18. PEVNÝ BOD

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Uvedeme některé základní pojmy z části topologie dříve nazývané kombinatorická topologie. Tento název lépe vystihuje tu část dnešní algebraické topologie, kterou budeme používat.

Připomeňme, že konečná podmnožina euklidovského prostoru se nazývá afinně nezávislá, jestliže není částí lineárního obalu žádné své vlastní podmnožiny. Má-li množina 3 body, nesmí ležet všechny na jedné přímce, má-li 4 body, nesmí všechny ležet v jedné rovině, atd.

Simplex

Simplex je konvexní obal neprázdné afinně nezávislé podmnožiny V euklidovského prostoru.
O jedničku snížený počet množiny V se nazývá dimenze simplexu.
Body množiny V se nazývají vrcholy simplexu, konvexní obaly neprázdných podmnožin V se nazývají strany simplexu.

Každý bod p simplexu S s vrcholy $a_0, \ldots, a_n$ lze jednoznačně vyjádřit tzv. konvexní kombinací, tj.

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \,, \quad \text{kde} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \,.$$

Snadno se ukáže, že funkce $\lambda_i : S \to [0,1]$ jsou spojité.

Homeomorfizmus s koulí

Je-li S simplex s vrcholy $a_0, \ldots, a_n$, je homemomorfní s n-dimenzionální koulí a jeho hranice (všechny jeho $(n-1)$-dimenzionální strany) je homeomorfní s hranicí koule, tj. s $(n-1)$-dimenzionální sférou S^{n-1}.

Připomeňme, že konečná podmnožina euklidovského prostoru se nazývá afinně nezávislá, jestliže není částí lineárního obalu žádné své vlastní podmnožiny. Má-li množina 3 body, nesmí ležet všechny na jedné přímce, má-li 4 body, nesmí všechny ležet v jedné rovině, atd.

Simplex

Simplex je konvexní obal neprázdné afinně nezávislé podmnožiny V euklidovského prostoru.
O jedničku snížený počet množiny V se nazývá dimenze simplexu.
Body množiny V se nazývají vrcholy simplexu, konvexní obaly neprázdných podmnožin V se nazývají strany simplexu.

Každý bod p simplexu S s vrcholy $a_0, \dots, a_n$ lze jednoznačně vyjádřit tzv. konvexní kombinací, tj.

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\,, \quad \text{kde } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\,.$$

Snadno se ukáže, že funkce $\lambda_i : S \to [0,1]$ jsou spojité.

Homeomorfizmus s koulí

Je-li S simplex s vrcholy $a_0, \dots, a_n$, je homemomorfní s n-dimenzionální koulí a jeho hranice (všechny jeho $(n-1)$-dimenzionální strany) je homeomorfní s hranicí koule, tj. s $(n-1)$-dimenzionální sférou S^{n-1}.
Všechny n-dimenzionální simplexy jsou tedy homeomorfní.

Stačí vnořit simplex do koule se středem uvnitř simplexu a promítat hranici simplexu na sféru.

Připomeňme, že konečná podmnožina euklidovského prostoru se nazývá afinně nezávislá, jestliže není částí lineárního obalu žádné své vlastní podmnožiny. Má-li množina 3 body, nesmí ležet všechny na jedné přímce, má-li 4 body, nesmí všechny ležet v jedné rovině, atd.

Simplex

Simplex je konvexní obal neprázdné afinně nezávislé podmnožiny V euklidovského prostoru.
O jedničku snížený počet množiny V se nazývá dimenze simplexu.
Body množiny V se nazývají vrcholy simplexu, konvexní obaly neprázdných podmnožin V se nazývají strany simplexu.

Každý bod p simplexu S s vrcholy $a_0, \dots, a_n$ lze jednoznačně vyjádřit tzv. konvexní kombinací, tj.

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\,, \quad \text{kde} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\,.$$

Snadno se ukáže, že funkce $\lambda_i : S \to [0,1]$ jsou spojité.

Homeomorfizmus s koulí

Je-li S simplex s vrcholy $a_0, \dots, a_n$, je homemomorfní s n-dimenzionální koulí a jeho hranice (všechny jeho $(n-1)$-dimenzionální strany) je homeomorfní s hranicí koule, tj. s $(n-1)$-dimenzionální sférou S^{n-1}. Všechny n-dimenzionální simplexy jsou tedy homeomorfní.

Stačí vnořit simplex do koule se středem uvnitř simplexu a promítat hranici simplexu na sféru.

