty 7.4 (3). (Postupujeme stejně jako v důkazu Poznámky 8.1.) $g'(p) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial p}\Big(f(a+p\,e^{it})\,p\,i\,e^{it}\Big)dt = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}\Big(f(a+p\,e^{it})e^{it}\Big)dt = 0$. Funkce g je tedy konstantní.

(b) Pro pevné $z \in P(a, \rho_1, \rho_2)$ definujeme pomocnou funkci $h(w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$, $w \in P(a,r,R)$, která má v bodě $w = z$ odstranitelnou singularitu. Pro ni použijeme (a), tedy $\int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w$. Každý z obou integrál rozepíšeme jako rozdíl dvou integrálů a využijeme toho, že $\int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$ (Cauch. věta) zatímco $\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$. $\square$

Věta 11.3 (existence a jednoznačnost L. řady). *Nechť pro $a \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$ je funkce f holomorfní na mezikruží $P(a,r,R)$. Pak f je tam součtem Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 11.2.

Ve speciálním případě, kdy funkce f je sudá resp. lichá vzhledem k bodu a, tj. $f(a+h) = f(a-h)$ resp. $f(a+h) = -f(a-h)$ pro všechna $|h| \in (r, R)$, jsou všechny koeficienty s lichým resp. se sudým indexem rovny nule.

Důkaz. Postupujeme podobně jako v důkazu Cauchyova vzorce. V Cauchyově vzorci pro mezikruží výraz $1/(w-z)$ nahradíme geometrickou řadou, na $\langle\varphi_{\rho_2}\rangle$ v nezáporných mocninách výrazu $(z-a)/(w-a)$, na $\langle\varphi_{\rho_1}\rangle$ v nezáporných mocninách výrazu $(w-a)/(z-a)$, oba tyto výrazy jsou (tam kde je používáme) v absolutní hodnotě menší než 1. Tyto řady v proměnné w konvergují na $\langle\varphi_{\rho_2}\rangle$ resp. na $\langle\varphi_{\rho_1}\rangle$ stejnoměrně, po vynásobení omezenou (tamtéž) funkcí $f(w)$ stále konvergují stejnoměrně, lze je tedy integrovat člen po členu. Nakonec ještě podle (a) přesuneme integrační cestu na φ_ρ, integrand je totiž v mezikruží $P(a, r, R)$ holomorfní, a tím odvodíme formuli pro c_n. K důkazu jednoznačnosti koeficientů c_n (pro danou funkci f) dosadíme do pravé strany formule za f Laurentovu řadu se středem a ale s jinými koeficienty b_n, pak integrujeme člen po členu a vyjde $c_n = b_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ve speciálním případě sudé (vzhledem k a) funkce f: křivku φ_ρ slepíme ze dvou půlkružnic, pro $t \in [0, \pi]$ označme $\psi_{1,2} = a \pm \rho e^{it}$, je $\varphi_\rho = \psi_1 \dot{+} \psi_2$ a $\int_{\psi_2} f = \int_o^\pi f(a - \rho e^{it})(-i)\rho e^{it} dt = \int_o^\pi f(a + \rho e^{it})(-i)\rho e^{it} dt = -\int_{\psi_1} f$. Pro druhý speciální případ použijeme ten první na pomocnou funkci $g(z) = (z-a)f(z)$, která je vzhledem k bodu a sudá. □

Ke klasifikaci izolovaných singularit pomocí limit (Casorati-Weierstrassova věta) můžeme nyní sestavit souběžnou klasifikaci pomocí Laurentových řad.

Věta 11.4 (**klasifikace izolovaných singularit, pomocí L. řady**). *Nechť pro $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ je funkce f holomorfní na $P(a, R) = P(a, 0, R)$ a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ je její Laurentova řada v $P(a, R)$. Označme $B = \{n < 0; c_n \neq 0\}$. Pak*

(1) *f má v bodě a odstranitelnou singularitu $\Leftrightarrow B = \emptyset$,*
(2) *f má v bodě a pól $\Leftrightarrow$ množina B je neprázdná konečná. Násobnost pólu je pak $p = -\min M$,*
(3) *f má v bodě a podstatnou singularitu $\Leftrightarrow$ množina B je nekonečná.*

Důkaz. Z Cassorati-Weierstrassovy věty dokážeme ekvivalenci v (1) a ve (2). Na zbývající případy zbývá v C-W větě už jen podstatná singulatita a v dokazované větě už jen B nekonečná, takže platí i (3). □

Ke **všem** členům Laurentovy řady **kromě** $c_{-1}/(z-a)$ známe primitivní funkce v $\mathbb{P}$, jsou použitelné i pro neuzavřené cesty. Potřebujeme zvládnout i tu jedinou výjimku. Uvidíme, že právě ta je cestou k dalším užitečným větám.

Příklad 11.1. Pro libovolnou uzavřenou cestu φ v $P(a, r, R)$ je

$$\int_\varphi f = \int_\varphi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_\varphi c_n(z-a)^n dz = c_{-1} \int_\varphi (z-a)^{-1}\, dz.$$

12. Reziduum funkce v bodě, metody jeho výpočtu

(Tato kapitola by mohla ještě počkat, ale umožňuje začít procvičovat hledání reziduí.)

Definice. Nechť pro $a \in \mathbb{C}$ je funkce f holomorfní na $P(a)$ a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ je tam její Laurentova řada. Pak **reziduum funkce f v bodě** $a \in \mathbb{C}$ je číslo c_{-1}, tedy koeficient u $1/(z-a)$.

Název reziduum (=zbytek) si spojíme s příkladem 11.1. Je to jediný koeficient, který tam po využití primitivních funkcí zbyl.

Věta 12.1 (**metody výpočtu reziduí**). *Nechť pro $a \in \mathbb{C}$ jsou funkce f, g holomorfní na $P(a)$ a v bodě a nemají podstatnou singularitu.*

(1) *Je-li f holomorfní v bodě a a g tam má 1-násobný pól, pak*
$$\mathrm{res}_a(fg) = f(a)\ \mathrm{res}_a\, g.$$
(2) *Je-li f holomorfní v bodě a a g tam má 1-násobný kořen, pak*
$$\mathrm{res}_a(f/g) = f(a)/g'(a).$$
(3) *Má-li funkce f v bodě a p-násobný pól, pak pomocná funkce $h(z) := (z-a)^p f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ tam má odstranitelnou singularitu a je*
$$\mathrm{res}_a f = b_{p-1} = \tfrac{1}{(p-1)!}\, h^{(p-1)}(a).$$
V případě, že k určení b_{p-1} nelze přímo derivovat funkci h v bodě a, využijeme spojitost jejích derivací,
$$\mathrm{res}_a f = b_{p-1} = \tfrac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} h^{(p-1)}(z).$$
(4) *Je-li funkce f sudá vzhledem k bodu a, tj. $f(a+h) = f(a-h)$ pro všechna $h \in P(0)$, pak*
$$\mathrm{res}_a f = 0.$$
(5) *Substitucí $z = a + w$ převedeme výpočet rezidua funkce f v bodě $a \in \mathbb{P}$ na výpočet rezidua jiné funkce v bodě 0 (o L. řadách funkcí v $P(0)$ toho víme víc):*
$$\mathrm{res}_{z=a} f(z) = c\ \mathrm{res}_{w=0} f(a+w).$$
(6) *Substitucí $z = cw$ s konstantou $c \in \mathbb{P}$ převedeme výpočet rezidua funkce f v bodě a na výpočet rezidua jiné funkce v bodě a/c:*
$$\mathrm{res}_{z=a} f(z) = c\ \mathrm{res}_{w=a/c} f(cw)\,.$$
(7) *Je-li f holomorfní v bodě a, pak $\mathrm{res}_a f = 0$.*
(8) *(… mimo přednášku …) Libovolná holomorfní substituce. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a funkce f je holomofní v $P(a)$. Nechť (substituční) funkce g je holomofní a nekonstantní v $U(b)$, kde $b \in \mathbb{C}$ a $g(b) = a$. Označme $p \in \mathbb{N}$ násobnost kořene funkce $g(w) - g(b)$ v bodě b. Potom*
$$p\ \mathrm{res}_a f = \mathrm{res}_b (f \circ g\ .\ g')\,.$$

Důkaz. V případech (1) až (3) vyjádříme funkci f případně g Laurentovou řadou v $P(a)$, provedeme uvedenou operaci a u výsledku hledáme pouze koeficient u $1/(z-a)$. V případě (4) jsou všechny koeficienty u lichých mocnin nulové, podle věty 11.3. V (5) resp. v (6) do vyjádření funkce $f(z)$ L. řadou v $P(a)$ dosadíme $z = a + w$ resp. $z = cw$.

V důkazu (8) předbíháme důkaz principu argumentu. V $U(b)$ je $g(w) = a + c_p(w-b)^p + \dots$, $c_p \neq 0$. Pro dostatečně malé $r > 0$ a cestu $\varphi(t) = b + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je $g \circ \varphi$ uzavřená cesta v $P(a)$. Pro ni je (podle reziduové věty, viz níže)

$I := \int_{g\circ\varphi} f = 2\pi i \ \mathrm{ind}_{g\circ\varphi}\, a \ \mathrm{res}_a\, f$, kde $2\pi i \ \mathrm{ind}_{g\circ\varphi}\, a = \int_{g\circ\varphi} \frac{1}{z-a}\, dz = \int_\varphi \frac{g'(w)}{g(w)-a}\, dw = \int_\varphi \frac{p\, c_p w^{p-1}}{c_p w^p + \dots}\, dw = \int_\varphi (p/w + \dots)\, dw$ $= 2\pi i p$, takže I je $2\pi i$-krát levá strana dokazované rovnosti.

Použijeme-li reziduovou větu až po substituci do integrálu I, bude $I = \int_\varphi f(g(w)) g'(w)\, dw = 2\pi i\, \mathrm{res}_b\, (f \circ g\, .\, g')$ a to je $2\pi i$-krát pravá strana dokazované rovnosti. $\square$

Příklady na cvičení k jednotlivým metodám (číslo příkladu je stejné jako číslo metody):

(1) $\mathrm{res}_1 \frac{\exp(z)}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{\exp(1)}{1^2+1}\, \mathrm{res}_1 \frac{1}{z-1} = e/2$.

(2a) $\mathrm{res}_0 \frac{1+\exp(z)}{1-\exp(z)} = \frac{1+\exp(0)}{-\exp(0)} = -2$.

(2b) $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{res}_{k\pi}\ z/\sin z = k\pi/\cos(k\pi) = (-1)^k k\pi$.

(2c) $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{res}_k\ \pi/\sin \pi z = \pi/(\pi \cos k\pi) = (-1)^k$.

(2d) $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{res}_k\ \pi \operatorname{cotg} \pi z = \pi \cos(k\pi)/(\pi \cos k\pi) = 1$.

(3a) $\mathrm{res}_1\ 1/(z^2-1)^2 = \mathrm{res}_1\, (z-1)^{-2}(z+1)^{-2} = ((z+1)^{-2})'|_{z=1} = -1/4$.

(3b) $\mathrm{res}_1\ 1/(z^2-1)^3 = \mathrm{res}_1\, (z-1)^{-3}(z+1)^{-3} = \frac{1}{2!}((z+1)^{-3})''|_{z=1} = \frac{1}{2}\, 12\ 2^{-5} = 3/16$.

(6) Substitucí $z = -i\, w$ odtud máme $\mathrm{res}_{z=1}\ 1/(z^2-1)^3 = -i\ \mathrm{res}_{w=i}\ 1/(-w^2-1)^3$, takže $\mathrm{res}_{w=i}\ 1/(w^2+1)^3 = -3i/16$. Další substituce $w = -u$ dává $\mathrm{res}_{u=-i}\ 1/(u^2+1)^3 = 3i/16$.

(4) $\mathrm{res}_0\ \operatorname{cotg}^2 = 0$.

(5) $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{res}_{z=k\pi}\ z^2/\sin^2 z = \mathrm{res}_{w=0}\, (k\pi + w)^2/\sin^2(k\pi + w) = \mathrm{res}_{w=0}\, (k\pi + w)^2/\sin^2 w = \mathrm{res}_{w=0} \Big(((k\pi)^2 + 2k\pi w + \dots)/(w^2 + 0\, w^3 + \dots) \Big) = \mathrm{res}_{w=0}((k\pi)^2/w^2 + 2k\pi/w + \dots) = 2k\pi.$

(7) $\mathrm{res}_1 \frac{\exp(2\, z)+5}{\operatorname{cotg} z} = 0$.

(8a) Substituce $z = \operatorname{arctg} w$ pro $w \in U(0)$: $\quad \mathrm{res}_{z=0}\, tg^{-3} z = \mathrm{res}_{w=0}\, w^{-3}(1+w^2)^{-1} = \mathrm{res}_{w=0}\, w^{-3}(1 - w^2 + \dots) = -1.$

(8b) Substituce $z = \operatorname{arctg} w^2$ pro $w \in U(0)$, takže $p = 2$:

$$\mathrm{res}_{z=0}\, tg^{-3} z = p^{-1}\, \mathrm{res}_{w=0}\, w^{-6}(1+w^4)^{-1}\, 2\, w = \mathrm{res}_{w=0}\, w^{-5}\, (1 - w^4 + \dots) = -1.$$

13. Spojité větve logaritmu a argumentu, index bodu ke křivce

Pro $a, b > 0$ je

$$\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \ln(b) - \ln(a) \ \dots \text{ přírůstek logaritmu podél cesty z } a \text{ do } b.$$

Pro $a, b \in \mathbb{R}$ a spojitě diferencovatelnou funkci $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ je

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = (\ln f)(b) - (\ln f)(a) \ \dots \text{ přírůstek funkce } \ln f \text{ podél cesty z } a \text{ do } b.$$

Tyto jednoduché výsledky zobecníme na případ, že integrujeme po nějaké cestě v $\mathbb{C}$, přitom ale musíme opatrně zacházet s komplexními logaritmy.

