8. PROSTORY FUNKCÍ

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Úplnost a prekompaktnost prostorů funkcí)

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí neprázdné množiny X a Y je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.

1. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je pseudometrizovatelný právě když je Y pseudometrizovatelný a existuje spočetný podsoubor $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ takový, že každé $S \in \mathcal{S}$ je částí sjednocení prvků z $\mathcal{S}_0$.*
2. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je prekompaktní právě když je Y prekompaktní a každé $S \in \mathcal{S}$ je konečné.*
3. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je uniformně nuldimenzionální právě když je Y uniformně nuldimenzionální.*
4. *Uniformní prostor $(Y^X)_{\mathcal{S}}$ je úplný právě když je Y úplný.*

Důkaz.

Z předchozích pozorování vyplývá, že Y je uzavřený podprostor Y^X, takže dědí uvedené vlastnosti.

1. Je-li $(Y^X)_\mathcal{S}$ pseudometrizovatelný, má spočetnou subbázi $\{E(U_n, S_n)\}$. Je snadno vidět, že soustava $\{S_n\}$ má vlastnost uvedenou v tvrzení. Naopak, pokud je Y pseudometrizovatelný, má spočetnou bázi $\{U_n\}$ a spolu s uvedenou předpokládanou soustavou $\{S_n\}$ tvoří $\{E(U_n, S_n)\}$ spočetnou subbázi $(Y^X)_\mathcal{S}$.
2. Je-li každé $S \in \mathcal{S}$ konečné, je $(Y^X)_\mathcal{S}$ hrubší než uniformita bodové konvergence a tedy je prekompaktní pokud je Y prekompaktní. Naopak, je-li $(Y^X)_\mathcal{S}$ prekompaktní a Z dvoubodový podprostor Y (je uniformně diskrétní), je pro každé $S \in \mathcal{S}$ uniformně diskrétní prostor $(Z^S)_u$ stejnoměrně spojitý obraz $(Y^X)_\mathcal{S}$, takže S musí být konečný.
3. Toto tvrzení plyne z úvahy, že $E(U, S)$ je ekvivalence, pokud je U ekvivalence.
4. Nechť Y je úplný. Pak je úplná mocnina Y^X a $(Y^X)_\mathcal{S}$ má jemnější uniformitu, která má za subbázi pokrytí soustavy $\{E(U, S)[g]; g \in Y^X\}$, jejíž prvky $E(U, S)[g]$ jsou uzavřené v $(Y^X)_\mathcal{S}$ pro uzavřené množiny U. Podle tvrzení o úplnosti jemnější uniformity je $(Y^X)_\mathcal{S}$ úplný.

□

DŮSLEDEK (Vlastnosti prostorů spojitých zobrazení)

Nechť $\mathcal{S}$ je pokrytí prostoru X a Y je alespoň dvoubodový Hausdorffův prostor.

1. *Prostory $U_u(X, Y)$ a $C_u(X, Y)$ jsou uzavřené v $(Y^X)_u$ a tedy jsou úplné, pokud je Y úplný.*
2. *Nechť $\mathcal{F} = \{f : X \to Y; f$ je stejnoměrně spojité na každém $S \in \mathcal{S}$. Pak $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ je uzavřený v $(Y^X)_u$ a tedy je úplný, pokud je Y úplný.*
3. *Je-li X lokálně kompaktní Hausdorffův prostor nebo sekvenční prostor a Y je úplný uniformní prostor, pak $C_c(X, Y)$ je úplný.*

Důkaz.

1. Toto tvrzení má stejný postup důkazu, jako je známý důkaz (stejnoměrné) spojitosti stejnoměrné limity (stejnoměrně) spojitých funkcí.
2. Toto tvrzení plyne z předchozího a z popisu $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ jako slabé topologie vytvořené projekcemi do $(Y^S)_u$.
3. Poslední tvrzení plyne z předchozího, uvědomíme-li si, že v uvedených dvou případech je $\mathcal{F}$ z 2 rovno $C(X, Y)$.

$\square$

TVRZENÍ (Kompaktně otevřená topologie)

Topologické prostory $C_c(X, Y)$ a $C_{co}(X, Y)$ jsou totožné pro libovolný uniformní prostor Y a úplně regulární prostor X.

Důkaz.