Připomeňme, že konečná podmnožina euklidovského prostoru se nazývá afinně nezávislá, jestliže není částí lineárního obalu žádné své vlastní podmnožiny. Má-li množina 3 body, nesmí ležet všechny na jedné přímce, má-li 4 body, nesmí všechny ležet v jedné rovině, atd.

Simplex

Simplex je konvexní obal neprázdné afinně nezávislé podmnožiny V euklidovského prostoru.
O jedničku snížený počet množiny V se nazývá dimenze simplexu.
Body množiny V se nazývají vrcholy simplexu, konvexní obaly neprázdných podmnožin V se nazývají strany simplexu.

Každý bod p simplexu S s vrcholy $a_0, \dots, a_n$ lze jednoznačně vyjádřit tzv. konvexní kombinací, tj.

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \,, \quad \text{kde } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\,.$$

Snadno se ukáže, že funkce $\lambda_i : S \to [0, 1]$ jsou spojité.

Homeomorfizmus s koulí

Je-li S simplex s vrcholy $a_0, \dots, a_n$, je homemomorfní s n-dimenzionální koulí a jeho hranice (všechny jeho $(n-1)$-dimenzionální strany) je homeomorfní s hranicí koule, tj. s $(n-1)$-dimenzionální sférou S^{n-1}.
Všechny n-dimenzionální simplexy jsou tedy homeomorfní.

Stačí vnořit simplex do koule se středem uvnitř simplexu a promítat hranici simplexu na sféru.

Připomeňme, že konečná podmnožina euklidovského prostoru se nazývá afinně nezávislá, jestliže není částí lineárního obalu žádné své vlastní podmnožiny. Má-li množina 3 body, nesmí ležet všechny na jedné přímce, má-li 4 body, nesmí všechny ležet v jedné rovině, atd.

Simplex

Simplex je konvexní obal neprázdné afinně nezávislé podmnožiny V euklidovského prostoru.
O jedničku snížený počet množiny V se nazývá dimenze simplexu.
Body množiny V se nazývají vrcholy simplexu, konvexní obaly neprázdných podmnožin V se nazývají strany simplexu.

Každý bod p simplexu S s vrcholy $a_0, \dots, a_n$ lze jednoznačně vyjádřit tzv. konvexní kombinací, tj.

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \,, \quad \text{kde} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \,.$$

Snadno se ukáže, že funkce $\lambda_i : S \to [0, 1]$ jsou spojité.

V euklidovském mprostoru:
0-dimenzionální simplex je bod, 1-dimenzionální simplex je uzavřená úsečka, 2-dimenzionální simplex je uzavřený trojúhelník, 3-dimenzionální trojúhelník je uzavřený čtyřstěn, ...

Homeomorfizmus s koulí

Je-li S simplex s vrcholy $a_0, \dots, a_n$, je homemomorfní s n-dimenzionální koulí a jeho hranice (všechny jeho

Připomeňme, že konečná podmnožina euklidovského prostoru se nazývá afinně nezávislá, jestliže není částí lineárního obalu žádné své vlastní podmnožiny. Má-li množina 3 body, nesmí ležet všechny na jedné přímce, má-li 4 body, nesmí všechny ležet v jedné rovině, atd.

Simplex

Simplex je konvexní obal neprázdné afinně nezávislé podmnožiny V euklidovského prostoru.
O jedničku snížený počet množiny V se nazývá dimenze simplexu.
Body množiny V se nazývají vrcholy simplexu, konvexní obaly neprázdných podmnožin V se nazývají strany simplexu.

Každý bod p simplexu S s vrcholy $a_0, \ldots, a_n$ lze jednoznačně vyjádřit tzv. konvexní kombinací, tj.

$$p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i\,, \quad \text{kde } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\,.$$

Snadno se ukáže, že funkce $\lambda_i : S \to [0, 1]$ jsou spojité.

Homeomorfizmus s koulí

Je-li S simplex s vrcholy $a_0, \ldots, a_n$, je homemomorfní s n-dimenzionální koulí a jeho hranice (všechny jeho $(n-1)$-dimenzionální strany) je homeomorfní s hranicí koule, tj. s $(n-1)$-dimenzionální sférou S^{n-1}.
Všechny n-dimenzionální simplexy jsou tedy homeomorfní.

Stačí vnořit simplex do koule se středem uvnitř simplexu a promítat hranici simplexu na sféru.

Budeme potřebovat rozdělení simplexu na menší simplexy, které má jisté přirozené vlastnosti (často se tomuto rozdělení říká triangulace podle obdobné geodetické triangulace terénu).