Je-li $M \subset \mathbb{S}$ nějaká souvislá množina a funkce $f : M \to \mathbb{P}$ je spojitá, pak funkci f lze vyjádřit v exponenciálním tvaru $f(z) = e^{L(z)}$, třeba $f(z) = e^{\log f(z)}$, nebo pro $A = \operatorname{Im} L$ v goniometrickém tvaru $f(z) = |f(z)| e^{A(z)}$. Takováto funkce $L(z) = \ln|z| + iA(z)$ ale nemusí mít svou imaginární část spojitou na M.

Požadujeme-li ještě spojitost (název: L je **spojitý logaritmus funkce** f **na** M resp. A je **spojitý argument funkce** f **na** M), pak taková funkce nemusí existovat, viz třeba $M = K(0, 1)$, $f(z) = z$.

Pokud má funkce f spojitou derivaci (podle reálné či komplexní proměnné z), pak asi bude $f' = fL'$, tj. $L' = f'/f$, takže funkci L budeme hledat mezi primitivními funkcemi k f'/f.

Definice. (**spojitý logaritmus, pro cestu**) Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{P}$ cesta (neprochází nulou), pak symbolem L_φ označme cestu v $\mathbb{C}$, která je takovou primitivní funkcí na $[a, b]$ k funkci φ'/φ (ta je po částech spojitá), pro niž je $L_\varphi(a) = \log(\varphi(a))$, tj. označme

$$L_\varphi(t) = \log(\varphi(a)) + \int_a^t \varphi'(\tau)/\varphi(\tau)\, d\tau,\ t \in [a, b].$$

Věta 13.1. *(L_φ je jako v předchozí definici.)*

(a) *Nechť* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{P}$ *je cesta, pak je* $\varphi = \exp \circ L_\varphi$, $\varphi = |\varphi| \exp(i \operatorname{Im} L_\varphi)$ *a platí*

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\, dz \ = \ \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt \ = \ L_\varphi(b) - L_\varphi(a) \ =: \Delta_\varphi \log \quad \dots \textbf{ přírůstek logaritmu podél křivky } \varphi.$$

(b) *Nechť* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *je cesta a funkce* f *je na* $\langle\varphi\rangle$ *holomorfní a všude různá od nuly, takže* $\psi = f \circ \varphi$ *je cesta v* $\mathbb{P}$. *Pak* $f \circ \varphi = \exp \circ L_{f\circ\varphi} = \exp \circ L_\psi$ *a*

$$\int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \ = \int_\psi \frac{1}{w}\, dw \ = \ L_\psi(b) - L_\psi(a) \ =: \ \Delta_\varphi \log f \quad \dots \textbf{ přírůstek logaritmu funkce } f \textbf{ podél křivky } \varphi.$$

(c) *Je-li navíc křivka* φ *uzavřená, pak následující čísla jsou celá:*

$$\frac{1}{2\pi i}\, \Delta_\varphi \log = \frac{1}{2\pi}\, \Delta_\varphi \arg, \quad \frac{1}{2\pi i}\, \Delta_\varphi \log f = \frac{1}{2\pi}\, \Delta_\varphi \arg f = \frac{1}{2\pi}\, \Delta_\varphi \arg \frac{f}{|f|}.$$

Poznámka. Funkci L_φ (a tím i přírůstek logaritmu) lze definovat nejen pro cesty ale i pro křivky. Pak namísto primitivní funkce k φ'/φ je třeba spojitě nalepovat lokální spojité logaritmy funkce φ.

Definice. Nechť φ je uzavřená cesta v $\mathbb{C}$ a $a \in \mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu** a **vzhledem ke křivce** φ (neboli **počet oběhů křivky** φ kolem bodu a, anglicky **winding number**) je definován formulí

$$\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,dz \;= \frac{1}{2\pi i}\,\Delta_\varphi \log(z-a) \;= \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\varphi \arg(z-a) \quad \text{když } a \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle\,, \quad \operatorname{ind}_\varphi \infty = 0\,.$$

.... konec 9. přednášky 8.12.2011 ....

Věta 13.2 (vlastnosti indexu). *Pro uzavřenou cestu φ v $\mathbb{C}$ je $\operatorname{ind}_\varphi a$ funkcí proměnné $a \in \mathbb{S}\setminus\langle\varphi\rangle$. Přitom*

(1) *funkce $\operatorname{ind}_\varphi$ nabývá jen celočíselných hodnot,*
(2) *funkce $\operatorname{ind}_\varphi$ je konstantní na každé komponentě množiny $\mathbb{S}\setminus\langle\varphi\rangle$,*
(3) *funkce $\operatorname{ind}_\varphi$ je rovna nule na neomezené komponentě množiny $\mathbb{S}\setminus\langle\varphi\rangle$.*

(... zbytek věty nebyl zařazen do přednášky ...) Nechť $\varphi, \psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{P}$ jsou uzavřené cesty takové, že pro každé $t \in [\alpha,\beta]$ je $\varphi(t)/\psi(t) \notin (-\infty, 0)$ (tj. bod 0 neleží mezi body $\varphi(t)$, $\psi(t)$, tj. body $\varphi(t)$, $\psi(t)$ nejsou v opozici). Pak

(4) $\operatorname{ind}_\varphi 0 = \operatorname{ind}_\psi 0$.

Důkaz (1). Na množině $\Omega := \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$ je $\operatorname{ind}_\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\,\Delta_\varphi \log$ a to je podle věty 13.1 (c) celé číslo.

Důkaz (2). Na téže množině je $\operatorname{ind}_\varphi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,dz$ spojitou funkcí (integrál s parametrem a) a protože podle (1) je $\operatorname{ind}_\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{Z}$, je to konstantní funkce v každé souvislé části množiny Ω. V neomezené komponentě množiny Ω je tato konstanta rovna nule, protože $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \lim\limits_{a\to\infty} \int_\varphi \frac{1}{z-a}\,dz = 0$. Odtud máme také (3).

Důkaz (4). Interpolujeme od φ k ψ. K tomu definujeme tyto cesty v $\mathbb{P}$: $\omega_p(t) := (1-p)\cdot\varphi(t) + p\cdot\psi(t)$, $p \in [0,1]$, $t \in [\alpha,\beta]$. (Kdyby pro nějaké $p \in (0,1)$ a nějaké $t \in [0,1]$ bylo $\omega_p(t) = 0$, pak $\psi(t)/\varphi(t) = (p-1)/p < 0$ ve sporu s předpokladem.) Pro $p \in [0,1]$ definujeme funkci $I(p) := \operatorname{ind}_{\omega_p} 0 = (2\pi i)^{-1}\int_{\omega_p} z^{-1} dz = (2\pi i)^{-1}\int_\alpha^\beta \omega_p{}'(t)/\omega_p(t)\,dt$. Poslední integrand, označme ho $f(p,t)$, je po částech spojitý na $[0,1]\times[\alpha,\beta]$, podle věty 7.1.(5) ho můžeme substitucí (za t) upravit tak, že bude spojitý. Funkce $I(p)$ je pak na $[0,1]$ spojitá, přitom podle (1) nabývá jen celočíselných hodnot, takže je konstantní. Odtud $I(0) = I(1)$. $\square$

Poznámky. (1) Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu c a poloměru r, pak

$$\operatorname{ind}_\varphi z = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \in U(c,r), \\ 0, & \text{je-li } |z-c| > r. \end{cases}$$

(2) Platí **Jordanova věta**: Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uzavřená cesta taková, že φ je prostá na $[a,b)$, pak množina $\mathbb{S}\setminus\langle\varphi\rangle$ má právě dvě komponenty – jednu neomezenou (na ní je index roven nule) a jednu omezenou, na ní je index roven buďto $+1$ (**kladně orientovaná Jordanova křivka** φ) anebo -1 (**záporně orientovaná Jordanova křivka** φ).

(3) Platí následující **propichovací věta (Mařík)**. Nechť φ je uzavřená cesta v $\mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$ taková, že $b - a > 0$ a úsečka spojující body a, b protíná $\langle\varphi\rangle$ v jediném bodě z_0 různém od a, b a nechť existuje jediné t_0, pro které je $\varphi(t_0) = z_0$. Jestliže $\operatorname{Im}\varphi'(t_0) \neq 0$ (volně: křivka jde skrz úsečku zdola nahoru), pak

$$\operatorname{ind}_\varphi a = \operatorname{ind}_\varphi b \;+ \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\varphi'(t_0).$$

Předchozí označení a věty nám pro uzavřenou cestu φ umožňují jednoduše vyjádřit integrály z věty 13.1:

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\ \operatorname{ind}_\varphi 0, \quad \int_\varphi f'/f = 2\pi i\ \operatorname{ind}_{f\circ\varphi} 0.$$

14. Řetězce a cykly

V Cauchyově vzorci pro mezikruží jsme integrovali po dvou uzavřených cestách. V obecnějších případech budeme integrovat po jedné či více libovolných cestách. K tomu zavedeme následující jednoduché pojmy.

Definice. **Řetězec** je n-tice cest (na pořadí cest nezáleží, cesty se mohou i opakovat), kde $n \in \mathbb{N}$:

(*) $$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\,.$$

Řetězec (*) se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ uzavřené.

Nechť Γ je řetězec tvaru (*). Pak definujeme

- **obraz řetězce** Γ,
$$\langle\Gamma\rangle := \langle\varphi_1\rangle \cup \langle\varphi_2\rangle \cup \cdots \cup \langle\varphi_n\rangle;$$
- **délka řetězce** Γ,
$$V(\Gamma) := V(\varphi_1) + V(\varphi_2) + \cdots + V(\varphi_n);$$
- je-li $f : \langle\Gamma\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál z funkce** f **podél** Γ,
$$\int_\Gamma f := \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$
- je-li $f : \langle\Gamma\rangle \to \mathbb{P}$ spojitá, pak **přírůstek logaritmu funkce** f **podél** Γ,
$$\Delta_\Gamma \log f := \Delta_{\varphi_1} \log f + \Delta_{\varphi_2} \log f + \cdots + \Delta_{\varphi_n} \log f.$$

Je-li Γ cykl, pak ještě

- **index bodu** $a \in \mathbb{S} \setminus \langle\Gamma\rangle$ **vzhledem k cyklu** Γ,
$$\operatorname{ind}_\Gamma a := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \operatorname{ind}_{\varphi_1} a + \operatorname{ind}_{\varphi_2} a + \cdots + \operatorname{ind}_{\varphi_n} a\,;$$
- **vnitřek cyklu** Γ,
$$\operatorname{Int}\Gamma := \{a \in \mathbb{S} \setminus \langle\Gamma\rangle;\ \operatorname{ind}_\Gamma a \neq 0\}\,;$$
- **vnějšek cyklu** Γ,
$$\operatorname{Ext}\Gamma := \{a \in \mathbb{S} \setminus \langle\Gamma\rangle;\ \operatorname{ind}_\Gamma a = 0\}\,.$$

Jsou-li Γ_1 a Γ_2 dva řetězce, řekneme, že jsou **ekvivalentní** (při integrování po nich), jestliže $\langle\Gamma_1\rangle = \langle\Gamma_2\rangle$ a pro každou spojitou $f : \langle\Gamma_1\rangle \to \mathbb{C}$ platí $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.

15. Cauchyova věta, Cauchyův vzorec, reziduová věta

Lemma 15.1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je funkce holomorfní na Ω. Pak funkce $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$,*
$$g(z,w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & z \neq w, \\ f'(z), & z = w, \end{cases}$$
je spojitá na $\Omega \times \Omega$.

Důkaz. Spojitost v bodech tvaru $[a,b] \in \Omega \times \Omega$ pro $a \neq b$ je zřejmá (spojitost podílu když nedělíme nulou). Pro $a = b$, díky spojitosti funkce f' máme $\lim\limits_{z\to a} g(z,z) = \lim\limits_{z\to a} f'(z) = f(a)$. Zbývá ještě dokázat $\lim\limits_{z\to a,\, w\to a,\, z\neq w} g(z,w) = f'(a)$. K tomu upravíme
$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) = (z-w)^{-1}\int_{[w;z]} f'(u)\,du - (z-w)^{-1}\int_{[w;z]} f'(a)\,du = (z-w)^{-1}\int_{[w;z]}(f'(u)-f'(a))\,du \to 0$, protože odhad absolutní hodnoty poslední pravé strany pro $z,w \in \overline{U(a,\varepsilon)}$ je $|z-w|^{-1}|z-w| \max_{u\in\overline{U(a,\varepsilon)}} |f'(u)-f'(a)| \to 0$.

Věta 15.2 (Cauchyova věta pro cykl, Cauchyův vzorec pro cykl). *Nechť Γ je cykl v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ takový, že*

(1)
$$\operatorname{Int}\Gamma \ \subset\ \Omega \quad \textit{neboli} \quad \mathbb{S}\setminus\Omega \subset \operatorname{Ext}\Gamma\,.$$

Je-li funkce f holomorfní na Ω, pak

(2)
$$\int_\Gamma f = 0$$

a

(3)
$$f(z)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle\,.$$

Je-li navíc množina $\mathbb{S}\setminus\Omega$ souvislá, pak každý cykl Γ v Ω splňuje předpoklad (1), takže (2) platí pro všechny cykly Γ v Ω (a f má tedy v Ω primitivní funkci).

Důkaz. Nejprve (kupodivu) dokážeme Cauchyův vzorec (3). Uvážíme-li definici $\operatorname{ind}_\Gamma z$ máme dokázat

(3')
$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \ \text{ neboli } \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = 0, \qquad z \in \Omega\setminus\langle\Gamma\rangle\,.$$

Integrand $g(w,z) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ je po dodefinování $g(w,w) := f'(w)$ podle předchozího lemmatu spojitý na $\Omega\times\Omega$, takže pomocná funkce $h(z) := \int_\Gamma g(w,z)\,dw$, $z \in \Omega$, je spojitá (Věta 7.4(2)) a stačí dokázat, že je to nula.

