OBECNÁ TOPOLOGIE

18. PEVNÝ BOD

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

Teorie pevného bodu je oblast, kde se sbíhají různé obory matematiky, převážně topologie, algebra a funkcionální analýza. Je to velmi důležitá oblast pro aplikace, protože dává existence řešení rovnic, někdy i návody jak řešení najít nebo jak jej získat numericky, s určitou přesností.

My se v této kapitole omezíme na dvě věty o pevném bodě, a to na Banachovu větu a na Brouwerovu větu. Uvedeme i jejich modifikace a zobecnění.

$\Rightarrow$

Teorie pevného bodu je oblast, kde se sbíhají různé obory matematiky, převážně topologie, algebra a funkcionální analýza. Je to velmi důležitá oblast pro aplikace, protože dává existence řešení rovnic, někdy i návody jak řešení najít nebo jak jej získat numericky, s určitou přesností.

My se v této kapitole omezíme na dvě věty o pevném bodě, a to na Banachovu větu a na Brouwerovu větu. Uvedeme i jejich modifikace a zobecnění.

$\Rightarrow$

Následující definice je zformulována bez jakýchkoli předpokladů na zobrazení a jeho definiční obor. Je zřejmé, že bez dodatečných předpokladů nelze existenci pevných bodů dokázat (až na zcela triviální případ). Většinou bude nutná spojitost (a tedy definiční obor musí být topologický prostor) a přidávají se další podmínky.

DEFINICE

Řekneme, že zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod $x \in X$, jestliže $f(x) = x$.

Někdo namítne, že často máme jiný problém, např. hledáme kořen polynomu $P(x)$ nebo nějaké rovnice $F(x) = 0$, nebo ještě obecněji hledáme řešení rovnice $F(x) = y$, kde $F : X \to X$ a y je daný prvek z X.

Tyto případy lze však na pevný bod převést. Např. kořen x_0 uvedeného polynomu je pevný bod polynomu $x+P(x)$ (nebo $x-P(x)$), řešení x_0 rovnice $F(x) = y$ je pevný bod zobrazení $F(x) + x - y$ (nebo $x - F(x) - y$) – je zřejmé, že v posledním případě potřebujeme, aby definiční obor zobrazení $F : X \to X$ byla aspoň komutativní grupa.

DEFINICE

Řekneme, že zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod $x \in X$, jestliže $f(x) = x$.

Někdo namítne, že často máme jiný problém, např. hledáme kořen polynomu $P(x)$ nebo nějaké rovnice $F(x) = 0$, nebo ještě obecněji hledáme řešení rovnice $F(x) = y$, kde $F : X \to X$ a y je daný prvek z X.

Tyto případy lze však na pevný bod převést. Např. kořen x_0 uvedeného polynomu je pevný bod polynomu $x+P(x)$ (nebo $x-P(x)$), řešení x_0 rovnice $F(x) = y$ je pevný bod zobrazení $F(x) + x - y$ (nebo $x - F(x) - y$) – je zřejmé, že v posledním případě potřebujeme, aby definiční obor zobrazení $F : X \to X$ byla aspoň komutativní grupa.

DEFINICE

Řekneme, že zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod $x \in X$, jestliže $f(x) = x$.

Někdo namítne, že často máme jiný problém, např. hledáme kořen polynomu $P(x)$ nebo nějaké rovnice $F(x) = 0$, nebo ještě obecněji hledáme řešení rovnice $F(x) = y$, kde $F : X \to X$ a y je daný prvek z X.

Tyto případy lze však na pevný bod převést. Např. kořen x_0 uvedeného polynomu je pevný bod polynomu $x+P(x)$ (nebo $x-P(x)$), řešení x_0 rovnice $F(x) = y$ je pevný bod zobrazení $F(x) + x - y$ (nebo $x - F(x) - y$) – je zřejmé, že v posledním případě potřebujeme, aby definiční obor zobrazení $F : X \to X$ byla aspoň komutativní grupa.

DEFINICE

Řekneme, že zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod $x \in X$, jestliže $f(x) = x$.

Někdo namítne, že často máme jiný problém, např. hledáme kořen polynomu $P(x)$ nebo nějaké rovnice $F(x) = 0$, nebo ještě obecněji hledáme řešení rovnice $F(x) = y$, kde $F : X \to X$ a y je daný prvek z X.

