13. SOUVISLOST

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

TVRZENÍ (Vlastnosti souvislosti)

Nechť X je topologický prostor.

1. *X je souvislý právě když každé spojité zobrazení na X do diskrétního prostoru je konstantní.*
2. *Je-li $A \subset B \subset \overline{A} \subset X$ a A je souvislá, pak je i B souvislá.*
3. *Jsou-li A_i, $i \in I$, souvislé podmnožiny X a $\bigcap A_i \neq \emptyset$, je $\bigcup A_i$ souvislá množina.*
4. *Jsou-li A_n, $n \in \mathbb{N}$, souvislé podmnožiny X a $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pro každé n, pak $\bigcup A_n$ je souvislá množina.*
5. *Třída souvislých prostorů je uzavřená na součiny a na spojité obrazy. Není uzavřená na podprostory a disjunktní součty.*

Důkaz.

1. Existuje spojité zobrazení X do aspoň dvoubodového diskrétního prostoru, které není konstantní právě když v X existuje netriviální obojetná podmnožina
2. Je-li za podmínek tvrzení U neprázdná obojetná množina v B, je její průnik s A neprázdná obojetná množina v A.
3. Je-li U neprázdná obojetná množina v $Y = \bigcup A_i$, je každé A_i částí buď U nebo $X \setminus U$. Odtud již plyne, že buď U nebo $X \setminus U$ je prázdná množina.
4. Důkaz je skoro stejný jako pro bod 3.
5. Nechť f je spojité zobrazení $\prod_I X_i$ do dvoubodového diskrétního prostoru D a všechny prostory X_i jsou souvislé. To znamená, že pro každé $i \in I$ je $f(x) = f(y)$ jakmile body x, y se liší v jediné souřadnici. Mějme nyní dva libovolné body $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ ze součinu a dobře uspořádejme množinu $J = \{i \in I; x_i \neq y_i\}$ jako $\{j_\alpha; \alpha \in \kappa\}$. Pro $\alpha \in \kappa$ definujme indukcí body z_α, které se na $I \setminus J$ shodují s x a v souřadnicích z J jsou definovány následovně:

$$Z_0 = y \quad (Z_\alpha)_\beta = \begin{cases} x_\beta, & \text{if } \beta < \alpha; \\ y_\beta, & \text{if } \beta \geq \alpha. \end{cases} .$$

Protože body z_α, $z_{\alpha+1}$ se liší v jediné souřadnici, je $f/z_\alpha) = f(z_{\alpha+1})$. Indukcí a ze spojitosti nyní plyne, že $f(z_\alpha) = f(z_0) = f(y)$ pro každé α. Protože limita všech bodů z_α je bod x, vyplývá odtud i rovnost $f(x) = f(y)$.
Zbylá tvrzení tohoto bodu jsou triviální. □

TVRZENÍ (Vlastnosti lokálně souvislých prostorů)

1. *Topologický prostor X je lokálně souvislý právě když komponenty každého otevřeného podprostoru jsou otevřené.*
2. *Lokálně souvislý prostor je disjunktním součtem souvislých prostorů.*
3. *V lokálně souvislém prostoru jsou komponenty a kvazikomponenty totožné.*
4. *Třída lokálně souvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, konečné součiny, disjunktní součty a kvocienty.*
5. *Je-li X úplně regulární, je βX lokálně souvislý právě když je X lokálně souvislý a pseudokompaktní.*

Důkaz.

Tvrzení 1 plyne ihned z definice, tvrzení 2 a 3 plynou přímo z 1.
4. První tvrzení je jednoduché, druhé plyne ze součinovosti souvislosti, třetí je triviální.
Nechť je $f : X \to Y$ kvocientové zobrazení a X je lokálně souvislý. Vezmeme otevřenou množinu $G \subset Y$ a $y \in G$. Každý bod $x \in f^{-1}(y)$ má souvislé otevřené okolí $U_x \subset f^{-1}(G)$. Množina $W_0 = \bigcup f(U_x)$ je tedy souvislá část G (nemusí však být okolím y). Opakujme stejný postup pro body $x \in f^{-1}(W_0)$ a dostaneme souvislou množinu W_1 a postupně dále rostoucí posloupnost souvislých množin $\{W_n\}$ obsaženou v G. Množina $W = \bigcup W_n$ je souvislá a $f^{-1}(W) = \bigcup f^{-1}(W_n)$ je otevřená, takže W je hledané souvislé okolí bodu y.
5. ??????????? Možná moc složité pro tento text - dát do cvičení nebo poznámek????? □

TVRZENÍ (Vlastnosti totálně nesouvislých prostorů)

1. *Prostor je totálně nesouvislý právě když je dědičně nesouvislý ve smyslu, že každá aspoň dvoubodová množina je nesouvislá.*
2. *Lokálně kompaktní totálně nesouvislý regulární prostor (speciálně kompaktní Hausdorffův prostor) je nuldimenzionální.*
3. *Třída totálně nesouvislých prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na disjunktní součty.*
4. *Třída totálně nesouvislých prostorů není uzavřená na kvocienty.*

Důkaz.

