OBECNÁ TOPOLOGIE

12. METRIZACE

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2009

Metrické prostory jsou pro aplikace velmi důležité, pracuje se s nimi značně lépe než s obecnějšími topologickými prostory. Při různých topologických konstrukcích vycházejících z metrických prostorů je však výsledkem nějaký topologický prostor. Tento výsledný prostor může a nemusí být metrizovatelný. Jak lze zjistit, zda je metrizovatelný?

Pro toto zjišťování existují topologické charakterizace metrizovatelných prostorů, tzv. metrizační věty. Těm je věnována tato kapitola.

Nejdříve v přehledu zopakujeme z předchozích kapitol základní vlastnosti metrických prostorů. Ty je vhodné si připomínat, protože při jejich nesplnění snadno zjistíme, že se nejedná o metrizovatelný prostor. Formulace budou uvedeny pro pseudometrizovatelné prostory. Pro metrizovatelné prostory stačí přidat vlastnost T_0 (ekvivalentně T_1 nebo T_2).

Metrické prostory jsou pro aplikace velmi důležité, pracuje se s nimi značně lépe než s obecnějšími topologickými prostory. Při různých topologických konstrukcích vycházejících z metrických prostorů je však výsledkem nějaký topologický prostor. Tento výsledný prostor může a nemusí být metrizovatelný. Jak lze zjistit, zda je metrizovatelný?

Pro toto zjišťování existují topologické charakterizace metrizovatelných prostorů, tzv. metrizační věty. Těm je věnována tato kapitola.

Nejdříve v přehledu zopakujeme z předchozích kapitol základní vlastnosti metrických prostorů. Ty je vhodné si připomínat, protože při jejich nesplnění snadno zjistíme, že se nejedná o metrizovatelný prostor. Formulace budou uvedeny pro pseudometrizovatelné prostory. Pro metrizovatelné prostory stačí přidat vlastnost T_0 (ekvivalentně T_1 nebo T_2).

Metrické prostory jsou pro aplikace velmi důležité, pracuje se s nimi značně lépe než s obecnějšími topologickými prostory. Při různých topologických konstrukcích vycházejících z metrických prostorů je však výsledkem nějaký topologický prostor. Tento výsledný prostor může a nemusí být metrizovatelný. Jak lze zjistit, zda je metrizovatelný?

Pro toto zjišťování existují topologické charakterizace metrizovatelných prostorů, tzv. metrizační věty. Těm je věnována tato kapitola.

Nejdříve v přehledu zopakujeme z předchozích kapitol základní vlastnosti metrických prostorů. Ty je vhodné si připomínat, protože při jejich nesplnění snadno zjistíme, že se nejedná o metrizovatelný prostor. Formulace budou uvedeny pro pseudometrizovatelné prostory. Pro metrizovatelné prostory stačí přidat vlastnost T_0 (ekvivalentně T_1 nebo T_2).

$\Rightarrow$

Zkuste zopakovat důkazy následujících vlastností.

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. X *je separabilní.*
2. X *má spočetnou otevřenou bázi.*
3. X *je Lindelöfův.*
4. X *má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. X *je kompaktní.*
2. X *je spočetně kompaktní.*
3. X *je pseudokompaktní.*
4. X *je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. X *je separabilní.*
2. X *má spočetnou otevřenou bázi.*
3. X *je Lindelöfův.*
4. X *má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. X *je kompaktní.*
2. X *je spočetně kompaktní.*
3. X *je pseudokompaktní.*
4. X *je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

TVRZENÍ (Vlastnosti pseudometrizovatelných prostorů)

1. *Pseudometrizovatelný prostor má spočetné báze okolí (je tedy FU-prostor a tedy sekvenční).*
2. *Pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní (tedy je indukován úplnou uniformitou).*
3. *Třída pseudometrizovatelných prostorů je dědičná, spočetně součinová a uzavřená na disjunktní součty. Není uzavřená na kvocienty.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je separabilní.*
2. *X má spočetnou otevřenou bázi.*
3. *X je Lindelöfův.*
4. *X má pseudometrizovatelnou kompaktifikaci.*

TVRZENÍ

Následující podmínky pro pseudometrizovatelný prostor X jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *X je spočetně kompaktní.*
3. *X je pseudokompaktní.*
4. *X je sekvenčně kompaktní.*

Metrizačních vět je velké množství, které se dá rozdělit zhruba do 4 skupin.

