# 12. METRIZACE

## Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

**TVRZENÍ (Aleksandrov, Uryson, 1923)**

*Topologický prostor $X$ je pseudometrizovatelný právě když existuje normální posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ taková, že pro každé $x \in X$ tvoří soustavy $\{\mathrm{st}_{\mathcal{U}_n} x\}_{\mathbb{N}}$ bázi okolí v $x$.*

**Důkaz.**

Topologický prostor $X$ je pseudometrizovatelný právě když existuje uniformní pseudometrizovatelný prostor, který vytváří topologii na $X$. Uniformní metrizační věta říká, že to nastane právě když existuje uniformní prostor se spočetnou bází, který vytváří topologii na $X$. A to je přesně podmínka uvedená v dokazovaném tvrzení. □

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Chittenden, 1917)**

*Topologický prostor $X$ je pseudometrizovatelný právě když existuje $d : X \times X \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:*

1. $d(x,x) = 0$ *pro každé* $x \in X$*;*
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pro každé* $x, y \in X$*;*
3. *existuje funkce* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\lim_{r \to 0_+} f(r) = 0$, *mající pro každé* $x, y, z \in X$ *vlastnost*

$$d(x,z) \le r,\ d(y,z) \le r,\ \Rightarrow d(x,y) \le f(r);$$

4. $(x \in \overline{A} \subset X \Leftrightarrow \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0)$.

**Důkaz.**

Mějme funkci $d$ s uvedenými vlastnostmi a položme $U_n = \{(x,y) \in X \times X; d(x,y) < 2^{-n}\}$. Potom pro každé $n$ $U_n = U_n^{-1} \supset \Delta_X$ a existuje $k$ tak, že $U_k \circ U_k \subset U_n$, takže $\{U_n\}$ je báze pseudometrizovatelné uniformity na $X$. Tato uniformita vytváří na $X$ topologii, v které je $\overline{A} = \bigcap_n U_n[A] = \{x \in X; \forall n\ \exists a \in A : d(x,a) < 2^{-n}\} = \{x \in X; \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0\}$, což je totéž jako uzávěr v původní topologii na $X$. □

Bylo by možné definovat místo okolí diagonály posloupnost pokrytí a použít předchozí metrizační větu, ale důkaz by nebyl jednodušší.

**TVRZENÍ (Chittenden, 1917)**

*Topologický prostor* $X$ *je pseudometrizovatelný právě když existuje* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *s vlastnostmi:*

1. $d(x,x) = 0$ *pro každé* $x \in X$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *pro každé* $x, y \in X$;
3. *existuje funkce* $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $\lim_{r \to 0_+} f(r) = 0$, *mající pro každé* $x, y, z \in X$ *vlastnost*

$$d(x,z) \le r,\ \ d(y,z) \le r,\ \Rightarrow d(x,y) \le f(r)\,;$$

4. $(x \in \overline{A} \subset X \Leftrightarrow \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0)$.

**Důkaz.**

Mějme funkci $d$ s uvedenými vlastnostmi a položme $U_n = \{(x,y) \in X \times X; d(x,y) < 2^{-n}\}$. Potom pro každé $n$ $U_n = U_n^{-1} \supset \Delta_X$ a existuje $k$ tak, že $U_k \circ U_k \subset U_n$, takže $\{U_n\}$ je báze pseudometrizovatelné uniformity na $X$. Tato uniformita vytváří na $X$ topologii, v které je $\overline{A} = \bigcap_n U_n[A] = \{x \in X; \forall n\ \exists a \in A : d(x,a) < 2^{-n}\} = \{x \in X; \inf\{d(x,a); a \in A\} = 0\}$, což je totéž jako uzávěr v původní topologii na $X$. □

Bylo by možné definovat místo okolí diagonály posloupnost pokrytí a použít předchozí metrizační větu, ale důkaz by nebyl jednodušší.

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Frinková, 1937)**

*Topologický prostor $X$ je pseudometrizovatelný právě když každý bod $x \in X$ má nerostoucí bázi okolí $\{U_n(x); n \in \mathbb{N}\}$ takovou, že pro každé $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ existuje $k > n$ s vlastností $(U_k(x) \cap U_k(y) \neq \emptyset \Rightarrow U_k(x) \subset U_n(y))$.*

**Důkaz.**

Pro dané $x \in X$ definujeme indukcí rostoucí posloupnost v $\mathbb{N}$: $k_0 = 1$, $k_m$ je číslo $k$ z tvrzení příslušné indexu $k_{m-1}$. Položme $V_m(x) = U_{k_m}(x)$ a $\mathcal{V}_m = \{V_m(x); x \in X\}$. Pak soustava pokrytí $\{\mathcal{V}_m\}_{\mathbb{N}}$ splňuje podmínky Aleksandrovovy-Urysonovy metrizační věty. $\square$

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Uryson, 1924)**

*Separabilní topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má spočetnou otevřenou bázi.*

**Důkaz.**

Nutnost podmínky je zřejmá. Dokážeme postačitelnost. Mechť $X$ je regulární prostor se spočetnou bází $\{B_n\}$. Z věty o charakterizaci parakompaktnosti plyne, že každý regulární Lindelöfův prostor je parakompaktní, tedy i normální (to bylo dokázáno přímo v 5kapitole.). Existuje tedy spočetná otevřená báze $\mathcal{B} = \{B_n\}$ s vlastností ($\overline{B_i} \subset B_j \Rightarrow \exists B_k, \overline{B_i} \subset B_k \subset \overline{B_k} \subset B_j$). Nyní lze definovat $d(x,y) = \max\{(i+j)^{-1}; x \in B_i, z \in B_j, \text{ either } \overline{B_i} \subset B_j \text{ or } \overline{B_j} \subset B_i\}$. Tato funkce $d$ splňuje podmínky Chittendenovy metrizační věty.

