7. ÚPLNÉ A PREKOMPAKTNÍ PROSTORY

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Vlastnosti prekompaktních prostorů)

1. *Uniformní prostor* $(X, \mathcal{U})$ *je prekompaktní právě když pro každé* $U \in \mathcal{U}$ *existuje konečná množina* $K \subset X$ *s vlastností* $U[K] = X$.
2. *Třída všech prekompaktních prostorů je dědičná a součinová, a je uzavřená na stejnoměrně spojité obrazy.*
3. *Třída všech prekompaktních prostorů je bireflektivní ve třídě všech uniformních prostorů (tj., pro každý uniformní prostor* $(X, \mathcal{U})$ *existuje hrubší prekompaktní prostor* $(X, p\mathcal{U})$ *tak, že každé stejnoměrně spojité zobrazení z* $(X, \mathcal{U})$ *do prekompaktního prostoru je stejnoměrně spojité na* $(X, p\mathcal{U})$.
4. *Uniformita* $p\mathcal{U}$ *má za bázi všechna konečná uniformní pokrytí prostoru* $(X, \mathcal{U})$.
5. *Prostor* $(X, p\mathcal{U})$ *vytváří stejnou topologii jako* $(X, \mathcal{U})$.
6. *Je-li zúžení uniformity na hustý podprostor prekompaktní, je původní uniformita prekompaktní.*

Důkaz.

Důkazy prvních tří tvrzení jsou jednoduché. Dokázat 4.tvrzení znamená ukázat, že každé konečné uniformní pokrytí $\mathcal{G}$ má konečné hvězdovité uniformní zjemnění.
Můžeme předpokládat, že $\mathcal{G}$ se skládá ze dvou prvků A, B (viz cvičení). Víme, že $\mathcal{G}$ má dvojité hvězdovité uniformní zjemnění $\mathcal{H}$. Definujme
$H_1 = \bigcup\{H \in \mathcal{H}; \mathrm{star}_{\mathcal{H}} H \subset A \setminus B\}$, $H_2 = \bigcup\{H \in \mathcal{H}; \mathrm{star}_{\mathcal{H}} H \subset B \setminus A\}$, $H_3 = \bigcup\{H \in \mathcal{H}; \mathrm{star}_{\mathcal{H}} H \subset A, \mathrm{star}_{\mathcal{H}} H \cap B \neq \emptyset\}$, $H_4 = \bigcup\{H \in \mathcal{H}; \mathrm{star}_{\mathcal{H}} H \subset B, \mathrm{star}_{\mathcal{H}} H \cap A \neq \emptyset\}$.
Pak pokrytí $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{G}$.
5.tvrzení plyne snadno z předchozího popisu modifikace $p\mathcal{U}$. Pro důkaz 6.tvrzení vezměme uniformitu $\mathcal{U}$ na X, jejíž zúžení na hustou podmnožinu Y je prekompaktní.
Pro $U \in \mathcal{U}$ najdeme $V \in \mathcal{U}$ s vlastností $V \circ V \subset U$ a konečnou množinu $K \subset Y$ tak, že $V[K] \supset Y$. Snadno ukážete, že $U[K] = X$. □

TVRZENÍ (Reálné funkce na prekompaktním prostoru)

Pro uniformní prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

1. *X je prekompaktní.*
2. *Prostor X je slabě vytvořen omezenými reálnými funkcemi.*
3. *Prostor X je slabě vytvořen množinou všech svých stejnoměrně spojitých omezených reálných funkcí.*
4. *$U(X) = U^*(X)$ a X je slabě vytvořen soustavou $U(X)$.*

Důkaz.

Vlastnosti 2, 3 a 4 jsou ekvivalentní a z 4 plyne jednoduše 1, protože vzor konečného pokrytí je konečné pokrytí. Zbývá ukázat $1 \Rightarrow 2$. Nechť je $\mathcal{V}$ konečné uniformní pokrytí X. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{V}$ je dvouprvkové pokrytí, $\mathcal{V} = \{A, B\}$ (viz cvičení). Podle metrizovatelnosti pokrytí existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na X tak, že pokrytí koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{V}$. Zvolme $f(x) = \inf(1, d(x, A \setminus B))$. Pak f je stejnoměrně spojitá funkce na X a její vzory pokrytí $\mathbb{R}$ intervaly o délce $1/2$ zjemňují pokrytí $\mathcal{V}$. □

TVRZENÍ (Vlastnosti cauchyovských filtrů)

1. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$ je cauchyovský právě když pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $x \in X$ tak, že $U[x] \in \mathcal{F}$.*
2. *Filtr $\mathcal{F}$ v uniformním prostoru X je cauchyovský právě když každé uniformní pokrytí obsahuje prvek filtru $\mathcal{F}$.*
3. *Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v $(X, \mathcal{U})$, pak $\{U[F]; F \in \mathcal{F}, U \in \mathcal{U}\}$ je báze minimálního (vzhledem k inkluzi) cauchyovského filtru.*
4. *Hromadný bod cauchyovského filtru je jeho limitou.*
5. *Každý konvergentní filtr v uniformním prostoru je cauchyovský, každý filtr okolí bodu je minimální cauchyovský filtr.*
6. *Je-li zúžení cauchyovského filtru na podprostor opět filtr, je i cauchyovský.*
7. *Stejnoměrně spojitý obraz cauchyovského filtru je cauchyovský filtr.*
8. *Uniformní prostor je prekompaktní právě když je každý jeho ultrafiltr cauchyovský.*

Důkaz.

