OBECNÁ TOPOLOGIE

7. ÚPLNÉ A PREKOMPAKTNÍ PROSTORY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Víme, že kompaktní topologické prostory jsou velmi důležité. Jsou definovány pomocí existence konečných podpokrytí nebo pomocí hromadných bodů filtrů. Když obě vlastnosti převedeme do uniformit, dostaneme různé vlastnosti a každá z nich může v některých situacích nahradit kompaktnost.
Nejdříve použijeme existenci konečných podpokrytí u uniformních pokrytí.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

Prekompaktní prostory se také nazývají totálně omezené.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

Zřejmě každý kompaktní uniformní prostor je prekompaktní.
Prostor ω_1 je prekompaktní.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

Metrický prostor (X, d) je prekompaktní (ve své uniformitě vytvořené metrikou d), právě když každá jeho r-síť je konečná. Každý prekompaktní metrický prostor je tedy separabilní (opak neplatí – viz $\mathbb{R}$).
Podmnožina euklidovského prostoru je prekompaktní právě když je omezená (nemusí tedy být kompaktní).

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X,\mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X,\mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X,\mathcal{V})$*).*
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$*.*
5. *Prostor* $(X,\mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X,\mathcal{U})$*.*
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X,\mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X,\mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X,\mathcal{V})$*).*
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X,\mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X,\mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X,\mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X,\mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X,\mathcal{V})$.
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X,\mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X,\mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X,\mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X,\mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X,\mathcal{V})$.
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X,\mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X,\mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X,\mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X,\mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X,\mathcal{V})$.
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X,\mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X,\mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X,\mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X,\mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X,\mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X,\mathcal{V})$.
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X,\mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X,\mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X,\mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

DEFINICE (Prekompaktní prostory)

Uniformní prostor se nazývá prekompaktní, jestliže každé jeho uniformní pokrytí obsahuje konečné podpokrytí.

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X, \mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X, \mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X, \mathcal{V})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X, \mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X, \mathcal{V})$.
4. *Uniformita* $\mathcal{V}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X, \mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X, \mathcal{V})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X, \mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz

Z druhé vlastnosti vyplývá, že každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na prekompaktním prostoru je omezená.

Úplně regulární prostory jsou charakterizovány svými spojitými reálnými (omezenými) funkcemi – jsou jimi slabě vytvořeny. Obdoba pro uniformní prostory není možná, protože jakákoli uniformita na $\mathbb{R}$ má za bázi spočetná pokrytí a slabé vytváření tuto spočetnost zachová. Prekompaktní prostory mají však za bázi konečná pokrytí. Lze aspoň tyto prostory slabě vytvořit reálnými funkcemi? Odpověď je kladná.

Pojem *U-síť* pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

Pojem *U-síť* pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*

Pojem *U-síť* pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz

Důkaz předchozí věty implikuje Urysonovo lemma:

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Opravdu, $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ je konečné otevřené pokrytí normálního prostoru, a tedy náleží do prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; v důkazu sestrojená funkce f oddělí množiny A, B.

Pojem U-síť pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz

Důkaz předchozí věty implikuje Urysonovo lemma:

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Opravdu, $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ je konečné otevřené pokrytí normálního prostoru, a tedy náleží do prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; v důkazu sestrojená funkce f oddělí množiny A, B.

Pojem *U-síť* pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz

Důkaz předchozí věty implikuje Urysonovo lemma:

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Opravdu, $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ je konečné otevřené pokrytí normálního prostoru, a tedy náleží do prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; v důkazu sestrojená funkce f oddělí množiny A, B.

Pojem U-síť pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz

Důkaz předchozí věty implikuje Urysonovo lemma:

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Opravdu, $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ je konečné otevřené pokrytí normálního prostoru, a tedy náleží do prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; v důkazu sestrojená funkce f oddělí množiny A, B.

Pojem *U*-síť pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz

Důkaz předchozí věty implikuje Urysonovo lemma:

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.
Opravdu, $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ je konečné otevřené pokrytí normálního prostoru, a tedy náleží do prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; v důkazu sestrojená funkce f oddělí množiny A, B.

