OBECNÁ TOPOLOGIE

17. EUKLIDOVSKÉ PROSTORY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

DEFINICE (Označení)

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme množinu n-tic reálných čísel $\mathbb{R}^n$ a budeme ji nazývat Euklidovský prostor. Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ označuje $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $x \cdot y = \sum x_n y_n$ postupně součet a skalární součin.
2. Píšeme x^2 místo $x \cdot x$. Pak $|x| = \sqrt{x^2}$ je velikost prvku a $d(x, y) = |(x - y)|$ je vzdálenost dvou prvků. Funkce d se označuje metrika a prostor $\mathbb{R}^n$ se zpravidla uvažuje s metrikou d.
3. Afinní podprostor dimenze $n - 1$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ se nazývá nadrovina.
4. Platí $(x \cdot y)^2 \leq |x||y|$ (Cauchy-Schwartzova nerovnost) a $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Minkowského nerovnost), která přepsáním dává trojúhelníkovou nerovnost pro metriku d.

DEFINICE (Označení)

1. Pro $n \in \mathbb{N}$ označíme množinu n-tic reálných čísel $\mathbb{R}^n$ a budeme ji nazývat Euklidovský prostor. Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ označuje $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $x \cdot y = \sum x_n y_n$ postupně součet a skalární součin.
2. Píšeme x^2 místo $x \cdot x$. Pak $|x| = \sqrt{x^2}$ je velikost prvku a $d(x, y) = |(x - y)|$ je vzdálenost dvou prvků. Funkce d se označuje metrika a prostor $\mathbb{R}^n$ se zpravidla uvažuje s metrikou d.
3. Afinní podprostor dimenze $n - 1$ v prostoru $\mathbb{R}^n$ se nazývá nadrovina.
4. Platí $(x \cdot y)^2 \leq |x||y|$ (Cauchy-Schwartzova nerovnost) a $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Minkowského nerovnost), která přepsáním dává trojúhelníkovou nerovnost pro metriku d.

Koule a sféra

Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme n-rozměrnou kouli B^n, n-rozměrnou sféru S^n, identifikací protilehlých bodů na S^n získáme n-rozměrný projektivní prostor P^n.

Koule a sféra

Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme n-rozměrnou kouli B^n, n-rozměrnou sféru S^n, identifikací protilehlých bodů na S^n získáme n-rozměrný projektivní prostor P^n.

Ten projektivní prostor je netriviální i v triviálním případě.

Koule a sféra

Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme n-rozměrnou kouli B^n, n-rozměrnou sféru S^n, identifikací protilehlých bodů na S^n získáme n-rozměrný projektivní prostor P^n.

Ten projektivní prostor je netriviální i v triviálním případě.

Projektivní rovina je, když máte jenom polovinu Zeměkoule a musí to stačit.

Koule a sféra

Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme n-rozměrnou kouli B^n, n-rozměrnou sféru S^n, identifikací protilehlých bodů na S^n získáme n-rozměrný projektivní prostor P^n.

Ten projektivní prostor je netriviální i v triviálním případě.

Projektivní rovina je, když máte jenom polovinu Zeměkoule a musí to stačit.

Animace je zde.

DEFINICE (Simplex)

Nechť body $a_0, a_1, \ldots, a_n$ v $\mathbb{R}^m$ jsou affinně nazávislé (neleží v jedné $(n-1)$-rozměrné nadrovině). Pak konvexní obal

$$\operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$$

bodů $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývá n-rozměrný simplex s vrcholy $a_0, a_1, \ldots, a_n$, značí se

$$\Delta(a_0, a_1, \ldots, a_n)\ .$$

DEFINICE (Simplex)

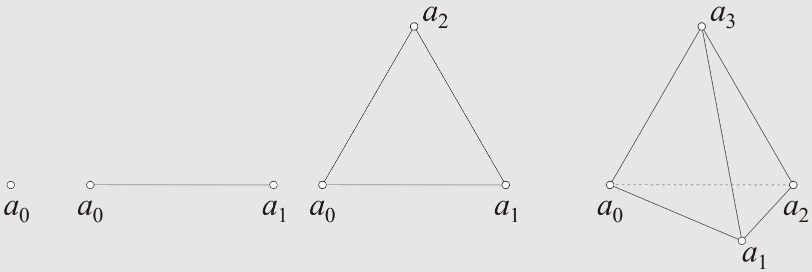
Nechť body $a_0, a_1, \ldots, a_n$ v $\mathbb{R}^m$ jsou affinně nazávislé (neleží v jedné $(n-1)$-rozměrné nadrovině). Pak konvexní obal

$$\operatorname{conv}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$$

bodů $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývá n-rozměrný simplex s vrcholy $a_0, a_1, \ldots, a_n$, značí se

$$\Delta(a_0, a_1, \ldots, a_n)\ .$$

Pro $n = 0$ jde o bod, pro $n = 1$ jde o úsečku, pro $n = 2$ dostaneme trojúhelník, pro $n = 3$ dostaneme čtyřstěn, …



Pro pořádek pro $n = -1$ odpovídá prázdné množině.

DEFINICE (Dimenze simplexu)

Číslo n se nazývá dimenze simplexu Δ, značíme $\dim \Delta$.
Označme n-rozměrný afinní podprostor $\mathbb{R}^m$ obsahující vrcholy symbolem

$$H(a_0, a_1, \dots, a_n)\ ,$$

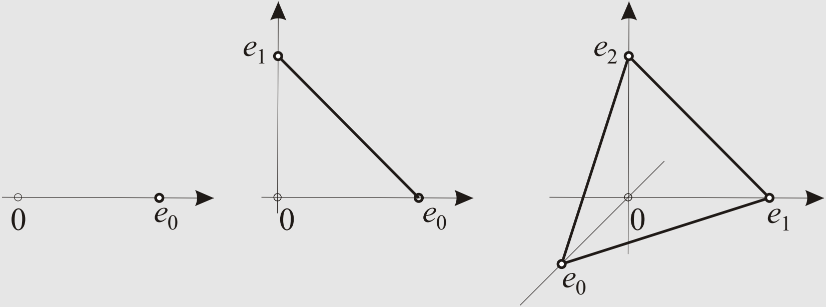
budeme mu říkat nosný podprostor simplexu.
Hranice simplexu Δ v romto nosném podprostoru budeme nazývat hranice simplexu a značit $\mathrm{Bd}\Delta$.
Každý bod simplexu je konvexní kombinací vrcholů $a_0, a_1, \dots, a_n$. Příslušné koeficienty v tomto vyjádření nazveme barycentrické souřednice daného bodu. Bod $\frac{1}{n+1}\sum a_j$ se nazývá těžiště simplexu Δ.
Simplex s $n+1$ vrcholy v $\mathbb{R}^{n+1}$ umístěnými na souřadnicových osách ve vzdálenosti 1 od počátku značíme Δ^n. V tomto simplexu barycentrické souřadnice odpovídají kartézským.

DEFINICE (Dimenze simplexu)

Číslo n se nazývá dimenze simplexu Δ, značíme $\dim \Delta$.
Označme n-rozměrný afinní podprostor $\mathbb{R}^m$ obsahující vrcholy symbolem

$$H(a_0, a_1, \dots, a_n)\ ,$$

budeme mu říkat nosný podprostor simplexu.
Hranice simplexu Δ v romto nosném podprostoru budeme nazývat hranice simplexu a značit $\mathrm{Bd}\Delta$.
Každý bod simplexu je konvexní kombinací vrcholů $a_0, a_1, \dots, a_n$. Příslušné koeficienty v tomto vyjádření nazveme barycentrické souřednice daného bodu. Bod $\frac{1}{n+1}\sum a_j$ se nazývá těžiště simplexu Δ.
Simplex s $n+1$ vrcholy v $\mathbb{R}^{n+1}$ umístěnými na souřadnicových osách ve vzdálenosti 1 od počátku značíme Δ^n. V tomto simplexu barycentrické souřadnice odpovídají kartézským.