1.krok. Pomocí Morerovy věty dokážeme, že h je holomorfní na Ω. Funkci h proto integrujeme po obvodu δT libovolného trojúhelníka $T \subset \Omega$: $\int_{\delta T} h(z) = \int_{\delta T}\left(\int_\Gamma g(w,z)\ dw\right)\,dz = \int_\Gamma\left(\int_{\delta T} g(w,z)\ dz\right)\,dw = \int_\Gamma 0\ dw = 0$. Ve druhé rovnosti (přejdeme k integraci přes reálné parametry) jsme pro záměnu pořadí integrace použili Fubiniho větu pro spojitou funkci na jednom či několika uzavřených obdélnících. Ve třetí rovnosti jsme pro každé pevné $w \in \Omega$ použili Cauchyovu větu pro trojúhelník T.

2.krok. Funkci h rozšíříme holomorfně i mimo Ω. Položme
$$H(z) := \begin{cases} h(z) & \text{pro } z \in \Omega\,, \\ \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw & \text{pro } z \in \mathbb{C}\cap\operatorname{Ext}\Gamma\,. \end{cases}$$

Integrál na druhém řádku je také holomorfní funkcí (Věta 7.4(3)), oba řádky v definici funkce H se ale překrývají na množině $\Omega\cap\operatorname{Ext}\Gamma$, mohly by být rozporné. Liší se tam o člen $\int_\Gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw = f(z)\,2\pi i\,\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$, takže definice funkce H je korektní, H je holomorfní na $\mathbb{C}$, tj. celá funkce.

3.krok. Ze druhého řádku je $\lim\limits_{z\to\infty} H(z) = 0$. Podle Liouvillovy věty je H konstantní a tedy nula, proto také $h = 0$. Důkaz Cauchyova vzorce (2) je dokončen.

K důkazu (2) zvolíme pevně $a \in \Omega \cap \operatorname{Ext}\Gamma = \Omega \setminus (\langle\Gamma\rangle \cup \operatorname{Int}\Gamma) \neq \emptyset$ a použijeme (3) na pomocnou funkci $F(w) := (w-a)f(w)$, $w \in \Omega$: $0 = \int_\Gamma \frac{F(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \int_\Gamma f(w)\,\mathrm{d}w$.

Důkaz poslední části věty: zvolme libovolný cykl Γ v Ω. Je-li $\mathbb{S} \setminus \Omega$ souvislá, je v ní všude $\operatorname{ind}_\Gamma = \operatorname{ind}_\Gamma \infty = 0$, takže $\mathbb{S} \setminus \Omega \subset \operatorname{Ext}\Gamma$, což je (1).

Věta 15.3 (reziduová věta). *Nechť Γ, Ω splňují předpoklady Cauchyovy věty 15.2. Je-li funkce f holomorfní na $\Omega \setminus M$, kde množina vyjímek M je disjunktní s $\langle\Gamma\rangle$ a izolovaná v Ω, pak*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M \cap \operatorname{Int}\Gamma} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a\,. \tag{4}$$

Důkaz. Je-li M prázdná, je to Cauchyova věta (2). Pro neprázdnou M se nejprve zbavíme všech vyjímek v $\operatorname{Ext}\Gamma$, a to tak, že zmenšíme množinu Ω na $\Omega_1 := U(\Gamma \cup \operatorname{Int}\Gamma, \varepsilon)$ pro vhodné $\varepsilon > 0$. Množinu vyjímek tím zredukujeme na konečnou $M_1 := M \cap \operatorname{Int}\Gamma$.

Zvolme nyní $a \in M_1$ (je to izolovaná singularita funkce f) a v $P(a)$ uvažujme příslušnou Laurentovu řadu. Hlavní nápad důkazu: hlavní část H_a této Laurentovy řady konverguje nejen v $P(a)$ ale dokonce v $P(a, 0, +\infty)$, takže H_a můžeme využít k opravě funkce f všude v $\Omega_1 \setminus \{a\}$. Nová funkce $f - H_a$ má v bodě a odstranitelnou singularitu, takže oproti f má (po dodefinování) o jednu vyjímku méně. Popsanou opravu nyní provedeme pro všechny body množiny M_1. Pomocná funkce $g := f - \sum_{a \in M_1} H_a$ je holomorfní na Ω_1 a podle Cauchyovy věty

$$\int_\Gamma f = \int_\Gamma (g + \sum_{a \in M_1} H_a) = 0 + \sum_{a \in M_1} \int_\Gamma H_a = \sum_{a \in M_1} 2\pi i \ \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a\,.$$

□

Poznámka. Použitý rozklad $f = g + \sum_{a \in M_1} H_a$ je užitečný i mimo tento důkaz. Je zobecněním známého rozkladu racionální funkce na polynom a parciální zlomky: Pro $\Omega = \mathbb{C}$ a f racionální, je M množina všech jejích pólů v C.

.... zbytek kap. 15 nebyl zařazen do přednášky ....

Někdy je snazší sčítat rezidua funkce f vně cyklu Γ. K tomu pro funkci f holomorfní v $P(\infty)$, $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$ definujeme **reziduum v nekonečnu**, $\operatorname{res}_\infty f := -c_{-1}$. Nečekané záporné znaménko zjednoduší formuli (6) (a další), je v matematice obvyklé.

Věta 15.3.b (reziduová věta pro vnějšek cyklu). *Nechť Γ je cykl v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ takový, že*

$$\operatorname{Ext}\Gamma \ \subset\ \Omega \cup \{\infty\} \quad \textit{neboli} \quad \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \operatorname{Int}\Gamma\,. \tag{5}$$

Nechť (pro jednoduchost) je cykl Γ sestaven ze **záporně** *orientovaných Jordanových křivek takových, že každá leží vně všech ostatních ($j \neq k \Rightarrow \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Ext}\varphi_k$). Je-li funkce f holomorfní na $\Omega \setminus M$, kde množina vyjímek M je konečná a disjunktní s $\langle\Gamma\rangle$, pak*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M \cup \{\infty\}} \operatorname{res}_a f\,. \tag{6}$$

Důkaz. K cyklu $\Gamma = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ještě přidáme tak velkou kladně orientovanou kružnici $\psi(t) = r\,e^{it}, t \in [0, 2\pi]$, že $\langle\Gamma\rangle \subset \operatorname{Int}\psi$. Nový cykl označíme $\Psi := \Gamma, \psi$ a použijeme pro něj reziduovou větu. K tomu máme ověřit (1) pro Ψ, vybereme si tam druhou verzi: je-li $b \in \mathbb{S} \setminus \Omega$ pak buďto $b = \infty \in \operatorname{Ext}\Psi$ anebo $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ a pak podle (5) je $b \in \operatorname{Int}\Gamma = \bigcup_{k=1}^n \operatorname{Int}\varphi_k$, tedy $\operatorname{ind}_\Gamma b = -1$ a $\operatorname{ind}_\Psi b = 0$, takže $b \in \operatorname{Ext}\Psi$ a (1) je ověřeno. Podle reziduové věty je tedy $\int_\Psi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \ \operatorname{ind}_\Psi a$, vlevo je součet $\int_\Gamma f + \int_\psi f$, v jehož druhém sčítanci lze funkci f nahradit její Laurentovou řadou v $P(0, r-\varepsilon, +\infty)$ pro vhodné $\varepsilon > 0$, druhý sčítanec je tedy roven $2\pi i\,(-\operatorname{res}_\infty f)$ a jeho přesunutí na pravou stranu dává (6). □

.... konec 10. přednášky 15.12.2011 ....

16. Příklady: užití reziduové věty k výpočtu některých integrálů v $\mathbb{R}$ a ke sčítání některých říselných řad

Typ I. Integrál z racionální funkce. *Jestliže Q je racionální funkce (podíl dvou polynomů) taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-2})$ (tj. polynom ve jmenovateli má stupeň aspoň o dva větší než polynom v čitateli), pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q = 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \operatorname{res}_a Q\,. \tag{1}$$

Důkaz. Funkce Q má jen konečný počet pólů a ty tedy leží v nějakém kruhu $U(0, \rho)$. Pro $r \geq \rho$ označíme $\varphi_r(t) = re^{it}, t \in [0, \pi]$ (půlkružnice) a integrujeme po hranici příslušného půlkruhu. Podle reziduové věty je součet $\int_{-r}^{+r} Q + \int_{\varphi_r} Q$ roven pravé straně v (1). Pro $r \to +\infty$ je limita prvního sčítance rovna levé straně v (1) a druhého nule: $|\int_{\varphi_r} Q| \leq \pi r\, O(r^{-2}) \to 0$. □

Některé integrály v $\mathbb{R}$, ve kterých je sin nebo cos, lze spočítat tak, že integrand holomorfně rozšíříme do části množiny $\mathbb{C}$, integrujeme tam po vhodné uzavřené křivce, užijeme reziduovou větu a limitními přechody najdeme požadovaný výsledek. Často se přitom využívá následující odhad integrálu přes půlkružnici v horní polorovině (nebo přes její část).

Lemma 16.1 (Jordanovo lemma). *Nechť $\rho > 0$, $[\alpha, \beta] \subset [0, \pi]$ a funkce f je spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > \rho\}$ taková, že*

$$\lim_{z \to \infty, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0 .$$

Pak pro $r > \rho$, $b > 0$ a cestu $\varphi_r(t) = r\, e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$ je

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\, e^{ibz}\, \mathrm{d}z = 0 . \tag{J}$$

Důkaz. Přejdeme k integraci přes t a odhadujeme $I := |\int_\alpha^\beta f(r\, e^{it})\, e^{ib\, r\, e^{it}}\, r\, i\, e^{it}\, dt| \le r \max_{\langle \varphi_r \rangle} |f| \int_\alpha^\beta e^{-br \sin t}\, dt$. Funkce sin je na $[0, \pi/2]$ konkávní, takže tam je $\sin(t) \ge c\,t$, kde $c = 2/\pi$. Máme $\int_\alpha^\beta e^{-br \sin t}\, dt \le \int_0^\pi e^{-br \sin t}\, dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-br \sin t}\, dt$ $\le 2 \int_0^{\pi/2} e^{-br\, ct}\, dt < 2 \int_0^{+\infty} e^{-br\, ct}\, dt = \frac{2}{br\, c}$. Odtud $I \le \frac{2}{b\, c} \max_{\langle \varphi_r \rangle} |f| \to 0$. $\square$

Typ II. Integrál z racionální funkce vynásobené cos nebo sin. *Nechť Q je racionální funkce taková, že nemá v $\mathbb{R}$ pól a pro $z \to \infty$ je $Q(z) = O(z^{-1})$. Pro $b > 0$ označme $f(z) = Q(z)\, e^{ibz}$. Pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \cos(bx)\, dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f\right), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) \sin(bx)\, dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f\right). \tag{2}$$

Důkaz. Volíme stejnou integrační cestu φ_r jako v důkazu u typu I, integrujeme ale funkci f (nikoli funkci $Q(z) \cos bz$ nebo $Q(z) \sin bz$). Podle reziduové věty je $\int_{-r}^{+r} f + \int_{\varphi_r} f = 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f$. Pro $r \to +\infty$ je limita druhého integrálu rovna nule (Jordanovo lemma), limita prvního integrálu je $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)(\cos bx + i \sin bx)\, dx$. $\square$

Typ II, obecnější. *Předchozí výsledky lze zobecnit na dva navzájem se vylučující případy (volíme $b = 1$) :*

(a) *Q má jeden či více jednonásobných pólů v $\mathbb{R}$, ale jen tam, kde* cos *má kořen (Q* cos *má odstranitelnou singularitu). Pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Q \cos) = \mathrm{Re}\left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f \quad + \quad \pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{R},\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f\right), \tag{2a}$$

(b) *Q má jeden či více jednonásobných pólů v $\mathbb{R}$, ale jen tam, kde* sin *má kořen (tj. Q* sin *odstranitelnou singularitu). Pak*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Q \sin) = \mathrm{Im}\left(2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C}^+,\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f \quad + \quad \pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{R},\, Q(a) = \infty} \mathrm{res}_a f\right). \tag{2b}$$

Důkaz (2a). Stačí dokázat pro případ jediného takového pólu $a \in \mathbb{R}$ (u případných dalších pólů postupujeme analogicky). V $P(a)$ je $Q(z) = c/(z - a) + \dots$, takže $f(z) = c\, e^{ia}/(z - a) + h(z)$, kde h je na $U(a)$ holomorfní. Namísto integrace přes $[-r, r]$ zvolíme dostatečně malé $\delta > 0$ a integrujeme přes úsečku $[-r, a - \delta]$, pak v protisměru přes půlkružnici $\omega(t) := a + \delta e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ a nakonec přes úsečku $[a + \delta, r]$ (tj. bod a obcházíme shora po malé půlkružnici). Je $\int_\omega g = \int_\omega (c\, e^{ia}/(z - a) + h(z))\, dz$ $= c\, e^{ia} \pi i + \int_\omega h \to c\, e^{ia} \pi i = \pi i \cdot \mathrm{res}_a f$ pro $\delta \to 0+$. Současně je $\int_{-r}^{a-\delta} \mathrm{Re}\, g + \int_{a+\delta}^{r} \mathrm{Re}\, g \to \int_{-r}^{r} \mathrm{Re}\, g$, takže po limitních přechodech (nejprve $\delta \to 0+$, pak $r \to +\infty$ se ve (2a) oproti (2) objeví nalevo ještě sčítanec $\mathrm{Re}\Big(-\pi i \cdot \mathrm{res}_a f\Big)$ a ten převedeme doprava.