2. Nechť U je okolí bodu x Lokálně kompaktního parakompaktního totálně nesouvislého prostoru X a $V \subset U$ je otevřené okolí x s kompaktním uzávěrem. Protože kvazikomponenty splývají s komponentami ve $\overline{V}$, existuje konečně mnoho obojetných množin G_i ve $\overline{V}$, že $x \in G = \bigcap G_i \subset V$. Uvědomte si, že G je obojetná v X.
3. Vše je jednoduché (součinovost plyne ze cvičení o komponentách v součinu).
4. Např. $[0, 1]$ je spojitý obraz Cantorova diskontiua. □

TVRZENÍ (Vlastnosti silně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Každý silně nuldimenzionální prostor je nuldimenzionální.*
2. *Je-li X nuldimenzionální prostor, který je buď Lindelöfův nebo lokálně kompaktní parakompaktní (speciálně kompaktní Hausdorffův), je silně nuldimenzionální.*
3. *Úplně regulární prostor X je silně nuldimenzionální právě když βX je nuldimenzionální.*
4. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů je uzavřená na disjunktní součty.*
5. *Třída silně nuldimenzionálních prostorů není uzavřená na kvocienty, podprostory a součiny.*

Důkaz.

2. Nechť X je Lindelöfův nuldimenzionální prostor. Protože X je normální, budeme oddělovat dvě jeho uzavřené disjunktní množiny A, B. Existuje posloupnost $\{G_n\}$ obojetných množin, takže žádná z těchto množin neprotíná současně A i B. Množiny $H_n = G_i \setminus (G_1 \cup \ldots \cup G_{n-1})$ je obojetné pokrytí X a např. $\bigcup\{H_n; H_n \cap A \neq \emptyset\}$ je obojetná množina obsahující A a disjunktní s B.
Pro druhou část tvrzení si stačí uvědomit, že lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.
3. Nechť X je silně nuldimenzionální prostor. Dokážeme, že βX je totálně nesouvislý, tedy nuldimenzionální. Nechť $x \neq y$ jsou dva body v βX a U, V jejich disjunktní okolí, které jsou současně nulovými množinami. Potom existuje obojetná množina G v X tak, že $U \cap X \subset G \subset X \setminus V$. Existuje tedy obojetná množina H v βX, $H \cap F = G$ (speciální vlastnost βX). H je hledaná množina oddělující U, V a tedy i x, y.
Je-li βX je nuldimenzionální je i (jako kompaktní prostor) silně nuldimenzionální. Protože každé dvě disjunktní nulové podmnožiny v X mají disjunktní uzávěry v βX, je i X silně nuldimenzionální prostor.
5. Pro kvocienty opět stačí vzít interval jako kvocient Cantorovy množiny.
Pro podprostory si stačí uvědomit, že každý nuldimenzionální Hausdorffův prostor (i takový, který není silně nuldimenzionální), lze vnořit do nějakého Cantorova prostoru 2^κ, který je silně nuldimenzionální.
Pro součiny ?????? příklad ????????? □

TVRZENÍ (Charakterizace extremálně nesouvislých prostorů)

Pro topologický prostor X jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

1. *X je extremálně nesouvislý.*
2. *Uzávěr každé otevřené podmnožiny X je otevřený.*
3. *Každé dvě otevřené disjunktní podmožiny X mají disjunktní uzávěry.*
4. *Každá otevřená podmnožina X je C^*-vnořená v X.*
5. *Každá hustá podmnožina X je C^*-vnořená v X.*

Důkaz.

Zřejmě $5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$. Nechť nyní je X extremálně nesouvislý prostor a Y jeho hustý podprostor. Pro C^*-vnořitelnost Y v X stačí podle Urysonova postupu dokázat, že dvě disjunktní nulové množiny v Y mají disjunktní uzávěry v X. To vyplyne z toho, Y je extremálně nesouvislý jako hustý podprostor X (viz následující větu). □

TVRZENÍ (Vlastnosti extremálně nesouvislých prostorů)

1. *Extremálně nesouvislý úplně regulární prostor je silně nuldimenzionální (opak neplatí).*
2. *Úplně regulární prostor X je extremálně nesouvislý právě když je βX extremálně nesouvislý.*
3. *Je-li X extremálně nesouvislý a $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost v X, je $\{x_n\}$ konstantní od jistého indexu počínaje.*
4. *Třída extremálně nesouvislých prostorů je uzavřená na otevřené podprostory, na husté podprostory, na disjunktní součty.*
5. *Třída extremálně nesouvislých prostorů není uzavřená na součiny a na kvocienty.*

Důkaz.

Důkaz tvrzení 1 (kromě závorky) je jednoduchý, tvrzení 2 plyne z předchozí charakterizace a z bodu 4.
3. Stačí ukázat, že pro konvergentní posloupnost, která není skoro konstantní, existují dvě disjunktní otevřené množiny, mající limitu posloupnosti ve svých uzávěrech.
Důkaz tvrzení 4 je jednoduchý. Příklad na součiny je uveden v Příkladech $\square$