V první skupině jsou charakterizace, které požadují existence reálných funkcí v jistém smyslu nahrazujících metriky. Z této skupiny uvedeme Chittendenovu metrizační větu.

Druhá skupina charakterizuje metrizovatelnost pomocí posloupností pokrytí. Reprezentanta této skupiny snadno vyvodíme z metrizovatelnosti uniformních prostorů. Je zde řada dalších známých charakterizací, např. pomocí tzv. *development*, což je jisté oslabení vlastností normálních posloupností z uniformit – pak je třeba silnějších podmínek např. na zkoumaný prostor.

Ve třetí skupině jsou charakterizace vzniklé zkoumáním specifických soustav okolí metrických prostorů. Sem patří např. metrizační věta Frinkové nebo Nagaty.

Poslední skupina je nejznámější a asi i nejužívanější. Jsou to charakterizace využívající specifické vlastnosti otevřených bází metrických prostorů. Nejznámější metrizační věty tohoto typu jsou Urysonova, Nagatova-Smirnovova, Bingova a také Archangelského.

Metrizačních vět je velké množství, které se dá rozdělit zhruba do 4 skupin.

V první skupině jsou charakterizace, které požadují existence reálných funkcí v jistém smyslu nahrazujících metriky. Z této skupiny uvedeme Chittendenovu metrizační větu.

Druhá skupina charakterizuje metrizovatelnost pomocí posloupností pokrytí. Reprezentanta této skupiny snadno vyvodíme z metrizovatelnosti uniformních prostorů. Je zde řada dalších známých charakterizací, např. pomocí tzv. *development*, což je jisté oslabení vlastností normálních posloupností z uniformit – pak je třeba silnějších podmínek např. na zkoumaný prostor.

Ve třetí skupině jsou charakterizace vzniklé zkoumáním specifických soustav okolí metrických prostorů. Sem patří např. metrizační věta Frinkové nebo Nagaty.

Poslední skupina je nejznámější a asi i nejužívanější. Jsou to charakterizace využívající specifické vlastnosti otevřených bází metrických prostorů. Nejznámější metrizační věty tohoto typu jsou Urysonova, Nagatova-Smirnovova, Bingova a také Archangelského.

Metrizačních vět je velké množství, které se dá rozdělit zhruba do 4 skupin.

V první skupině jsou charakterizace, které požadují existence reálných funkcí v jistém smyslu nahrazujících metriky. Z této skupiny uvedeme Chittendenovu metrizační větu.

Druhá skupina charakterizuje metrizovatelnost pomocí posloupností pokrytí. Reprezentanta této skupiny snadno vyvodíme z metrizovatelnosti uniformních prostorů. Je zde řada dalších známých charakterizací, např. pomocí tzv. *development*, což je jisté oslabení vlastností normálních posloupností z uniformit – pak je třeba silnějších podmínek např. na zkoumaný prostor.

Ve třetí skupině jsou charakterizace vzniklé zkoumáním specifických soustav okolí metrických prostorů. Sem patří např. metrizační věta Frinkové nebo Nagaty.

Poslední skupina je nejznámější a asi i nejužívanější. Jsou to charakterizace využívající specifické vlastnosti otevřených bází metrických prostorů. Nejznámější metrizační věty tohoto typu jsou Urysonova, Nagatova-Smirnovova, Bingova a také Archangelského.

Metrizačních vět je velké množství, které se dá rozdělit zhruba do 4 skupin.

V první skupině jsou charakterizace, které požadují existence reálných funkcí v jistém smyslu nahrazujících metriky. Z této skupiny uvedeme Chittendenovu metrizační větu.

Druhá skupina charakterizuje metrizovatelnost pomocí posloupností pokrytí. Reprezentanta této skupiny snadno vyvodíme z metrizovatelnosti uniformních prostorů. Je zde řada dalších známých charakterizací, např. pomocí tzv. *development*, což je jisté oslabení vlastností normálních posloupností z uniformit – pak je třeba silnějších podmínek např. na zkoumaný prostor.

Ve třetí skupině jsou charakterizace vzniklé zkoumáním specifických soustav okolí metrických prostorů. Sem patří např. metrizační věta Frinkové nebo Nagaty.

