15. TOPOLOGICKÉ GRUPY

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Dokažte následující jednoduchá tvrzení.

Základní vlastnosti

Nechť G je topologická grupa. $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku v G a A, B jsou podmnožiny G.

1. Je-li A otevřená množina, jsou i množiny $A.B$, $B.A$ otevřené.
2. Je-li A kompaktní a B uzavřená, jsou i $A.B$, $B.A$ uzavřené množiny.
3. Jsou-li A, B kompaktní, je i $A.B$ kompaktní.
4. Pro každé $U \in \mathcal{U}$ je $\overline{A} \subset A.U \cap U.A$.
5. Platí $\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{U}} A.U = \bigcap_{\mathcal{U}} U.A$.
6. Je-li H (normální) podgrupa G, je i $\overline{H}$ (normální) podgrupa G.
7. Otevřená podgrupa v G je i uzavřená v G.

Dokažte následující jednoduchá tvrzení.

Základní vlastnosti

Nechť G je topologická grupa. $\mathcal{U}$ je soustava okolí neutrálního prvku v G a A, B jsou podmnožiny G.

1. Je-li A otevřená množina, jsou i množiny $A.B$, $B.A$ otevřené.
2. Je-li A kompaktní a B uzavřená, jsou i $A.B$, $B.A$ uzavřené množiny.
3. Jsou-li A, B kompaktní, je i $A.B$ kompaktní.
4. Pro každé $U \in \mathcal{U}$ je $\overline{A} \subset A.U \cap U.A$.
5. Platí $\overline{A} = \bigcap_{\mathcal{U}} A.U = \bigcap_{\mathcal{U}} U.A$.
6. Je-li H (normální) podgrupa G, je i $\overline{H}$ (normální) podgrupa G.
7. Otevřená podgrupa v G je i uzavřená v G.

Následující první dvě tvrzení jsou jednoduchá, třetí je těžší, čtvrté vyplývá z třetího.

Souvislost

Nechť G je topologická grupa.

1. Komponenta C neutrálního prvku v G je normální podgrupa v G.
2. Kvocient G/C je totálně nesouvislá grupa.
3. Je-li G lokálně kompaktní, pak komponenty a kvazikomponenty G splývají (obecně v topologických grupách nesplývají). Komponenta neutrálního prvku se v tomto případě rovná průniku otevřených podgrup.
4. Totálně nesouvislá lokálně kompaktní grupa je nuldimenzionální.

Následující první dvě tvrzení jsou jednoduchá, třetí je těžší, čtvrté vyplývá z třetího.

Souvislost

Nechť G je topologická grupa.

1. Komponenta C neutrálního prvku v G je normální podgrupa v G.
2. Kvocient G/C je totálně nesouvislá grupa.
3. Je-li G lokálně kompaktní, pak komponenty a kvazikomponenty G splývají (obecně v topologických grupách nesplývají). Komponenta neutrálního prvku se v tomto případě rovná průniku otevřených podgrup.
4. Totálně nesouvislá lokálně kompaktní grupa je nuldimenzionální.

Chování uniformit při konstrukcích

Nechť G, G_i (pro $i \in I$) jsou topologické grupy a H je podgrupa G.

1. Zúžení levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity G na H je levá (nebo pravá, nebo oboustranná, resp.) uniformita na topologické grupě H.
2. Součin levých (nebo pravých nebo oboustranných) uniformit grup G_i je levá (nebo pravá, nebo oboustranná, resp.) uniformita na topologické grupě $\prod_I G_i$.
3. Je-li H normální podgrupa G, je kvocient levé (nebo pravé) uniformity na G podle podgrupy H levou (nebo pravou, resp.) uniformitou kvocientové grupy G/H.

Popis grupových uniformit pomocí pokrytí

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}_e$ je báze okolí e v G.

1. Levá uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{xU; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.
2. Pravá uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{Ux; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.
3. Oboustranná uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{xU \cap Ux; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.
4. Roelckeho (viz Poznámky) uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{UxU; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.

Chování uniformit při konstrukcích

Nechť G, G_i (pro $i \in I$) jsou topologické grupy a H je podgrupa G.

1. Zúžení levé (nebo pravé, nebo oboustranné) uniformity G na H je levá (nebo pravá, nebo oboustranná, resp.) uniformita na topologické grupě H.
2. Součin levých (nebo pravých nebo oboustranných) uniformit grup G_i je levá (nebo pravá, nebo oboustranná, resp.) uniformita na topologické grupě $\prod_I G_i$.
3. Je-li H normální podgrupa G, je kvocient levé (nebo pravé) uniformity na G podle podgrupy H levou (nebo pravou, resp.) uniformitou kvocientové grupy G/H.

Popis grupových uniformit pomocí pokrytí

Nechť G je topologická grupa a $\mathcal{U}_e$ je báze okolí e v G.

1. Levá uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{xU; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.
2. Pravá uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{Ux; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.
3. Oboustranná uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{xU \cap Ux; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.
4. Roelckeho (viz Poznámky) uniformita na G má za bázi uniformních pokrytí soustavu $\{UxU; x \in G\}$, $U \in \mathcal{U}_e$.

Charakterizace uniformních grup

Topologická grupa G s $\mathcal{U}_e$ jako bází okolí e je uniformní právě když pro každé $U \in \mathcal{U}_e$ je $\bigcap_{x\in G} xUx^{-1} \in \mathcal{U}_e$.

V následujícím tvrzení použijte kanonické zobrazení $X \to C_p(C_p(X))$.

Vnoření prostoru do topologické grupy

Každý úplně regulární prostor lze vnořit jako uzavřený podprostor do topologické grupy.

Z předchozího tvrzení vyvoďte, že existuje komutativní topologická grupa, která není normální a reálně kompaktní.

