11. POKRÝVACÍ VLASTNOSTI

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
[Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
[Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta\right.$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
[Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
   [Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta\right.$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
[Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
[Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta\right.$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

Pokrytí

1. Najděte bodově konečné otevřené pokrytí na $\mathbb{R}$, které není lokálně konečné.
2. Najděte disjunktní otevřené pokrytí prostoru iracionálních čísel, které není diskrétní. (Lze takový příklad nalézt v $\mathbb{R}$?)
3. Najděte na nějakém konečném topologickém prostoru příklad otevřeného pokrytí, které nemá otevřené hvězdovité zjemnění. Jaká je minimální mohutnost takového prostoru?
4. Najděte příklad soustavy $\{A_i\}$ otevřených množin nějakého úplně regulárního prostoru, která není lokálně konečná, ale platí rovnost $\bigcup \overline{A_i} = \overline{\bigcup A_i}$.
5. Ukažte, že každé otevřené bodově konečné pokrytí obsahuje tzv. minimální (nebo ireducibilní) podpokrytí (tzn. že vynecháním jakéhokoli prvku pokrytí se nedostane pokrytí).
6. Je-li X normální prostor, existuje pro každé otevřené bodově konečné pokrytí $\{G_i\}_I$ (speciálně tedy pro konečná pokrytí) otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in I$.
[Návod: Pro pokrytí $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ definujte transfinitní indukcí H_α jako okolí množiny $X \setminus \left(\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta \cup \bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta\right.$, které leží i s uzávěrem v G_α.]

Zformulujte podobné otázky a najděte příslušné příklady pro σ-varianty předchozích otázek.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

$\Longrightarrow$

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

Byly definovány σ-P soustavy, s hlavním zájmem na σ-disjunktní, σ-konečné a σ-lokálně konečné soustavy. Pro parakompaktnost lze použít i σ-diskrétní a σ-lokálně konečná zjemnění. Platí to i pro zobecněné kompaktnosti?

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

otevřené báze a báze okolí

Dokažte ekvivalenci následujících podmínek s kompaktností prostoru X.

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má konečné zjemnění.

Dokažte analogie předchozích ekvivalencí pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost (viz formulace v hlavním textu).

σ-P zjemnění

Jsou následující podmínky ekvivalentní kompaktnosti prostoru X?

1. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-disjunktní konečné otevřené zjemnění.
2. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné uzavřené zjemnění.
3. Každé otevřené pokrytí prostoru X má σ-konečné zjemnění.

Zformulujte podobný problém pro spočetnou kompaktnost, pseudokompaktnost a Lindelöfovost a najděte řešení.

$\Rightarrow$

Bylo již zmíněno, že zachovávání parakompaktnosti konstrukcemi je obdobné jako u normality. I příklady jsou obdobné.

Konstrukce a parakompaktnost

1. Ukažte, že podobně jako normalita, je i parakompaktnost zachovávána F_σ-podprostory (důkaz je mnohem snazší při použití σ-lokálně konečných zjemnění).
2. Pro příklad dvou parakompaktních prostorů, jejichž součin není parakompaktní, lze použít jako u normality Sorgenfreyovu přímku – ověřte to.
3. Ukažte, že součin parakompaktního prostoru s kompaktním symetrickým prostorem je parakompaktní (místo kompaktního lze vzít i lokálně kompaktní prostor).
4. Najděte příklad neparakompaktního úplně regulárního kvocientu parakompaktního prostoru.
5. Ukažte, že symetrický prostor, který je spojitým uzavřeným obrazem parakompaktního prostoru, je parakompaktní. Najděte příklad, že nelze místo uzavřenosti zobrazení požadovat jeho otevřenost.

$\Rightarrow$

Konstrukce a parakompaktnost

1. Ukažte, že podobně jako normalita, je i parakompaktnost zachovávána F_σ-podprostory (důkaz je mnohem snazší při použití σ-lokálně konečných zjemnění).
2. Pro příklad dvou parakompaktních prostorů, jejichž součin není parakompaktní, lze použít jako u normality Sorgenfreyovu přímku – ověřte to.
3. Ukažte, že součin parakompaktního prostoru s kompaktním symetrickým prostorem je parakompaktní (místo kompaktního lze vzít i lokálně kompaktní prostor).
4. Najděte příklad neparakompaktního úplně regulárního kvocientu parakompaktního prostoru.
5. Ukažte, že symetrický prostor, který je spojitým uzavřeným obrazem parakompaktního prostoru, je parakompaktní. Najděte příklad, že nelze místo uzavřenosti zobrazení požadovat jeho otevřenost.