Tyto případy lze však na pevný bod převést. Např. kořen x_0 uvedeného polynomu je pevný bod polynomu $x + P(x)$ (nebo $x - P(x)$), řešení x_0 rovnice $F(x) = y$ je pevný bod zobrazení $F(x) + x - y$ (nebo $x - F(x) - y$) – je zřejmé, že v posledním případě potřebujeme, aby definiční obor zobrazení $F : X \to X$ byla aspoň komutativní grupa.

Zcela ideální je případ, kdy o množině X víme, že každé zobrazení $f : X \to X$ z jisté třídy zobrazení má pevný bod. Začneme s obecným topologickým prostorem X a se spojitými zobrazeními f. Je možné brát uniformní prostory a stejnoměrně spojitá zobrazení, metrické prostory a kontrakce, atd.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor X má vlastnost pevného bodu, jestliže každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod.

V literatuře se vlastnost pevného bodu často zkracuje na FPP (fixed point property).

Pozorování

Prostor, který má vlastnost pevného bodu je souvislý.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor X má vlastnost pevného bodu, jestliže každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod.

V literatuře se vlastnost pevného bodu často zkracuje na FPP (fixed point property).

Pozorování

Prostor, který má vlastnost pevného bodu je souvislý.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor X má vlastnost pevného bodu, jestliže každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod.

V literatuře se vlastnost pevného bodu často zkracuje na FPP (fixed point property).

Pozorování

Prostor, který má vlastnost pevného bodu je souvislý.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor X má vlastnost pevného bodu, jestliže každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod.

V literatuře se vlastnost pevného bodu často zkracuje na FPP (fixed point property).

Je zřejmé, že jednobodový prostor má vlastnost pevného bodu, že aspoň dvoubodový diskrétní, indiskrétní nebo hrubý T_1-prostor nemá vlastnost pevného bodu. Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ a sféra S^n nemá vlastnost pevného bodu pro $n > 0$.
Následující tvrzení je zřejmé.

Pozorování

Prostor, který má vlastnost pevného bodu je souvislý.

DEFINICE

Řekneme, že topologický prostor X má vlastnost pevného bodu, jestliže každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má pevný bod.

V literatuře se vlastnost pevného bodu často zkracuje na FPP (fixed point property).

Pozorování

Prostor, který má vlastnost pevného bodu je souvislý.

Snadno si uvědomíte, že *vlastnost pevného bodu* je topologická vlastnost. Při důkazu tohoto tvrzení však použijete jen část definice homeomorfizmu. Vyjádříme nyní použitou část této definice jiným pojmem.

DEFINICE (Retrakt)

Topologický prostor X se nazývá retraktem topologického prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X, s : X \to Y$ taková, že $r \circ s = 1_X$. Zobrazení r se nazývá retrakce a zobrazení s sekce.

Pozorování

Nechť $r : Y \to X, s : X \to Y$ jsou vzájemné retrakce a sekce.

1. Retrakce je kvocientové zobrazení, sekce je vnoření.
2. X je retraktem Y právě když X je homeomorfní podprostoru $X' \subset Y$, pro který existuje spojité zobrazení $r' : Y \to X'$ identické na X'. (Podprostor X' se pak někdy nazývá vlastní retrakt Y.)
3. Vlastní retrakt Hausdorffova prostoru je jeho uzavřenou podmnožinou.
4. Složení retrakcí je retrakce.

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Důkaz

DEFINICE (Retrakt)

Topologický prostor X se nazývá retraktem topologického prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X, s : X \to Y$ taková, že $r \circ s = 1_X$. Zobrazení r se nazývá retrakce a zobrazení s sekce.

Pozorování

Nechť $r : Y \to X, s : X \to Y$ jsou vzájemné retrakce a sekce.

1. Retrakce je kvocientové zobrazení, sekce je vnoření.
2. X je retraktem Y právě když X je homeomorfní podprostoru $X' \subset Y$, pro který existuje spojité zobrazení $r' : Y \to X'$ identické na X'. (Podprostor X' se pak někdy nazývá vlastní retrakt Y.)
3. Vlastní retrakt Hausdorffova prostoru je jeho uzavřenou podmnožinou.
4. Složení retrakcí je retrakce.

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Důkaz

DEFINICE (Retrakt)

Topologický prostor X se nazývá retraktem topologického prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X, s : X \to Y$ taková, že $r \circ s = 1_X$. Zobrazení r se nazývá retrakce a zobrazení s sekce.

