18. PEVNÝ BOD

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Pevné body

1. Ukažte pomocí Bolzanovy věty o spojitém obrazu intervalu, že každý uzavřený interval má vlastnost pevného bodu a najděte příklad spojité funkce $(0, 1) \to (0, 1)$, která nemá pevný bod.
2. Nechť spojité zobrazení $f : X \to X$ lze faktorizovat přes prostor Y s FPP ve smyslu, že existují spojitá zobrazení $s : X \to Y$, $r : Y \to X$ tak, že $f = rs$. Pak f má pevný bod.
3. Je-li (X, d) kompaktní metrický prostor a $f : X \to X$ spojité zobrazení takové, že pro každé $\varepsilon : 0$ existuje $x \in X$ s vlastností $d(x, f/x)) \leq \varepsilon$, pak f má pevný bod. (Pomocí předchozího tvrzení o faktorizaci lze větu zobecnit na nekompaktní prostory.)

Pevné body

1. Ukažte pomocí Bolzanovy věty o spojitém obrazu intervalu, že každý uzavřený interval má vlastnost pevného bodu a najděte příklad spojité funkce $(0, 1) \to (0, 1)$, která nemá pevný bod.
2. Nechť spojité zobrazení $f : X \to X$ lze faktorizovat přes prostor Y s FPP ve smyslu, že existují spojitá zobrazení $s : X \to Y, r : Y \to X$ tak, že $f = rs$. Pak f má pevný bod.
3. Je-li (X, d) kompaktní metrický prostor a $f : X \to X$ spojité zobrazení takové, že pro každé $\varepsilon : 0$ existuje $x \in X$ s vlastností $d(x, f/x)) \leq \varepsilon$, pak f má pevný bod. (Pomocí předchozího tvrzení o faktorizaci lze větu zobecnit na nekompaktní prostory.)

Pevné body

1. Ukažte pomocí Bolzanovy věty o spojitém obrazu intervalu, že každý uzavřený interval má vlastnost pevného bodu a najděte příklad spojité funkce $(0,1) \to (0,1)$, která nemá pevný bod.
2. Nechť spojité zobrazení $f : X \to X$ lze faktorizovat přes prostor Y s FPP ve smyslu, že existují spojitá zobrazení $s : X \to Y$, $r : Y \to X$ tak, že $f = rs$. Pak f má pevný bod.
3. Je-li (X, d) kompaktní metrický prostor a $f : X \to X$ spojité zobrazení takové, že pro každé $\varepsilon : 0$ existuje $x \in X$ s vlastností $d(x, f/x)) \leq \varepsilon$, pak f má pevný bod. (Pomocí předchozího tvrzení o faktorizaci lze větu zobecnit na nekompaktní prostory.)

Modifikace Banachovy věty

1. Je-li (X, d) kompaktní metrický prostor a $f : X \to X$ má vlastnost $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pro každé $x, y \in X$, pak f má pevný bod.
2. Je-li (X, d) úplný metrický prostor, $k > 1$ a $f : X \to X$ má vlastnost $d(f(x), f(y) \geq kd(x, y)$ pro každé $x, y \in X$, pak f má pevný bod.
3. Nechť $f : X \to X$ a f^n má jediný pevný bod pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak f má jediný pevný bod.

Modifikace Banachovy věty

1. Je-li (X, d) kompaktní metrický prostor a $f : X \to X$ má vlastnost $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pro každé $x, y \in X$, pak f má pevný bod.
2. Je-li (X, d) úplný metrický prostor, $k > 1$ a $f : X \to X$ má vlastnost $d(f(x), f(y) \geq kd(x, y)$ pro každé $x, y \in X$, pak f má pevný bod.
3. Nechť $f : X \to X$ a f^n má jediný pevný bod pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak f má jediný pevný bod.

Modifikace Banachovy věty

1. Je-li (X, d) kompaktní metrický prostor a $f : X \to X$ má vlastnost $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pro každé $x, y \in X$, pak f má pevný bod.
2. Je-li (X, d) úplný metrický prostor, $k > 1$ a $f : X \to X$ má vlastnost $d(f(x), f(y) \geq kd(x, y)$ pro každé $x, y \in X$, pak f má pevný bod.
3. Nechť $f : X \to X$ a f^n má jediný pevný bod pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak f má jediný pevný bod.

