11. POKRÝVACÍ VLASTNOSTI

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2009

TVRZENÍ (Vlastnosti pokrytí některých prostorů)

1. *Symetrický prostor X je normální právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí je normální (viz kapitola 6).*
2. *Každé otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru je normální.*

Důkaz.

1. Nechť $\{G_1, \dots, G_n\}$ je otevřené pokrytí normálního prostoru X. Podle tvrzení ze cvičení existuje otevřené pokrytí $\{H_1, \dots, H_n\}$ takové, že $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé i. Z normality nyní vyplývá existence spojitých zobrazení $f_i : X \to [0, 1]$, které se anulují na H_i a mají hodnotu 1 na doplňku G_i. Pak $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(y)|$ je spojitá pseudometrika na X, jejíž koule s poloměrem 1 zjemňují pokrytí $\{G_1, \dots, G_n\}$, takže toto pokrytí je normální.
Opačné tvrzení je jednodušší. Jsou-li A, B disjunktní uzavřené podmnožiny prostoru X, je $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ otevřené pokrytí a má tedy dvojité hvězdovité zjemnění $\mathfrak{H}$. Hvězdy množin A, B vzhledem k $\mathfrak{H}$ jsou pak disjunktní otevřená okolí obou množin.

2. Nechť $\mathfrak{G}$ je otevřené pokrytí pseudometrizovatelného prostoru (X, d); najdeme jeho hvězdovité zjemnění. Položme $\varphi(x) = \sup\{d(x, X \setminus G); G \in \mathfrak{G}\}/4$ a $\mathfrak{U} = \{B_{\varphi(x)}(x)\}_X$. Pro zvolené $x \in X$ existuje $G \in \mathfrak{G}$ tak, že $d(x, X \setminus G) > 3\varphi(x)$. Je-li $y \in \mathrm{star}_{\mathfrak{U}}(x)$, je $d(x, y) < \varphi(x)$ a tedy $y \in G$. □

TVRZENÍ (Parakompaktnost pomocí lokálně konečných pokrytí)

Následující podmínky pro regulární topologický prostor X jsou ekvivalentní.

1. *X je parakompaktní.*
2. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má podřízený rozklad jednotky.*
3. *Každé otevřené pokrytí prostoru X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz.

$1 \Rightarrow 2$ Nechť je X parakompaktní a d je spojitá pseudometrika, jejíž koule o poloměru 2 zjemňují dané normální pokrytí. Předpokládejme, že množina X je dobře uspořádaná jako $\{x_\alpha\}_\kappa$. Položme $g_0 = 0$, $g_\alpha = \min(1, \sup\{d(x, X \setminus B2(x_\beta)); \beta < \alpha\}$ pro $\alpha > 0$. Funkce $f_\alpha = g_{\alpha+1} - g_\alpha$, $\alpha \in \kappa$, tvoří hledaný rozklad jednotky.

$2 \Rightarrow 3$ Stačí dokázat následující vlastnost: *Je-li $\{f_i\}_I$ rozklad jednotky v X, existuje otevřené lokálně konečné pokrytí zjemňující $\{f_i^{-1}(0, \infty)\}_I$.* Opravdu, funkce $f = \sup_I f_i$ je spojitá funkce na X (protože lokálně je to supremum jen konečně mnoha funkcí – ukažte to) a otevřené množiny $G_i = \{x; f_i(x) > f(x)\}$ tvoří hledané lokálně konečné pokrytí.

$3 \Rightarrow 1$ Nechť $\{G_i\}_I$ je otevřené lokálně konečné pokrytí X. Vlastnost 3 snadno implikuje normalitu X, a tedy podle cvičení existuje otevřené pokrytí $\{H_i\}_I$ s vlastností $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé i. Pro $x \in X$ položme $U_x = \bigcap\{G_i; x \in \overline{H_i}\}$ (ukažte, že U_x jsou otevřené množiny) a $F_x = \bigcup\{\overline{H_i}; x \notin \overline{H_i}\}$ (ukažte, že F_x jsou uzavřené množiny). Potom otevřené pokrytí $\{U_x \setminus F_x; x \in X\}$ hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\{G_i\}_I$. $\square$

TVRZENÍ (Modifikace lokálně konečných zjemnění)

Nechť X je regulární topologický prostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní.

1. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené lokálně konečné zjemnění.*
2. *Každé otevřené pokrytí v X má otevřené σ-lokálně konečné zjemnění.*
3. *Každé otevřené pokrytí v X má lokálně konečné zjemnění.*
4. *Každé otevřené pokrytí v X má uzavřené lokálně konečné zjemnění.*

Důkaz.

Implikace $1 \Rightarrow 2$ je triviální. Dokažme $2 \Rightarrow 3$. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ jsou $\{G_{i,n}\}_I$ otevřené lokálně konečné soustavy a $\bigcup_{i,n} G_{i,n} = X$ (opakováním $\emptyset$ lze předpokládat, že indexové množiny jsou stejné pro všechna n). Soustava

$$\{\bigcup_{i \in I} G_{i,n} \setminus \bigcup_{i \in I, k<n} G_{i,k}; n \in \mathbb{N}\}$$

je lokálně konečné pokrytí X. Soustava skládající se ze všech průniků množiny z právě definované posloupnosti a množin $G_{i,n}$ je hledané lokálně konečné zjemnění.

Implikace $3 \Rightarrow 4$ také není složitá. Nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí X. Pro každé $\in X$ označme G_x množinu z $\mathcal{G}$ obsahující x a najděme otevřenou množinu H_x tak, že $x \in H_x \subset \overline{H_x} \subset G_x$. Otevřené pokrytí $\{H_x\}_X$ má lokálně konečné zjemnění $\{P_i\}$. Pak $\{\overline{P_i}\}$ je hledané uzavřené lokálně konečné pokrytí.

Zbývá dokázat $4 \Rightarrow 1$. Nechť $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí X a $\mathcal{F}$ jeho uzavřené lokálně konečné zjemnění. Zvolme otevřené pokrytí $\mathcal{H}$ takové, že každý prvek $\mathcal{H}$ protíná jen konečně mnoho prvků z $\mathcal{F}$, a nechť $\mathcal{P}$ je uzavřené lokálně konečné zjemnění $\mathcal{H}$. Pro $F \in \mathcal{F}$ definujme $\widetilde{F} = X \setminus \bigcup\{P \in \mathcal{P}; P \subset X \setminus F\}$. Soustava $\{\widetilde{F}\}_{\mathcal{F}}$ je otevřené lokálně konečné pokrytí X. Hledanou soustavou je pak $\{\widetilde{F} \cap G_F\}_{\mathcal{F}}$, kde G_F je nějaký prvek z $\mathcal{G}$ obsahující F. □

TVRZENÍ

Úplně regulární prostor X je čechovsky úplný právě když je G_δ v βX (ekvivalentně, v nějaké jiné nebo v každé kompaktifikaci).

Důkaz.

Je-li X čechovsky úplný a $\{\mathcal{G}_n\}$ je příslušná posloupnost otevřených pokrytí, stačí pro dané n rozšířit jednotlivé otevřené množiny $G \in \mathcal{G}_n$ na otevřené množiny v kompaktifikaci X a sjednotit je. Dostanou se otevřené množiny H_n v kompaktifikaci a jejich průnik je x.
Obráceně, pokud je $X = \bigcap H_n$, kde H_n jsou otevřené množiny v nějaké kompaktifikaci X, stačí pro každé $x \in X$ zvolit otevřené okolí $G_{n,x}$ v kompaktifikaci, jehož uzávěr je částí H_n. Potom pokrytí $\{G_{n,x} \cap X; x \in X\}$ tvoří hledané n-té pokrytí z definice čechovsky úplných prostorů. □

TVRZENÍ

1. *Průnik spočetně mnoha hustých otevřených podmnožin neprázdného čechovsky úplného prostoru je hustý.*
2. *Třída čechovsky úplných prostorů je spočetně součinová a uzavřená na uzavřené podmnožiny, na G_δ-podmnožiny a na disjunktní součty.*
3. *Pseudometrický prostor je čechovsky úplný právě když je úplně pseudometrizovatelný.*

Důkaz.