Analogicky dokážeme (2b). $\square$

Typ III. Integrál z racionální funkce v sinech a kosinech. *Nechť $Q(a, b)$ je racionální funkce dvou (komplexních) proměnných taková, že pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ v ní nedělíme nulou. Pak funkce*

$$T(z) := Q\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right) / (iz)$$

jedné komplexní proměnné z je racionální, nemá póly na jednotkové kružnici a platí

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi i \cdot \sum_{|a| < 1,\, T(a) = \infty} \mathrm{res}_a T . \tag{3}$$

Důkaz. Pro $\varphi(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ uvažujeme křivkový integrál $\int_\varphi T(z)\, dz$. Použití reziduové věty nám dá pravou stranu ve (3), zatímco integrace přes reálný parametr t (podle definice křivkového integrálu) dá levou stranu ve (3). $\square$

Typ IV. Integrál z racionální funkce vynásobené neceločíselnou mocninou. *Nechť $b \in (0, 1)$ a Q je racionální funkce taková, že v $[0, +\infty)$ nemá pól a pro $x \to +\infty$ je $Q(x) = O(x^{-1})$. Pak*

$$\int_0^{+\infty} Q(x)\, x^{b-1}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(e^t)\, e^{b\, t}\, dt = \frac{2\pi i}{1 - \exp(2\pi b i)} \sum_{0 < \mathrm{Im}\, a < 2\pi,\, Q(e^a) = \infty} \mathrm{res}_a(Q(e^z)\, e^{bz}) . \tag{4}$$

Důkaz. Pro $b \in (0,1)$ konverguje první integrál jak u 0 tak u $+\infty$ a substitucí $x = e^t$ dokážeme první rovnost.

Se druhou rovností to bude složitější. Funkce Q má v $\mathbb{C}$ jen konečný počet pólů a to mimo $[0,+\infty)$, všechny póly jsou tedy v nějakém mezikruží $P(0, r_1, r_2)$. Složená funkce $Q(e^z)$ má proto všechny póly ve svislém pásu $\operatorname{Re} z \in (\ln r_1, \ln r_2) = (R_1, R_2)$ a to mimo přímky $\operatorname{Im} z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Totéž platí pro funkci

$$g(z) := Q(e^z)\, e^{bz}.$$

Integrujeme-li funkci g po obvodu φ obdélníka $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi]$ v kladném směru, tj. po uzavřené cestě $\varphi := \varphi_1 \dotplus \psi_2 \dot- \varphi_2 \dot- \psi_1$, kde $\varphi_1 := [R_1; R_2]$, $\varphi_2 := \varphi_1 + 2\pi i$, $\psi_1 = [R_1; R_1 + 2\pi i]$, $\psi_2 = [R_2; R_2 + 2\pi i]$. Podle reziduové věty je $\int_\varphi g$ roven $2\pi i$ krát suma na pravé straně ve (4). Tentýž integrál je roven číslu $\int_{\varphi_1} g + \int_{\psi_2} g$ - $\int_{\varphi_2} g$ - $\int_{\psi_1} g$.

Pro $j = 1,2$ odhadneme $|\int_{\psi_j} g| \le 2\pi \max_{\langle\psi_j\rangle} |Q(e^z)e^{bz}| =: M_j$, máme zde $|e^z| = e^{R_j}$ a $|e^{bz}| = e^{bR_j}$.

Pro $R_1 \to -\infty$ je $e^{R_1} \to 0$, takže $M_1 = 2\pi\, O(1)\, e^{b\mathbb{R}_1} \to 0$.

Pro $R_2 \to +\infty$ je $e^{R_2} \to +\infty$, takže $M_2 = 2\pi\, O(e^{-R_2}) e^{b\mathbb{R}_2} = O(e^{(b-1)R_2}) \to 0$.

V integrálu přes φ_2 použijeme substituci $u = z + 2\pi i$,

$$\int_{\varphi_2} g(u)\, du = \int_{\varphi_1} g(z + 2\pi i)\, dz = \int_{\varphi_1} g(z)\, e^{2\pi bi}\, dz = e^{2\pi bi} \int_{\varphi_1} g\,.$$

Je tedy $\lim\limits_{R_1 \to -\infty,\, R_2 \to +\infty} \int_\varphi g = (1 - e^{2\pi bi}) \int_{-\infty}^{+\infty} Q(e^t)\, e^{bt}\, dt.$ $\square$

Typ V. Integrál ze součinu racionální funkce a logaritmu. *Nechť racionální funkce Q nemá póly v $[0,+\infty)$, na $\mathbb{R}$ je reálná a pro $x \to +\infty$ je $Q(x) = O(x^{-2})$. Pak*

$$(5)\ \ I_1 := \int_0^{+\infty} Q(x) \ln x\, dx \;=\; -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{a \in \mathbb{C},\, Q(a) = \infty} \operatorname{res}_a (Q\,L^2)\,, \quad I_0 := \int_0^{+\infty} Q(x)\, dx \;=\; -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \sum_{a \in \mathbb{C},\, Q(a) = \infty} \operatorname{res}_a (Q\,L^2)\,,$$

kde $L(z) := \log(-z) + \pi i = \ln|z| + iA(z)$ pro $A(z) \in (0, 2\pi]$ je inverzní funkce k funkci $\exp|_{\operatorname{Im} \in (0,2\pi]}$.

Důkaz. Nejprve ověříme vlastnosti funkce L, je $e^{L(z)} = e^{\log(-z)+\pi i} = e^{\log(-z)} e^{\pi i} = (-z) \cdot (-1) = z$. Dále je $\operatorname{Im} L(z) = \operatorname{Im} \log(-z) + \operatorname{Im}(\pi i) \in (-\pi + \pi, \pi + \pi] = (0, 2\pi]$.

Integrační cestou bude obvod „céčka“: $\varphi := u_1 \dotplus \psi_2 \dot- u_2 \dot- \psi_1$, kde $u_{1,2}(t) := t\, e^{\pm i\alpha}$, $t \in [r_1, r_2]$ jsou úsečky a $\psi_{1,2}(t) := r_{1,2}\, e^{it}$, $t \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ jsou oblouky kružnic. Čísla $0 < r_1 < r_2 < +\infty$ a $0 < \alpha < \pi$ jsou zvolena tak, že všechny póly funkce Q jsou v $\operatorname{Int} \varphi$. Integrovanou funkcí bude $f := QL^2$, která má body nespojitosti $(0,+\infty)$, tedy vně „céčka“. Podle reziduové věty je

$$\int_{u_1} f + \int_{\psi_2} f - \int_{u_2} f - \int_{\psi_1} f \quad = \quad \int_\varphi f \quad = \quad 2\pi i \cdot \sum_{a \in \mathbb{C},\, Q(a) = \infty} \operatorname{res}_a (Q\,L^2)\,.$$

Pro $r_1 \to 0+$ resp. $r_2 \to +\infty$ je $\int_{\psi_1} f = O(r_1)\, O(\ln r_1 + \pi)^2 \to 0$ resp. $\int_{\psi_2} f = O(r_2)\, O(r_2^{-2})\, O(\ln r_2 + \pi)^2 \to 0$, použité odhady přitom nezávisely na $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Dále pro $\alpha \to 0+$ je $\int_{u_1} f - \int_{u_2} f = \int_{r_1}^{r_2} \Big(Q(t\,e^{i\alpha})\, L^2(t\,e^{i\alpha})\, e^{i\alpha} - Q(t\,e^{-i\alpha})\, L^2(t\,e^{-i\alpha})\, e^{-i\alpha} \Big)\, dt = \int_{r_1}^{r_2} \Big(Q(t\,e^{i\alpha})\, (\ln t + i\alpha)^2\, e^{i\alpha} - Q(t\,e^{-i\alpha})\, (\ln t - i\alpha + 2\pi i)^2\, e^{-i\alpha} \Big)\, dt \to \int_{r_1}^{r_2} \Big(Q(t)\, (\ln t)^2 - Q(t)\, (\ln t + 2\pi i)^2 \Big)\, dt = \int_{r_1}^{r_2} \Big(-4\pi i\, Q(t) \ln t + 4\pi^2\, Q(t) \Big)\, dt \to -4\pi i I_1 + 4\pi^2 I_0$ pro $r_1 \to 0+$, $r_2 \to +\infty$ a odtud máme (5). $\square$

Poznámka. V literatuře je popsáno mnoho dalších typů takovýchto použití reziduové věty pro integraci v $\mathbb{R}$.

Lemma (periodické funkce s rezidui ± 1 v $\mathbb{Z}$). *Definujme funkce*

$$f_1(z) := \pi \operatorname{cotg} \pi z, \quad f_2(z) := \pi / \sin \pi z\,.$$

1. *Obě tyto funkce jsou holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, f_1 má periodu 1, f_2 má periodu 2.*
2. *V bodech množiny $\mathbb{Z}$ mají funkce f_1, f_2 jednonásobné póly, pro $k \in \mathbb{Z}$ je*
$$\operatorname{res}_k f_1 = 1\,, \quad \operatorname{res}_k f_2 = (-1)^k.$$
3. $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} f_1(z) = \mp \pi i$, $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to \pm\infty} f_2(z) = 0$, *obě limity stejnoměrně pro* $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$.
4. *Pro každé $\varepsilon > 0$ jsou obě funkce omezené na $\Omega := \mathbb{C} \setminus U(\mathbb{Z}, \varepsilon)$.*

Důkaz. (1) a (2): obě funkce mají v čitateli celou funkci a ve jmenovateli $\sin \pi z$ s jednonásobnými kořeny v $\mathbb{Z}$. Rezidua jsme spočítali v kap.12 Příklad (2c) a (2d).

(3) pro f_1: Máme $\operatorname{cotg} w = i\, \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{e^{iw} - e^{-iw}} = i\, \frac{e^{2iw} + 1}{e^{2iw} - 1} = i\,(1 + \frac{2}{e^{2iw} - 1})$.

Pro $w = (a,b)$, $b \to +\infty$ je $|e^{2iw}| = e^{-2b} \to 0$ stejnoměrně pro $a \in \mathbb{R}$, takže $\operatorname{cotg}(a + ib) \to -i$. Pro $b \to -\infty$ jen využijeme toho, že cotg je lichá funkce: $\operatorname{cotg}(a + ib) = -\operatorname{cotg}(-a - ib) \to +i$. Odtud spočteme limity funkce f_1.

(3) pro f_2: Máme $1/\sin w = 2i\, \frac{1}{e^{iw} - e^{-iw}} = 2i\, \frac{e^{iw}}{e^{2iw} - 1}$. Pro $w = (a,b)$, $b \to +\infty$ je $|e^{iw}| = e^{-b} \to 0$, $|e^{2iw}| = e^{-2b} \to 0$, obě limity stejnoměrně pro $a \in \mathbb{R}$, takže $1/\sin(a + ib) \to 0$. Pro $b \to -\infty$ využijeme toho, že sin je lichá funkce.

(4): Podle (3) existuje $b > 0$ takové, že na množině $A := \{z \in \mathbb{C};\, |\operatorname{Im} z| > b\}$ jsou obě funkce omezené. Stačí tedy ještě vyšetřit jejich omezenost na množině $B := \mathbb{C} \setminus U(\mathbb{Z}, \varepsilon) \setminus A$ a díky jejich periodicitě dokonce jen na kompaktní množině $C := \{z \in B;\, |\operatorname{Re} z| \le \pi\}$. Funkce $|f_1|, |f_2|$ jsou na kompaktu C spojité a tedy omezené. $\square$

.... konec 11. přednášky 22.12.2011 ....

Typ VI. Suma hodnot racionální funkce celočíselné proměnné. *Nechť Q je racionální, $Q(\infty)=0$. Pak*

$$(1)\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n,\,Q(k)\neq\infty}^{+n} Q(k) = -\sum_{a\in\mathbb{C},\,Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a\left(Q(z)\,\pi\operatorname{cotg}\pi z\right)$$

$$(2)\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n,\,Q(k)\neq\infty}^{+n} (-1)^k Q(k) = -\sum_{a\in\mathbb{C},\,Q(a)=\infty} \operatorname{res}_a\left(Q(z)\,\pi/\sin\pi z\right)$$

Je-li kořen funkce Q v nekonečnu aspoň dvojnásobný, pak namísto $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum_{k=-n,\,Q(k)\neq\infty}^{+n}$ můžeme psát $\sum_{k=-\infty,\,Q(k)\neq\infty}^{+\infty}$.

Důkaz. Použijeme funkce f_1, f_2 z předchozího lematu. Funkce Q má jen konečný počet pólů, existuje tedy $n\in\mathbb{N}$ takové, že v kruhu $U(0, r_n=n+1/2)$ jsou všechny. Označíme $\varphi_n(t):=r_n e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ a pro $j=1$ resp. 2 integrujeme pomocnou funkci $Q\,f_j$,

$$(*)\quad \int_{\varphi_n}(Q\,f_j) = 2\pi i\sum_{|a|<r_n,\,Q(a)=\infty\vee f_j(a)=\infty}\operatorname{res}_a(Q\,f_j) = 2\pi i\Bigg(\sum_{|a|<r_n,\,Q(a)=\infty}\cdots+\sum_{|a|<r_n,\,Q(a)\neq\infty,\,f_j(a)=\infty}\cdots\Bigg).$$

První suma v závorce je $\sum_{a\in\mathbb{C},\,Q(a)=\infty}\operatorname{res}_a(Q\,f_j)$, tedy minus pravá strana v (j).

Druhá suma v závorce je $\sum_{k=-n\,Q(k)\neq\infty}^{+n}\operatorname{res}_k(Q\,f_j)$ a protože f_j má jen jednoduché póly, je to $\sum_{k=-n,\,Q(k)\neq\infty}^{+n}Q(k)\operatorname{res}_k f_j$, tedy výraz za limitou v (j).