Pojem U-síť pro uniformní okolí U diagonály uniformního prostoru X odpovídá ε-síti v metrických prostorech: je to množina $A \subset X$ s vlastností $U[x] \cap U[y] = \emptyset$ pro libovolné různé body $x, y \in A$.

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz

Důkaz předchozí věty implikuje Urysonovo lemma:

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Opravdu, $\{X \setminus A, X \setminus B\}$ je konečné otevřené pokrytí normálního prostoru, a tedy náleží do prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; v důkazu sestrojená funkce f oddělí množiny A, B.

Přejdeme k uniformní modifikaci charakterizace kompaktnosti pomocí hromadných bodů filtrů nebo uspořádaných souborů. U pokrytí bylo celkem jasné, z jakých pokrytí uniformního prostoru se mají vybírat konečná podpokrytí. U filtrů nebo usměrněných souborů to tak zřejmé není. Měly by obsahovat nějaké malé množiny v uniformním smyslu. Z metrických prostorů je postup známý: cauchyovské posloupnosti.

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

4. *Hromadný bod cauchyovského filtru je jeho limitou.*

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

Příslušná definice a vlastnosti cauchyovských usměrněných souborů jsou uvedeny ve cvičeních.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

V metrickém prostoru je filtr cauchyovský právě když obsahuje množiny libovolně malého průměru.
V uniformně diskrétním prostoru je filtr cauchyovský právě když obsahuje singleton.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X, \mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X,\mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X,\mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X,\mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X, \mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X,\mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X,\mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

DEFINICE (Cauchyovské filtry)

Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá cauchyovský, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \times F \subset U$.

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X,\mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského ultrafiltru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz

Nyní slibovaná druhá varianta kompaktnosti v uniformních prostorech.

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

Víme, že místo „má hromadný bod” bylo možné říci „konverguje”. Navíc lze brát v definice jen některé cauchyovské filtry, např. minimální nebo maximální (ultrafiltry).

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

Zřejmě je každý kompaktní úplně regulární prostor úplný.
Euklidovské prostory jsou úplné. Uniformně diskrétní a indiskrétní prostory jsou úplné.
Prostor ω_1 není úplný.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

▸ Důkaz

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz

Uvedeme nyní dvě důležitá tvrzení. To první ukazuje souvislost prekompaktnosti a úplnosti s kompaktností a druhé ukazuje podstatný rozdíl úplnosti oproti kompaktnosti.

TVRZENÍ

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz

TVRZENÍ

1. *Úplně regulární prostor je kompaktní právě když je každá (nebo aspoň jedna) jeho uniformita prekompaktní a úplná.*
2. *Nechť $f : A \to Y$ je stejnoměrně spojité zobrazení podprostoru A uniformního prostoru X do úplného prostoru Y. Pak existuje stejnoměrně spojité rozšíření zobrazení f z $\overline{A}$ do Y.*

Důkaz

DEFINICE

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ se nazývá úplný, jestliže každý jeho cauchyovský filtr má hromadný bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz

TVRZENÍ

1. *Úplně regulární prostor je kompaktní právě když je každá (nebo aspoň jedna) jeho uniformita prekompaktní a úplná.*
2. *Nechť $f : A \to Y$ je stejnoměrně spojité zobrazení podprostoru A uniformního prostoru X do úplného prostoru Y. Pak existuje stejnoměrně spojité rozšíření zobrazení f z $\overline{A}$ do Y.*

Důkaz

$\Rightarrow$

Ve cvičeních je ukázáno, že úplnost uniformního prostoru se přenáší na jemnější prostor vytvářející tutéž topologii. Je zřejmé, že podmínku o vytváření stejné topologie nelze vynechat. Nicméně existuje jeden případ, kdy lze úplnost zachovat při přechodu k jemnější uniformitě vytvářející jinou topologii (a tím nemyslíme triviální případy, např. přechod k uniformně diskrétní topologii). Následující tvrzení bude výhodně použito v následující kapitole o prostorech funkcí.

TVRZENÍ (Úplnost jemnější uniformity)

Nechť Y je úplný uniformní prostor a X je jemnější uniformní prostor mající bázi uniformních pokrytí složených z množin uzavřených v Y. Pak X je úplný prostor.