Pozorování

Nechť $r : Y \to X, s : X \to Y$ jsou vzájemné retrakce a sekce.

1. Retrakce je kvocientové zobrazení, sekce je vnoření.
2. X je retraktem Y právě když X je homeomorfní podprostoru $X' \subset Y$, pro který existuje spojité zobrazení $r' : Y \to X'$ identické na X'. (Podprostor X' se pak někdy nazývá vlastní retrakt Y.)
3. Vlastní retrakt Hausdorffova prostoru je jeho uzavřenou podmnožinou.
4. Složení retrakcí je retrakce.

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Důkaz

DEFINICE (Retrakt)

Topologický prostor X se nazývá retraktem topologického prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X, s : X \to Y$ taková, že $r \circ s = 1_X$. Zobrazení r se nazývá retrakce a zobrazení s sekce.

Pozorování

Nechť $r : Y \to X, s : X \to Y$ jsou vzájemné retrakce a sekce.

1. Retrakce je kvocientové zobrazení, sekce je vnoření.
2. X je retraktem Y právě když X je homeomorfní podprostoru $X' \subset Y$, pro který existuje spojité zobrazení $r' : Y \to X'$ identické na X'. (Podprostor X' se pak někdy nazývá vlastní retrakt Y.)
3. Vlastní retrakt Hausdorffova prostoru je jeho uzavřenou podmnožinou.
4. Složení retrakcí je retrakce.

V neprázdném součinu prostorů je každý souřadnicový prostor retraktem součinu (retrakce je projekce). Kruh v rovině je retraktem roviny. Bod je retraktem každého většího prostoru.

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Důkaz

DEFINICE (Retrakt)

Topologický prostor X se nazývá retraktem topologického prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X, s : X \to Y$ taková, že $r \circ s = 1_X$. Zobrazení r se nazývá retrakce a zobrazení s sekce.

Pozorování

Nechť $r : Y \to X, s : X \to Y$ jsou vzájemné retrakce a sekce.

1. Retrakce je kvocientové zobrazení, sekce je vnoření.
2. X je retraktem Y právě když X je homeomorfní podprostoru $X' \subset Y$, pro který existuje spojité zobrazení $r' : Y \to X'$ identické na X'. (Podprostor X' se pak někdy nazývá vlastní retrakt Y.)
3. Vlastní retrakt Hausdorffova prostoru je jeho uzavřenou podmnožinou.
4. Složení retrakcí je retrakce.

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Dukaz

DEFINICE (Retrakt)

Topologický prostor X se nazývá retraktem topologického prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X, s : X \to Y$ taková, že $r \circ s = 1_X$. Zobrazení r se nazývá retrakce a zobrazení s sekce.

Pozorování

Nechť $r : Y \to X, s : X \to Y$ jsou vzájemné retrakce a sekce.

1. Retrakce je kvocientové zobrazení, sekce je vnoření.
2. X je retraktem Y právě když X je homeomorfní podprostoru $X' \subset Y$, pro který existuje spojité zobrazení $r' : Y \to X'$ identické na X'. (Podprostor X' se pak někdy nazývá vlastní retrakt Y.)
3. Vlastní retrakt Hausdorffova prostoru je jeho uzavřenou podmnožinou.
4. Složení retrakcí je retrakce.

TVRZENÍ (Retrakce zachovává FPP)

Retrakt prostoru mající vlastnost pevného bodu má též vlastnost pevného bodu.

Dukaz

Předchozí tvrzení se ještě dá zobecnit – viz Otázky.

Začneme s jednoduchou, ale velmi významnou větou o pevném bodě. Nenajdeme sice prostor s vlastností pevného bodu pro spojité funkce, ale pro tzv. kontrakce.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť $(X, d), (Y, e)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq kd(x, x') \text{ pro každé } x, x' \in X .$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Důkaz

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f : X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1, y_2)$.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť $(X, d), (Y, e)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq kd(x, x') \text{ pro každé } x, x' \in X\,.$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Důkaz

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f : X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1, y_2)$.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť $(X,d),(Y,e)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq kd(x,x') \text{ pro každé } x, x' \in X\,.$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

Je jednoduché ukázat, že každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité a že opak neplatí ani na kompaktním intervalu v $\mathbb{R}$. Více o lipschitzovských funkcích v Otázkách.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Důkaz

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X,d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f : X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n,x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1,y_2)$.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť (X,d), (Y,e) jsou metrické prostory. Zobrazení $f: X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq k d(x, x') \text{ pro každé } x, x' \in X\,.$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Dukaz

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X,d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f: X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1, y_2)$.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť $(X, d), (Y, e)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq kd(x, x') \text{ pro každé } x, x' \in X\,.$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Dukaz

Z uvedeného důkazu plyne snadno následující odhad přesnosti aproximace řešení.