Použití vět o pevném bodě

1. Euklidovské prostory různé dimenze nejsou homeomorfní.
2. Fredholmova integrální rovnice (s neznámou x) $x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$, kde K je spojitá funkce na čtverci $[a,b] \times [a,b]$, g je spojitá na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, má vždy řešení pro $|\lambda| < r$ pro nějaké $r > 0$. [Zkoumejte zobrazení $C[a,b] \to C[a,b]$ dané rovnicí (pravou stranou) a zjistěte, že pro malá λ dostanete kontrakce.]
3. Předchozí Fredholmova rovnice se nazývá Volterrova, pokud se bere v integrálu horní mez t místo b. Volterrova rovnice má pro každé λ vždy jediné řešení. [Existuje iterace zobrazení z předchozího bodu, které je kontrakce.]
4. Jestliže funkce $f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská ve druhé proměnné, pak diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ s podmínkou $y(a) = y_0$ má jediné řešení definované na $[a,b]$.

Použití vět o pevném bodě

1. Euklidovské prostory různé dimenze nejsou homeomorfní.
2. Fredholmova integrální rovnice (s neznámou x) $x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$, kde K je spojitá funkce na čtverci $[a,b] \times [a,b]$, g je spojitá na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, má vždy řešení pro $|\lambda| < r$ pro nějaké $r > 0$. [Zkoumejte zobrazení $C[a,b] \to C[a,b]$ dané rovnicí (pravou stranou) a zjistěte, že pro malá λ dostanete kontrakce.]
3. Předchozí Fredholmova rovnice se nazývá Volterrova, pokud se bere v integrálu horní mez t místo b. Volterrova rovnice má pro každé λ vždy jediné řešení. [Existuje iterace zobrazení z předchozího bodu, které je kontrakce.]
4. Jestliže funkce $f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská ve druhé proměnné, pak diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ s podmínkou $y(a) = y_0$ má jediné řešení definované na $[a,b]$.

Použití vět o pevném bodě

1. Euklidovské prostory různé dimenze nejsou homeomorfní.
2. Fredholmova integrální rovnice (s neznámou x) $x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$, kde K je spojitá funkce na čtverci $[a,b] \times [a,b]$, g je spojitá na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, má vždy řešení pro $|\lambda| < r$ pro nějaké $r > 0$. [Zkoumejte zobrazení $C[a,b] \to C[a,b]$ dané rovnicí (pravou stranou) a zjistěte, že pro malá λ dostanete kontrakce.]
3. Předchozí Fredholmova rovnice se nazývá Volterrova, pokud se bere v integrálu horní mez t místo b. Volterrova rovnice má pro každé λ vždy jediné řešení. [Existuje iterace zobrazení z předchozího bodu, které je kontrakce.]
4. Jestliže funkce $f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská ve druhé proměnné, pak diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ s podmínkou $y(a) = y_0$ má jediné řešení definované na $[a,b]$.

Použití vět o pevném bodě

1. Euklidovské prostory různé dimenze nejsou homeomorfní.
2. Fredholmova integrální rovnice (s neznámou x) $x(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$, kde K je spojitá funkce na čtverci $[a,b] \times [a,b]$, g je spojitá na $[a,b]$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, má vždy řešení pro $|\lambda| < r$ pro nějaké $r > 0$. [Zkoumejte zobrazení $C[a,b] \to C[a,b]$ dané rovnicí (pravou stranou) a zjistěte, že pro malá λ dostanete kontrakce.]
3. Předchozí Fredholmova rovnice se nazývá Volterrova, pokud se bere v integrálu horní mez t místo b. Volterrova rovnice má pro každé λ vždy jediné řešení. [Existuje iterace zobrazení z předchozího bodu, které je kontrakce.]
4. Jestliže funkce $f(x,y) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská ve druhé proměnné, pak diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ s podmínkou $y(a) = y_0$ má jediné řešení definované na $[a,b]$.