$\Rightarrow$

Konstrukce a parakompaktnost

1. Ukažte, že podobně jako normalita, je i parakompaktnost zachovávána F_σ-podprostory (důkaz je mnohem snazší při použití σ-lokálně konečných zjemnění).
2. Pro příklad dvou parakompaktních prostorů, jejichž součin není parakompaktní, lze použít jako u normality Sorgenfreyovu přímku – ověřte to.
3. Ukažte, že součin parakompaktního prostoru s kompaktním symetrickým prostorem je parakompaktní (místo kompaktního lze vzít i lokálně kompaktní prostor).
4. Najděte příklad neparakompaktního úplně regulárního kvocientu parakompaktního prostoru.
5. Ukažte, že symetrický prostor, který je spojitým uzavřeným obrazem parakompaktního prostoru, je parakompaktní. Najděte příklad, že nelze místo uzavřenosti zobrazení požadovat jeho otevřenost.

$\Rightarrow$

Konstrukce a parakompaktnost

1. Ukažte, že podobně jako normalita, je i parakompaktnost zachovávána F_σ-podprostory (důkaz je mnohem snazší při použití σ-lokálně konečných zjemnění).
2. Pro příklad dvou parakompaktních prostorů, jejichž součin není parakompaktní, lze použít jako u normality Sorgenfreyovu přímku – ověřte to.
3. Ukažte, že součin parakompaktního prostoru s kompaktním symetrickým prostorem je parakompaktní (místo kompaktního lze vzít i lokálně kompaktní prostor).
4. Najděte příklad neparakompaktního úplně regulárního kvocientu parakompaktního prostoru.
5. Ukažte, že symetrický prostor, který je spojitým uzavřeným obrazem parakompaktního prostoru, je parakompaktní. Najděte příklad, že nelze místo uzavřenosti zobrazení požadovat jeho otevřenost.

$\Rightarrow$

Konstrukce a parakompaktnost

1. Ukažte, že podobně jako normalita, je i parakompaktnost zachovávána F_σ-podprostory (důkaz je mnohem snazší při použití σ-lokálně konečných zjemnění).
2. Pro příklad dvou parakompaktních prostorů, jejichž součin není parakompaktní, lze použít jako u normality Sorgenfreyovu přímku – ověřte to.
3. Ukažte, že součin parakompaktního prostoru s kompaktním symetrickým prostorem je parakompaktní (místo kompaktního lze vzít i lokálně kompaktní prostor).
4. Najděte příklad neparakompaktního úplně regulárního kvocientu parakompaktního prostoru.
5. Ukažte, že symetrický prostor, který je spojitým uzavřeným obrazem parakompaktního prostoru, je parakompaktní. Najděte příklad, že nelze místo uzavřenosti zobrazení požadovat jeho otevřenost.

$\Rightarrow$

Konstrukce a parakompaktnost

1. Ukažte, že podobně jako normalita, je i parakompaktnost zachovávána F_σ-podprostory (důkaz je mnohem snazší při použití σ-lokálně konečných zjemnění).
2. Pro příklad dvou parakompaktních prostorů, jejichž součin není parakompaktní, lze použít jako u normality Sorgenfreyovu přímku – ověřte to.
3. Ukažte, že součin parakompaktního prostoru s kompaktním symetrickým prostorem je parakompaktní (místo kompaktního lze vzít i lokálně kompaktní prostor).
4. Najděte příklad neparakompaktního úplně regulárního kvocientu parakompaktního prostoru.
5. Ukažte, že symetrický prostor, který je spojitým uzavřeným obrazem parakompaktního prostoru, je parakompaktní. Najděte příklad, že nelze místo uzavřenosti zobrazení požadovat jeho otevřenost.