Simpliciální rozdělení

Simpliciální rozdělení $\mathcal{S}$ simplexu S je pokrytí S, jehož prvky jsou opět simplexy a které má následující vlastnosti:

1. S každým simplexem v $\mathcal{S}$ náleží do $\mathcal{S}$ i každá jeho strana.
2. Neprázdný průnik dvou simplexů z $\mathcal{S}$ je jejich společná strana.

Nedojde-li k nedorozumění, stačí používat termín *rozdělení*.

Barycentrické rozdělení

Nechť S je simplex a pro každou jeho stranu L nechť a_L je těžiště L (tj. je-li L určeno vrcholy $b_0, \dots, b_n$, je $a_L = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} b_i$). Je-li $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots \supsetneq L_k$ posloupnost stran S, tvoří body $a_{L_1}, \dots, a_{L_k}$ afinně nezávislou množinu a určují tedy simplex. Množina všech takto vzniklých simplexů je rozdělení simplexu S, které se nazývá první barycentrické rozdělení.
První barycentrické rozdělení každého simplexu v prvním barycentrickém rozdělení simplexu S dává dohromady opět rozdělení simplexu S, tzv. druhé barycentrické rozdělení, atd. Pokud není nutné vědět pořadí barycentrického rozdělení, mluví se pouze o barycentrickém rozdělení.
Je-li r průměr n-dimenzionálního simplexu S, je průměr každého simplexu z k-tého barycentrického rozdělení roven nejvýše číslu $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k r$ a konverguje tedy k 0 pro rostoucí k.

Simpliciální rozdělení

Simpliciální rozdělení $\mathcal{S}$ simplexu S je pokrytí S, jehož prvky jsou opět simplexy a které má následující vlastnosti:

1. S každým simplexem v $\mathcal{S}$ náleží do $\mathcal{S}$ i každá jeho strana.
2. Neprázdný průnik dvou simplexů z $\mathcal{S}$ je jejich společná strana.

Nedojde-li k nedorozumění, stačí používat termín *rozdělení*.

Barycentrické rozdělení

Nechť S je simplex a pro každou jeho stranu L nechť a_L je těžiště L (tj. je-li L určeno vrcholy $b_0, \dots, b_n$, je $a_L = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} b_i$). Je-li $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots \supsetneq L_k$ posloupnost stran S, tvoří body $a_{L_1}, \dots, a_{L_k}$ afinně nezávislou množinu a určují tedy simplex. Množina všech takto vzniklých simplexů je rozdělení simplexu S, které se nazývá první barycentrické rozdělení.
První barycentrické rozdělení každého simplexu v prvním barycentrickém rozdělení simplexu S dává dohromady opět rozdělení simplexu S, tzv. druhé barycentrické rozdělení, atd. Pokud není nutné vědět pořadí barycentrického rozdělení, mluví se pouze o barycentrickém rozdělení.
Je-li r průměr n-dimenzionálního simplexu S, je průměr každého simplexu z k-tého barycentrického rozdělení roven nejvýše číslu $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k r$ a konverguje tedy k 0 pro rostoucí k.

Nosič

Je-li $\mathcal{S}$ rozdělení simplexu S a v vrchol z $\mathcal{S}$, existuje nejmenší strana v S, která v obsahuje. Tato strana se nazývá nosičem vrcholu v.

Simpliciální rozdělení

Simpliciální rozdělení $\mathcal{S}$ simplexu S je pokrytí S, jehož prvky jsou opět simplexy a které má následující vlastnosti:

1. S každým simplexem v $\mathcal{S}$ náleží do $\mathcal{S}$ i každá jeho strana.
2. Neprázdný průnik dvou simplexů z $\mathcal{S}$ je jejich společná strana.

Nedojde-li k nedorozumění, stačí používat termín *rozdělení*.

Barycentrické rozdělení

Nechť S je simplex a pro každou jeho stranu L nechť a_L je těžiště L (tj. je-li L určeno vrcholy $b_0, \dots, b_n$, je $a_L = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} b_i$). Je-li $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots \supsetneq L_k$ posloupnost stran S, tvoří body $a_{L_1}, \dots, a_{L_k}$ afinně nezávislou množinu a určují tedy simplex. Množina všech takto vzniklých simplexů je rozdělení simplexu S, které se nazývá první barycentrické rozdělení.
První barycentrické rozdělení každého simplexu v prvním barycentrickém rozdělení simplexu S dává dohromady opět rozdělení simplexu S, tzv. druhé barycentrické rozdělení, atd. Pokud není nutné vědět pořadí barycentrického rozdělení, mluví se pouze o barycentrickém rozdělení.
Je-li r průměr n-dimenzionálního simplexu S, je průměr každého simplexu z k-tého barycentrického rozdělení roven nejvýše číslu $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k r$ a konverguje tedy k 0 pro rostoucí k.