Poslední skupina je nejznámější a asi i nejužívanější. Jsou to charakterizace využívající specifické vlastnosti otevřených bází metrických prostorů. Nejznámější metrizační věty tohoto typu jsou Urysonova, Nagatova-Smirnovova, Bingova a také Archangelského.

Metrizačních vět je velké množství, které se dá rozdělit zhruba do 4 skupin.

V první skupině jsou charakterizace, které požadují existence reálných funkcí v jistém smyslu nahrazujících metriky. Z této skupiny uvedeme Chittendenovu metrizační větu.

Druhá skupina charakterizuje metrizovatelnost pomocí posloupností pokrytí. Reprezentanta této skupiny snadno vyvodíme z metrizovatelnosti uniformních prostorů. Je zde řada dalších známých charakterizací, např. pomocí tzv. *development*, což je jisté oslabení vlastností normálních posloupností z uniformit – pak je třeba silnějších podmínek např. na zkoumaný prostor.

Ve třetí skupině jsou charakterizace vzniklé zkoumáním specifických soustav okolí metrických prostorů. Sem patří např. metrizační věta Frinkové nebo Nagaty.

Poslední skupina je nejznámější a asi i nejužívanější. Jsou to charakterizace využívající specifické vlastnosti otevřených bází metrických prostorů. Nejznámější metrizační věty tohoto typu jsou Urysonova, Nagatova-Smirnovova, Bingova a také Archangelského.

Reprezentantem pokrývacích metrizačních vět je důsledek metrizační věty uniformních prostorů. Je však nutné říci, že toto tvrzení bylo známo dlouho před zavedením uniformních prostorů, dokonce v obecnějším znění.

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje normální posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x.

Důkaz

V normální posloupnosti se požaduje hvězdovité zjemnění následujících pokrytí v posloupnosti. Pokud se požaduje jen zjemnění a nechá se požadavek o bázích okolí z předchozí věty, dostane se tzv. *development* (český termín nebyl určen). Mezi metrizační věty používající development patří např. Bingova věta a Mooreova věta.

Důkaz je stejný jako u uniformní metrizační věty, stačí si uvědomit, že není potřeba hvězdovité zjemnění v plné síle, stačí zjemnění ve smyslu následující věty.

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ otevřených pokrytí X

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje normální posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x.

Důkaz

V normální posloupnosti se požaduje hvězdovité zjemnění následujících pokrytí v posloupnosti. Pokud se požaduje jen zjemnění a nechá se požadavek o bázích okolí z předchozí věty, dostane se tzv. *development* (český termín nebyl určen). Mezi metrizační věty používající development patří např. Bingova věta a Mooreova věta.

Důkaz je stejný jako u uniformní metrizační věty, stačí si uvědomit, že není potřeba hvězdovité zjemnění v plné síle, stačí zjemnění ve smyslu následující věty.

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ otevřených pokrytí X taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(U, V \in \mathcal{U}_{n+1}, U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U}_n, W \supset U \cup V)$.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje normální posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x.

Důkaz

V normální posloupnosti se požaduje hvězdovité zjemnění následujících pokrytí v posloupnosti. Pokud se požaduje jen zjemnění a nechá se požadavek o bázích okolí z předchozí věty, dostane se tzv. *development* (český termín nebyl určen). Mezi metrizační věty používající development patří např. Bingova věta a Mooreova věta.

Důkaz je stejný jako u uniformní metrizační věty, stačí si uvědomit, že není potřeba hvězdovité zjemnění v plné síle, stačí zjemnění ve smyslu následující věty.

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ otevřených pokrytí X taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $(U, V \in \mathcal{U}_{n+1}, U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U}_n, W \supset U \cup V)$.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje normální posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x.

Důkaz

V normální posloupnosti se požaduje hvězdovité zjemnění následujících pokrytí v posloupnosti. Pokud se požaduje jen zjemnění a nechá se požadavek o bázích okolí z předchozí věty, dostane se tzv. *development* (český termín nebyl určen). Mezi metrizační věty používající development patří např. Bingova věta a Mooreova věta.

První metrizační větu s použitím developmentu dokázali Aleksandrov s Urysonem již v r. 1923 (přidá se jakási slabá vlastnost hvězdovitého zjemnění). Dokáže se podobně jako uniformní metrizační věta; lze výhodně použít metrizační větu Chittendena uvedenou dále.