0
e_0
e_1
0
e_0
e_2
0
e_1
e_0

DEFINICE (Stěna simplexu)

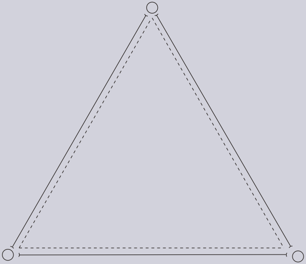
Simplex Δ_k s $k+1$ vrcholy, které jsou zároveň vrcholy simplexu Δ s $n+1$ vrcholy, se nazývá k-rozměrná stěna simplexu Δ (pokud $k = n-1$, říkáme jí ploška.
Je-li simplex Δ' stěnou simplexu Δ, píšeme $\Delta' \leq \Delta$, pokud nejsou identické, píšeme $\Delta' < \Delta$.

DEFINICE (Stěna simplexu)

Simplex Δ_k s $k+1$ vrcholy, které jsou zároveň vrcholy simplexu Δ s $n+1$ vrcholy, se nazývá k-rozměrná stěna simplexu Δ (pokud $k = n-1$, říkáme jí ploška.
Je-li simplex Δ' stěnou simplexu Δ, píšeme $\Delta' \leq \Delta$, pokud nejsou identické, píšeme $\Delta' < \Delta$.

Pozorování

1. Simplex je omezený a uzavřený, tedy kompaktní.
2. Simplex bez jednoho vrcholu je kovexní.
3. Každé dva simplexy téže dimenze jsou afinně izomorfní.
4. Hranice simplexu je sjednocením jeho plošek.
5. Simplex je disjunktním sjednocením geometrických vnitřků všech svých stěn.

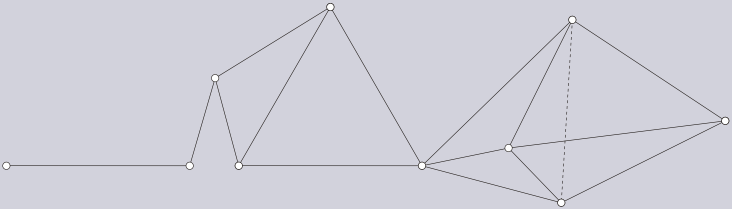


DEFINICE (Komplex)

Konečná rodinka $\mathcal{K}$ simplexů v $\mathbb{R}^m$ se nazývá komplex, pokud

1. obsahuje všechny stěny svých simplexů,
2. průnik libovolných dvou jejích simplexů je jejich společná stěna.

Dimenze $\dim \mathcal{K} = \max\{\dim \Delta, \Delta \in \mathcal{K}\}$.
Podkomplex komplexu je jeho podmnožina, která je zároveň sama komplexem.
Nechť $\mathcal{K}$ je komplex a $n \in \mathbb{N}$. Rodinka $\mathcal{K}^{[n]} = \{\Delta \in \mathcal{K} : \dim \Delta \leq n\}$ se nazývá n-rozměrná kostra komplexu $\mathcal{K}$.

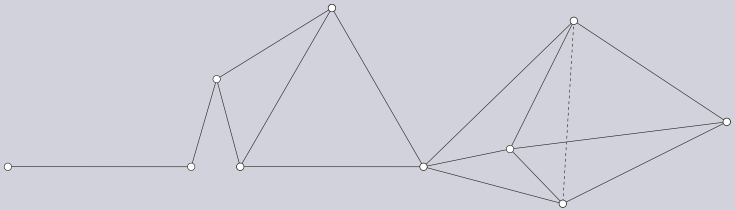


DEFINICE (Komplex)

Konečná rodinka $\mathcal{K}$ simplexů v $\mathbb{R}^m$ se nazývá komplex, pokud

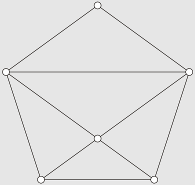
1. obsahuje všechny stěny svých simplexů,
2. průnik libovolných dvou jejích simplexů je jejich společná stěna.

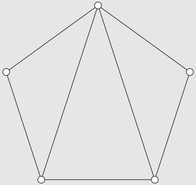
Dimenze $\dim \mathcal{K} = \max\{\dim \Delta, \Delta \in \mathcal{K}\}$.
Podkomplex komplexu je jeho podmnožina, která je zároveň sama komplexem.
Nechť $\mathcal{K}$ je komplex a $n \in \mathbb{N}$. Rodinka $\mathcal{K}^{[n]} = \{\Delta \in \mathcal{K} : \dim \Delta \leq n\}$ se nazývá n-rozměrná kostra komplexu $\mathcal{K}$.



DEFINICE (Mnohostěn)

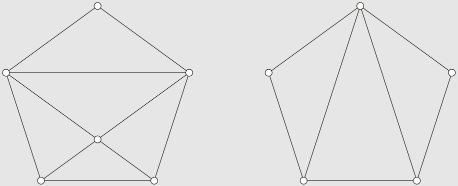
Nechť $\mathcal{K}$ je komplex. Množinu $\cup\{\Delta : \Delta \in \mathcal{K}\}$ nazýváme nosný prostor komplexu $\mathcal{K}$, značíme $|\mathcal{K}|$.
Nosný prostor komplexu lze psát jako disjunktní sjednocení $|\mathcal{K}| = \cup\{\mathrm{int}\Delta : \Delta \in \mathcal{K}\}$. Pro každý $p \in \mathcal{K}$ je takto určen právě jeden simplex $\Delta \in \mathcal{K}$, pro který $p \in \Delta$. Tento simplex nazýváme nosič bodu p.
Množina $X \subset \mathbb{R}^m$, pro kterou existuje komplex $\mathcal{K}$, pro který $|\mathcal{K}| = X$, se nazývá mnohostěn. Pro tento mnohostěn je uvedený komplex jeho triangulace.





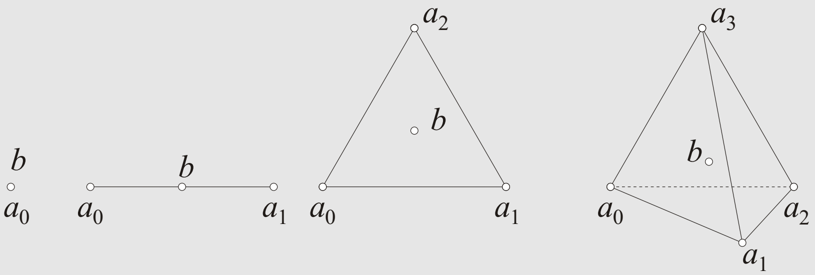
DEFINICE (Mnohostěn)

Nechť $\mathcal{K}$ je komplex. Množinu $\cup\{\Delta : \Delta \in \mathcal{K}\}$ nazýváme nosný prostor komplexu $\mathcal{K}$, značíme $|\mathcal{K}|$.
Nosný prostor komplexu lze psát jako disjunktní sjednocení $|\mathcal{K}| = \cup\{\mathrm{int}\Delta : \Delta \in \mathcal{K}\}$. Pro každý $p \in \mathcal{K}$ je takto určen právě jeden simplex $\Delta \in \mathcal{K}$, pro který $p \in \Delta$. Tento simplex nazýváme nosič bodu p.
Množina $X \subset \mathbb{R}^m$, pro kterou existuje komplex $\mathcal{K}$, pro který $|\mathcal{K}| = X$, se nazývá mnohostěn. Pro tento mnohostěn je uvedený komplex jeho triangulace.