Důkaz

TVRZENÍ (Úplnost jemnější uniformity)

Nechť Y *je úplný uniformní prostor a* X *je jemnější uniformní prostor mající bázi uniformních pokrytí složených z množin uzavřených v* Y*. Pak* X *je úplný prostor.*

▸ Důkaz

V topologických prostorech byla ukázána souvislost mezi epireflektivními třídami Hausdorffových prostorů a vlastnostmi třídy být uzavřeně dědičná a součinová. Zcela stejný postup dává stejný výsledek i pro třídy Hausdorffových uniformních prostorů, takže podle předchozích vlastností je třída všech Hausdorffových úplných prostorů epireflektivní ve třídě všech Hausdorffových uniformních prostorů. V tomto případě však lze říci více. Nejdříve zadefinujeme pojem obdobný kompaktifikacím.

DEFINICE (Zúplnění)

Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ se nazývá zúplnění (nebo úplný obal) uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$, pokud je úplný a obsahuje $(X, \mathcal{U})$ jako hustý uniformní podprostor.

TVRZENÍ (Existence zúplnění)

Každý uniformní prostor X má zúplnění. Je-li X Hausdorffův, existuje jediné zúplnění prostoru X, které je Hausdorffovo (toto zúplnění je zároveň epireflekcí X v Hausdorffových úplných prostorech).

Důkaz

DEFINICE (Zúplnění)

Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ se nazývá zúplnění (nebo úplný obal) uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$, pokud je úplný a obsahuje $(X, \mathcal{U})$ jako hustý uniformní podprostor.

TVRZENÍ (Existence zúplnění)

Každý uniformní prostor X má zúplnění. Je-li X Hausdorffův, existuje jediné zúplnění prostoru X, které je Hausdorffovo (toto zúplnění je zároveň epireflekcí X v Hausdorffových úplných prostorech).

Důkaz

DEFINICE (Zúplnění)

Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ se nazývá zúplnění (nebo úplný obal) uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$, pokud je úplný a obsahuje $(X, \mathcal{U})$ jako hustý uniformní podprostor.

Zmíněná epireflekce nezaručuje existenci zúplnění (proč?). Postup podobný při dokazování existence kompaktifikací ale existenci zúplnění zaručí. Víme, že každý uniformní prostor se dá vnořit do součinu pseudometrizovatelných uniformních prostorů. Stačí proto ukázat existenci zúplnění pro pseudometrizovatelné prostory, které se dá elegantně ukázat pomocí vnoření do prostoru funkcí za předpokladu, že je známa úplnost $\mathbb{R}$ (klasický přístup nepoužívající této znalosti je uveden ve cvičení).

TVRZENÍ (Existence zúplnění)

Každý uniformní prostor X má zúplnění. Je-li X Hausdorffův, existuje jediné zúplnění prostoru X, které je Hausdorffovo (toto zúplnění je zároveň epireflekcí X v Hausdorffových úplných prostorech).

Důkaz

DEFINICE (Zúplnění)

Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ se nazývá zúplnění (nebo úplný obal) uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$, pokud je úplný a obsahuje $(X, \mathcal{U})$ jako hustý uniformní podprostor.

TVRZENÍ (Existence zúplnění)

Každý uniformní prostor X má zúplnění. Je-li X Hausdorffův, existuje jediné zúplnění prostoru X, které je Hausdorffovo (toto zúplnění je zároveň epireflekcí X v Hausdorffových úplných prostorech).

Důkaz

DEFINICE (Zúplnění)

Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ se nazývá zúplnění (nebo úplný obal) uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$, pokud je úplný a obsahuje $(X, \mathcal{U})$ jako hustý uniformní podprostor.

TVRZENÍ (Existence zúplnění)

Každý uniformní prostor X má zúplnění. Je-li X Hausdorffův, existuje jediné zúplnění prostoru X, které je Hausdorffovo (toto zúplnění je zároveň epireflekcí X v Hausdorffových úplných prostorech).

Důkaz

Slovo „jediné" v předchozím tvrzení znamená „až na izomorfizmus, který je identita na X".

Vrátíme se znovu ke kompaktifikacím, protože tu existuje úzká souvislost mezi nimi a zúplněními.

