OBECNÁ TOPOLOGIE

7. ÚPLNÉ A PREKOMPAKTNÍ PROSTORY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Na topologickém prostoru reálných čísel existuje kompatibilní úplná uniformita i kompatibilní totálně omezená uniformita.

Neexistuje na něm však uniformita, jež by byla zároveň úplná i totálně omezená, protože prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní.

Máme-li na množině X definovanou totálně omezenou uniformitu, pak každá hrubší uniformita je již také totálně omezená.

Podobně pokud máme na topologickém prostoru X definovanou úplnou uniformitu, pak každá jemnější uniformita (generující stejnou topologii!) je také úplná.

Na spočetné množině ω definujme uniformitu $\mathcal{U}$ v závislosti na nějakém netriviálním ultrafiltru $\mathcal{F}$ tak, že bázi okolí diagonály budou tvořit množiny tvaru $(M \times M) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.

Na topologickém prostoru reálných čísel existuje kompatibilní úplná uniformita i kompatibilní totálně omezená uniformita.

Neexistuje na něm však uniformita, jež by byla zároveň úplná i totálně omezená, protože prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní.

Máme-li na množině X definovanou totálně omezenou uniformitu, pak každá hrubší uniformita je již také totálně omezená.

Podobně pokud máme na topologickém prostoru X definovanou úplnou uniformitu, pak každá jemnější uniformita (generující stejnou topologii!) je také úplná.

Na spočetné množině ω definujme uniformitu $\mathcal{U}$ v závislosti na nějakém netriviálním ultrafiltru $\mathcal{F}$ tak, že bázi okolí diagonály budou tvořit množiny tvaru $(M \times M) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.

Na topologickém prostoru reálných čísel existuje kompatibilní úplná uniformita i kompatibilní totálně omezená uniformita.

Neexistuje na něm však uniformita, jež by byla zároveň úplná i totálně omezená, protože prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní.

Máme-li na množině X definovanou totálně omezenou uniformitu, pak každá hrubší uniformita je již také totálně omezená.

Podobně pokud máme na topologickém prostoru X definovanou úplnou uniformitu, pak každá jemnější uniformita (generující stejnou topologii!) je také úplná.

Na spočetné množině ω definujme uniformitu $\mathcal{U}$ v závislosti na nějakém netriviálním ultrafiltru $\mathcal{F}$ tak, že bázi okolí diagonály budou tvořit množiny tvaru $(M \times M) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.

Na topologickém prostoru reálných čísel existuje kompatibilní úplná uniformita i kompatibilní totálně omezená uniformita.

Neexistuje na něm však uniformita, jež by byla zároveň úplná i totálně omezená, protože prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní.

Máme-li na množině X definovanou totálně omezenou uniformitu, pak každá hrubší uniformita je již také totálně omezená.

Podobně pokud máme na topologickém prostoru X definovanou úplnou uniformitu, pak každá jemnější uniformita (generující stejnou topologii!) je také úplná.

Na spočetné množině ω definujme uniformitu $\mathcal{U}$ v závislosti na nějakém netriviálním ultrafiltru $\mathcal{F}$ tak, že bázi okolí diagonály budou tvořit množiny tvaru $(M \times M) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.

Na topologickém prostoru reálných čísel existuje kompatibilní úplná uniformita i kompatibilní totálně omezená uniformita.

Neexistuje na něm však uniformita, jež by byla zároveň úplná i totálně omezená, protože prostor $\mathbb{R}$ není kompaktní.

Máme-li na množině X definovanou totálně omezenou uniformitu, pak každá hrubší uniformita je již také totálně omezená.

Podobně pokud máme na topologickém prostoru X definovanou úplnou uniformitu, pak každá jemnější uniformita (generující stejnou topologii!) je také úplná.

Na spočetné množině ω definujme uniformitu $\mathcal{U}$ v závislosti na nějakém netriviálním ultrafiltru $\mathcal{F}$ tak, že bázi okolí diagonály budou tvořit množiny tvaru $(M \times M) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.

Uveďme si nějaké vlastnosti tohoto prostoru.

Uveďme si nějaké vlastnosti tohoto prostoru.

Vlastnosti

1. Topologie generovaná uniformitou $\mathcal{U}$ je diskrétní.
2. Filtr $\mathcal{F}$ je cauchyovský, ale není konvergentní. Prostor $(\omega, \mathcal{U})$ proto není úplný.
3. Zúplnění prostoru $(\omega, \mathcal{U})$ získáme přidáním jednoho bodu ∞. Na množinu $\omega \cup \{\infty\}$ dáme uniformitu s bazí $(M \cup \{\infty\}) \times (M \cup \{\infty\}) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.
4. Uniformní prostor $(\omega, \mathcal{U})$ není metrizovatelný (zatímco topologie generovaná touto uniformitou metrizovatelná je).