DEFINICE (Barycentrické souřadnice)

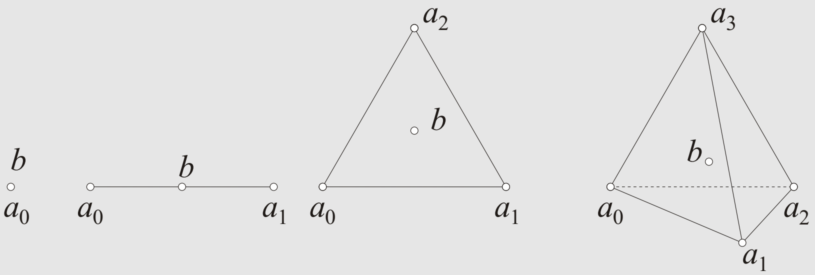
Nechť $a_0, a_1, \dots, a_k$ jsou všechny vrcholy komplexu $\mathcal{K}$. Nechť bod $p \in |\mathcal{K}|$ má ve svém nosiči $\Delta(a_3, a_7, a_{13})$ barycentrické souřadnice (r_3, r_7, r_{13}). Doplníme je nulami pro indexy různé od 3, 7 a 13 a dostaneme barycentrické souřadnice $(0, 0, r_3, 0, 0, 0, r_7, 0, 0, 0, 0, 0, r_{13}, \dots, 0)$ bodu p v komplexu $\mathcal{K}$. Pak lze psát $p = \sum r_j a_j$, kde r_j jsou nezáporná čísla, jejichž součet je 1.
Komplex, který obsahuje právě simplexy $\Delta(e_{j_0}, e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ odpovídající simplexům $\Delta(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_k})$ v $\mathcal{K}$ označíme $\bar{\mathcal{K}}$. Zřejmě jde o homeomorfní komplexy (zobrazení pomocí barycentrických souřadnic).



DEFINICE (Barycentrické souřadnice)

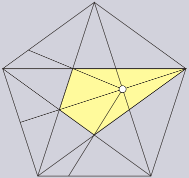
Nechť $a_0, a_1, \dots, a_k$ jsou všechny vrcholy komplexu $\mathcal{K}$. Nechť bod $p \in |\mathcal{K}|$ má ve svém nosiči $\Delta(a_3, a_7, a_{13})$ barycentrické souřadnice (r_3, r_7, r_{13}). Doplníme je nulami pro indexy různé od 3, 7 a 13 a dostaneme barycentrické souřadnice $(0, 0, r_3, 0, 0, 0, r_7, 0, 0, 0, 0, 0, r_{13}, \dots, 0)$ bodu p v komplexu $\mathcal{K}$. Pak lze psát $p = \sum r_j a_j$, kde r_j jsou nezáporná čísla, jejichž součet je 1.

Komplex, který obsahuje právě simplexy $\Delta(e_{j_0}, e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ odpovídající simplexům $\Delta(a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_k})$ v $\mathcal{K}$ označíme $\bar{\mathcal{K}}$. Zřejmě jde o homeomorfní komplexy (zobrazení pomocí barycentrických souřadnic).



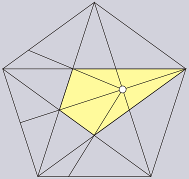
DEFINICE (Hvězda vrcholu)

Pro každý vrchol a komplexu $\mathcal{K}$ označíme $\mathrm{star}\, a = \cup\{\mathrm{int}\Delta : a \text{ je vrchol simplexu } \Delta \in \mathcal{K}\}$ a nazveme ji hvězda vrcholu a v komplexu $\mathcal{K}$.



DEFINICE (Hvězda vrcholu)

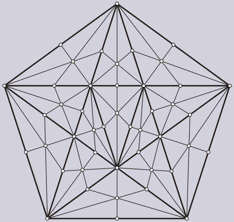
Pro každý vrchol a komplexu $\mathcal{K}$ označíme $\mathrm{star}\,a = \cup\{\mathrm{int}\,\Delta : a \text{ je vrchol simplexu } \Delta \in \mathcal{K}\}$ a nazveme ji hvězda vrcholu a v komplexu $\mathcal{K}$.



DEFINICE (Barycentrické dělení)

Řekneme, že komplex $\mathcal{K}'$ je dělení komplexu $\mathcal{K}$, pokud $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}'|$ a každý simplex $\Delta' \in \mathcal{K}'$ leží v jistém simplexu $\Delta \in \mathcal{K}$.

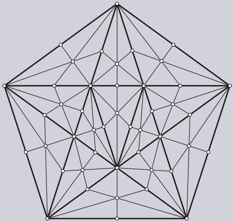
Barycentrické dělení $\mathcal{K}'$ komplexu $\mathcal{K}$ nazveme rodinku simplexů ve tvaru $\Delta(b_0, b_1, \ldots, b_q)$, kde b_h je těžiště simplexu $\Delta_h \in \mathcal{K}$ pro $h = 0, 1, \ldots, q$ a $\emptyset \neq \Delta_0 < \Delta_1 < \cdots < \Delta_q$.



DEFINICE (Barycentrické dělení)

Řekneme, že komplex $\mathcal{K}'$ je dělení komplexu $\mathcal{K}$, pokud $|\mathcal{K}| = |\mathcal{K}'|$ a každý simplex $\Delta' \in \mathcal{K}'$ leží v jistém simplexu $\Delta \in \mathcal{K}$.

Barycentrické dělení $\mathcal{K}'$ komplexu $\mathcal{K}$ nazveme rodinku simplexů ve tvaru $\Delta(b_0, b_1, \dots, b_q)$, kde b_h je těžiště simplexu $\Delta_h \in \mathcal{K}$ pro $h = 0, 1, \dots, q$ a $\emptyset \neq \Delta_0 < \Delta_1 < \cdots < \Delta_q$.



DEFINICE (Simplexní zobrazení)

Simplexy zapisujeme $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$, pokud se vrcholy neopakují, pokud to není zaručeno, píšeme $\Delta\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$.
Zobrazení mezi komplexy se nazve simplexní zobrazení, pokud obraz simplexu určeného množinou vrcholů V je simplex určený obrazy vrcholů z V.

DEFINICE (Simplexní zobrazení)

Simplexy zapisujeme $\Delta(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, pokud se vrcholy neopakují, pokud to není zaručeno, píšeme $\Delta\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.
Zobrazení mezi komplexy se nazve simplexní zobrazení, pokud obraz simplexu určeného množinou vrcholů V je simplex určený obrazy vrcholů z V.

TVRZENÍ (Vnoření do $\mathbb{R}^{2n+1}$)

Každý n-rozměrný komplex je simplexně izomorfní komplexu v $\mathbb{R}^{2n+1}$.

TVRZENÍ (Vnoření do $\mathbb{R}^{2n+1}$)

Každý n-rozměrný komplex je simplexně izomorfní komplexu v $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Velice užitečné tvrzení.

TVRZENÍ (Vnoření do $\mathbb{R}^{2n+1}$)

Každý n-rozměrný komplex je simplexně izomorfní komplexu v $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Velice užitečné tvrzení.

Prostě si ty body rozmístíme v tom velkém prostoru ukrutně nelineárně a máme to.

DEFINICE (Simplexní aproximace)

Pro simplexní zobrazení $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ mezi komplexy lze přirozeně definovat (pomocí barycentrických souřadnic) indukované zobrazení $|\varphi| : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$.
Je-li φ simplexním izomorfismem, je $|\varphi|$ homeomorfizmem.
Zobrazení $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ se nazývá simplexní aproximací zobrazení $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ pokud $f(\mathrm{star}\, a) \subset \mathrm{star}\, \varphi(a)$.
V tom případě je $|\varphi|$ homotopické s f.

DEFINICE (Simplexní aproximace)

Pro simplexní zobrazení $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ mezi komplexy lze přirozeně definovat (pomocí barycentrických souřadnic) indukované zobrazení $|\varphi| : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$.
Je-li φ simplexním izomorfismem, je $|\varphi|$ homeomorfizmem.
Zobrazení $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ se nazývá simplexní aproximací zobrazení $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ pokud $f(\mathrm{star} a) \subset \mathrm{star} \varphi(a)$.
V tom případě je $|\varphi|$ homotopické s f.