TVRZENÍ (Kompaktifikace a prekompaktnost)

1. *Každý podprostor kompaktního uniformního prostoru je prekompaktní.*
2. *Zúplnění prekompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
3. *Nechť X je Hausdorffův úplně regulární prostor. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kompaktifikacemi prostoru X a prekompaktními uniformitami vytvářejícími topologii na X.*

▸ Důkaz

Kompaktifikaci prostoru X tedy přiřadíme zúžení na X jediné uniformity kompaktifikace, a prekompaktní uniformitě na X přiřadíme její zúplnění (Hausdorffovo).

Čechova-Stoneova kompaktifikace βX tedy odpovídá nejjemnější prekompaktní uniformitě vytvářející topologii X. Je to prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; často se nazývá Čechova uniformita.
Jednobodové kompaktifikaci odpovídá nejhrubší uniformita vytvářející topologii na X (ta musí být prekompaktní– proč?) – ta tedy existuje právě když existuje jednobodová kompaktifikace (Hausdorffova), což nastává právě když je X lokálně kompaktní.

TVRZENÍ (Kompaktifikace a prekompaktnost)

1. *Každý podprostor kompaktního uniformního prostoru je prekompaktní.*
2. *Zúplnění prekompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
3. *Nechť X je Hausdorffův úplně regulární prostor. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kompaktifikacemi prostoru X a prekompaktními uniformitami vytvářejícími topologii na X.*

Důkaz

Kompaktifikaci prostoru X tedy přiřadíme zúžení na X jediné uniformity kompaktifikace, a prekompaktní uniformitě na X přiřadíme její zúplnění (Hausdorffovo).

Čechova-Stoneova kompaktifikace βX tedy odpovídá nejjemnější prekompaktní uniformitě vytvářející topologii X. Je to prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; často se nazývá Čechova uniformita.
Jednobodové kompaktifikaci odpovídá nejhrubší uniformita vytvářející topologii na X (ta musí být prekompaktní– proč?) – ta tedy existuje právě když existuje jednobodová kompaktifikace (Hausdorffova), což nastává právě když je X lokálně kompaktní.

TVRZENÍ (Kompaktifikace a prekompaktnost)

1. *Každý podprostor kompaktního uniformního prostoru je prekompaktní.*
2. *Zúplnění prekompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
3. *Nechť X je Hausdorffův úplně regulární prostor. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kompaktifikacemi prostoru X a prekompaktními uniformitami vytvářejícími topologii na X.*

▸ Důkaz

Kompaktifikaci prostoru X tedy přiřadíme zúžení na X jediné uniformity kompaktifikace, a prekompaktní uniformitě na X přiřadíme její zúplnění (Hausdorffovo).

Čechova-Stoneova kompaktifikace βX tedy odpovídá nejjemnější prekompaktní uniformitě vytvářející topologii X. Je to prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; často se nazývá Čechova uniformita.
Jednobodové kompaktifikaci odpovídá nejhrubší uniformita vytvářející topologii na X (ta musí být prekompaktní– proč?) – ta tedy existuje právě když existuje jednobodová kompaktifikace (Hausdorffova), což nastává právě když je X lokálně kompaktní.

TVRZENÍ (Kompaktifikace a prekompaktnost)

1. *Každý podprostor kompaktního uniformního prostoru je prekompaktní.*
2. *Zúplnění prekompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
3. *Nechť X je Hausdorffův úplně regulární prostor. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kompaktifikacemi prostoru X a prekompaktními uniformitami vytvářejícími topologii na X.*

Důkaz

Kompaktifikaci prostoru X tedy přiřadíme zúžení na X jediné uniformity kompaktifikace, a prekompaktní uniformitě na X přiřadíme její zúplnění (Hausdorffovo).

Čechova-Stoneova kompaktifikace βX tedy odpovídá nejjemnější prekompaktní uniformitě vytvářející topologii X. Je to prekompaktní modifikace jemné uniformity na X; často se nazývá Čechova uniformita.
Jednobodové kompaktifikaci odpovídá nejhrubší uniformita vytvářející topologii na X (ta musí být prekompaktní– proč?) – ta tedy existuje právě když existuje jednobodová kompaktifikace (Hausdorffova), což nastává právě když je X lokálně kompaktní.