Lokálně kompaktní grupy

Nechť G je lokálně kompaktní grupa a U je otevřené okolí neutrálního prvku. Pak existuje kompaktní podgrupa H, která je částí U a taková, že kvocientová grupa G/H je metrizovatelná.

$\Rightarrow$

V následujícím tvrzení použijte kanonické zobrazení $X \to C_p(C_p(X))$.

Vnoření prostoru do topologické grupy

Každý úplně regulární prostor lze vnořit jako uzavřený podprostor do topologické grupy.

Z předchozího tvrzení vyvoďte, že existuje komutativní topologická grupa, která není normální a reálně kompaktní.

Lokálně kompaktní grupy

Nechť G je lokálně kompaktní grupa a U je otevřené okolí neutrálního prvku. Pak existuje kompaktní podgrupa H, která je částí U a taková, že kvocientová grupa G/H je metrizovatelná.

$\Rightarrow$

V následujícím tvrzení použijte kanonické zobrazení $X \to C_p(C_p(X))$.

Vnoření prostoru do topologické grupy

Každý úplně regulární prostor lze vnořit jako uzavřený podprostor do topologické grupy.

Z předchozího tvrzení vyvoďte, že existuje komutativní topologická grupa, která není normální a reálně kompaktní.

Lokálně kompaktní grupy

Nechť G je lokálně kompaktní grupa a U je otevřené okolí neutrálního prvku. Pak existuje kompaktní podgrupa H, která je částí U a taková, že kvocientová grupa G/H je metrizovatelná.

$\Rightarrow$

V následujícím tvrzení použijte kanonické zobrazení $X \to C_p(C_p(X))$.

Vnoření prostoru do topologické grupy

Každý úplně regulární prostor lze vnořit jako uzavřený podprostor do topologické grupy.

Z předchozího tvrzení vyvoďte, že existuje komutativní topologická grupa, která není normální a reálně kompaktní.

Lokálně kompaktní grupy

Nechť G je lokálně kompaktní grupa a U je otevřené okolí neutrálního prvku. Pak existuje kompaktní podgrupa H, která je částí U a taková, že kvocientová grupa G/H je metrizovatelná.

$\Rightarrow$

Charakterizace volné grupy

Volná grupa $F(X)$ topologického prostoru X je charakterizována následujícími vlastnostmi:

- Existuje spojité zobrazení $i : X \to F(X)$.
- Pro každé spojité zobrazení $f : X \to G$ do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ takový, že $\widetilde{f}\, i = f$.

Dokažte:

Kvocientová grupa volné topologické grupy

Každá topologická grupa je kvocientovou grupou volné topologické grupy.

Charakterizace volné grupy

Volná grupa $F(X)$ topologického prostoru X je charakterizována následujícími vlastnostmi:

- Existuje spojité zobrazení $i : X \longrightarrow F(X)$.
- Pro každé spojité zobrazení $f : X \longrightarrow G$ do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \longrightarrow G$ takový, že $\widetilde{f}\, i = f$.

Existence topologické grupy $F(X)$ s předchozími vlastnostmi se dokáže snadno. Stačí vzít všechna spojitá zobrazení z X do topologických grup, které mají mohutnost omezenou např. $|X|.\omega$, zobrazit X do součinu těchto grup a vzít nejmenší podgrupu součinu obsahující obraz X.
Navíc lze ukázat, že uvedená zobrazení X do topologických grup rozlišují body a uzavřené množiny, takže i je vnoření.

Dokažte:

Kvocientová grupa volné topologické grupy

Každá topologická grupa je kvocientovou grupou volné topologické grupy.

Charakterizace volné grupy

Volná grupa $F(X)$ topologického prostoru X je charakterizována následujícími vlastnostmi:

- Existuje spojité zobrazení $i : X \to F(X)$.
- Pro každé spojité zobrazení $f : X \to G$ do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \to G$ takový, že $\widetilde{f} i = f$.

Existence topologické grupy $F(X)$ s předchozími vlastnostmi se dokáže snadno. Stačí vzít všechna spojitá zobrazení z X do topologických grup, které mají mohutnost omezenou např. $|X|.\omega$, zobrazit X do součinu těchto grup a vzít nejmenší podgrupu součinu obsahující obraz X.
Navíc lze ukázat, že uvedená zobrazení X do topologických grup rozlišují body a uzavřené množiny, takže i je vnoření.

Podobně lze charakterizovat, sestrojit a popsat volné komutativní grupy $A(X)$. Proveďte to.

Dokažte:

Kvocientová grupa volné topologické grupy

Každá topologická grupa je kvocientovou grupou volné topologické grupy.

Charakterizace volné grupy

Volná grupa $F(X)$ topologického prostoru X je charakterizována následujícími vlastnostmi:

- Existuje spojité zobrazení $i : X \longrightarrow F(X)$.
- Pro každé spojité zobrazení $f : X \longrightarrow G$ do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \longrightarrow G$ takový, že $\widetilde{f}\, i = f$.

Dokažte:

Kvocientová grupa volné topologické grupy

Každá topologická grupa je kvocientovou grupou volné topologické grupy.

Charakterizace volné grupy

Volná grupa $F(X)$ topologického prostoru X je charakterizována následujícími vlastnostmi:

- Existuje spojité zobrazení $i : X \longrightarrow F(X)$.
- Pro každé spojité zobrazení $f : X \longrightarrow G$ do topologické grupy G existuje jediný spojitý homomorfismus $\widetilde{f} : F(X) \longrightarrow G$ takový, že $\widetilde{f} i = f$.

Dokažte:

Kvocientová grupa volné topologické grupy

Každá topologická grupa je kvocientovou grupou volné topologické grupy.