Věnujme se nyní integrálu v (*). Funkci Q rozložíme na součet $Q(z)=c/z+Q_2(z)$, kde $c:=\lim\limits_{z\to\infty}(z\,Q(z))$, takže $Q_2(z)=O(z^{-2})$ pro $z\to\infty$. Nyní upravíme levou stranu v (*),

$$\int_{\varphi_n}(Q\,f_j) = \int_{\varphi_n}\tfrac{c}{z}\,f_j(z)\,dz + \int_{\varphi_n}Q_2 f_j\,dz\,,$$

první integrál napravo je nula (integrujeme sudou funkci), druhý snadno odhadneme,

$$\left|\int_{\varphi_n}Q_2 f_j\,dz\right| \;\le\; 2\pi r_n \max_{z\in\mathbb{C}\setminus U(\mathbb{Z},1/2)}|Q(z)|\,|f_j(z)| = \;O(r_n^{-1})\to 0 \quad \text{pro } n\to+\infty\,.$$

V rovnosti (*) má levá strana pro $n\to+\infty$ limitu nula, druhá suma v závorce nezávisí na n, takže existuje také limita první sumy v závorce a platí pro ni (1) resp. (2).

Je-li navíc $Q(k)=O(k^{-2})$ pro $k\to+\infty$, pak limita sumy v (1) resp.(2) je rovna součtu absolutně konvergentní řady $\sum_{k=-\infty,\,Q(k)\neq\infty}^{+\infty}\cdots$. $\square$

17. Meromorfní funkce

V kapitole 9 jsme na příkladu funkce $1/z$ (a obecněji, racionální funkce) viděli, že je užitečné povolit v definičním oboru i v oboru hodnot bod $\infty\in\mathbb{S}$ a současně (automaticky) dodefinovat limitou (v $\mathbb{S}$) hodnotu funkce tam, kde není definovaná příslušná algebraická operace. Objevíme tak svět spojitých zobrazení z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$, která jsou - až na izolovanou množinu pólů - holomorfní.

Definice. Spojité zobrazení f otevřené množiny $\Omega\subset\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$ je **meromorfní v** Ω, jestliže pro každý bod $a\in\Omega$ je buďto holomorfní v bodě a anebo má v bodě a pól (tj. $1/f$ má v bodě a kořen). Množinu všech meromorfních zobrazení definovaných v Ω označme $\mathcal{M}(\Omega)$. f je **meromorfní v bodě** $a\in\mathbb{S}$, jestliže je meromorfní v nějakém jeho okolí.

Příklady. Každá racionální funkce je meromorfní v $\mathbb{S}$. Konstatní funkce $f=\infty$ není meromorfní. Exponenciála je meromorfní v $\mathbb{C}$ ale ne v $\mathbb{S}$.

Věta 17.1 (vlastnosti meromorfních funkcí). *Nechť $\Omega\subset\mathbb{S}$ je neprázdná oblast.*

(1) *Jsou-li $f,\,g\in\mathcal{M}(\Omega)$, $c_1,c_2\in\mathbb{C}$, pak také $c_1f+c_2g\in\mathcal{M}(\Omega)$, tj. $\mathcal{M}(\Omega)$ je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{C}$.*
(2) *Jsou-li $f,\,g\in\mathcal{M}(\Omega)$, pak také součin $f\,g\in\mathcal{M}(\Omega)$.*
(3) *Pokud $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ není konstatní nula, pak $1/f\in\mathcal{M}(\Omega)$. (Pozor, kdyby Ω byla otevřená nesouvislá, pak tento bod neplatí.)*
(4) *$\mathcal{M}(\Omega)$ je komutativní těleso, nulou a jedničkou jsou v něm konstantní funkce nula a jednička.*
(5) *Je-li $f\in\mathcal{M}(\Omega)$, pak také derivace $f'\in\mathcal{M}(\Omega)$.*
(6) *Je-li $f\in\mathcal{M}(\Omega)$ nekonstantní, pak pro každé $b\in\mathbb{S}$ je množina $A:=f_{-1}(b)$ izolovaná v Ω.*
(7) **věta o jednoznačnosti pro meromorfní funkce**: *Jsou-li $f,\,g\in\mathcal{M}(\Omega)$ a přitom se shodují na množině $M\subset\Omega$, která má v Ω hromadný bod (tj. není izolovaná v Ω), pak $f=g$ všude na Ω.*
(8) **věta o substituci**: *Je-li $f\in\mathcal{M}(\Omega)$, g meromorfní v oblasti $\Omega_g\subset\mathbb{S}$ a je-li $g(\Omega_g)\subset\Omega$, pak složená funkce $f\circ g$ je buďto meromorfní v Ω_g anebo je to konstanta ∞ (to když g je konstantní, $g(z)=b\in\mathbb{C}$, a funkce f má v bodě b pól).*

Důkaz (1),(2),(3),(5). Zvolíme $a\in\Omega$, rozlišíme případ $a\in\mathbb{C}$ od případu $a=\infty$ a použijeme Laurentovy řady funkcí f,g v $P(a)$. Příklad $f:=0$ v $\mathbb{C}^+$, $f:=1$ v $\mathbb{C}^-$ ukazuje, že ve (3) nelze vynechat předpoklad souvislého oboru Ω.

Důkaz (4). Jde o důsledek bodů (1),(2),(3).

Důkaz (6). Sporem, nechť existuje $b\in\mathbb{S}$ pro které má množina A hromadný bod $a\in\Omega$, ze spojitosti funkce f přitom máme $f(a)=b$.

Případ $b=\infty$ převedeme případ $b=0$ pro pomocnou funkci $g(z):=1/f(z)$, množina $g_{-1}(0)$ má hromadný bod a.

Případ $b\in\mathbb{C}$, $a=\infty$ převedeme na případ $a,b\in\mathbb{C}$ pro pomocnou funkci $g(w):=f(1/w)$, kde $1/w\in\Omega$. Množina $g_{-1}(b)$ má totiž hromadný bod 0.

Nakonec zbyl jen případ $a,b\in\mathbb{C}$, podle věty o jednoznačnosti pro holomorfní funkce je f konstantní - spor.

Důkaz (7). Definujeme pomocnou meromorfní funkci $h:=f-g$, ta je všude v M rovna nule s možnou vyjímkou(!) bodů, kde má f pól. Množina všech pólů funkce f je ale izolovaná v Ω, takže funkce h je rovna nule na množině $M_1:=M\setminus f_{-1}(\infty)$, která není izolovaná v Ω, má hromadný bod $a\in\Omega$. Je-li $a\in\mathbb{C}$, pak podle věty o jednoznačnosti pro holomorfní funkce je

h nulová v nějakém $U(a)$ a tedy (dokážeme analogicky jako v důkazu věty 8.10) h je konstantní nula v Ω. Případ $a = \infty$ převedeme na případ $a = 0$ pro pomocnou funkci $h_1(w) := h(1/w)$.

Důkaz (8). Zvolíme libovolně $a \in \Omega_g$, označíme $b := g(a) \in \Omega$, $c := f(b)$. Pokud je $a, b, c \in \mathbb{C}$, jde v bodě a o substituci holomorfních funkcí, takže $f \circ g$ je v bodě a holomorfní. Případy, kdy jedno nebo více čísel a, b, c je ∞, můžeme zvládnout buďto vhodným využíváním substituce $h(z) := 1/z$, $z \in \mathbb{S}$ (je $h_{-1} = h$) anebo tak, že se takovému vyjímečnému bodu a vyhneme.

Uvažujme nejprve nekonstantní g.

Existuje takové $P_1(b) \subset \mathbb{C}$, že $f(P_1(b)) \subset \mathbb{C}$ (jinak by množina pólů funkce f měla v b hromadný bod).

Existuje takové $P_2(a) \subset \mathbb{C}$, že $g(P_2(a)) \subset P_1(b)$ (jinak by množina $g_{-1}(b)$ měla v a hromadný bod, v rozporu se (6)).

V $P_1(a)$ tedy skládáme holomorfní funkce, proto $f \circ g$ je tam holomorfní, v bodě a má izolovanou singularitu. Všude skládáme spojité funkce, složená funkce je proto spojitá, $\lim_a (f \circ g) = c$, takže $f \circ g$ je v bodě a meromorfní.

Pro případ konstantní funkce $g = b$ je konstantní také funkce $f \circ g = c$ a ta je meromorfní právě když $c \neq \infty$. □

Definice. Nechť $a \in \mathbb{S}$ a funkce f je v $U(a)$ meromorfní a není to konstantní nula. Laurentova řada funkce f v $P(a)$ má tvar

(L) $$f(z) = c_n(z-a)^n + \dots \text{ když } a \in \mathbb{C} \quad \text{resp.} \quad f(z) = c_n z^{-n} + \dots \text{ když } a = \infty\,,$$

kde čísla $c_n \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{Z}$ jsou určena jednoznačně.

Funkce f v bodě a buďto má $n-$násobný kořen (případ $n > 0$), nebo $-n = |n|-$násobný pól (případ $n < 0$), nebo tam nemá ani kořen ani pól (případ $n = 0$). Označme

$\mathrm{mult}(f, a) := n \in \mathbb{Z}$ ... **násobnost (multiplicity) kořene nebo pólu**.

Věta 17.2. *Je-li f meromorfní v oblasti $\Omega \subset \mathbb{S}$ a není konstantní nula, pak* **logaritmická derivace funkce** f*, funkce $g := f'/f$, má tyto vlastnosti:*

1. *g má pól v bodě $a \in \Omega \cap \mathbb{C}$ právě když f má v bodě a buďto kořen anebo pól,*
2. *všechny póly funkce g v množině $\Omega \cap \mathbb{C}$ jsou jednonásobné,*
3. *$\mathrm{res}_a\, g = \mathrm{mult}(f, a)$, $a \in \Omega$.*

Důkaz. Laurentova řada funkce $g = f'/f$ v $P(a)$ má podle (L) tvar

$$\frac{c_n n(z-a)^{n-1} + \dots}{c_n (z-a)^n + \dots} = n/(z-a) + \dots \quad \text{resp.} \quad \frac{c_n(-n) z^{-n-1} + \dots}{c_n z^{-n} + \dots} = -n/z + \dots\,,$$

kde $n = \mathrm{mult}(f, a)$. □

Poznámka. Vlastnost (3) vybízí k tomu, abychom na funkci g aplikovali reziduovou větu 15.3, suma reziduí funkce g je totiž sumou čísel $\mathrm{mult}(f, a)$, tj. sumou násobností kořenů minus sumou násobností pólů funkce f v $\mathrm{Int}\,\Gamma$.

.... konec 12. přednášky 5.1.2012 ....

Věta 17.3 (princip argumentu, Argument Principle). *Nechť Γ, Ω splňují předpoklady Cauchyovy věty 15.2.*

Je-li funkce f meromorfní na Ω taková, že v žádné komponentě množiny Ω není konstantní nula, a taková, že na $\langle\Gamma\rangle$ nemá ani kořen ani pól, pak

(PA) $$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f = \mathrm{ind}_{f\circ\Gamma}\, 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \sum_{a \in \mathrm{Int}\,\Gamma} \mathrm{mult}(f, a) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma\, a\,.$$

Speciálně, jestliže všude v $\mathrm{Int}\,\Gamma$ je $\mathrm{ind}_\Gamma = +1$, pak

(PA1) $$\mathrm{ind}_{f\circ\Gamma}\, 0 = \sum_{a \in \mathrm{Int}\,\Gamma} \mathrm{mult}(f, a)\,.$$

Důkaz. První a druhou rovnost v (PA) známe z kap.13, třetí rovnost je aplikací reziduové věty na meromorfní funkci f'/f, jejíž rezidua známe z předchozí věty. □

Poznámka. Vpravo je celé číslo, umíme-li tedy vyčíslit integrál (numericky) s chybou menší než $1/2$, stačí numerický výsledek zaokrouhlit. Také první a druhý výraz lze vyhodnocovat numericky, přesně, bez integrování.

Poznámka. Měníme-li v (PA1) funkci f tak, že se nemění $\mathrm{ind}_{f\circ\Gamma}\, 0$, pak se nemění ani pravá strana, tj. „málo odlišné“ funkce mají stejný součet násobností. Jak velké smí být to „málo“? O tom je následující věta.

Věta 17.4 (Rouchéova věta). *Nechť Γ, Ω splňují předpoklady Cauchyovy věty 15.2.*

Jsou-li funkce f, g meromorfní na Ω, žádná není konstantní nula v žádné komponentě množiny Ω, na $\langle\Gamma\rangle$ nemají ani kořeny ani póly a všude na $\langle\Gamma\rangle$ je

(*) $$f/g \notin (-\infty, 0)\,,$$

pak

$$\sum_{a \in \mathrm{Int}\,\Gamma} \mathrm{mult}(f, a) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma\, a = \sum_{a \in \mathrm{Int}\,\Gamma} \mathrm{mult}(g, a) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma\, a\,.$$

Předpoklad (*) lze zesílit (a tedy větu zeslabit) na obvyklejší

(**) $$|f - g| < |f| \quad \textit{neboli} \quad g \in U(f, |f|), \quad \textit{všude na } \langle\Gamma\rangle.$$

Důkaz. Podle (PA) je třeba dokázat rovnost celých čísel $N_f := \mathrm{ind}_{f\circ\Gamma}\, 0$ a $N_g := \mathrm{ind}_{g\circ\Gamma}\, 0$. Interpolujeme od f ke g, nechť $f_p := (1-p)\,f + p\,g$ pro $p \in [0, 1]$. Každá z funkcí f_p je meromorfní v Ω, na $\langle\Gamma\rangle$ nemá pól ani kořen (jinak by pro některé $p \in (0, 1)$ někde bylo $0 = (1-p)\,f + p\,g$, tj. $g = \frac{p-1}{p} f$, koeficient $\frac{p-1}{p} < 0$ - spor). Celé číslo $N_{f_p} = \mathrm{ind}_{f\circ\Gamma}\, 0$ $= (2\pi i)^{-1}\int_\Gamma f_p'(z)/f_p(z)\, dz$ má v integrandu spojitou funkci dvou proměnných p, z a závisí tedy na p spojitě, je proto konstantní.