Pozorování

Pro spojité zobrazení $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že f má simplexní aproximaci φ definovanou na barycentrickém dělení řádu p komplexu $\mathcal{K}$.

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť se komplex $\mathcal{K}$ *skládá ze simplexu* Δ *a všech jeho stěn. Nechť* $\mathcal{K}'$ *(barycentrické) dělení komplexu* $\mathcal{K}$. *Je-li* $\varphi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ *simplexní zobrazení, pro které platí* $a \in \mathrm{star}\varphi(a)$ *pro každý vrchol* a *komplexu* $\mathcal{K}'$, *pak existuje simplex* $\Delta' \in \mathcal{K}'$ *tak, že* $\varphi(\Delta') = \Delta$.

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť se komplex $\mathcal{K}$ skládá ze simplexu Δ a všech jeho stěn. Nechť $\mathcal{K}'$ (barycentrické) dělení komplexu $\mathcal{K}$. Je-li $\varphi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ simplexní zobrazení, pro které platí $a \in \mathrm{star}\varphi(a)$ pro každý vrchol a komplexu $\mathcal{K}'$, pak existuje simplex $\Delta' \in \mathcal{K}'$ tak, že $\varphi(\Delta') = \Delta$.

Tuze důležité lemma.

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť se komplex $\mathcal{K}$ skládá ze simplexu Δ a všech jeho stěn. Nechť $\mathcal{K}'$ (barycentrické) dělení komplexu $\mathcal{K}$. Je-li $\varphi : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ simplexní zobrazení, pro které platí $a \in \mathrm{star}\varphi(a)$ pro každý vrchol a komplexu $\mathcal{K}'$, pak existuje simplex $\Delta' \in \mathcal{K}'$ tak, že $\varphi(\Delta') = \Delta$.

Tuze důležité lemma.

Zdá se, že na něm závisí řada následujících vět.

TVRZENÍ (No-retraction)

Sféra S^{n-1} *není retraktem koule* B^n.

TVRZENÍ (No-retraction)

Sféra S^{n-1} *není retraktem koule* B^n.

TVRZENÍ (Brouwer)

Každé spojité sobrazení f uzavřené koule $\bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ do sebe má pevný bod.

TVRZENÍ (Brouwer)

Každé spojité sobrazení f uzavřené koule $\bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ do sebe má pevný bod.

Fundamentální hypotéza (Hauptvermutung)

Mají každé dvě triangulace homeomorfních mnohostěnů simplexně izomorfní dělení?
Ne (příklad v dimenci 7 z roku 1961).

Fundamentální hypotéza (Hauptvermutung)

Mají každé dvě triangulace homeomorfních mnohostěnů simplexně izomorfní dělení?
Ne (příklad v dimenci 7 z roku 1961).

Neuvěřitelné.

Fundamentální hypotéza (Hauptvermutung)

Mají každé dvě triangulace homeomorfních mnohostěnů simplexně izomorfní dělení?
Ne (příklad v dimenci 7 z roku 1961).

Neuvěřitelné.

Uvěřitelné to je, ale odporuje to zdravému rozumu.

DEFINICE (Euler - Poincaréova charakteristika komplexu)

Charakteristika Nechť $\mathcal{K}$ je n-rozměrný komplex a pro $j = 0, 1, \dots, n$ nechť a_j je počet j-rozměrných simplexů v $\mathcal{K}$. Číslo $\sum (-1)^j a_j$ se nazývá Euler - Poincaréova charakteristika komplexu $\mathcal{K}$.

DEFINICE (Euler - Poincaréova charakteristika komplexu)

Charakteristika Nechť $\mathcal{K}$ je n-rozměrný komplex a pro $j = 0, 1, \ldots, n$ nechť a_j je počet j-rozměrných simplexů v $\mathcal{K}$. Číslo $\sum(-1)^j a_j$ se nazývá Euler - Poincaréova charakteristika komplexu $\mathcal{K}$.

Prostě se tady sčítají konečně jablka a hrušky.

DEFINICE (Euler - Poincaréova charakteristika komplexu)

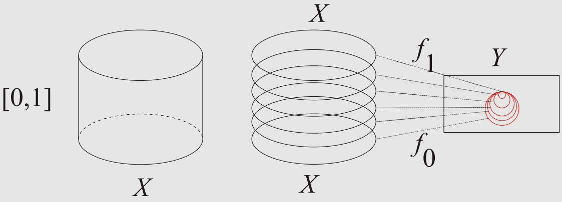
Charakteristika Nechť $\mathcal{K}$ je n-rozměrný komplex a pro $j = 0, 1, \ldots, n$ nechť a_j je počet j-rozměrných simplexů v $\mathcal{K}$. Číslo $\sum(-1)^j a_j$ se nazývá Euler - Poincaréova charakteristika komplexu $\mathcal{K}$.

Prostě se tady sčítají konečně jablka a hrušky.

Koho to asi tak mohlo napadnout …

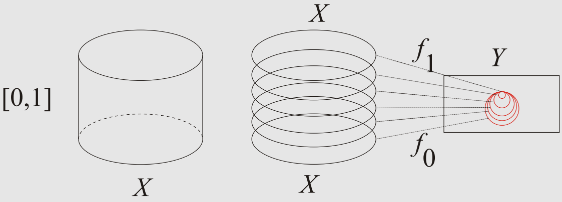
DEFINICE (Homotopie)

Nechť f_0 a f_1 jsou zpojitá zobrazení z metrického prostoru X do metrického prostoru Y. Řekneme, že zobrazení f_0 je homotopické zobrazení f_1, pokud existuje spojité zobrazení $H : X \times [0,1] \to Y$ (nazývá se homotopie), které splňuje $H(x,0) = f_0(x)$ a $H(x,1) = f_1(x)$ pro každé $x \in X$. Píšeme $f_0 \cong f_1$ (jde o ekvivalenci).



DEFINICE (Homotopie)

Nechť f_0 a f_1 jsou zpojitá zobrazení z metrického prostoru X do metrického prostoru Y. Řekneme, že zobrazení f_0 je homotopické zobrazení f_1, pokud existuje spojité zobrazení $H : X \times [0,1] \to Y$ (nazývá se homotopie), které splňuje $H(x,0) = f_0(x)$ a $H(x,1) = f_1(x)$ pro každé $x \in X$. Píšeme $f_0 \cong f_1$ (jde o ekvivalenci).

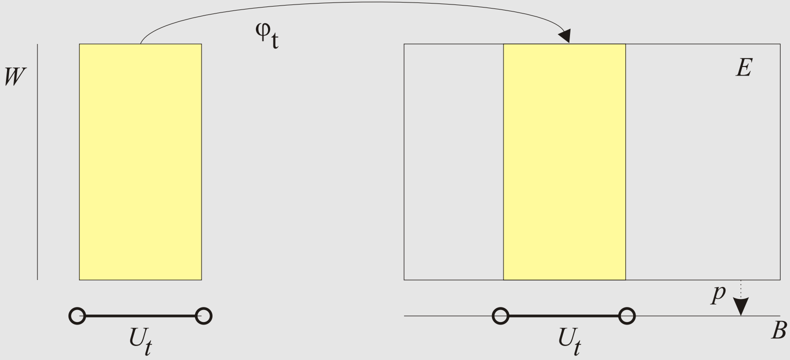


Pozorování

1. Spojitá zobrazení do konvexní podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou homotopická.
2. Sféra není kontraktibilní.