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f : X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1, y_2)$.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť $(X, d), (Y, e)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq kd(x, x') \text{ pro každé } x, x' \in X .$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

Dukaz

Z uvedeného důkazu plyne snadno následující odhad přesnosti aproximace řešení.

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f : X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1, y_2)$.

DEFINICE (Kontrakce)

Nechť $(X, d), (Y, e)$ jsou metrické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá lipschitzovské, jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$e(f(x), f(x')) \leq kd(x, x') \text{ pro každé } x, x' \in X\,.$$

Lipschitzovské zobrazení s konstantou k se nazývá kontrakce, je-li $k < 1$, a neexpanzivní, je-li $k \leq 1$.

TVRZENÍ (Banachova věta o pevném bodě)

Je-li X úplný metrický prostor, má každá kontrakce $X \to X$ jediný pevný bod.

▸ Dukaz

DŮSLEDEK (Odhad přesnosti)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a kontrakce $f : X \to X$ má konstantu $k < 1$. Je-li x_0 pevný bod zobrazení f, x_1 libovolný bod X a $x_n = f^n(x_1)$, platí $d(x_n, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_1, y_2)$.

Uvědomte si, že vše na této stránce závisí na dané metrice. Změnou metriky na topologicky ekvivalentní metriku se může ztratit jak úplnost tak vlastnost kontrakce daného zobrazení.

Banachova věta o pevném bodě má mnoho různých modifikací a zobecnění. Hodně z nich je uváděna pro Banachovy prostory. My se omezíme na euklidovské prostory.

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ má vlastnost $h(r) < r$ pro každé $r > 0$. Jestliže pro $f : X \to X$ platí $d(f(x), f(x')) \leq h(d(x, x'))$ pro každé $x, x' \in X$, pak f má jediný pevný bod.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.

Důkaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Je-li $f : B \to \mathbb{R}^n$ kontrakce, která je lichá na S, má f pevný bod.

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

$\Longrightarrow$

Banachova věta o pevném bodě má mnoho různých modifikací a zobecnění. Hodně z nich je uváděna pro Banachovy prostory. My se omezíme na euklidovské prostory.

Důkaz následujícího tvrzení imituje důkaz Banachovy věty.

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ má vlastnost $h(r) < r$ pro každé $r > 0$. Jestliže pro $f : X \to X$ platí $d(f(x), f(x')) \leq h(d(x, x'))$ pro každé $x, x' \in X$, pak f má jediný pevný bod.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.

▸ Důkaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Je-li $f : B \to \mathbb{R}^n$ kontrakce, která je lichá na S, má f pevný bod.

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ má vlastnost $h(r) < r$ pro každé $r > 0$. Jestliže pro $f : X \to X$ platí $d(f(x), f(x')) \leq h\big(d(x, x')\big)$ pro každé $x, x' \in X$, pak f má jediný pevný bod.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.

▸ Důkaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Je-li $f : B \to \mathbb{R}^n$ kontrakce, která je lichá na S, má f pevný bod.

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X,d) je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ má vlastnost $h(r)<r$ pro každé $r>0$. Jestliže pro $f:X\to X$ platí $d(f(x),f(x'))\le h(d(x,x'))$ pro každé $x,x'\in X$, pak f má jediný pevný bod.

Jiný typ zobecnění nepředpokládá, že $f(X)\subset X$ – pak ovšem se musí přidat jiná podmínka.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f:B\to\mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S)\subset B$ má pevný bod.

Důkaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Je-li $f:B\to\mathbb{R}^n$ kontrakce, která je lichá na S, má f pevný bod.