Nechť $g \in C(X, Y)$, C je kompaktní podmnožina X a G je otevřená podmnožina Y obsahující $g(C)$. Musíme najít U, S (S kompaktní) tak, že pro $f \in E(U, S)[g]$ je $f(C) \subset G$. Z kompaktnosti C vyplývá, že existuje uniformní okolí diagonály U takové, že $U[g(C)] \subset G$. Toto U spolu s $S = C$ jsou hledané množiny.
Obráceně, pro dané U, S (S kompaktní) musíme najít kompaktní množiny $C_1, \ldots, C_n$ a otevřené množiny $G_1, \ldots, G_n$ tak, že $g(C_i) \subset G_i$ pro všechna i a pokud $f(C_i) \subset G_i$ pro všechna i, musí být $f \in E(U, S)[g]$. Nejdříve se zvolí $V \in \mathcal{U}$ tak, že $V \circ V \circ V \circ V \subset U$ a body $s_1, \ldots, s_n \in S$ tak, že množiny $V[g(s_i)], i = 1, \ldots, n$, pokrývají $g(S)$. Nyní stačí vzít $C_i = S \cap \overline{g^{-1}(V[g(s_i)])}$ a $G_i = (V \circ V)[g(s_i)]$. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti ekviuniformních množin)

1. *Soustava všech ekviuniformních množin je aditivní a dědičná.*
2. *Množina* $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ *je ekviuniformní právě když je zobrazení (tzv. evaluace)* $e = \{(x,f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times \mathcal{F} \to Y$ *stejnoměrně spojité, přičemž* $\mathcal{F}$ *má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
3. *Množina* $\mathcal{F} \subset U(X,Y)$ *je ekviuniformní právě když je zobrazení* $\{x \rightsquigarrow \{f \rightsquigarrow f(x)\}\} : X \to U_u(\mathcal{F}, Y)$ *stejnoměrně spojité, přičemž* $\mathcal{F}$ *má libovolnou uniformitu jemnější než uniformita bodové konvergence.*
4. *Každá prekompaktní podmnožina v* $U_u(X,Y)$ *je ekviuniformní.*
5. *Uzávěr ekviuniformní množiny v topologii bodové konvergence na* Y^X *je ekviuniformní.*

Důkaz.

Stačí dokázat 4.tvrzení, ostatní jsou jednoduchá. Nechť $\mathcal{F}$ je prekompaktní podmnožina $U_u(X,Y)$. Pro uniformní okolí U diagonály v Y najdeme konečnou množinu $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ tak, že $E(U,X)[\mathcal{H}] \supset \mathcal{F}$. Pak pro $W = \bigcap\{(f \times f)^{-1}(U); f \in \mathcal{H}\}$ je $(f \times f)(W) \subset U \circ U \circ U$ pro každé $f \in \mathcal{F}$. □

TVRZENÍ (Stejnoměrná konvergence na prekompaktních množinách)

Je-li $\mathcal{F}$ ekviuniformní množina v Y^X, pak uniformity $\mathcal{F}_{pc}$ a $\mathcal{F}_p$ jsou stejné.

Důkaz.

Nechť $\mathcal{F} \subset U(X, Y)$ je ekviuniformní, U je uniformní okolí diagonály Δ_Y a S je prekompaktní množina v X. Hledáme uniformní okolí V diagonály Δ_Y a konečnou množinu K v X tak, že $E(V, K) \cap (\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \subset E(U, S)$. Nejdříve zvolíme symetrické uniformní okolí V diagonály Δ_Y tak, že $V \circ V \circ V \subset U$ a uniformní okolí W diagonály Δ_X tak, že $(f \times f)(W) \subset V$ pro každé $f \in \mathcal{F}$. Existuje konečná podmnožina $K \subset S$ s vlastností $W[K] \supset S$. Pak V, K jsou hledané množiny. $\square$

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $U(X)$ a $U^*(X)$)

Nechť X je uniformní prostor a $\mathcal{F} \subset U(X)$.

1. *$U(X)$ a $U^*(X)$ jsou lineární podprostory a podsvazy v $\mathbb{R}^X$, $U^*(X)$ je i podalgebra v $\mathbb{R}^X$.*
2. *Je-li $\mathcal{F}$ lineární podprostor v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr lineární prostor.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ podsvaz v $U_u(X)$, je i jeho uzávěr svaz.*
4. *Uzavřená podalgebra v $U^*(X)$ je podsvaz v $U^*(X)$.*

Důkaz.

Jedině poslední tvrzení potřebuje uvést důkaz. Protože $\max(a, b) = (|a - b| + (a + b))/2$, stačí ukázat, že náleží-li f do uzavřené podalgebry v $U^*(X)$, náleží do ní i $|f| = \sqrt{f^2}$. To vyplývá z uniformní konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}x^n$ k $1 - x$ na intervalu $[0, 1]$, neboť pak $k\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}(1 - k^2f^2(x))^n$, kde $k = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$, konverguje stejnoměrně k $|f|$. □

TVRZENÍ (Aproximace funkcí)

Nechť X je prekompaktní prostor a $\mathcal{F}$ je lineární podprostor a podsvaz v $U_u^*(X)$, který obsahuje všechna konstantní zobrazení a slabě vytváří X. Potom $\mathcal{F}$ je hustý v $U^*(X)$.