Nosič

Je-li $\mathcal{S}$ rozdělení simplexu S a v vrchol z $\mathcal{S}$, existuje nejmenší strana v S, která v obsahuje. Tato strana se nazývá nosičem vrcholu v.

Simpliciální rozdělení

Simpliciální rozdělení $\mathcal{S}$ simplexu S je pokrytí S, jehož prvky jsou opět simplexy a které má následující vlastnosti:

1. S každým simplexem v $\mathcal{S}$ náleží do $\mathcal{S}$ i každá jeho strana.
2. Neprázdný průnik dvou simplexů z $\mathcal{S}$ je jejich společná strana.

Nedojde-li k nedorozumění, stačí používat termín *rozdělení*.

Barycentrické rozdělení

Nechť S je simplex a pro každdou jeho stranu L nechť a_L je těžiště L (tj. je-li L určeno vrcholy $b_0, \dots, b_n$, je $a_L = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} b_i$). Je-li $L_1 \supsetneq L_2 \supsetneq \dots \supsetneq L_k$ posloupnost stran S, tvoří body $a_{L_1}, \dots, a_{L_k}$ afinně nezávislou množinu a určují tedy simplex. Množina všech takto vzniklých simplexů je rozdělení simplexu S, které se nazývá první barycentrické rozdělení.
První barycentrické rozdělení každého simplexu v prvním barycentrickém rozdělení simplexu S dává dohromady opět rozdělení simplexu S, tzv. druhé barycentrické rozdělení, atd. Pokud není nutné vědět pořadí barycentrického rozdělení, mluví se pouze o barycentrickém rozdělení.
Je-li r průměr n-dimenzionálního simplexu S, je průměr každého simplexu z k-tého barycentrického rozdělení roven nejvýše číslu $\left(\frac{n}{n+1}\right)^k r$ a konverguje tedy k 0 pro rostoucí k.

Nosič

Je-li $\mathcal{S}$ rozdělení simplexu S a v vrchol z $\mathcal{S}$, existuje nejmenší strana v S, která v obsahuje. Tato strana se nazývá nosičem vrcholu v.

Spernerovo lemma lze použít v upraveném tvaru a dokázat Ljusternikovu–Šnirelmanovu větu. Podívejme se na onu úpravu.

Sféra S^n je homeomorfní množině T^n n-dimenzionálních simplexů s vrcholy branými z množiny $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (e_i je bod v $\mathbb{R}^{n+1}$ s i-tou souřadnicí 1 a ostatními 0), přičemž v simplexu se nesmí vyskytovat protilehlé vrcholy (jsou to body $(x_0, \ldots, x_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovující podmínce $\sum_{i=0}^{n} |x_i| = 1$). Máme-li rozdělení $\mathcal{S}$ všech simplexů v T^n, které je symetrické podle počátku a φ je liché zobrazení vrcholů $\mathcal{S}$ do vrcholů T^n zachovávající simplexy, pak modifikace důkazu Spernerova lemmatu dá existenci simplexu v $\mathcal{S}$ který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$.

Srovnejte následující tvrzení se slabší verzí.

TVRZENÍ (Ljusternikova–Šnirelmanova věta)

Nechť $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ je uzavřené pokrytí n-dimenzionální koule. Pak existuje index i a prvek x koule tak, že oba protilehlé body $x, -x$ náleží do F_i.

Z Ljusternikovy–Šnirelmanovy věty vyplývá (v jistém smyslu je jí ekvivalentní) následující důležitá věta Borsukova-Ulamova.

TVRZENÍ (Borsukova-Ulamova věta)

Každé spojité zobrazení $S^n \to \mathbb{R}^n$ ztotožní aspoň jednu dvojici protilehlých bodů $x, -x$.

Důsledkem (opět ekvivalentním předchozí větě) jsou tvrzení:

DŮSLEDEK

Sféra S^n je homeomorfní množině T^n n-dimenzionálních simplexů s vrcholy branými z množiny $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (e_i je bod v $\mathbb{R}^{n+1}$ s i-tou souřadnicí 1 a ostatními 0), přičemž v simplexu se nesmí vyskytovat protilehlé vrcholy (jsou to body $(x_0, \ldots, x_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovující podmínce $\sum_{i=0}^{n} |x_i| = 1$). Máme-li rozdělení $\mathcal{S}$ všech simplexů v T^n, které je symetrické podle počátku a φ je liché zobrazení vrcholů $\mathcal{S}$ do vrcholů T^n zachovávající simplexy, pak modifikace důkazu Spernerova lemmatu dá existenci simplexu v $\mathcal{S}$ který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$.