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X, d) *je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce* $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *má vlastnost* $h(r) < r$ *pro každé* $r > 0$. *Jestliže pro* $f : X \to X$ *platí* $d(f(x), f(x')) \leq h(d(x, x'))$ *pro každé* $x, x' \in X$, *pak* f *má jediný pevný bod.*

Jiný typ zobecnění nepředpokládá, že $f(X) \subset X$ – pak ovšem se musí přidat jiná podmínka.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B *je* n*-dimenzionální koule v* $\mathbb{R}^n$ *se středem 0 a* S *je její hranice. Každá kontrakce* $f : B \to \mathbb{R}^n$ *s vlastností* $f(S) \subset B$ *má pevný bod.*

Dukaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B *je* n*-dimenzionální koule v* $\mathbb{R}^n$ *se středem 0 a* S *je její hranice. Je-li* $f : B \to \mathbb{R}^n$ *kontrakce, která je lichá na* S, *má* f *pevný bod.*

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

TVRZENÍ **(Banachova věta pro obecnější kontrakce)**

Nechť (X, d) *je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce* $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *má vlastnost* $h(r) < r$ *pro každé* $r > 0$. *Jestliže pro* $f : X \to X$ *platí* $d(f(x), f(x')) \le h(d(x, x'))$ *pro každé* $x, x' \in X$, *pak* f *má jediný pevný bod.*

TVRZENÍ **(Banachova věta pro neautomorfizmy)**

Nechť B *je n-dimenzionální koule v* $\mathbb{R}^n$ *se středem 0 a* S *je její hranice. Každá kontrakce* $f : B \to \mathbb{R}^n$ *s vlastností* $f(S) \subset B$ *má pevný bod.*

Dukaz

Následující důsledek je velmi významný. V následující části ukážeme, že předpoklad kontrakce je možné vynechat.

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B *je n-dimenzionální koule v* $\mathbb{R}^n$ *se středem 0 a* S *je její hranice. Je-li* $f : B \to \mathbb{R}^n$ *kontrakce, která je lichá na* S, *má* f *pevný bod.*

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ má vlastnost $h(r) < r$ pro každé $r > 0$. Jestliže pro $f : X \to X$ platí $d(f(x), f(x')) \leq h(d(x, x'))$ pro každé $x, x' \in X$, pak f má jediný pevný bod.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.

Dukaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Je-li $f : B \to \mathbb{R}^n$ kontrakce, která je lichá na S, má f pevný bod.

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Banachova věta pro obecnější kontrakce)

Nechť (X,d) je úplný metrický prostor a neklesající zprava spojitá funkce $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ má vlastnost $h(r)<r$ pro každé $r>0$. Jestliže pro $f:X\to X$ platí $d(f(x),f(x'))\le h(d(x,x'))$ pro každé $x,x'\in X$, pak f má jediný pevný bod.

TVRZENÍ (Banachova věta pro neautomorfizmy)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každá kontrakce $f:B\to\mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S)\subset B$ má pevný bod.

Dukaz

DŮSLEDEK (Antipodální věta)

Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Je-li $f:B\to\mathbb{R}^n$ kontrakce, která je lichá na S, má f pevný bod.

Některé další věty blízké Banachově větě jsou uvedeny v Otázkách.

$\Rightarrow$

Jednou z nejdůležitějších vět o pevném bodě je tzv. Brouwerova věta (ale byla objevena i jinými matematiky). Existuje mnoho důkazů, např. pomocí věty o substituci ve vícerozměrném integrálu, pomocí Greenovy věty o vztahu křivkového a dvojného integrálu, pomocí homologických grup, atd. Tyto důkazy jsou elegantní, ale používají hlubší znalosti z jiných oborů.

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

Důkaz

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \ldots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \ldots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap \{F_i; i = 1 \ldots n+1\} \neq \emptyset$.

Důkaz

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché spojité zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Pro každé spojité zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existuje x tak, že $f(x) = f(-x)$.*

Jednou z nejdůležitějších vět o pevném bodě je tzv. Brouwerova věta (ale byla objevena i jinými matematiky). Existuje mnoho důkazů, např. pomocí věty o substituci ve vícerozměrném integrálu, pomocí Greenovy věty o vztahu křivkového a dvojného integrálu, pomocí homologických grup, atd. Tyto důkazy jsou elegantní, ale používají hlubší znalosti z jiných oborů.

My zde uvedeme elementární důkaz založený na jednom kombinatorickém tvrzení, tzv. Spernerovu lemmatu (vysvětlení použitých pojmů najdete v Poznámkách).

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

Důkaz

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \ldots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \ldots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap\{F_i; i = 1 \ldots n+1\} \neq \emptyset$.

Důkaz

DŮSLEDEK

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

▸ Dukaz

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \dots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \dots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \dots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap\{F_i; i = 1 \dots n+1\} \neq \emptyset$.