$\Rightarrow$

Normalitu lze zobecnit na tzv. kolektivní normalitu: Pro každý diskrétní systém $\{F_i\}$ uzavřených množin existuje disjunktní systém $\{G_i\}$ otevřených množin s vlastností $F_i \subset G_i$ pro každé i.

Kolektivní normalita

1. Ukažte, že parakompaktní prostor je kolektivně normální.
2. Dokažte, že každý GO prostor je kolektivně normální.
3. Najděte kolektivně normální úplně regulární prostor, který není parakompaktní.

Existuje normální prostor, který není kolektivně normální; jeho konstrukce je složitější.

Normalitu lze zobecnit na tzv. kolektivní normalitu: Pro každý diskrétní systém $\{F_i\}$ uzavřených množin existuje disjunktní systém $\{G_i\}$ otevřených množin s vlastností $F_i \subset G_i$ pro každé i.

Kolektivní normalita

1. Ukažte, že parakompaktní prostor je kolektivně normální.
2. Dokažte, že každý GO prostor je kolektivně normální.
3. Najděte kolektivně normální úplně regulární prostor, který není parakompaktní.

Existuje normální prostor, který není kolektivně normální; jeho konstrukce je složitější.

$\Rightarrow$

Normalitu lze zobecnit na tzv. kolektivní normalitu: Pro každý diskrétní systém $\{F_i\}$ uzavřených množin existuje disjunktní systém $\{G_i\}$ otevřených množin s vlastností $F_i \subset G_i$ pro každé i.

Kolektivní normalita

1. Ukažte, že parakompaktní prostor je kolektivně normální.
2. Dokažte, že každý GO prostor je kolektivně normální.
3. Najděte kolektivně normální úplně regulární prostor, který není parakompaktní.

Existuje normální prostor, který není kolektivně normální; jeho konstrukce je složitější.

Normalitu lze zobecnit na tzv. kolektivní normalitu: Pro každý diskrétní systém $\{F_i\}$ uzavřených množin existuje disjunktní systém $\{G_i\}$ otevřených množin s vlastností $F_i \subset G_i$ pro každé i.

Kolektivní normalita

1. Ukažte, že parakompaktní prostor je kolektivně normální.
2. Dokažte, že každý GO prostor je kolektivně normální.
3. Najděte kolektivně normální úplně regulární prostor, který není parakompaktní.

Existuje normální prostor, který není kolektivně normální; jeho konstrukce je složitější.

$\Rightarrow$

Normalitu lze zobecnit na tzv. kolektivní normalitu: Pro každý diskrétní systém $\{F_i\}$ uzavřených množin existuje disjunktní systém $\{G_i\}$ otevřených množin s vlastností $F_i \subset G_i$ pro každé i.

Kolektivní normalita

1. Ukažte, že parakompaktní prostor je kolektivně normální.
2. Dokažte, že každý GO prostor je kolektivně normální.
3. Najděte kolektivně normální úplně regulární prostor, který není parakompaktní.

Existuje normální prostor, který není kolektivně normální; jeho konstrukce je složitější.

$\Rightarrow$

Připomeňme, že *staciomární podmnožina* množiny ordinálů α je taková množina, která protíná každou uzavřenou nahoru neomezenou množinu v α.

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že LOTS X je parakompaktní právě když má každé otevřené pokrytí otevřené bodově spočetné zjemnění.
2. Stacionární podprostor ω_1 není parakompaktní. (Toto tvrzení platí pro stacionární podmnožiny α, kdy α má nespočetnou konfinalitu.)
3. Ukažte, že LOTS není parakompaktní právě když obsahuje uzavřený podprostor homeomorfní stacionární podmnožině α s nespočetnou konfinalitou.

$\Rightarrow$

Připomeňme, že *staciomární podmnožina* množiny ordinálů α je taková množina, která protíná každou uzavřenou nahoru neomezenou množinu v α.

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že LOTS X je parakompaktní právě když má každé otevřené pokrytí otevřené bodově spočetné zjemnění.
2. Stacionární podprostor ω_1 není parakompaktní. (Toto tvrzení platí pro stacionární podmnožiny α, kdy α má nespočetnou konfinalitu.)
3. Ukažte, že LOTS není parakompaktní právě když obsahuje uzavřený podprostor homeomorfní stacionární podmnožině α s nespočetnou konfinalitou.