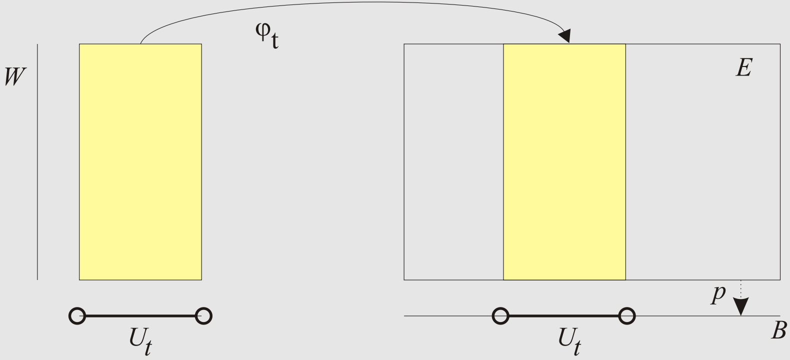
DEFINICE (Fibrovaný prostor)

Nechť E, B a W jsou metrické prostory a p je spojité zobrazení E na B. Systém (E, B, W, p) se nazývá fibrace když existuje pokrytí $\{U_t\}_{t \in T}$ prostoru B a rodinka homeomorfismů $\varphi_t : U_t \times W \to p^{-1}(U_t)$ pro $t \in T$ splňujících $p\varphi_t(u, w) = u$ pro každé $u \in U_t$, $w \in W$ a $t \in T$. Pak E se nazývá fibrovaný prostor, B se nazývá bázový prostor, W se nazývá fíbr.



DEFINICE (Fibrovaný prostor)

Nechť E, B a W jsou metrické prostory a p je spojité zobrazení E na B. Systém (E, B, W, p) se nazývá fibrace když existuje pokrytí $\{U_t\}_{t \in T}$ prostoru B a rodinka homeomorfismů $\varphi_t : U_t \times W \to p^{-1}(U_t)$ pro $t \in T$ splňujících $p\varphi_t(u, w) = u$ pro každé $u \in U_t$, $w \in W$ a $t \in T$. Pak E se nazývá fibrovaný prostor, B se nazývá bázový prostor, W se nazývá fíbr.



Pozorování

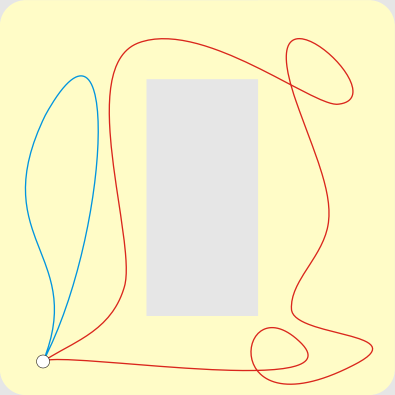
1. Kartézský součin $E = B \times W$ jde chápat jako fibrovaný prostor s triviálním pokrytím B a projekcí E na B v roli p.
2. Válcová plocha lze psát jako součin $S^1 \times [-1/3, 1/3]$. Při vhodném rotování úsečky $[-1/3, 1/3]$ (pracujeme v prostoru $\mathbb{R}^3$) získáme Moebiusovu pásku (máme tedy její vyjádření jako fibrovaný prostor).

DEFINICE (Fundamentální grupa)

Zvolme v metrickém prostoru X bod x_0, budeme mu říkat bázový bod. Křivku (spojité zobrazení intervalu do X) z bodu x_0 do x_0 nazveme smyčka. Množina takových smyček se označí $L(X, x_0)$.
Dvě smyčky z $L(X, x_0)$ lze napojovat (píšeme $a * b$), jde udělat inverzní smyčka (píšeme a^{-1}), existuje triviální smyčka (konstantní křivka). Třídu homotopických smyček obsahujících smyčku a označíme $|a|$.
Množinu takto vytvořených tříd ekvivalence označíme $\pi_1(X, x_0)$. Napojování smyček odpovídá pro třídy ekvivalence operace násobení $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ a takto získává $\pi_1(X, x_0)$ grupovou strukturu a nazývá se fundamentální grupa. U obloukově souvislých prostorů grupa nezávisí na volbě bodu a píše se $\pi_1(X)$
Homeomorfní prostory mají izomorfní fundamentální grupy.

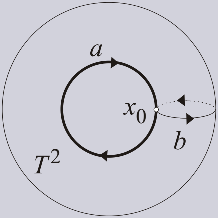
DEFINICE (Fundamentální grupa)

Zvolme v metrickém prostoru X bod x_0, budeme mu říkat bázový bod. Křivku (spojité zobrazení intervalu do X) z bodu x_0 do x_0 nazveme smyčka. Množina takových smyček se označí $L(X, x_0)$.
Dvě smyčky z $L(X, x_0)$ lze napojovat (píšeme $a * b$), jde udělat inverzní smyčka (píšeme a^{-1}), existuje triviální smyčka (konstantní křivka). Třídu homotopických smyček obsahujících smyčku a označíme $|a|$.
Množinu takto vytvořených tříd ekvivalence označíme $\pi_1(X, x_0)$. Napojování smyček odpovídá pro třídy ekvivalence operace násobení $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$ a takto získává $\pi_1(X, x_0)$ grupovou strukturu a nazývá se fundamentální grupa. U obloukově souvislých prostorů grupa nezávisí na volbě bodu a píše se $\pi_1(X)$
Homeomorfní prostory mají izomorfní fundamentální grupy.



Pozorování

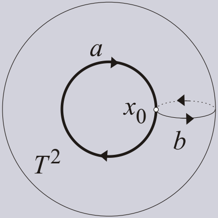
1. Fundamentální grupa kružnice odpovídá celým číslům, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Fundamentální grupa sféry S^m je triviální pro $m > 1$.
2. Fundamentální grupa kontraktibilního prostoru je triviální.
3. Fundamentální grupa kartézského součinu prostorů je rovna direktnímu součinu příslušných fundamentálních grup.
4. Fundamentální grupa pro torus $S^1 \times S^1$ je rovna $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (je komutativní a má dva generátory).



5. Fundamentální grupa mnohostěnu má konečně mnoho generátorů a vztahů.

Pozorování

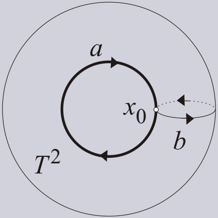
1. Fundamentální grupa kružnice odpovídá celým číslům, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Fundamentální grupa sféry S^m je triviální pro $m > 1$.
2. Fundamentální grupa kontraktibilního prostoru je triviální.
3. Fundamentální grupa kartézského součinu prostorů je rovna direktnímu součinu příslušných fundamentálních grup.
4. Fundamentální grupa pro torus $S^1 \times S^1$ je rovna $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (je komutativní a má dva generátory).



5. Fundamentální grupa mnohostěnu má konečně mnoho generátorů a vztahů.

Pozorování

1. Fundamentální grupa kružnice odpovídá celým číslům, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Fundamentální grupa sféry S^m je triviální pro $m > 1$.
2. Fundamentální grupa kontraktibilního prostoru je triviální.
3. Fundamentální grupa kartézského součinu prostorů je rovna direktnímu součinu příslušných fundamentálních grup.
4. Fundamentální grupa pro torus $S^1 \times S^1$ je rovna $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (je komutativní a má dva generátory).



5. Fundamentální grupa mnohostěnu má konečně mnoho generátorů a vztahů.

TVRZENÍ (Van Kampen (1933))

Je-li mnohostěn X sjednocením dvou souvislých mnohostěnů X_1 a X_2 s jednoduše souvislým průnikem X_0, pak je fundamentální grupa $\pi_1(X, x_0)$ pro $x_0 \in X_0$ volným součinem grup $\pi_1(X_1, x_0)$ a $\pi_1(X_2, x_0)$.

TVRZENÍ (Van Kampen (1933))

Je-li mnohostěn X sjednocením dvou souvislých mnohostěnů X_1 a X_2 s jednoduše souvislým průnikem X_0, pak je fundamentální grupa $\pi_1(X, x_0)$ pro $x_0 \in X_0$ volným součinem grup $\pi_1(X_1, x_0)$ a $\pi_1(X_2, x_0)$.