K zeslabení předpokladu: je-li podle (**) pro pevné $z \in \langle\Gamma\rangle$ hodnota $g(z) \in U(f(z), |f(z)|)$, pak $g(z)$ není na polopřímce opačné k polopřímce $0, f(z)$, tedy platí (*). □

Jiné vyjádření stejné myšlenky, že blízké funkce mají stejný počet kořenů, představuje následující věta.

Věta 17.5 (Hurwitzova věta, o součtu násobností při lok. st. konvergenci). *Nechť posloupnost funkcí f_n holomorfních v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ konverguje lokálně stejnoměrně k funkci g (podle Weierstrassovy věty je g také holomorfní).*

1) Jestliže g má v bodě $a \in \Omega$ p-násobný kořen a přitom v uzavřeném kruhu $\overline{U(a,r)} \subset \Omega$ je to její jediný kořen, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ funkce f_n nemá žádný kořen na hranici $K(a,r)$ tohoto kruhu a součet násobností všech kořenů uvnitř kruhu je p:

$$\sum\nolimits_{b\in U(a,r)} \operatorname{mult}(f_n, b) = p\,.$$

2) Nemá-li žádná f_n kořen v Ω, pak buďto g je konstantní nula anebo ani g nemá v Ω kořen.

Důkaz. Označme $\varphi(t) := a + r\,e^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Na kompaktní množině $\langle\varphi\rangle$ je $|f_n - g| \to 0$ stejnoměrně a přitom $m := \min_{\langle\varphi\rangle} |g| > 0$. Pro dostatečně velká n tam proto je $|f_n - g| < m \le |g|$. Podle Rouchéovy věty s předpokladem (**) pro funkce g, f_n a cestu φ je tedy

$$\sum\nolimits_{b\in U(a,r)} \operatorname{mult}(f_n, b) = \sum\nolimits_{b\in U(a,r)} \operatorname{mult}(g, b) = p\,.$$

V bodě 2), kdyby g nebyla konstantní nula a měla někde v Ω kořen a, pak podle bodu 1) má v jeho okolí kořen každá funkce f_n, kde $n > n_0$ - spor. □

Následující větu přiblíží jednoduchý příklad. Funkce $f(z) := z^7$ má v bodě $a = 0$ sedminásobný kořen, $b := f(a) = 0$. Pro každé $w \in \mathbb{P}$ je množina $f_{-1}(w)$ sedmiprvková, jsou to všechny kořeny rovnice $z^7 = w$ a ty jsou všechny jednonásobné, tvoří vrcholy pravidelného sedmiúhelníka. Věta zobecňuje tento fakt pro všechny holomorfní funkce, tvrdí vlastně totéž (ale jen lokálně), jen ten sedmiúhelník už nemusí být pravidelný.

Věta 17.6 (o počtu vzorů). *Nechť f je holomorfní na $U(a,R)$, označme $b := f(a)$, nechť funkce $f(z) - b$ má v bodě a p-násobný kořen (tj. f* **nabývá své hodnoty v bodě** *a* **p-násobně***). Pak existuje $r \in (0, R)$ a $\rho > 0$ takové, že pro každé $w \in \mathbb{P}(b, \rho)$ má rovnice $f(z) = w$ v kruhu $U(a,r)$ právě p kořenů a ty jsou jednonásobné.*

Důkaz. Podle věty 8.9 existuje uzavřený kruh $\overline{U(a,r)} \subset \Omega$ takový, že s výjimkou středu je v něm všude $f(z) \ne f(a) = b$ a $f'(z) \ne 0$ (jinak by byla f konstantní a $f - b$ konstantní nula). Označme $\varphi(t) := a + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, cesta $f \circ \varphi$ neprochází bodem b, označme $\rho := \operatorname{dist}(\langle f\circ\varphi\rangle, b) > 0$. Zvolme pevně $w \in \mathbb{P}(b, \rho)$.

Na $\langle\varphi\rangle$ je $|(f(z) - w) - (f(z) - b)| = |w - b| < \rho \le |f(z) - b|$, použijeme-li Rouchéovu větu pro cestu φ a funkce $f(z) - w)$, $f(z) - b$, pak obě mají v $U(a,r)$ stejný součet násobností kořenů. Ta druhá funkce má tento součet přesně p (jediný, p-násobný, v bodě a). Proto první funkce má takový součet také p, přitom v bodě a nemá kořen a v $P(a,r)$ má (díky $(f - w)' = f\,' \ne 0$) jen jednoduché kořeny, má jich tam tedy právě p, navzájem různých, jednonásobných. □

Poznámka. Tvrzení věty 17.6 pro $p > 1$ lze odvodit i elementárně [Ru, V10.32]. Bez újmy na obecnosti položme $a = b = 0$. Jestliže f je holomorfní nekonstantní v $U(0) \subset \mathbb{C}$, pak tam je $f(z) = c\,z^p + \dots$, kde $p > 1$, $c \ne 0$. V nějakém $P(0, \varepsilon_1)$ je navíc všude $f(z) \ne 0$, definujme tam funkci $h(z) := z \exp\left(\frac{1}{p} \log \frac{f(z)}{c\,z^p}\right)$, $h(0) := 0$, je $h'(0) = 1 \ne 0$. Pak v $U(0, \varepsilon_1)$ je

$$f(z) = c \cdot h^p(z)$$

a v nějakém $U(0, \varepsilon_2)$ je funkce g prostá a holomorfní. Řešení rovnice $f(z) = w \in P(0)$ nyní můžeme rozložit do dvou kroků. Najdeme všech p řešení $u_1, \dots u_p$ rovnice $u^p = w/c$ (jsou to vrcholy pravidelného p-úhelníka se středem $u = 0$) a k nim pak dopočteme $z_k := h_{-1}(u_k)$ pro $k = 1, \dots, p$ (vrcholy nějakého p-úhelníka s bodem $z = 0$ unvitř).

.... konec 13. přednášky 12.1.2012 ....

Věta 17.7 (lokální existence inverzní funkce, její derivace). *Nechť f je funkce holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Pak*

(i) *f je prostá v nějakém $U(a)$ právě když $f\,'(a) \ne 0$.*

Jestliže $f\,'(a) \ne 0$, pak existuje $r > 0$ s následujícími vlastnostmi:

(ii) *f je prostá na $U(a,r)$;*

(iii) *$G := f(U(a,r))$ je otevřená množina;*

(iv) *inverzní funkce $g := f_{-1}$ je holomorfní na G a platí $\quad g\,'(w) = 1 / f\,'(g(w))$, $w \in G$.*

Důkaz. (i) Z předchozí věty vidíme, že když je $f'(a) = 0$ (tj. $p \ge 2$), pak f není v žádném $P(a)$ prostá. Naopak, pokud je v nějakém $P(a)$ prostá, jsou případy $p \ge 2$ vyloučeny a zbývá jen $p = 1$ neboli $f'(a) \ne 0$.

(ii) Poloměr r z předchozí věty si zde označme r_1. Předchozí věta pro $p = 1$ netvrdí, že f je prostá v $U(a, r_1)$. Díky spojitosti funkce f existuje menší poloměr $r \in (0, r_1)$ takový, že $f(U(a,r)) \subset U(b, \rho)$. Dokážeme, že f je prostá v $U(a,r)$: kdyby totiž pro nějaká (navzájem různá) $z_1, z_2 \in U(a,r)$ bylo $f(z_1) = f(z_2) = w \in U(b,\rho)$, pak bychom dostali spor s předchozí větou.

(iii) Jednak máme obecnou větu 8.15, jednak v předchozí větě je nalezeno $U(b, \rho) \subset f(U(a,r))$.

(iv) Lokální inverzní funkce $z = g(w)$ existuje podle (ii). Na zlomek v definici derivace $g\,'(b)$ použijeme větu o limitě složené funkce, $(g(w) - g(b))/(w - b) = (z - a)/(f(z) - f(a)) \to 1/f\,'(a)$ pro $w \to b$. □

Poznámka. Věty 17.6 a 17.7 lze snadno zobecnit i na meromorfní funkce, použijeme-li vhodně substituci $h(z) := 1/z$, $z \in \mathbb{S}$.

.... konec textu ....

Test ke zkoušce Úvod do komplexní analýzy, 16.1.2012

Příklad. Definujeme funkce

$$(*)\qquad f(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\sin x}\,, \quad g(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}\,, \qquad a \in (1,+\infty)\,.$$

1) Je všude $f(a) = g(a)$?
2) Vyjádřete $f(a)$ explicitně (použijte reziduovou větu).
3) Odhadněte chování funkce $f(a)$ pro $a \to +\infty$ a porovnejte ho se svojí formulí odvozenou ve 2.
4) Má (*) smysl i pro jiná $a \in \mathbb{C}$? Najděte co největší oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ pro taková a.
5) Je f holomorfní v Ω ?
6) Pokud ano, najděte Laurentovu řadu funkce f v $P(\infty)$.
7) Najděte mezikruží konvergence této řady.
8) Klasifikujte všechny izolované singularity (v $\mathbb{S}$) funkce f.

Nápověda k bodu 6 (zobecnění binomické věty): pro $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| < 1$, $b \in \mathbb{C}$ je $(1+\varepsilon)^b = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{b}{j} \varepsilon^j$.

Možné řešení.

1) Při pevném a je integrand funkce 2π-periodická a přitom integrujeme přes jednu periodu. Funkce sin je jen posunutý cos, přesněji $\sin(t+\pi/2) = \cos(t)$, $t \in \mathbb{C}$. Substituce $x = t + \pi/2$ do prvního integrálu dává $f(a) = \int_{-\pi/2}^{2\pi-\pi/2} \frac{dt}{a+\cos t}$ $= g(a)$, takže funkce f, g jsou stejné.
2) Je to typová úloha, viz přednáška Typ III. Snazší je počítat $g(a)$. φ je kladně orientovná jednotková kružnice. Máme $f(a) = g(a) = \int_\varphi \frac{dz/(iz)}{a+(z+1/z)/2}\, dz = \frac{2}{i} \int_\varphi \frac{1}{z^2+2az+1}\, dz$. Jmenovatel má jednonásobné kořeny $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2-1} \in \mathbb{R}$. Je $z_1 \cdot z_2 = 1$, přitom $z_2 = -a - \sqrt{a^2-1} < -a < -1$, takže $z_2 \in \operatorname{Ext}\varphi$ a tedy $z_1 \in \operatorname{Int}\varphi$. Podle rez. věty tedy $f(a)$ $= \frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{z^2+2az+1} = 4\pi \frac{1}{2z_1+2a} = 4\pi \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = 2\pi/\sqrt{a^2-1}$, pro každé $a \in (1,+\infty)$.
3) Pro $a \to +\infty$ je v (*) integrand $\approx \frac{1}{a}$, takže $f(a) \approx 2\pi/a$, totéž vyšlo v bodě 2), takže tam není chyba ani v určení konstant ani v řádu mocniny čísla a.
4) První integrál v (*) má smysl právě když se a vyhýbá všem hodnotám funkce $-\sin x$ z intervalu $[0, 2\pi]$, tj. intervalu $[-1, 1]$. Lze tedy připustit $a \in \Omega := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
5) $f(a)$ je integrál (křivkový, po orientované úsečce $[0; 2\pi]$) s parametrem $a \in \Omega$. Integrand jako funkce dvou proměnných $h(a, x)$ je spojitý na $\Omega \times [0; 2\pi]$, jeho parciální derivace podle a, funkce $-h^2(a, x)$, je tam také spojitá, takže podle věty 7.4.3 je $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
6) Vzoreček pro $f(a)$ máme jenom pro $a \in (1, +\infty)$, ale i tam ho lze upravovat. Je $|a| > 1$, $|a^{-2}| < 1$, takže $f(a) =$ $2\pi/\sqrt{a^2-1} = \frac{2\pi}{a}/\sqrt{1-1/a^2} = \frac{2\pi}{a}(1-1/a^2)^{-1/2} = \frac{2\pi}{a} \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} (-1)^j a^{-2j} = 2\pi \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{j} (-1)^j a^{-2j-1}$, tuto rovnost jsem dokázali jenom(!) pro $a \in (1, +\infty)$. Napravo je ale Laurentova řada v $M := P(0, 1, +\infty)$, tedy nějaká funkce L holomorfní v M, nalevo je funkce f holomorfní v $\Omega \supset M$, takže podle věty o jednoznačnosti je $f = L$ všude v M.
7) Mezikruží konvergence této Laurentovy řady není větší než M, protože jinak by existovala konečná limita (v $\mathbb{R}$) $\lim\limits_{a\to 1+} (1-a^{-2})^{-1/2} = \lim\limits_{a\to 1+} \frac{1}{\sqrt{1-1/a^2}} = +\infty$.
8) Jedinou izolovanou singularitou je bod ∞, Laurentovu řadu v $P(\infty)$ už známe, je $f(a) = \frac{2\pi}{a} + \dots$, $\lim\limits_{\infty} f = 0$, takže je tam odstranitelná singularita a po dodefinování $f(\infty) := 0$ je to 1-násobný kořen.
9) (mimo test) Platí formule $f(a) = \frac{2\pi}{a}/\sqrt{1-1/a^2}$ v celém Ω ? Ukážeme, že ANO. Napravo nyní již uvažujeme komplexní odmocninu, tj. funkci $F(a) = \frac{2\pi}{a} \exp(-\frac{1}{2} \log(1-1/a^2))$ definovanou pro $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}$. Ta je holomorfní všude, kde není $1 - 1/a^2 < 0$, tj. kde není $1 < 1/a^2$. Případ $1/a^2 < 0$ by tady vedl ke sporu, takže $1/a^2 > 0$ a máme řešit $0 < a^2 < 1$, odtud $a \in (-1, 1)$, $a \neq 0$. Je tedy $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ a z věty o jednoznačnosti $f = F$ všude v Ω.
10) (mimo test) Platí formule $f(a) = 2\pi/\sqrt{a^2-1}$ v celém Ω ? Ukážeme, že NE. Napravo nyní již uvažujeme komplexní odmocninu, tj. funkci $G(a) = 2\pi \exp(-\frac{1}{2} \log(a^2-1))$ definovanou pro $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Ta je holomorfní všude kde není $a^2 - 1 < 0$, tj. kde není $a^2 < 1$. Z neholomorfnosti jsou tedy podezřelé jen body tvaru $a = iy$, $y \in \mathbb{R}$ a body $a \in (-1, 1)$. Pro speciální volbu $a_{1,2} = i \pm \varepsilon$, je $a_{1,2}^2 - 1 = -2 \pm 2i\varepsilon + \varepsilon^2$ a pro reálné $\varepsilon \to 0+$ je tedy $\arg(a_{1,2}^2 - 1) \to \pm\pi$. G není spojitá v bodě i a není to tedy funkce f.