$\Rightarrow$

Připomeňme, že *staciomární podmnožina* množiny ordinálů α je taková množina, která protíná každou uzavřenou nahoru neomezenou množinu v α.

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že LOTS X je parakompaktní právě když má každé otevřené pokrytí otevřené bodově spočetné zjemnění.
2. Stacionární podprostor ω_1 není parakompaktní. (Toto tvrzení platí pro stacionární podmnožiny α, kdy α má nespočetnou konfinalitu.)
3. Ukažte, že LOTS není parakompaktní právě když obsahuje uzavřený podprostor homeomorfní stacionární podmnožině α s nespočetnou konfinalitou.

$\Rightarrow$

Připomeňme, že *staciomární podmnožina* množiny ordinálů α je taková množina, která protíná každou uzavřenou nahoru neomezenou množinu v α.

Uspořádatelné prostory

1. Ukažte, že LOTS X je parakompaktní právě když má každé otevřené pokrytí otevřené bodově spočetné zjemnění.
2. Stacionární podprostor ω_1 není parakompaktní. (Toto tvrzení platí pro stacionární podmnožiny α, kdy α má nespočetnou konfinalitu.)
3. Ukažte, že LOTS není parakompaktní právě když obsahuje uzavřený podprostor homeomorfní stacionární podmnožině α s nespočetnou konfinalitou.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Zajímavá situace nastává pro lokálně kompaktní prostory:

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Víme, že každý symetrický Lindelöfův prostor je parakompaktní. Pro separabilní prostory platí opačné tvrzení.

Lindelöfův prostor

Separabilní parakompaktní prostor je Lindelöfův.

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor

Lokálně kompaktní parakompaktní prostor je disjunktní sumou Lindelöfových prostorů.

$\Rightarrow$

Parakompaktnest a úplnost

Dokažte následující tvrzení.

1. Každý parakompaktní prostor má úplnou uniformitu.
2. Pseudokompaktní parakompaktní prostor je kompaktní.
3. Parakompaktní prostor neměřitelné mohutnosti je reálně kompaktní.

$\Rightarrow$

Parakompaktnest a úplnost

Dokažte následující tvrzení.

1. Každý parakompaktní prostor má úplnou uniformitu.
2. Pseudokompaktní parakompaktní prostor je kompaktní.
3. Parakompaktní prostor neměřitelné mohutnosti je reálně kompaktní.

$\Rightarrow$

Parakompaktnest a úplnost

Dokažte následující tvrzení.

1. Každý parakompaktní prostor má úplnou uniformitu.
2. Pseudokompaktní parakompaktní prostor je kompaktní.
3. Parakompaktní prostor neměřitelné mohutnosti je reálně kompaktní.

$\Rightarrow$

Parakompaktnest a úplnost

Dokažte následující tvrzení.

1. Každý parakompaktní prostor má úplnou uniformitu.
2. Pseudokompaktní parakompaktní prostor je kompaktní.
3. Parakompaktní prostor neměřitelné mohutnosti je reálně kompaktní.

$\Rightarrow$

Některé vlastnosti čechovsky úplných prostorů

1. Čechovsky úplný prostor X má tzv. bodově spočetný typ, t.j., každý bod je obsažen v kompaktní podmnožině X, která má spočetnou bázi svých okolí v X.
2. Je-li X čechovsky úplný prostor bez izolovaných bodů, pak $|X| \geq 2^\omega$.
3. Nechť f je zobrazení úplně regulárního prostoru X na úplně regulární prostor Y, které je tzv. dokonalé (perfektní), tj. je spojité, uzavřené a vzory bodů jsou kompaktní. Pak X je čechovsky úplný právě když Y je čechovsky úplný.
   [Návod. Spojité rozšíření $\beta X \to \beta Y$ zobrazuje doplněk X na doplněk Y.]
4. Najděte úplně regulární prostor, který je vytvořen úplnou uniformitou a není čechovsky úplný.
5. Najděte čechovsky úplný prostor, jehož jemná uniformita není úplná.

$\Rightarrow$