4. cvičení

Úloha 1 (Vnoření do součinu dvouprvkových prostorů). Buď S Sierpinského prostor, tj. $\big(\{a,b\},\{\emptyset,\{a\},\{a,b\}\}\big)$, a buď I_2 dvouprvkový indiskrétní prostor. Dokažte, že každý topologický prostor je možné vnořit do součinu $S^A \times I_2^B$ pro vhodné množiny A a B.

Úloha 2 (Lindelöfova vlastnost). Dokažte, že Sorgenfreyova přímka je Lindelöfova, ale její druhá mocnina není Lindelöfova.

Úloha 3 (Separabilita a Lindelöfova vlastnost nejsou ve vztahu). Rozhodněte, zda Lindelöfův prostor musí být separabilní a naopak. Jak je tomu pro metrizovatelné prostory?

Úloha 4 (Mocniny konvergentní posloupnosti). Proč nejsou žádné dva z následujících tří prostorů homeomorfní?

- $\omega + 1$,
- $(\omega + 1)^2$,
- $(\omega + 1)^3$.

Úloha 5 (Variety). Dokažte, že součin $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ je homeomorfní s $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Symbol $\mathbb{S}^1$ zde značí kružnici. Dokážete toto tvrzení zobecnit pro vyšší dimenze?

Úloha 6 (Cantorova množina). Buď $\mathbb{C}$ Cantorova množina, tj.

$$\mathbb{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \colon a_i \in \{0,2\} \right\}.$$

Dokažte, že $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ je homeomorfní s $\mathbb{C}$.

Úloha 7 (Spojité prosté zobrazení nemusí být homeomorfizmus). Nechť $X = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \colon |x| < |y|\}$ je podprostor roviny $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Nechť Y je kvocientem $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ podle ekvivalence $\sim$, která je definovaná požadavkem $(x,y) \sim (u,v)$ právě když buď $(x,y) = (u,v)$ nebo $y = v = 0$. Dokažte, že existuje prosté spojité zobrazení prostoru Y na prostor X, ale prostory X a Y nejsou homeomorfní.

Úloha 8 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery). Součin kontinuum mnoha separabilních prostorů je separabilní prostor. Zkuste dokázat alespoň pro součin spočetně mnoha prostorů.