Test ke zkoušce Úvod do komplexní analýzy, 17.1.2012

Příklad 1. Uvažujte funkci

$$f(z) = \operatorname{cotg}^2 z - \frac{1}{\log(1+z^2)}\,.$$

Kde je f holomorfní? Najděte všechny izolované singularity funkce f a určete jejich typ.

Příklad 2. Spočtěte integrál

$$\int_0^\pi \sin^{2n} x\,dx, \quad n = 1, 2, \dots\,.$$

Příklad 3. Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}}\,dx, \quad n = 1, 2, \dots\,.$$

Možné řešení.

1. První sčítanec je π-periodická sudá funkce, holomorfní v $\mathbb{C}\setminus A$, kde $A = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pro $z \to 0$ je $\cos z = 1 + O(z^2)$, $\sin z = z + O(z^3) = z\,(1+O(z^2))$, odtud $\operatorname{cotg} z = z^{-1}(1+O(z^2))$, $\operatorname{cotg}^2 z = z^{-2}(1+O(z^2)) = z^{-2}+O(1)$. V bodech množiny A má cotg^2 dvojnásobné póly.

Funkce log je sice definovaná v $\mathbb{P}$, ale holomorfní je jen na $\mathbb{P}\setminus(-\infty, 0)$. Je rovna nule jen v bodě 1. Druhý sčítanec (je to také sudá funkce) tedy není definován v bodech $\pm i$ (tam by byl $1/\log 0$), v bodě 0 (tam by byl $1/\log 1 = 1/0$). Navíc, v bodech množiny $B := \{iy;\, y \in \mathbb{R}, |y| > 1\}$ (a nikde jinde) je tam log záporného čísla. Funkce $\log(1+z^2)$ proto asi nebude spojitá v žádném bodě $iy \in B$, podrobně: pro $y > 1$ je $\arg(1 + (iy \pm \varepsilon)^2) = \arg(1 - y^2 + \varepsilon^2 \pm 2iy\varepsilon) \to \pm\pi$ pro $\varepsilon \to 0+$. Pro $y < -1$ analogicky (je sudá).

Celkem tedy f je holomorfní v $\Omega \setminus (A \cup B)$, s izolovanými singularitami jen v A. V bodě 0 mají oba sčítanci izolovanou singularitu.

Pro $z \to 0$ je $\log(1+z^2) = z^2 + O(z^4) = z^2\,(1+O(z^2))$, takže $1/\log(1+z^2) = z^{-2}(1+O(z^2)) = z^{-2}+O(1)$. Proto pro $z \to 0$ je $f(z) = O(1)$, f má v 0 odstranitelnou singularitu.

V bodech $k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ má f dvojnásobné póly.

2a. Funkce $\sin^{2n}$ je π-periodická, integrujeme ji přes jednu periodu. Substitucí $x = t + \pi/2$ dostaneme

$$v := \int_0^\pi \sin^{2n} x\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt = \int_0^\pi \cos^{2n} t\,dt,$$

což zjednodušuje další výpočty. Integrand je zde tak jednoduchý, že se můžeme obejít bez křivkových integrálů a bez reziduové věty.

$$v = \int_0^\pi (e^{it}+e^{-it})^{2n}/2^{2n}\,dt = 4^{-n}\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} e^{itk}e^{-it(2n-k)}\,dt = 4^{-n}\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} e^{2it(k-n)}\,dt.$$

Pro $k = n$ (pozor na tuto vyjímku!) je tam $e^{2it\,0} = 1$, pro ostatní k má $e^{2it(k-n)}$ primitivní funkci $e^{2it(k-n)}/(2i(k-n))$ jejíž hodnota pro $t = 0$ a $t = \pi$ je stejná a sice $1/(2i(k-n))$, takže integrál bude nula a ze sumy zůstane jen jeden nenulový člen pro $k = n$ (ten vyjímečný). Odtud $v = 4^{-n}\binom{2n}{n}\pi$. Výsledek platí i pro $n = 0$.

2b. Stejný výsledek lze získat pomocí reziduové věty, jde o typ III (viz přednáška). Nechť φ je kladně orientovaná jednotková kružnice, je

$$v := \tfrac12\int_0^{2\pi}\cos^{2n} t\,dt = \tfrac12\int_\varphi \tfrac{(z+z^{-1})^{2n}}{2^{2n}\,iz}\,dz = \tfrac{1}{2\cdot 4^n\,i}\int_\varphi \tfrac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz = \tfrac{\pi}{4^n}\operatorname{res}_0 \tfrac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}.$$

V bodě 0 má funkce $(2n+1)$-násobný pól, snadno ji (pomocí binomické věty) nahradíme Laurentovou řadou v $\mathbb{P}$ a pak jednoduše najdeme koeficient u $1/z$ (člen pro $k = n$):

$$(z^2+1)^{2n}\,z^{-2n-1} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} z^{2k-2n-1} = \ \dots + \binom{2n}{n} z^{-1} + \dots\,,$$

odtud $v = 4^{-n}\binom{2n}{n}\,\pi$.

3. Všechny kořeny funkce $1+z^{2n}$ jsou na jednotkové kružnici, $z_1 = a := e^{\pi i/2n}$, $z_2 := a^3$, $z_3 := a^5, \ \dots\ , z_n := a^{2n-1}$ (všechny v $\mathbb{C}^+$) a k nim komplexně sdružené v $\mathbb{C}^-$. Je

$$v := \int_0^{+\infty} 1/(1+x^{2n})\,dx = \tfrac12\int_{-\infty}^{+\infty} 1/(1+x^{2n})\,dx,$$

vpravo je integrál typu I (viz přednáška), takže

$$\begin{aligned} v &= \tfrac12 2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} 1/(1+z^{2n}) = \pi i\sum_{k=1}^n 1/(2nz_k^{2n-1}) = \tfrac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^n z_k/(z_k^{2n}) = \tfrac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^n(-z_k) = -\tfrac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^n a^{2k-1} \\ &= -\tfrac{\pi i}{2n}\,a\sum_{j=0}^{n-1}(a^2)^j = -\tfrac{\pi i}{2n}\,a\,(a^{2n}-1)/(a^2-1) = -\tfrac{\pi i}{2n}\,a\,(-1-1)/(a^2-1) = \tfrac{2\pi i}{2n}/(a-a^{-1}) = \tfrac{\pi}{2n\sin(\pi/2n)}. \end{aligned}$$

Test ke zkoušce Úvod do komplexní analýzy, 31.1.2012

Příklad 1. Pro meromorfní funkci

$$f(z) = \frac{1-\cos^2 z}{\sinh(\sin z)}, \ z \in \mathbb{C},$$

najděte všechny její kořeny a póly a určete jejich násobnosti.

Návod: při řešení rovnice tvaru $\sin(z) = \dots$ lze na levé straně využít součtový vzorec $\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$.

Příklad 2. Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}\, dx.$$

Návod: je $\cos 3x = (e^{3ix} + e^{-3ix})/2 = ((e^{ix})^3 + (e^{-ix})^3)/2$. Návod: v $P(0)$ používejte mocninné a Laurentovy řady.

Příklad 3. Sečtěte řadu:

$$s(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus i\,\mathbb{Z}.$$

Možné řešení.

1. V čitateli i ve jmenovateli jsou celé funkce, f je meromorfní v $\mathbb{C}$.

Funkce $1-\cos^2 z = \sin^2 z$ má kořeny $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a ty jsou dvojnásobné, protože kořeny funkce $\sin z$ jsou jednonásobné: $\cos k\pi \neq 0$.

Funkce sinh má kořeny v bodech $n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$, takže $\sinh(\sin z)$ má kořeny ve všech bodech z, které splňují rovnici $\sin z = n\pi i$, neboli (viz návod) $\sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) = n\pi i$.

Reálná část rovnice je $\sin(x)\cosh(y) = 0$, přitom $\cosh(y) > 0$, takže $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Imaginární část rovnice je $\cos(x)\sinh(y) = n\pi$, tj. $(-1)^k \sinh(y) = n\pi$, tj. $\sinh(y) = (-1)^k n\pi$. Odtud $y = (-1)^k \operatorname{arcsinh}(n\pi)$.

Všechny kořeny jmenovatele jsou tedy $a_{kn} := k\pi + i \operatorname{arcsinh}(n\pi)$, kde $k, n \in \mathbb{Z}$. Všechny kořeny čitatele jsou mezi nimi (případy $n = 0$).

Kořeny jmenovatele jsou jednonásobné: jeho derivace je $\cosh(\sin z)\cdot\cos z$, v bodě a_{kn} je zde první činitel nenulový (máme $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$) a druhý také (je $\cos^2 a_{kn} = 1 - \sin^2 a_{kn} = 1 + (n\pi)^2 > 0$).

Funkce f má tedy jednonásobné kořeny v bodech $a_{k0} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a jednonásobné póly v bodech a_{kn}, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

2. Pro kladně orientovanou jednotkovou kružnici φ platí

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}\, dx = \int_\varphi \frac{(z^3+1/z^3)/2}{5-4(z+1/z)/2}\,\frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i}\int_\varphi \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\, dz = -\pi(\operatorname{res}_0 f + \operatorname{res}_{1/2} f),$$

kde

$$f(z) = \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}.$$

Funkce f má v bodě $1/2$ jednonásobný pól, takže

$$\operatorname{res}_{1/2} f = \frac{z^6+1}{z^3(z-2)}\Big|_{z=1/2} \cdot \operatorname{res}_{1/2} \frac{1}{2z-1} = -\frac{65}{24}.$$

Funkce f má v 0 trojnásobný pól, dvakrát derivovat funkci $z^3 f(z) = \frac{z^6+1}{(2z-1)(z-2)}$ je ale pracné. V $P(0)$ je

$$\frac{1}{2z-1} = \frac{-1}{1-2z} = -(1+2z+4z^2+\dots), \quad \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\,(1+z/2+z^2/4+\dots),$$

takže

$$f(z) = \frac{1}{2z^3}\,(1+z^6)\,(1+2z+4z^2+\dots)\,(1+z/2+z^2/4+\dots) = \frac{1}{2z^3}\,(\dots + (\frac{1}{4}+1+4)\,z^2+\dots),$$

$$\operatorname{res}_0 f = \frac{21}{8} = \frac{63}{24}.$$

Tedy

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}\, dx = -\pi(\operatorname{res}_0 f + \operatorname{res}_{1/2} f) = \frac{\pi}{12}.$$

3. Je $2\,s(a) - 1/a^2 = S(a) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$, v žádném sčítanci nedělíme nulou, jde o typ VI, viz přednáška. Odtud

$$S(a) = -(\operatorname{res}_{-ia} f + \operatorname{res}_{ia} f),$$

kde

$$f(z) := \frac{\pi \operatorname{cotg}(\pi z)}{z^2+a^2}.$$

Protože f je lichá, platí

$$\operatorname{res}_{ai} f = \operatorname{res}_{-ai} f = \frac{\pi \operatorname{cotg}(a\pi i)}{2ia} = -\frac{\pi \coth(\pi a)}{2a},$$

odkud

$$S(a) = \frac{\pi \coth(\pi a)}{a}$$

$$s(a) = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi \coth(\pi a)}{2a}.$$

Test ke zkoušce Úvod do komplexní analýzy, 7.2.2012, verze A

Příklad 1. Pro funkci
$$f(z) = 1 + \cos\frac{\pi}{z+1}$$
najděte všechny kořeny a izolované singularity v $\mathbb{S}$. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ.

Příklad 2. Spočtěte integrál
$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(x^2+b^2)^3}\,dx, \quad a, b > 0\,.$$

Příklad 3. Spočtěte integrál
$$J(a,b) = \int_0^\infty \frac{dx}{x^a(x+b)}\,, \quad a \in (0,1),\ b > 0\,.$$

Možné řešení.

1. f je holomorfní v $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, protože tam jde o složení dvou holomorfních funkcí. Izolované singularity: -1, ∞.
$\lim\limits_{-1} f$ neexistuje: pro $k \in \mathbb{N}$, $a_k := -1 + 1/(2k)$, je $f(a_k) = 1 + \cos(2k\pi) = 2$, pro $b_k := -1 + 1/(2k+1)$ je $f(b_k) = 1 + \cos((2k+1)\pi) = 0$. **V bodě -1 je podstatná singularita.**
$\lim\limits_{\infty} f = 1 + \cos(0) = 2$, **v bodě ∞ je odstranitelná singularita**, lze dodefinovat $f(\infty) := 2$.
Kořeny v Ω získáme z rovnice $\cos w = -1$, tj. $e^{iw} + e^{-iw} = -2$. Pro $v = e^{iw} \neq 0$ je to kvadratická rovnice $v^2 + 2v + 1 = 0$, odtud $v = -1$, $w = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Odtud $\frac{\pi}{z+1} = (2k+1)\pi$, $\frac{1}{z+1} = 2k+1$, takže všechny **kořeny jsou** $z_k := -1 + \frac{1}{2k+1} = \frac{-2k}{2k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Máme $f'(z) = \sin(\pi(z+1)^{-1})\,\pi\,(z+1)^{-2}$, první činitel je v bodech z_k roven nule, protože tam je $\cos(\dots) = -1$. Kořeny z_k tedy nejsou jednonásobné.
Máme $f''(z) = -\cos(\pi(z+1)^{-1})\,\pi^2\,(z+1)^{-4} - \sin(\dots)\dots$. První sčítanec je v bodech z_k nenulový a druhý nula, takže $f''(z_k) \neq 0$ a **kořeny z_k jsou 2-násobné**.