Srovnejte následující tvrzení se slabší verzí.

TVRZENÍ (Ljusternikova–Šnirelmanova věta)

Nechť $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ je uzavřené pokrytí n-dimenzionální koule. Pak existuje index i a prvek x koule tak, že oba protilehlé body $x, -x$ náleží do F_i.

Z Ljusternikovy–Šnirelmanovy věty vyplývá (v jistém smyslu je jí ekvivalentní) následující důležitá věta Borsukova-Ulamova.

TVRZENÍ (Borsukova-Ulamova věta)

Každé spojité zobrazení $S^n \to \mathbb{R}^n$ ztotožní aspoň jednu dvojici protilehlých bodů $x, -x$.

Důsledkem (opět ekvivalentním předchozí větě) jsou tvrzení:

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Každé spojité liché zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ má kořen, tj. existuje $x \in S^n$ tak, že $f(x) = 0$.*
3. *Každé spojité zobrazení $f : B^n \to \mathbb{R}^n$, které je liché na S^n, má pevný bod.*

Sféra S^n je homeomorfní množině T^n n-dimenzionálních simplexů s vrcholy branými z množiny $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (e_i je bod v $\mathbb{R}^{n+1}$ s i-tou souřadnicí 1 a ostatními 0), přičemž v simplexu se nesmí vyskytovat protilehlé vrcholy (jsou to body $(x_0, \ldots, x_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovující podmínce $\sum_{i=0}^{n} |x_i| = 1$). Máme-li rozdělení $\mathcal{S}$ všech simplexů v T^n, které je symetrické podle počátku a φ je liché zobrazení vrcholů $\mathcal{S}$ do vrcholů T^n zachovávající simplexy, pak modifikace důkazu Spernerova lemmatu dá existenci simplexu v $\mathcal{S}$ který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$.

Srovnejte následující tvrzení se slabší verzí.

TVRZENÍ (Ljusternikova–Šnirelmanova věta)

Nechť $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ je uzavřené pokrytí n-dimenzionální koule. Pak existuje index i a prvek x koule tak, že oba protilehlé body $x, -x$ náleží do F_i.

Z Ljusternikovy–Šnirelmanovy věty vyplývá (v jistém smyslu je jí ekvivalentní) následující důležitá věta Borsukova-Ulamova.

TVRZENÍ (Borsukova-Ulamova věta)

Každé spojité zobrazení $S^n \to \mathbb{R}^n$ ztotožní aspoň jednu dvojici protilehlých bodů $x, -x$.

Důsledkem (opět ekvivalentním předchozí větě) jsou tvrzení:

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Každé spojité liché zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ má kořen, tj. existuje $x \in S^n$ tak, že $f(x) = 0$.*
3. *Každé spojité zobrazení $f : B^n \to \mathbb{R}^n$, které je liché na S^n, má pevný bod.*

Sféra S^n je homeomorfní množině T^n n-dimenzionálních simplexů s vrcholy branými z množiny $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (e_i je bod v $\mathbb{R}^{n+1}$ s i-tou souřadnicí 1 a ostatními 0), přičemž v simplexu se nesmí vyskytovat protilehlé vrcholy (jsou to body $(x_0, \ldots, x_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovující podmínce $\sum_{i=0}^{n} |x_i| = 1$). Máme-li rozdělení $\mathcal{S}$ všech simplexů v T^n, které je symetrické podle počátku a φ je liché zobrazení vrcholů $\mathcal{S}$ do vrcholů T^n zachovávající simplexy, pak modifikace důkazu Spernerova lemmatu dá existenci simplexu v $\mathcal{S}$ který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$.

Srovnejte následující tvrzení se slabší verzí.

TVRZENÍ (Ljusternikova–Šnirelmanova věta)

Nechť $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ je uzavřené pokrytí n-dimenzionální koule. Pak existuje index i a prvek x koule tak, že oba protilehlé body $x, -x$ náleží do F_i.