DEFINICE (Esenciální zobrazení na sféru)

Spojité zobrazení $f : X \to S^{m-1}$ se nazývá esenciální, pokud není homotopické s konstantním zobrazením.

DEFINICE (Esenciální zobrazení na sféru)

Spojité zobrazení $f : X \to S^{m-1}$ se nazývá esenciální, pokud není homotopické s konstantním zobrazením.

TVRZENÍ (Borsuk)

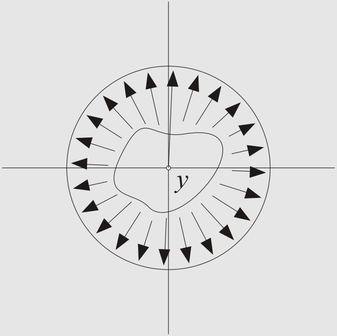
Nechť X *je topologický prostor.*

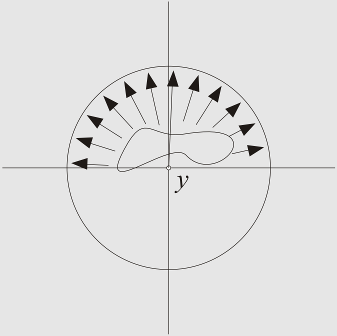
1. *Veta (Borsuk) Nechť* $X \subset \mathbb{R}^m$ *je kompaktní a* $y \in \mathbb{R}^m \setminus X$. *Zobrazení* $p_y : X \to S^{m-1}$ *definované vzorcem* $p_y(x) = (x - y)/|x - y|$ *není esenciální právě když* y *leží v neomezené komponentě* $\mathbb{R}^m \setminus X$.
2. *Vlastní kompaktní podmnožina sféry* S^m *ji rozděluje právě když existuje esenciální zobrazení* $f : X \to S^{m-1}$.

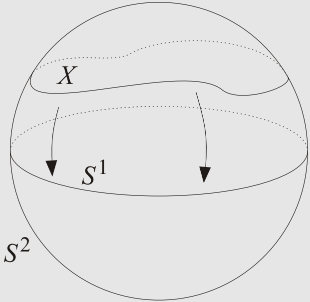
TVRZENÍ (Borsuk)

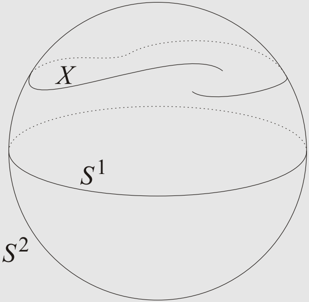
Nechť X *je topologický prostor.*

1. *Veta (Borsuk) Nechť* $X \subset \mathbb{R}^m$ *je kompaktní a* $y \in \mathbb{R}^m \setminus X$*. Zobrazení* $p_y : X \to S^{m-1}$ *definované vzorcem* $p_y(x) = (x-y)/|x-y|$ *není esenciální právě když* y *leží v neomezené komponentě* $\mathbb{R}^m \setminus X$.
2. *Vlastní kompaktní podmnožina sféry* S^m *ji rozděluje právě když existuje esenciální zobrazení* $f : X \to S^{m-1}$.


y


y


X
S^1
S^2


X
S^1
S^2

TVRZENÍ (Jordanova věta)

Jednoduchá uzavřená křivka v rovině $\mathbb{R}^2$ *ji rozděluje.*

TVRZENÍ (Jordanova věta)

Jednoduchá uzavřená křivka v rovině $\mathbb{R}^2$ *ji rozděluje.*

DEFINICE (Ekvivalentní vnoření)

Řekneme, že množiny $A, B \subset \mathbb{R}^m$ jsou ekvivalentně vnořené, pokud existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tak, že $h(A) = B$.

TVRZENÍ (Schoenflies)

1. *Každé dvě jednoduše uzavřené křivky v rovině jsou ekvivalentně vnořené.*
2. *Každé dva oblouky v rovině jsou ekvivalentně vnořené.*

DEFINICE (Ekvivalentní vnoření)

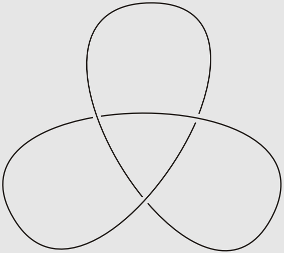
Řekneme, že množiny $A, B \subset \mathbb{R}^m$ jsou ekvivalentně vnořené, pokud existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tak, že $h(A) = B$.

TVRZENÍ (Schoenflies)

1. *Každé dvě jednoduše uzavřené křivky v rovině jsou ekvivalentně vnořené.*
2. *Každé dva oblouky v rovině jsou ekvivalentně vnořené.*

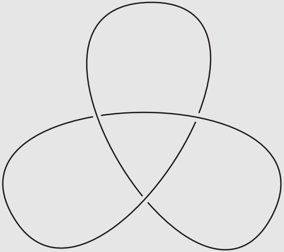
Divoká kružnice

Existuje divoká kružnice (zauzlovaná jednoduchá uzavřená křivka v prostoru)



Divoká kružnice

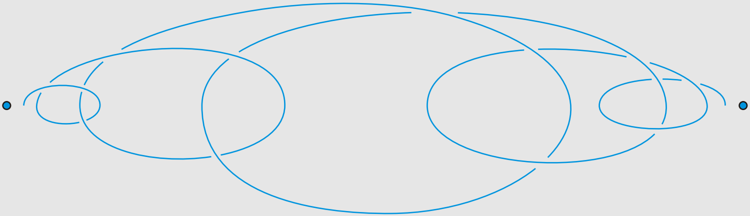
Existuje divoká kružnice (zauzlovaná jednoduchá uzavřená křivka v prostoru)



Animace je zde.

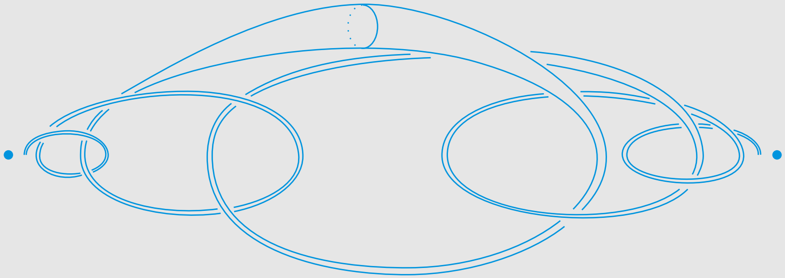
Divoký oblouk v prostoru (Fox a Artin 1948)

Existuje divoký oblouk v prostoru.



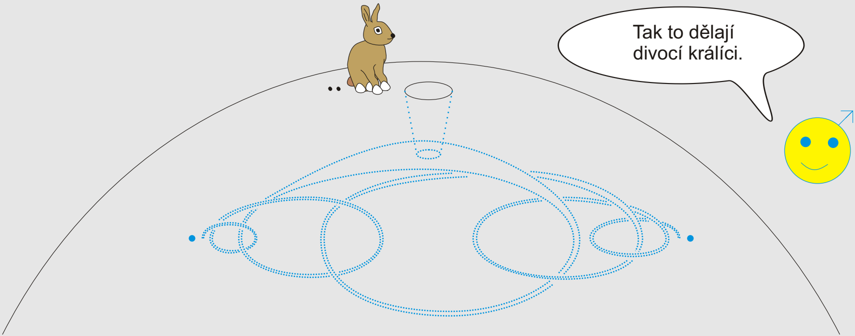
Divoká sféra v prostoru

Existuje divoká sféra v prostoru. Množina T je homeomorfní se sférou S^2, ale neomezená komponenta $\mathbb{R}^3 \setminus T$ není jednoduše souvislá.