2. Integrand je sudá funkce, použijeme Typ II: $I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^3}\,dx = \pi\,\mathrm{Re}(i\,c) = -\pi\,\mathrm{Im}\,c$, kde jsme označili
$$c := \operatorname{res}_{ib} e^{iaz}(z^2+b^2)^{-3}\,.$$

Postup A. Číslo c spočteme pomocí věty 12.1.3, s derivováním v bodě ib. Je $c = \frac{1}{2!}\Big(e^{iaz}(z+ib)^{-3}\Big)''$ v bodě $z = ib$, takže
$$2c = [e^{iaz}]''[(z+ib)^{-3}] + 2[e^{iaz}]'[(z+ib)^{-3}]' + [e^{iaz}][(z+ib)^{-3}]'' = e^{-ab}\Big(-a^2(2ib)^{-3} + 2ai(-3)(2ib)^{-4} + (-3)(-4)(2ib)^{-5}\Big)$$
$$= e^{-ab}\Big(-ia^2\tfrac{1}{8}b^{-3} - ia\tfrac{6}{16}b^{-4} - i\tfrac{12}{32}c^{-5}\Big) = -i\,e^{-ab}\Big(\tfrac{1}{8}b^{-3} + a\tfrac{3}{8}b^{-4} + \tfrac{3}{8}c^{-5}\Big) = \tfrac{-i}{8b^5}\,e^{-ab}\Big(a^2b^2 + 3ab + 3\Big).$$
Odtud $I(a,b) = \pi(a^2b^2 + 3ab + 3)/(16\,b^5e^{ab})$.
Postup B. Číslo c spočteme užitím Laurentovy řady se středem ib. Pro $z = ib + \varepsilon$, $\varepsilon \in P(0)$, je
$e^{iaz} = e^{-ab}e^{ia\varepsilon} = e^{-ab}\Big(1 + ia\varepsilon - \frac{a^2}{2}\varepsilon^2 + \dots\Big)$, dále
$$(z^2+b^2)^{-3} = (2ib\varepsilon + \varepsilon^2)^{-3} = (2ib\varepsilon)^{-3}(1 + \tfrac{\varepsilon}{2ib})^{-3} = \tfrac{i}{8b^3\varepsilon^3}\Big(1 + \tbinom{-3}{1}\tfrac{\varepsilon}{2ib} + \tbinom{-3}{2}(\tfrac{\varepsilon}{2ib})^2 + \dots\Big) = \tfrac{i}{8b^3\varepsilon^3}\Big(1 - \tfrac{3\varepsilon}{2ib} - \tfrac{3\varepsilon^2}{2b^2} + \dots\Big).$$
Vynásobením těchto dvou řad najdeme koeficient c u $\varepsilon^{-1} = 1/(z - ib)$:
$c = e^{-ab}\frac{i}{8b^3}\Big(-\frac{a^2}{2} - \frac{3a}{2b} - \frac{3}{2b^2}\Big) = -i\frac{1}{16b^5}\,e^{-ab}\Big(a^2b^2 + 3ab + 3\Big)$ a pak stejný výsledek $I(a,b)$ jako je v A.

3. Jde o integrál typu IV. Po substituci $x = e^t, t \in \mathbb{R}$, je $J(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-a)t}}{e^t+b}\,dt$.
Jmenovatel má v $\mathbb{C}$ kořen $c := \pi i + \ln b$ a další kořeny mimo pás $\mathrm{Im} \in (0, 2\pi)$. Označíme-li $B := 1 - a \in (0,1)$ a $Q(z) := 1/(z+b)$ je (viz přednáška) $J(a,b) = \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi Bi)}\operatorname{res}_c Q(e^z)e^{Bz}$.
Spočteme reziduum, $\operatorname{res}_c \frac{\exp(Bz)}{\exp(z)+b} = \frac{\exp(Bc)}{\exp(c)} = \frac{\exp(B\pi i)\exp(B\ln b)}{-b} = -e^{B\pi i}b^{B-1} = -e^{B\pi i}b^{-a}$.
Nakonec upravíme $J(a,b) = -\frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi Bi)}\,e^{B\pi i}b^{-a} = -\pi\frac{2i}{\exp(-\pi Bi)1-\exp(\pi Bi)}\,b^{-a} = \frac{\pi}{\sin(B\pi)}\,b^{-a} = \frac{\pi}{b^a\sin(a\pi)}\,.$

Test ke zkoušce Úvod do komplexní analýzy, 7.2.2012, verze B

Příklad 1. Pro funkci

$$f(z) = 1 + \sin \frac{\pi}{z+1}$$

najděte všechny kořeny a izolované singularity v $\mathbb{S}$. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ.

Příklad 2. Spočtěte integrál

$$I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{(x^2+b^2)^2}\, dx, \quad a, b > 0\,.$$

Příklad 3. Spočtěte integrál:

$$J(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^a\, dx}{(x+b)^2}\,, \quad a \in (-1,0),\ b > 0\,.$$

Možné řešení.

1. f je holomorfní v $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, kde jde o složení dvou holomorfních funkcí. Izolované singularity jsou -1 a ∞.
$\lim\limits_{-1} f$ neexistuje ani pro $z \in \mathbb{R}$, **v bodě -1 je podstatná singularita**.
$\lim\limits_{\infty} f = 1 + \sin(0) = 1$, **v bodě ∞ je odstranitelná singularita**, $f(\infty) := 1$.
Kořeny v Ω řeší rovnici $\sin \frac{\pi}{z+1} = -1$, $\frac{\pi}{z+1} = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{1}{z+1} = \frac{-1}{2} + 2k = \frac{4k-1}{2}$, takže **jsou** $z_k := -1 + \frac{2}{4k-1} = \frac{3-4k}{4k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Máme $f'(z) = \cos(\pi/(z+1))\,\pi\,(z+1)^{-2}$, první činitel je v bodech z_k roven nule, protože tam je $\sin(...) = -1$. Kořeny tedy nejsou jednonásobné.

Máme $f''(z) = \sin(\pi/(z+1))\,\pi^2\,(z+1)^{-4} - \cos(\dots)\cdot\dots$. První sčítanec je v bodech z_k nenulový a druhý nula. **Kořeny z_k jsou 2-násobné**.

2. Integrand je sudá funkce, použijeme Typ II: $I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\, dx = \pi\,\mathrm{Re}(i\,c) = -\pi\,\mathrm{Im}\, c$, kde jsme označili

$$c := \mathrm{res}_{ib}\, e^{iaz}(z^2+b^2)^{-2}\,.$$

Postup A. Číslo c spočteme pomocí věty 12.1.3, s derivováním v bodě ib. Je $c = \frac{1}{1!}\Big(e^{iaz}(z+ib)^{-2}\Big)'$ v bodě $z = ib$, takže
$c = [e^{iaz}]'[(z+ib)^{-2}] + [e^{iaz}][(z+ib)^{-2}]' = e^{-ab}\Big(ia\,(2ib)^{-2} - 2\cdot(2ib)^{-3}\Big) = e^{-ab}\Big(ia\frac{-1}{4b^2} - 2\frac{i}{8b^3}\Big) = -i\,e^{-ab}\frac{1}{4b^3}\Big(ab+1\Big)$.
Odtud $I(a,b) = \pi(ab+1)/(4\,b^3 e^{ab})$.

Postup B. Číslo c spočteme užitím Laurentovy řady se středem ib. Pro $z = ib + \varepsilon$, $\varepsilon \in P(0)$, je
$e^{iaz} = e^{-ab}e^{ia\varepsilon} = e^{-ab}\Big(1 + ia\varepsilon + \dots\Big)$, dále
$(z^2+b^2)^{-2} = (2ib\varepsilon + \varepsilon^2)^{-2} = (2ib\varepsilon)^{-2}(1 + \frac{\varepsilon}{2ib})^{-2} = -\frac{1}{4b^2\varepsilon^2}\Big(1 + \binom{-2}{1}\frac{\varepsilon}{2ib} + \dots\Big) = -\frac{1}{4b^2\varepsilon^2}\Big(1 + i\frac{\varepsilon}{b} + \dots\Big)$.
Vynásobením těchto dvou řad najdeme koeficient c u $\varepsilon^{-1} = 1/(z-ib)$:
$c = -i\,e^{-ab}\frac{1}{4b^2}\Big(\frac{1}{b} + ia\Big) = -i\,e^{-ab}\frac{1}{4b^3}(1+ab)$, a pak stejný výsledek $I(a,b)$ jako je v A.

3. Jde o integrál typu IV. Po substituci $x = e^t, t \in \mathbb{R}$, je $J(a,b) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(1+a)t}}{e^t+b}\, dt$.
Jmenovatel má v $\mathbb{C}$ kořen $c := \pi i + \ln b$ a další kořeny mimo pás $\mathrm{Im} \in (0, 2\pi)$. Označíme-li $B := 1 + a \in (0,1)$ a $Q(z) := 1/(z+b)$ je (viz přednáška) $J(a,b) = \frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi Bi)}\,\mathrm{res}_c\, Q(e^z)e^{Bz}$.
Spočteme reziduum, $\mathrm{res}_c \frac{\exp(Bz)}{\exp(z)+b} = \frac{\exp(Bc)}{\exp(c)} = \frac{\exp(B\pi i)\exp(B\ln b)}{-b} = -e^{B\pi i}b^{B-1} = -e^{B\pi i}b^a$.
Nakonec upravíme $J(a,b) = -\frac{2\pi i}{1-\exp(2\pi Bi)}\,e^{B\pi i}b^a = -\pi\frac{2i}{\exp(-\pi Bi)1-\exp(\pi Bi)}\,b^a = \frac{\pi}{\sin(B\pi)}\,b^a = \frac{\pi b^a}{\sin(-a\pi)}\,.$

Test ke zkoušce Úvod do komplexní analýzy, 14.2.2012

Příklad 1. Pro funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\,\frac{\exp(4z) - 1}{1 - \cos z}$$

najděte všechny kořeny a izolované singularity v $\mathbb{S}$. Pro kořeny určete jejich násobnost, pro izolované singularity jejich typ.

Příklad 2. Spočtěte integrál

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\,.$$

Příklad 3. Pro $a > 0$ spočtěte integrály

$$S(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx\,, \quad C(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx\,.$$

Možné řešení.

1. Čitatel i jmenovatel jsou celé funkce, f je tedy (po dodefinování limitami) meromorfní v $\mathbb{C}$.
Kořeny čitatele jsou $a_k := k\pi i/2$, $k \in \mathbb{Z}$ a jsou jednonásobné, protože derivace čitatele je $4\exp(4z) \neq 0$.
Kořeny funkce $1 - \cos z$ získáme řešením rovnice $\cos z - 1 = 0$, tj. $e^{iz} + e^{-iz} - 2 = 0$. Při označení $e^{iz} = v \neq 0$ řešíme kvadratickou rovnici $v^2 - 2v + 1 = 0$, odtud $v = 1$, takže $e^{iz} = 1$, všechny kořeny funkce $1 - \cos z$ tedy jsou $b_n := 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Bod $b_0 = 0$ je dvojnásobný kořen (Taylorova řada se středem v nule je $1 - (1 - z^2/2) + \dots$) a díky 2π-periodě jsou ostatní kořeny b_n také dvojnásobné.

Funkce f tedy má **v bodě nula $3 + 2 - 1 = 4$-násobný pól, v bodech a_k pro $k \neq 0$ jednonásobné kořeny, v bodech b_n pro $n \neq 0$ dvojnásobné póly**.

2. Jde o integrál typu I, označme

$$f(z) := \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(z+i)^{n+1}(z-i)^{n+1}}\,,$$

v bodech $\pm i$ jsou $(n+1)$-násobné póly. Spočteme

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_i f =& \frac{1}{n!} \lim_{z\to i} \left[(z+i)^{-n-1}\right]^{(n)} = \\
=& \frac{1}{n!}\,(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-1-n+1)\,(2i)^{-n-1-n} = \\
=& \frac{4^{-n}}{2i}\,\frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = \\
=& \frac{4^{-n}}{2i}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

a tedy

$$I_n = \frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

3. Jde o integrály typu II. V prvním z nich je integrandem lichá funkce, proto $S(a) = 0$. Druhý spočteme, je

$$C(a) = \operatorname{Re}\left[2\pi i\ \operatorname{res}_{ia} \frac{\exp(iz)}{(z-ia)^2(z+ia)^2}\right].$$

Reziduum funkce, která má v bodě ia dvojnásobný pól, najdeme derivováním pomocné holomorfní funkce v bodě ia,

$$\frac{1}{1!}\left[\frac{\exp(iz)}{(z+ia)^2}\right]' = \frac{i\exp(iz)(z+ia)^2 - \exp(iz)\,2\,(z+ia)}{(z+ia)^4}\,,$$

pro $z = ia$ je to

$$\frac{e^{-a}\,(-4ia^2 - 4ia)}{16\,a^4} = -\frac{i\,(a+1)}{4\,a^3\,e^a}\,.$$

Odtud

$$C(a) = \frac{\pi(a+1)}{2\,a^3\,e^a}\,.$$