Místo sféry budeme uvažovat v předchozím odstavci uvedenou množinu simplexů T^n. Předpokládejme, že tvrzení neplatí. Stačí dokázat, že $\bigcap\{F_i; i = 1 \ldots n+1\} \neq \emptyset$ (proč?). Nechť to neplatí a označme $F_{-i} = -F_i$. Zvolme nyní kladné číslo r menší než Lebesgueovo číslo pokrytí soustavy $F_1, F_{-1}, F_{-2}, F_2, F_3, F_{-3}, \ldots$ a než vzdálenosti mezi $F_i, -F_i$. Nechť $\mathcal{S}$ je rozdělení popsané v konstrukci T^n, které má průměry simplexů rovny nejvýše r. Pro vrchol v z $\mathcal{S}$ definujme $f(v) = \pm(-1)^{i+1} e_{|i|}$, kde i je první index výše uvedené soustavy $F_{\pm i}$ neobsahující v a znaménko v $\pm$ je znaménko tohoto indexu. Pak f splňuje předpoklady výše uvedené modifikace Spernerova lemmatu a tedy existuje simplex v $\mathcal{S}$, který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$. Pak ale tento simplex protíná všechny množiny F_i, což je spor.

Z Ljusternikovy–Šnirelmanovy věty vyplývá (v jistém smyslu je jí ekvivalentní) následující důležitá věta Borsukova-Ulamova.

TVRZENÍ (Borsukova-Ulamova věta)

Každé spojité zobrazení $S^n \to \mathbb{R}^n$ ztotožní aspoň jednu dvojici protilehlých bodů $x, -x$.

Důsledkem (opět ekvivalentním předchozí větě) jsou tvrzení:

Sféra S^n je homeomorfní množině T^n n-dimenzionálních simplexů s vrcholy branými z množiny $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (e_i je bod v $\mathbb{R}^{n+1}$ s i-tou souřadnicí 1 a ostatními 0), přičemž v simplexu se nesmí vyskytovat protilehlé vrcholy (jsou to body $(x_0, \ldots, x_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovující podmínce $\sum_{i=0}^{n} |x_i| = 1$). Máme-li rozdělení $\mathcal{S}$ všech simplexů v T^n, které je symetrické podle počátku a φ je liché zobrazení vrcholů $\mathcal{S}$ do vrcholů T^n zachovávající simplexy, pak modifikace důkazu Spernerova lemmatu dá existenci simplexu v $\mathcal{S}$ který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$.

Srovnejte následující tvrzení se slabší verzí.

TVRZENÍ (Ljusternikova–Šnirelmanova věta)

Nechť $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ je uzavřené pokrytí n-dimenzionální koule. Pak existuje index i a prvek x koule tak, že oba protilehlé body $x, -x$ náleží do F_i.

Z Ljusternikovy–Šnirelmanovy věty vyplývá (v jistém smyslu je jí ekvivalentní) následující důležitá věta Borsukova-Ulamova.

TVRZENÍ (Borsukova-Ulamova věta)

Každé spojité zobrazení $S^n \to \mathbb{R}^n$ ztotožní aspoň jednu dvojici protilehlých bodů $x, -x$.

Důsledkem (opět ekvivalentním předchozí větě) jsou tvrzení:

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Každé spojité liché zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ má kořen, tj. existuje $x \in S^n$ tak, že $f(x) = 0$.*
3. *Každé spojité zobrazení $f : B^n \to \mathbb{R}^n$, které je liché na S^n, má pevný bod.*

Sféra S^n je homeomorfní množině T^n n-dimenzionálních simplexů s vrcholy branými z množiny $\pm e_i$, $i = 1, \ldots, n+1$ (e_i je bod v $\mathbb{R}^{n+1}$ s i-tou souřadnicí 1 a ostatními 0), přičemž v simplexu se nesmí vyskytovat protilehlé vrcholy (jsou to body $(x_0, \ldots, x_n)$ v $\mathbb{R}^{n+1}$ vyhovující podmínce $\sum_{i=0}^{n} |x_i| = 1$). Máme-li rozdělení $\mathcal{S}$ všech simplexů v T^n, které je symetrické podle počátku a φ je liché zobrazení vrcholů $\mathcal{S}$ do vrcholů T^n zachovávající simplexy, pak modifikace důkazu Spernerova lemmatu dá existenci simplexu v $\mathcal{S}$ který se zobrazí na $e_0, -e_1, e_2, -e_3, \ldots, (-1)^n e_n$.

Srovnejte následující tvrzení se slabší verzí.

TVRZENÍ (Ljusternikova–Šnirelmanova věta)

Nechť $\{F_i\}_{i=1}^{n+1}$ je uzavřené pokrytí n-dimenzionální koule. Pak existuje index i a prvek x koule tak, že oba protilehlé body $x, -x$ náleží do F_i.

Z Ljusternikovy–Šnirelmanovy věty vyplývá (v jistém smyslu je jí ekvivalentní) následující důležitá věta Borsukova-Ulamova.

TVRZENÍ (Borsukova-Ulamova věta)

Každé spojité zobrazení $S^n \to \mathbb{R}^n$ ztotožní aspoň jednu dvojici protilehlých bodů $x, -x$.