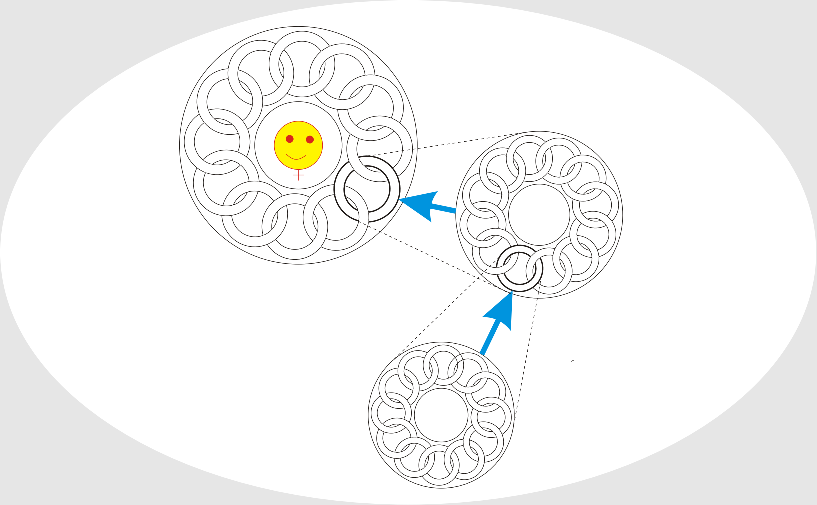
Provrtaná koule v prostoru

Existuje divoká sféra v prostoru. Množina T je homeomorfní se sférou S^2, ale omezená komponenta $\mathbb{R}^3 \setminus T$ není jednoduše souvislá.



Divoký řetízek (Antoine 1921)

Nechť A_1 je anuloid. $A_2 \subset A_1$ je kruhovitý řetízek tvořený čtyřmi články ve tvaru anuloidu. Podobnou náhradu anuloidu řetízkem provedeme v každém článku A^2 a získáme A_3. Pokračujeme do nekonečna a průnik množin A_n označíme A a budeme nazývat náhrdelník.
A je homeomorfní Cantorově množině ale nejsou ekvivalentně vnořené do prostoru, doplněk $\mathbb{R}^3 \setminus A$ není jednoduše souvislý.



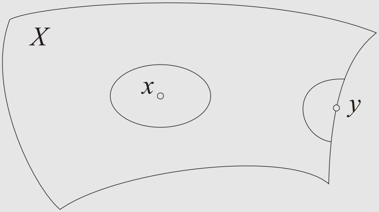
Příklady

1. Rohatá koule (Alexandr 1924). Obrázek zde.
2. Cantorova množina. Obrázek zde.
3. Sierpinskeho kobereček (vynecháme ten čtvereček, který se nedotýká hrany). Obrázek zde.
4. Mengerova houba (vynecháme ty krychličky, které se nedotýkají hrany). Obrázek zde.
5. Cantorova funkce. Obrázek zde.
6. Peanova křivka. (Vzory u Peanovy křivky jsou nejvýše čtyřbodové.) Obrázek zde.
7. Jezero Wada. Obrázek zde. Vzniknou 3 otevřené souvislé množiny v rovině, které mají společnou hranici. (a pak ta hranice je nerozložitelná nebo je sjednocením dvou nerozložitelných kontinuí).
8. Podkova (Knaster 1922). Obrázek zde. Jde o nerozložitelný prostor.

DEFINICE (Varieta)

Nechť je X kompaktní metrický prostor a $m \in \mathbb{N}$. Řekneme, že X je m-dimensionální varieta, pokud má každý bod $x \in X$ množinu U homeomorfní s uzavřenou koulí $\bar{B}^m$ v $\mathbb{R}^m$ a $x \in \operatorname{int} U$. Číslo m je dimenze variety.

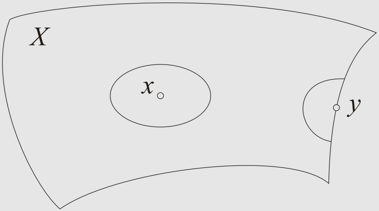
Množinu bodů $x \in X$, pro které existuje U homeomorfní s otevřenou koulí B_m a $x \in \operatorname{int} U$, označíme vnitřek variety, zbývající body tvoří hranici variety. Varieta s prázdnou hranicí se nazývá varieta bez hranice.



DEFINICE (Varieta)

Nechť je X kompaktní metrický prostor a $m \in \mathbb{N}$. Řekneme, že X je m-dimensionální varieta, pokud má každý bod $x \in X$ množinu U homeomorfní s uzavřenou koulí $\bar{B}^m$ v $\mathbb{R}^m$ a $x \in \operatorname{int} U$. Číslo m je dimenze variety.

Množinu bodů $x \in X$, pro které existuje U homeomorfní s otevřenou koulí B_m a $x \in \operatorname{int} U$, označíme vnitřek variety, zbývající body tvoří hranici variety. Varieta s prázdnou hranicí se nazývá varieta bez hranice.



Pozorování

1. Nechť X je souvislá varieta. Pro každou dvojici bodů $x, y \in X$ existuje homeomorfismus $h : X \to X$ tak, že $h(x) = y$.
2. Varieta bez hranice není homeomorfní své vlastní podmnožině.
3. Nechť komplex $\mathcal{K}$ je triangulací variety X. Pak mají stejnou dimenzi.

DEFINICE (Orientace simplexu)

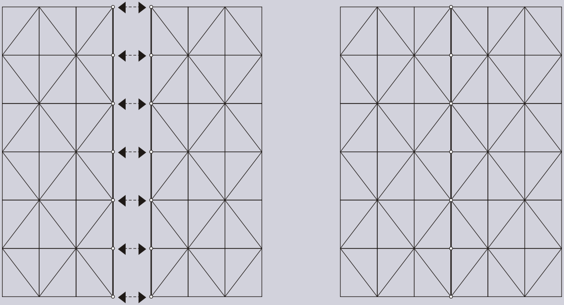
Simplex s daným uspořádáním vrcholů se nazývá uspořádaný simplex. Dva uspořádané simplexy odpovídající stejnému neuspořádanemu simplexu mají souhlasnou (opačnou) orientaci, pokud uspořádání vrcholů jednoho převedeme na upořádání vrcholů druhého sudou (lichou) permutací.
Podle této ekvivalence získáme třídy ekvivalence, které budeme nazývat orientace simplexu, jsou tedy dvě, nazýváme je opačné. Simplex s danou orientací budeme nazývat orientovaný simplex.
Neorientovaný simplex značíme $\Delta(a_1, \dots, a_n)$, orientovaný simplex s pořadím vrcholů $a_1, \dots, a_n$ značíme $\Delta[a_1, \dots, a_n]$.
Pokud přiřadíme v komplexu $\mathcal{K}$, který je triangulací variety X, každému simplexu orientaci tak, že dva simplexy se dotýkají simplexem s opačnou orientací, říkáme, že jsme získali orientaci variety s triangulací $\mathcal{K}$.
Pokud má triangulovaná varieta alespoň jednu orientaci, říkáme jí orientovatelná varieta.

DEFINICE (Orientace simplexu)

Simplex s daným uspořádáním vrcholů se nazývá uspořádaný simplex. Dva uspořádané simplexy odpovídající stejnému neuspořádanemu simplexu mají souhlasnou (opačnou) orientaci, pokud uspořádání vrcholů jednoho převedeme na upořádání vrcholů druhého sudou (lichou) permutací.
Podle této ekvivalence získáme třídy ekvivalence, které budeme nazývat orientace simplexu, jsou tedy dvě, nazýváme je opačné. Simplex s danou orientací budeme nazývat orientovaný simplex.
Neorientovaný simplex značíme $\Delta(a_1, \dots, a_n)$, orientovaný simplex s pořadím vrcholů $a_1, \dots, a_n$ značíme $\Delta[a_1, \dots, a_n]$.
Pokud přiřadíme v komplexu $\mathcal{K}$, který je triangulací variety X, každému simplexu orientaci tak, že dva simplexy se dotýkají simplexem s opačnou orientací, říkáme, že jsme získali orientaci variety s triangulací $\mathcal{K}$.
Pokud má triangulovaná varieta alespoň jednu orientaci, říkáme jí orientovatelná varieta.