▸ Dukaz

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché spojité zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Pro každé spojité zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existuje x tak, že $f(x) = f(-x)$.*
3. *Pro $n \neq m$ nejsou prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ homeomorfní.*

TVRZENÍ (Sperneronovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

Dukaz

Pokud je S např. trojúhelník s vrcholy a_1, a_2, a_3 a přiřadíme každému vrcholu v z $\mathcal{S}$ index nějakého vrcholu nosiče v, pak v $\mathcal{S}$ existuje trojúhelník, který má přiřazená čísla 1,2,3.

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \ldots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \ldots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap \{F_i; i = 1 \ldots n+1\} \neq \emptyset$.

Dukaz

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché spojité zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Pro každé spojité zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existuje x tak, že $f(x) = f(-x)$.*
3. *Pro $n \neq m$ nejsou prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ homeomorfní.*

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \longrightarrow S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

Dukaz

Následující tvrzení je velmi důležitý nástroj v mnoha oborech matematiky. Zde ho dokážeme pomocí Spernerova lemmatu.

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \ldots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \ldots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap\{F_i; i = 1 \ldots n+1\} \neq \emptyset$.

Dukaz

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché spojité zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Pro každé spojité zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existuje x tak, že $f(x) = f(-x)$.*
3. *Pro $n \neq m$ nejsou prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ homeomorfní.*

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

Dukaz

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \dots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \dots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \dots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap\{F_i; i = 1 \dots n+1\} \neq \emptyset$.

Dukaz

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché spojité zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Pro každé spojité zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existuje x tak, že $f(x) = f(-x)$.*
3. *Pro $n \neq m$ nejsou prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ homeomorfní.*

TVRZENÍ (Spernerovo lemma)

Nechť S je simplex a $\mathcal{S}$ je jeho rozdělení. Je-li F zobrazení $\mathcal{S} \to S$, které vrcholu z $\mathcal{S}$ přiřazuje vrchol jeho nosiče v S, existuje simplex $S' \in \mathcal{S}$, který se zobrazí na S.

▸ Dukaz

TVRZENÍ (Věta Ljusternika a Soboleva – slabší tvar)

Nechť v n-dimenzionálním simplexu S s vrcholy $a_1, \ldots, a_{n+1}$ je dáno $n+1$ uzavřených množin $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ tak, že každá strana simplexu, určená vrcholy $a_{k_1}, \ldots, a_{k_j}$, je obsažena ve sjednocení $F_{k_1} \cup \ldots \cup F_{k_j}$. Potom je $\bigcap\{F_i; i = 1 \ldots n+1\} \neq \emptyset$.

▸ Dukaz

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché spojité zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Pro každé spojité zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existuje x tak, že $f(x) = f(-x)$.*
3. *Pro $n \neq m$ nejsou prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ homeomorfní.*

TVRZENÍ (Brouwerova věta o pevném bodě)

Každá uzavřená koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu.

Dukaz

DŮSLEDEK

1. *Každý retrakt uzavřené koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu (speciálně tedy každá kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$).*
2. *Sféra S^{n-1} jako hranice n-dimenzionální koule není jejím retraktem.*
3. *Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každé spojité zobrazení $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.*

TVRZENÍ (Brouwerova věta o pevném bodě)

Každá uzavřená koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu.

Dukaz

Uvědomme si, že Banachova věta platí pro mnohem obecnější prostory než Brouwerova věta, ale jen pro speciální zobrazení. Brouwerova věta platí pro speciálnější prostory, ale pro jakákoli spojitá zobrazení.

DŮSLEDEK

1. *Každý retrakt uzavřené koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu (speciálně tedy každá kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$).*
2. *Sféra S^{n-1} jako hranice n-dimenzionální koule není jejím retraktem.*
3. *Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každé spojité zobrazení $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.*

TVRZENÍ (Brouwerova věta o pevném bodě)

Každá uzavřená koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu.

▸ Dukaz

DŮSLEDKEK

1. *Každý retrakt uzavřené koule v euklidovském prostoru má vlastnost pevného bodu (speciálně tedy každá kompaktní konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$).*
2. *Sféra S^{n-1} jako hranice n-dimenzionální koule není jejím retraktem.*
3. *Nechť B je n-dimenzionální koule v $\mathbb{R}^n$ se středem 0 a S je její hranice. Každé spojité zobrazení $f : B \to \mathbb{R}^n$ s vlastností $f(S) \subset B$ má pevný bod.*