Důsledkem (opět ekvivalentním předchozí větě) jsou tvrzení:

DŮSLEDEK

1. *Neexistuje liché zobrazení $S^n \to S^{n-1}$.*
2. *Každé spojité liché zobrazení $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ má kořen, tj. existuje $x \in S^n$ tak, že $f(x) = 0$.*
3. *Každé spojité zobrazení $f : B^n \to \mathbb{R}^n$, které je liché na S^n, má pevný bod.*

Vět o pevných bodech je velmi mnoho. Jsou formulovány pro uspořádané prostory, afinní prostory, lokálně konvexní prostory, atd. Mají různé modifikace, např. potvrzují existenci stejného pevného bodu pro více zobrazení nebo nacházejí bod, jehož obraz je velmi blízko originálu.

V další části uvedeme jen dvě situace zobecňující námi uvedená tvrzení.

Vět o pevných bodech je velmi mnoho. Jsou formulovány pro uspořádané prostory, afinní prostory, lokálně konvexní prostory, atd. Mají různé modifikace, např. potvrzují existenci stejného pevného bodu pro více zobrazení nebo nacházejí bod, jehož obraz je velmi blízko originálu.

V další části uvedeme jen dvě situace zobecňující námi uvedená tvrzení.

$\Rightarrow$

V Příkladech je uvedeno, že Brouwerova věta neplatí pro nekonečné dimenze. Zjistilo se však, že dodáním předpokladu, který platí automaticky v euklidovských prostorech, lze dokázat existenci pevného bodu i v nekonečně dimenzionálních lineárních prostorech s jistou topologií.

TVRZENÍ (Schauderova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina normovaného prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

Schauderovu větu lze zobecnit na lokálně konvexní prostory:

TVRZENÍ (Schauderova-Tichonovova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

V Příkladech je uvedeno, že Brouwerova věta neplatí pro nekonečné dimenze. Zjistilo se však, že dodáním předpokladu, který platí automaticky v euklidovských prostorech, lze dokázat existenci pevného bodu i v nekonečně dimenzionálních lineárních prostorech s jistou topologií.

Uvedeme nejdříve tvrzení pro normované prostory.

TVRZENÍ (Schauderova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina normovaného prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

Schauderovu větu lze zobecnit na lokálně konvexní prostory:

TVRZENÍ (Schauderova-Tichonovova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

TVRZENÍ (Schauderova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina normovaného prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

Schauderovu větu lze zobecnit na lokálně konvexní prostory:

TVRZENÍ (Schauderova-Tichonovova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

TVRZENÍ (Schauderova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina normovaného prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

Schauderovu větu lze zobecnit na lokálně konvexní prostory:

TVRZENÍ (Schauderova-Tichonovova věta)

Nechť B je konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $f : B \to B$ je spojité zobrazení. Je-li $\overline{f(B)}$ kompaktní v X, má f pevný bod.

Víme, že existují spojitá zobrazení sféry do sebe, které nemají pevný bod. Lze poznat, kdy zobrazení sféry má pevný bod? Částečně na tuto otázku odpovídá následující tvrzení, pro které je třeba mít tzv. stupeň zobrazení.

TVRZENÍ

Nechť f je spojité zobrazení $f : S^n \to S^n$. Je-li $d(f) \neq (-1)^{n+1}$, má f pevný bod. Je-li $d(f) \neq 1$, existuje bod $x \in S^n$, pro který je $f(x) = -x$.

Uvedená věta má zajímavé důsledky, např.

DŮSLEDEK

1. *Každá rotace sféry sudé dimenze má osu otáčení (toto neplatí pro lichou dimenzi).*
2. *Sféra má spojitá tečné vektorové pole právě když má lichou dimenzi.*

Poslední tvrzení se často uvádí ve formulaci, že sféra nejde učesat.

$\Rightarrow$

Víme, že existují spojitá zobrazení sféry do sebe, které nemají pevný bod. Lze poznat, kdy zobrazení sféry má pevný bod? Částečně na tuto otázku odpovídá následující tvrzení, pro které je třeba mít tzv. stupeň zobrazení.

Každému spojitému zobrazení sféry $f : S^n \to S^n$ lze přiřadit celé číslo $d(f)$ nazývané stupeň zobrazení. Toto číslo udává (zhruba řečeno), kolikrát se obraz otočí. Konstantní zobrazení mají stupeň roven 0, identické zobrazení má stupeň roven 1, zobrazení $x \rightsquigarrow -x$ má stupeň $(-1)^{n+1}$. Na jednotkové kružnici má zobrazení $x \rightsquigarrow x^n$ stupeň rovný n.