Důkaz je stejný jako u uniformní metrizační věty, stačí si uvědomit, že není potřeba hvězdovité zjemnění v plné síle, stačí zjemnění ve smyslu následující věty.

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ otevřených pokrytí X

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje normální posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x.

Důkaz

V normální posloupnosti se požaduje hvězdovité zjemnění následujících pokrytí v posloupnosti. Pokud se požaduje jen zjemnění a nechá se požadavek o bázích okolí z předchozí věty, dostane se tzv. *development* (český termín nebyl určen). Mezi metrizační věty používající development patří např. Bingova věta a Mooreova věta.

Důkaz je stejný jako u uniformní metrizační věty, stačí si uvědomit, že není potřeba hvězdovité zjemnění v plné síle, stačí zjemnění ve smyslu následující věty.

TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ otevřených pokrytí X taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v x, a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\big(U, V \in \mathcal{U}_{n+1}, U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists W \in \mathcal{U}_n, W \supset U \cup V\big)$.

$\Rightarrow$

Z předchozí „uniformní” metrizační věty plyne snadno následující tvrzení, jejíž původní důkaz byl značně komplikovaný (pocházel z r. 1917 a řešil otázku Frécheta). Význam tvrzení spočívá v zobecnění trojúhelníkové nerovnosti.

TVRZENÍ (Chittenden, 1917)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $d(x,x) = 0$ *pro každé* $x \in X$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pro každé* $x, y \in X$;
3. *existuje funkce* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\lim_{r \to 0_+} f(r) = 0$, *mající pro každé* $x, y, z \in X$ *vlastnost*

$$d(x,z) \le r,\ d(y,z) \le r,\ \Rightarrow d(x,y) \le f(r);$$

4. $(x \in \overline{A} \subset X \Leftrightarrow \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0)$.

Důkaz

Ve cvičení je ukázáno, jak se lze vyhnout funkci f a místo ní použít konvergenci.

Později ukážeme použití předchozího tvrzení při důkazu Urysonovy metrizační věty.

TVRZENÍ (Chittenden, 1917)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $d(x,x) = 0$ *pro každé* $x \in X$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pro každé* $x, y \in X$;
3. *existuje funkce* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\lim_{r \to 0_+} f(r) = 0$, *mající pro každé* $x, y, z \in X$ *vlastnost*
$$d(x,z) \leq r,\ \ d(y,z) \leq r,\ \Rightarrow d(x,y) \leq f(r)\,;$$
4. $(x \in \overline{A} \subset X \Leftrightarrow \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0)$.

Důkaz

Ve cvičení je ukázáno, jak se lze vyhnout funkci f a místo ní použít konvergenci.

Později ukážeme použití předchozího tvrzení při důkazu Urysonovy metrizační věty.

TVRZENÍ (Chittenden, 1917)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $d(x,x) = 0$ *pro každé* $x \in X$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pro každé* $x, y \in X$;
3. *existuje funkce* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\lim_{r \to 0_+} f(r) = 0$, *mající pro každé* $x, y, z \in X$ *vlastnost*

$$d(x,z) \leq r,\ d(y,z) \leq r,\ \Rightarrow d(x,y) \leq f(r);$$

4. $(x \in \overline{A} \subset X \Leftrightarrow \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0)$.

Důkaz

Ve cvičení je ukázáno, jak se lze vyhnout funkci f a místo ní použít konvergenci.

Později ukážeme použití předchozího tvrzení při důkazu Urysonovy metrizační věty.

TVRZENÍ (Chittenden, 1917)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když existuje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1. $d(x,x) = 0$ *pro každé* $x \in X$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pro každé* $x, y \in X$;
3. *existuje funkce* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\lim_{r\to 0_+} f(r) = 0$, *mající pro každé* $x, y, z \in X$ *vlastnost*
$$d(x,z) \le r,\ \ d(y,z) \le r,\ \Rightarrow d(x,y) \le f(r);$$
4. $(x \in \overline{A} \subset X \Leftrightarrow \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0)$.

Důkaz

Ve cvičení je ukázáno, jak se lze vyhnout funkci f a místo ní použít konvergenci.

Později ukážeme použití předchozího tvrzení při důkazu Urysonovy metrizační věty.

$\Rightarrow$

Metrizovatelný prostor má v každém bodě za bázi okolí nerostoucí posloupnost otevřených množin. To samo o sobě nestačí k metrizovatelnosti (najděte příklad). Tyto posloupnosti však mají další specifické vlastnosti, jejichž vyžadování už metrizovatelnost zaručí.