Až možná na poslední tvrzení jsou všechna ostatní tvrzení jednoduše dokazatelná (většinou za pomoci „trojúhelníkové nerovnosti" v uniformitách). Je-li X prekompaktní a $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na X, tak z každého konečného uniformního pokrytí musí obsahovat jeden prvek, takže je cauchyovský. Opačně, vezměme uniformní pokrytí X, z kterého nelze vybrat konečné podpokrytí a zvolme ultrafiltr, který obsahuje doplňky prvků tohoto pokrytí – tento ultrafiltr není cauchyovský. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti úplných prostorů)

1. *Třída všech úplných prostorů je uzavřeně dědičná a součinová.*
2. *Úplný podprostor Hausdorffova prostoru je v něm uzavřený.*
3. *Každý uniformní prostor je kvocientem úplného prostoru.*
4. *Součet úplných prostorů je úplný.*

Důkaz.

Dokážeme jen součinovost a 3.vlastnost, ostatní plynou snadno z definic. Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr v součinu ΠX_i úplných prostorů, je jeho projekce do každého X_i cauchyovská a tedy konvergentní. Odtud plyne, že i $\mathcal{F}$ je konvergentní.
Každý uniformní prostor je kvocientem součtu prostorů uvedených v dukazu, že každý uniformní prostor je kvocientem uniformně nuldimenzionálního prostoru, protože uvedené prostory jsou úplné. □

TVRZENÍ

1. *Úplně regulární prostor je kompaktní právě když je každá (nebo aspoň jedna) jeho uniformita prekompaktní a úplná.*
2. *Nechť $f : A \to Y$ je stejnoměrně spojité zobrazení podprostoru A uniformního prostoru X do úplného prostoru Y. Pak existuje stejnoměrně spojité rozšíření zobrazení f z $\overline{A}$ do Y.*

Důkaz.

První tvrzení plyne snadno z charakterizací uvedených pojmů pomocí ultrafiltrů. Nechť jsou splněny podmínky druhého tvrzení. Podle věty ze cvičení stačí dokázat existenci spojitého rozšíření a podle charakterizace regularity stačí rozšířit f spojitě na každý bod $x \in \overline{A}$. Soubor $\{U \cap A; a \in \mathcal{U}_x\}$ je cauchyovský na A a jeho obraz pomocí f tedy konverguje v Y k nějakému bodu y. Položí se $\widetilde{f}(x) = y$ a snadno se dokáže, že $\widetilde{f}$ je spojité na $A \cup \{x\}$. □

TVRZENÍ (Úplnost jemnější uniformity)

Nechť Y je úplný uniformní prostor a X je jemnější uniformní prostor mající bázi uniformních pokrytí složených z množin uzavřených v Y. Pak X je úplný prostor.

Důkaz.

Cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ na X konverguje v Y k nějakému bodu y. Vezměme okolí G bodu y v X. Existuje uniformní pokrytí η v X složené z množin uzavřených v Y takové, že $\mathrm{star}_\eta(y) \subset G$. Protože $\mathcal{F}$ je cauchyovský v X, existuje $P \in \eta \cap \mathcal{F}$. Pak $y \in \overline{P}^Y = P$, takže $P \subset G$ a tedy $G \in \mathcal{F}$. □

TVRZENÍ (Existence zúplnění)

Každý uniformní prostor X má zúplnění. Je-li X Hausdorffův, existuje jediné zúplnění prostoru X, které je Hausdorffovo (toto zúplnění je zároveň epireflekcí X v Hausdorffových úplných prostorech).

Důkaz.

Prostor X vnoříme do součinu pseudometrických prostorů, které lze brát úplné (jinak vezmeme jejich zúplnění). Uzávěr X v tomto součinu je úplný prostor.
Je-li X Hausdorfůův, lze v uvedené konstrukci brát metrické prostory místo pseudometrických a dostane se Hausdorffovo zúplnění. Bývá dokázat jeho jednoznačnost. Nechť $i : X \to Y, j : X \to Z$ jsou dvě Hausdorffovy zúplnění prostoru X. Podle tvrzení o rozšíření zobrazení existují stejnoměrně spojitá rozšíření $\widetilde{i} : Z \to Y, \widetilde{j} : Y \to Z$, jejichž složení $Y \to Y$ a $Z \to Z$ jsou identická zobrazení na X, takže i tato složení jsou identická zobrazení. Tedy $\widetilde{i}$ a $\widetilde{j}$ jsou uniformní izomorfizmy. □

TVRZENÍ (Kompaktifikace a prekompaktnost)

1. *Každý podprostor kompaktního uniformního prostoru je prekompaktní.*
2. *Zúplnění prekompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
3. *Nechť X je Hausdorffův úplně regulární prostor. Existuje vzájemně jednoznačný vztah mezi kompaktifikacemi prostoru X a prekompaktními uniformitami vytvářejícími topologii na X.*

Důkaz.

První tvrzení plyne z dědičnosti prekompaktnosti, druhé tvrzení z charakterizace prekompaktnosti pomocí uniformně diskrétních podmnožin. Zbývá třetí tvrzení. Každé kompaktifikaci prostoru X přiřadíme zúžení jeho jediné (prekompaktní) uniformity na podprostor X a každé prekompaktní uniformitě na X přiřadíme jeho zúplnění. Vzájemná jednoznačnost těchto přiřazení je snadná (v jednom směru se použije jednoznačnost zúplnění). □