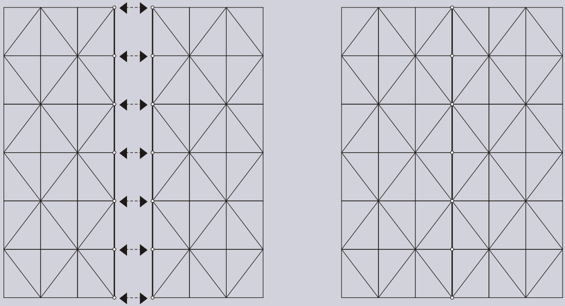
DEFINICE (Identifikace)

Uvažujme relaci ekvivalence R na komplexu $\mathcal{K}$, která identifikuje některé dvojice simplexů stejné dimenze tak, že přiřadí navzájem jejich vrcholy v daném pořadí (budeme jí říkat simplexní ekvivalence). Podle této ekvivalence provedeme identifikaci odpovídajících simplexů a vzniklý komplex označíme $\mathcal{K}/R$.



DEFINICE (Identifikace)

Uvažujme relaci ekvivalence R na komplexu $\mathcal{K}$, která identifikuje některé dvojice simplexů stejné dimenze tak, že přiřadí navzájem jejich vrcholy v daném pořadí (budeme jí říkat simplexní ekvivalence). Podle této ekvivalence provedeme identifikaci odpovídajících simplexů a vzniklý komplex označíme $\mathcal{K}/R$.



DEFINICE (Lepení)

Říkáme, že jsme k sobě přilepili některé stěny komplexu a této operaci budeme říkat lepení.
Podobně můžeme lepit i strany čtverce a získáme anuloid či Moebiusovu pásku, Kleinovu láhev či projektivní rovinu.
Obecněji lze lepit dvě variety podél jejich hranic. Například slepením dvou kruhů získáme sféru. Slepením dvou mezikruží lze získat anuloid.
Operaci opačnou k lepení nazveme řezání.

DEFINICE (Lepení)

Říkáme, že jsme k sobě přilepili některé stěny komplexu a této operaci budeme říkat lepení.
Podobně můžeme lepit i strany čtverce a získáme anuloid či Moebiusovu pásku, Kleinovu láhev či projektivní rovinu.
Obecněji lze lepit dvě variety podél jejich hranic. Například slepením dvou kruhů získáme sféru. Slepením dvou mezikruží lze získat anuloid.
Operaci opačnou k lepení nazveme řezání.

TVRZENÍ (Klasifikace ploch)

Pro každou souvislou dvourozměrnou varietu bez hranice s triangulací $\mathcal{K}$ *existuje komplex* $\mathcal{L}$ *homeomorfní s kruhem* $\bar{B}^2$ *a simplexní ekvivalence* R *na hranici* $\mathrm{Bd}|\mathcal{L}|$ *tak, že komplex* $\mathcal{L}/R$ *je simplexně izomorfní komplexu* $\mathcal{K}$.
Přitom popis lepení $\mathrm{Bd}|\mathcal{L}|$ *lze psát v jednom z následujících tvarů*

$$aa^{-1} \quad \textit{sféra } S^2$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} \quad \textit{sféra } S^2 \textit{ s přilepenými držáčky ve tvaru anuloidu}$$

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_k a_k \quad \textit{sféra } S^2 \textit{ s přilepenými držáčky ve tvaru Moebiusovy pásky}$$

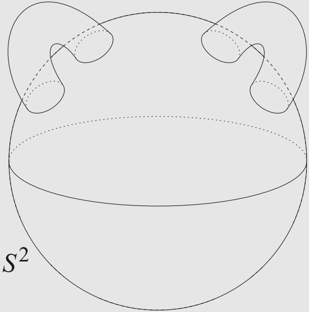
TVRZENÍ (Klasifikace ploch)

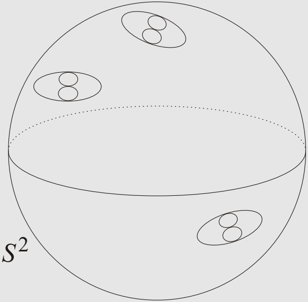
Pro každou souvislou dvourozměrnou varietu bez hranice s triangulací $\mathcal{K}$ existuje komplex $\mathcal{L}$ homeomorfní s kruhem $\bar{B}^2$ a simplexní ekvivalence R na hranici $\mathrm{Bd}|\mathcal{L}|$ tak, že komplex $\mathcal{L}/R$ je simplexně izomorfní komplexu $\mathcal{K}$.
Přitom popis lepení $\mathrm{Bd}|\mathcal{L}|$ lze psát v jednom z následujících tvarů

$$aa^{-1} \quad \textit{sféra } S^2$$

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} \quad \textit{sféra } S^2 \textit{ s přilepenými držáčky ve tvaru anuloidu}$$

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_k a_k \quad \textit{sféra } S^2 \textit{ s přilepenými držáčky ve tvaru Moebiusovy pásky}$$


S^2


S^2

TVRZENÍ (Fundamentální věta teorie dimenze)

$\dim \mathbb{R}^m = \operatorname{ind} \mathbb{R}^m = m.$

TVRZENÍ (Fundamentální věta teorie dimenze)

$\dim \mathbb{R}^m = \operatorname{ind} \mathbb{R}^m = m.$

TVRZENÍ (Dimenze)

Označme N_n^k podmnožinu těch prvků R^m, které mají nejvýše n souřadnic racionálních (Noebeling).

1. $\mathrm{ind} N_n^m = n$
2. *Každá podmnožina $C \subset \mathbb{R}^m$ bez vnitřních bodů je homeomorfní podmnožině N_{m-1}^m.*
3. *Podmnožina $\mathbb{R}^m$ má dimenzi m právě když má neprázdný vnitřek v $\mathbb{R}^m$.*
4. *Pokud má množina $C \subset \mathbb{R}^m$ dimenzi $\mathrm{ind} C \leq m - 2$, pak neroztíná $\mathbb{R}^m$.*
5. *Každý separabilní metrický prostor X splňující $\dim X \leq n$ je homeomorfní s podmnožinou X' prostoru I^{2n+1}, navíc $\bar{X}' \subset N_n^{2n+1}$.*
6. *Induktivní dimenze $\mathbb{R}^m$, I^m, S^m a každé m-dimenzionální variety je rovna m.*

TVRZENÍ (Dimenze)

Označme N_n^k *podmnožinu těch prvků* R^m*, které mají nejvýše* n *souřadnic racionálních (Noebeling).*

1. $\mathrm{ind} N_n^m = n$
2. *Každá podmnožina* $C \subset \mathbb{R}^m$ *bez vnitřních bodů je homeomorfní podmnožině* N_{m-1}^m.
3. *Podmnožina* $\mathbb{R}^m$ *má dimenzi* m *právě když má neprázdný vnitřek v* $\mathbb{R}^m$.
4. *Pokud má množina* $C \subset \mathbb{R}^m$ *dimenzi* $\mathrm{ind} C \leq m-2$*, pak neroztíná* $\mathbb{R}^m$.
5. *Každý separabilní metrický prostor* X *splňující* $\dim X \leq n$ *je homeomorfní s podmnožinou* X' *prostoru* I^{2n+1}*, navíc* $\bar{X}' \subset N_n^{2n+1}$.
6. *Induktivní dimenze* $\mathbb{R}^m, I^m, S^m$ *a každé* m*-dimenzionální variety je rovna* m.