TVRZENÍ (Frink, 1937)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když každý bod $x \in X$ má nerostoucí bázi okolí $\{U_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k > n$ s vlastností $(U_m(x) \cap U_m(y) \neq \emptyset \Rightarrow U_m(x) \subset U_n(y))$.

Důkaz

Tvrzení podobného typu pochází od Nagaty z r. 1957.

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Frink, 1937)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když každý bod $x \in X$ má nerostoucí bázi okolí $\{U_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k > n$ s vlastností $(U_m(x) \cap U_m(y) \neq \emptyset \Rightarrow U_m(x) \subset U_n(y))$.

Důkaz

Tvrzení podobného typu pochází od Nagaty z r. 1957.

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Frink, 1937)

Topologický prostor X je pseudometrizovatelný právě když každý bod $x \in X$ má nerostoucí bázi okolí $\{U_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ takovou, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $k > n$ s vlastností $(U_m(x) \cap U_m(y) \neq \emptyset \Rightarrow U_m(x) \subset U_n(y))$.

Důkaz

Tvrzení podobného typu pochází od Nagaty z r. 1957.

$\Rightarrow$

Do poslední skupiny metrizačních vět patří „nejtopologičtější" charakterizace metrizovatelných prostorů (možná i nejužitečnější).
Následující věta je klasické tvrzení, které nemělo jednoduchý vývoj. Je to zřejmě nejjednodušší metrizační topologická věta.

TVRZENÍ (Uryson, 1924)

Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.

Důkaz

TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou bázi.

Důkaz

TVRZENÍ (Bing, 1951)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-diskrétní otevřenou bázi.

Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Uryson, 1924)

Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou bázi.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Bing, 1951)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-diskrétní otevřenou bázi.

▸ Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Uryson, 1924)

Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.

▸ Důkaz

Trvalo přes 25 let, než se podařilo Urysonovu metrizační větu zobecnit do podoby platné i pro neseparabilní prostory. Základním kamenem zobecnění byla Stoneova věta z r. 1948 o parakompaktnosti metrizovatelných prostorů. Důkaz obecné věty má stejnou myšlenku jako důkaz Urysonovy věty.

TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou bázi.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Bing, 1951)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-diskrétní otevřenou bázi.

▸ Důkaz

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Uryson, 1924)

Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou bázi.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Bing, 1951)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-diskrétní otevřenou bázi.

▸ Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Uryson, 1924)

Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.

Důkaz

TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou bázi.

Důkaz

Další zobecnění Urysonovy věty využívá silnějšího výsledku Stoneova postupu, než jsme formulovali v kapitole o parakompaktnosti.

TVRZENÍ (Bing, 1951)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-diskrétní otevřenou bázi.

Důkaz

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Uryson, 1924)

Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.

Důkaz

TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-lokálně konečnou otevřenou bázi.

Důkaz

TVRZENÍ (Bing, 1951)

Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má σ-diskrétní otevřenou bázi.

Důkaz

$\Rightarrow$

Pro některé třídy topologických prostorů lze dokázat další (a jednodušší) metrizační věty. Podíváme se na kompaktní prostory a na uspořádatelné prostory.

$\Rightarrow$

Pro jednoduchost se nyní omezíme na metrizovatelné prostory, tedy na pseudometrizovatelné Hausdorffovy prostory.

TVRZENÍ (Metrizovatelnost kompaktních prostorů, Šnejder, 1945)

Kompaktní prostor X je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je G_δ-množina.

Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Metrizovatelnost kompaktních prostorů, Šnejder, 1945)

Kompaktní prostor X je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je G_δ-množina.

Důkaz

$\Rightarrow$

Uspořádatelný prostor je vždycky Hausdorffův, takže můžeme rovnou probírat metrizovatelnost.

TVRZENÍ (Metrizovatelnost uspořádatelných prostorů)

Uspořádatelný prostor X je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je G_δ-množina.

Důkaz

TVRZENÍ (Metrizovatelnost uspořádatelných prostorů)

Uspořádatelný prostor X je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je G_δ-množina.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Metrizovatelnost uspořádatelných prostorů)

Uspořádatelný prostor X je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je G_δ-množina.

Důkaz

Předchozí tvrzení platí i pro GO prostory.

$\Rightarrow$