TVRZENÍ

Nechť f je spojité zobrazení $f : S^n \to S^n$. Je-li $d(f) \neq (-1)^{n+1}$, má f pevný bod. Je-li $d(f) \neq 1$, existuje bod $x \in S^n$, pro který je $f(x) = -x$.

Uvedená věta má zajímavé důsledky, např.

DŮSLEDEK

1. *Každá rotace sféry sudé dimenze má osu otáčení (toto neplatí pro lichou dimenzi).*
2. *Sféra má spojitá tečné vektorové pole právě když má lichou dimenzi.*

Poslední tvrzení se často uvádí ve formulaci, že sféra nejde učesat.

TVRZENÍ

Nechť f *je spojité zobrazení* $f : S^n \to S^n$. *Je-li* $d(f) \neq (-1)^{n+1}$, *má* f *pevný bod. Je-li* $d(f) \neq 1$, *existuje bod* $x \in S^n$, *pro který je* $f(x) = -x$.

Uvedená věta má zajímavé důsledky, např.

DŮSLEDEK

1. *Každá rotace sféry sudé dimenze má osu otáčení (toto neplatí pro lichou dimenzi).*
2. *Sféra má spojitá tečné vektorové pole právě když má lichou dimenzi.*

Poslední tvrzení se často uvádí ve formulaci, že sféra nejde učesat.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ

Nechť f je spojité zobrazení $f : S^n \to S^n$. Je-li $d(f) \neq (-1)^{n+1}$, má f pevný bod. Je-li $d(f) \neq 1$, existuje bod $x \in S^n$, pro který je $f(x) = -x$.

Uvedená věta má zajímavé důsledky, např.

DŮSLEDEK

1. *Každá rotace sféry sudé dimenze má osu otáčení (toto neplatí pro lichou dimenzi).*
2. *Sféra má spojitá tečné vektorové pole právě když má lichou dimenzi.*

Poslední tvrzení se často uvádí ve formulaci, že sféra nejde učesat.

$\Rightarrow$

Stupeň zobrazení zobrazení na sféře lze modifikovat a definovat i na tzv, kompaktních polyedrech. Každému spojitému zobrazení $f : K \to K$ na kompaktním polyedru lze přiřadit tzv. Lefschetzovo číslo $\lambda(f)$, které je celé. Pokud je K sféra S^n, platí $\lambda(f) = 1 + (-1)^n d(f)$.

Z následující věty snadno vyplyne Brouwerova věta, protože pro kouli B v euklidovském prostoru (resp. pro simplex) je $\lambda(f) = 0$ pro každé spojité $f : B \to B$.

TVRZENÍ (Lefschetzova-Hopfova věta)

Nechť K je kompaktní polyedr a f je spojité zobrazení $K \to K$. Je-li $\lambda(f) \neq 0$, má f pevný bod.

Stupeň zobrazení zobrazení na sféře lze modifikovat a definovat i na tzv, kompaktních polyedrech. Každému spojitému zobrazení $f : K \to K$ na kompaktním polyedru lze přiřadit tzv. Lefschetzovo číslo $\lambda(f)$, které je celé. Pokud je K sféra S^n, platí $\lambda(f) = 1 + (-1)^n d(f)$.

Z následující věty snadno vyplyne Brouwerova věta, protože pro kouli B v euklidovském prostoru (resp. pro simplex) je $\lambda(f) = 0$ pro každé spojité $f : B \to B$.

TVRZENÍ (Lefschetzova-Hopfova věta)

Nechť K je kompaktní polyedr a f je spojité zobrazení $K \to K$. Je-li $\lambda(f) \neq 0$, má f pevný bod.

Stupeň zobrazení zobrazení na sféře lze modifikovat a definovat i na tzv, kompaktních polyedrech. Každému spojitému zobrazení $f : K \to K$ na kompaktním polyedru lze přiřadit tzv. Lefschetzovo číslo $\lambda(f)$, které je celé. Pokud je K sféra S^n, platí $\lambda(f) = 1 + (-1)^n d(f)$.

Z následující věty snadno vyplyne Brouwerova věta, protože pro kouli B v euklidovském prostoru (resp. pro simplex) je $\lambda(f) = 0$ pro každé spojité $f : B \to B$.

TVRZENÍ (Lefschetzova-Hopfova věta)

Nechť K je kompaktní polyedr a f je spojité zobrazení $K \to K$. Je-li $\lambda(f) \neq 0$, má f pevný bod.