Lze použít i Urysonovo lemma a pro každou dvojici $B_i, B_j, \overline{B_i} \subset B_j$, vzít spojitou funkci $X \to [0,1]$ mající hodnotu 1 na $B_i$ a 0 na doplňku $B_j$. Tyto funkce uspořádáte do posloupnosti $\{f_n\}$ a položíte $d(x,y) = \sum 2^{-n}|f_n(x) - f_n(y)|$. Dostanete přímo hledanou metriku vytvářející topologii na $X$. □

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Nagata, Smirnov, 1950-1)**

*Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má $\sigma$-lokálně konečnou otevřenou bázi.*

**Důkaz.**

Pseudometrizovatelný prostor je regulární a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřené lokálně konečné pokrytí, jehož množiny mají průměr menší než $n^{-1}$. Všechna tato pokrytí tedy tvoří $\sigma$-lokálně konečnou soustavu a je to zřejmě otevřená báze.
Každý regulární prostor se $\sigma$-lokálně konečnou otevřenou bází je parakompaktní podle tvrzení o $\sigma$-lokálně konečných zjemnění a tedy je normální (to lze dokázat jednoduše přímo bez použití parakompaktnosti - zkuste to).
Nechť $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ be an open base of $X$ a every $\mathcal{B}_n$ je lokálně konečná soustava. For any $n, k \in \mathbb{N}$ a $B \in \mathcal{B}_n$ let $G_{B,k} = \bigcup\{A \in \mathcal{B}_k; \overline{A} \subset B\}$. Zřejmě je $\overline{G_{B,k}} \subset B$ a podle Urysonova lemmatu existuje spojitá funkce $f_{B,k} : X \to [0,1]$, která se anuluje na doplňku $B$ a má hodnotu 1 na $G_{B,k}$. Pseudometrika

$$d_{n,k}(x,y) = \sum_{B \in \mathcal{B}_n} |f_{B,k}(x) - f_{B,k}(y)|$$

je spojitá na $X$ a infimum topologií těchto pseudometrik je topologie na $X$, takže $X$ je pseudometrizovatelný. $\square$

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Bing, 1951)**

*Topologický prostor je pseudometrizovatelný právě když je regulární a má $\sigma$-diskrétní otevřenou bázi.*

**Důkaz.**

Postačitelnost plyne z Nagatovy-Smirnovovy věty Zbývá dokázat, že každý pseudometrizovatelný prostor má $\sigma$-diskrétní otevřenou bázi.
Použijeme-li Stoneův výsledek, že pseudometrizovatelný prostor má otevřenou $\sigma$-lokálně konečnou bázi, stačí dokázat, že každá otevřená lokálně konečná soustava má otevřené $\sigma$-diskrétní zjemnění. Navíc, protože pseudometrizovatelný prostor je dědičně normální, stačí získat otevřené $\sigma$-disjunktní zjemnění.
Nechť $\{G_\alpha\}_\kappa$ je (dobře uspořádaná) lokálně konečná soustava otevřených množin v $(X, d)$. Označme $H_{\alpha,n} = \{x; d(x, X \setminus G_\alpha) > 1/n\}$ a $G_{\alpha,n} = H_{\alpha,n} \setminus \bigcup\{\overline{H_{\beta,k}}; \beta < \alpha, k < n\}$. Pak soustava $\{G_{\alpha,n}\}_{\mathbb{N}}$ je disjunktní a každý prvek $\bigcup_\alpha G_\alpha$ náleží do nějaké množiny $H_\alpha$ pro nějaké $\alpha$ a $n$. □

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Metrizovatelnost kompaktních prostorů, Šnejder, 1945)**

*Kompaktní Hausdorffův prostor $X$ je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je $G_\delta$-množina.*

**Důkaz.**

Implikace $1 \Rightarrow 2$ je triviální. Pro opačnou implikaci si stačí uvědomit, že součin $X \times X$ je kompaktní, diagonála je uzavřená a podle podmínky 2 je průnikem spočetně mnoha svých okolí, takže má spočetnou bázi svých okolí. Všechna okolí diagonály v kompaktním prostoru ale tvoří uniformitu na $X$, ta má spočetnou bázi a je tedy metrizovatelná. $\square$

$\Rightarrow$

**TVRZENÍ (Metrizovatelnost uspořádatelných prostorů)**

*Uspořádatelný prostor $X$ je metrizovatelný právě když diagonála v $X \times X$ je $G_\delta$-množina.*

**Důkaz.**

Vlastnost mít $G_\delta$-diagonálu lze celkem snadno převést na vlastnost soustavy pokrytí: $X$ má $G_\delta$-diagonálu právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí $X$ rozlišující body ve smyslu ($x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists n \notin \mathrm{st}_{\mathcal{G}_n} y$). (Použijí se okolí diagonály složené ze čtverců nad otevřenými okolími.) Je-li $X$ uspořádatelný, lze snadno modifikovat uvedená pokrytí (z intervalů), že hvězdy bodů tvoří lokální báze. Nyní stačí použít Aleksandrovovu-Urysonovu metrizační větu. $\square$

$\Rightarrow$