Důkaz.

Nejdříve ukážeme, že pro každé $A \subset X$ a každé konečné uniformní pokrytí η prostoru X existuje $f \in \mathcal{F}$, která má hodnoty 0 na A a 1 na doplňku $\text{star}_\eta A$. Protože $\mathcal{F}$ slabě vytváří X, existují $n, k \in \mathbb{N}$ a $g_1, ..., g_n \in \mathcal{F}$ tak, že (označíme $g : X \to [-k, k]^n$ součin zobrazení $g_1, ..., g_n$) g-vzor pokrytí $[-k, k]^n$ otevřenými čtverci o stranách délky 1 zjemňuje η. Nechť je β konečné pokrytí $[-k, k]^n$ otevřenými čtverci o stranách délky 1/3. Jsou-li B, C dva takové čtverce z β, pro něž $g^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset, g^{-1}(C) \setminus \text{star}_\eta A \neq \emptyset$, pak existuje souřadnice k a jejich strany v této souřadnici B_k, C_k, že vzdálenost těchto dvou intervalů je alespoň 1/3. Řekněme, že $B_k = (a, b)$ leží nalevo od $C_k = (c, d)$, tj. $b < c$. Pak funkce

$$f_{B,C} = \inf(3(h - b), 1), \quad \text{kde } h = \sup(b, \inf(\text{pr}_k \circ g, c))$$

náleží do $\mathcal{F}$. Podobně se sestrojí funkce $f_{B,C}$ v případě, že $d < a$. Potom

$$f = \inf\{\sup\{f_{B,C}(x); C \in \beta, g^{-1}(C) \setminus \text{star}_\eta A \neq \emptyset\}; B \in \beta, g^{-1}(B) \cap A \neq \emptyset\}$$

je hledaná funkce.
Vezměme nyní $g \geq 0 \in U(X)$ a $n \in \mathbb{N}$. Nechť $g \leq k \in N$ a definujme $A_i = g^{-1}([0, i/n])$, pro $i = 0, ..., kn$. Podle předchozí části existují funkce $f_i \in \mathcal{F}, |f_i| \leq 1/n$, které mají hodnotu 0 na A_i a $1/n$ na $X \setminus A_{i+1}$. Je lehké zjistit, že $|g(x) - \sum_{i=0}^{kn} f_i(x)| \leq 1/n$ pro všechna $x \in X$. Pro g, které není nezáporné, se použije jeho rozklad na nezápornou a kladnou část. □

TVRZENÍ (Rozšiřování z kompaktního podprostoru)

Je-li Y kompaktní podmnožina úplně regulárního Hausdorffova prostoru X, pak každá spojitá reálná funkce na Y lze spojitě rozšířit na celé X.

Důkaz.

Vnoříme X do mocniny $Z = [0,1]^\kappa$. Vezmeme za $\mathcal{F}$ zúžení na Y všech spojitých reálných funkcí na Z. Snadno se ukáže, že $\mathcal{F}$ je podalgebra a podsvaz $C(Y,\mathbb{R})$ obsahující všechny konstanty a rozlišující body X. Podle Stoneovy-Weierstrassovy věty je $\mathcal{F}$ hustý v $C(X,\mathbb{R})$. Stačí nyní , že $\mathcal{F}$ je uzavřený v $C(X,\mathbb{R})$, tj., je-li $f \in C(X,\mathbb{R})$ stejnoměrnou limitou posloupnosti $\{f_n\}$ z $\mathcal{F}$, náleží i f do $\mathcal{F}$. Můžeme psát $f = f_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+1} = f_n)$ a každý člen řady se dá rozšířit na spojitou funkci na X ležící ve stejném uzavřeném intervalu jako původní funkce. Odtud plyne, že i řada takto rozšířených funkcí stejnoměrně konverguje ke spojité funkci na X, která rozšiřuje funkci f. $\square$

TVRZENÍ (Katětovova věta)

Každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na podprostoru uniformního prostoru lze rozšířit na stejnoměrně spojitou reálnou funkci definovanou na celém prostoru.

Důkaz.

Nechť $f : A \to [a, b]$ je stejnoměrná funkce z podprostoru A uniformního prostoru X. Z omezenosti f vyplývá, že f je stejnoměrně spojitá na prekompaktní modifikaci A, což je zúžení prekompaktní uniformity $\mathcal{W}$ na X. Podle tvrzení o rozšíření, lze f stejnoměrně spojitě rozšířit na uzávěr množiny A, což je kompaktní podmnožina zúplnění Y prostoru $(X, \mathcal{W})$. Z Čechovy věty vyplývá, že toto rozšíření lze dále spojitě rozšířit na celé Y, což je ale kompaktní prostor, takže naše poslední rozšíření je i stejnoměrně spojité na X. $\square$