1. Důkaz je velmi podobný důkazu Baireovy věty pro $\mathbb{R}$. Nechť $\{U_n\}$ je posloupnost hustých neprázdných množin v X a $\{\mathcal{G}_n\}$ je příslušná posloupnost otevřených pokrytí z definice čechovsky úplných prostorů. Zvolme $G_1 \in \mathcal{G}_1$. Množina $U_1 \cap G_1$ obsahuje uzávěr nějaké neprázdné otevřené množiny H_1. Existuje $G_2 \in \mathcal{G}_2$ tak, že $H_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, takže $H_1 \cap G_2 \cap U_2$ obsahuje uzávěr nějaké neprázdné otevřené množiny H_2. Zřejmým pokračováním se dostane monotónní posloupnost uzavřených množin $\overline{H_n}$ splňujících podmínku definice čechovsky úplných prostorů, takže její průnik je neprázdný a je obsažen v průniku množin U_n.
2. Jedině součinovost nemusí být zřejmá. Zde je jednodušší použít charakterizaci čechovsky úplných prostorů pomocí kompaktifikací. Nechť $X_k = \bigcap_n G_{k,n}$, $G_{k,n}$ jsou otevřené množiny v $betaX_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Definujte $H_{k,n} = G_{k,n} \times \Pi_{i\neq k}\beta X_i$. Pak $H_{k,n}$ jsou otevřené množiny v kompaktifikaci $\Pi\beta X_k$ prostoru ΠX_k a jejich průnik je roven ΠX_k.
3. Je-li X úplný pseudometrický prostor, pak spočetná báze jeho uniformních pokrytí má vlastnosti z definice čechovsky úplných prostorů (ony subbáze jsou cauchyovské). Obráceně, nechť X je pseudometrický prostor úplný ve smyslu Čecha a $\{\mathcal{G}_n\}$ je příslušná posloupnost otevřených pokrytí X. Každé toto pokrytí je prvním členem normální posloupnosti pokrytí (viz předchozí kapitolu) a všechna tato pokrytí vytvářejí pseudometrizovatelnou uniformitu na X (lze předpokládat, že všechny prvky ze všech pokrytí $\mathcal{G}_n$ tvoří bázi X). Podmínka o průniku subbází filtrů z definice čechovsky úplných prostorů v tomto případě znamená, že sestrojená uniformita je úplná. □

DŮSLEDEK

Metrický prostor je úplně metrizovatelný právě když je G_δ v každém metrickém prostoru do něhož je isometricky vnořen (stačí vzít vnoření do úplného obalu).

Důkaz.

Je-li prostor X úplně metrizovatelný, je úplný ve smyslu Čecha. Nechť Y je kompaktifikace zúplnění $\widetilde{X}$ a tedy i kompaktifikace X. Pak X je G_δ v Y a proto i v $\widetilde{X}$. Je-li X isometricky vnořen do metrického prostoru Z, je $\widetilde{X}$ isometricky vnořen do zúplnění $\widetilde{Z}$ a je v něm uzavřený a tedy G_δ. Odtud již vyplývá, že je X G_δ v Z.

Nechť je metrický prostor X G_δ ve svém zúplnění $\widetilde{X}$. Podle předchozího odstavce je $\widetilde{X}$ G_δ v $\beta\widetilde{X}$ a tedy také X je G_δ v $\beta\widetilde{X}$. □