Uveďme si nějaké vlastnosti tohoto prostoru.

Vlastnosti

1. Topologie generovaná uniformitou $\mathcal{U}$ je diskrétní.
2. Filtr $\mathcal{F}$ je cauchyovský, ale není konvergentní. Prostor $(\omega, \mathcal{U})$ proto není úplný.
3. Zúplnění prostoru $(\omega, \mathcal{U})$ získáme přidáním jednoho bodu ∞. Na množinu $\omega \cup \{\infty\}$ dáme uniformitu s bazí $(M \cup \{\infty\}) \times (M \cup \{\infty\}) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.
4. Uniformní prostor $(\omega, \mathcal{U})$ není metrizovatelný (zatímco topologie generovaná touto uniformitou metrizovatelná je).

Uveďme si nějaké vlastnosti tohoto prostoru.

Vlastnosti

1. Topologie generovaná uniformitou $\mathcal{U}$ je diskrétní.
2. Filtr $\mathcal{F}$ je cauchyovský, ale není konvergentní. Prostor $(\omega, \mathcal{U})$ proto není úplný.
3. Zúplnění prostoru $(\omega, \mathcal{U})$ získáme přidáním jednoho bodu ∞. Na množinu $\omega \cup \{\infty\}$ dáme uniformitu s bazí $(M \cup \{\infty\}) \times (M \cup \{\infty\}) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.
4. Uniformní prostor $(\omega, \mathcal{U})$ není metrizovatelný (zatímco topologie generovaná touto uniformitou metrizovatelná je).

Uveďme si nějaké vlastnosti tohoto prostoru.

Vlastnosti

1. Topologie generovaná uniformitou $\mathcal{U}$ je diskrétní.
2. Filtr $\mathcal{F}$ je cauchyovský, ale není konvergentní. Prostor $(\omega, \mathcal{U})$ proto není úplný.
3. Zúplnění prostoru $(\omega, \mathcal{U})$ získáme přidáním jednoho bodu ∞. Na množinu $\omega \cup \{\infty\}$ dáme uniformitu s bazí $(M \cup \{\infty\}) \times (M \cup \{\infty\}) \cup \Delta\omega$ pro $M \in \mathcal{F}$.
4. Uniformní prostor $(\omega, \mathcal{U})$ není metrizovatelný (zatímco topologie generovaná touto uniformitou metrizovatelná je).

Zúplnění uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ můžeme vyrobit následující elegantní konstrukcí.

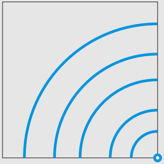
Označme jako Y množinu všech minimálních cauchyovských filtrů na X. Je důležité si uvědomit, že minimální cauchyovské filtry jsou ty, které obsahují pouze v jistém smyslu velké množiny.

Zúplnění uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ můžeme vyrobit následující elegantní konstrukcí.

Označme jako Y množinu všech minimálních cauchyovských filtrů na X. Je důležité si uvědomit, že minimální cauchyovské filtry jsou ty, které obsahují pouze v jistém smyslu velké množiny.

Minimální cauchyovský filtr

X



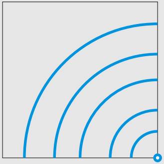
Nějaký cauchyovský filtr

X

Díky tomu, že uvažujeme pouze minimální filtry, nemusíme některé prvky množiny Y slepovat, jako tomu bylo v případě cauchyovských usměrněných souborů.

Minimální cauchyovský filtr

X



Nějaký cauchyovský filtr

X

Díky tomu, že uvažujeme pouze minimální filtry, nemusíme některé prvky množiny Y slepovat, jako tomu bylo v případě cauchyovských usměrněných souborů.

Uniformitu $\mathcal{V}$ na Y definujeme pomocí báze okolí diagonály, kterou budou tvořit množiny

$$\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \text{existuje } F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 : F \times F \subset U\}$$

za každé $U \in \mathcal{U}$.

Původní prostor X se do Y vnoří tím nejpřirozenějším způsobem. Bodu x přiřadíme cauchyovský filtr všech (ne nutně otevřených) okolí tohoto bodu.

A jak ověříme úplnost výsledného prostoru $(Y, \mathcal{V})$? K tomu nám dobře poslouží následující pozorování.

LEMMA (Ověřování úplnosti na husté podmnožině)

Je-li $(Y, \mathcal{V})$ uniformní prostor a X jeho hustá podmnožina taková, že každý cauchyovských filtr v X má v prostoru Y hromadný bod, pak je již prostor Y úplný.

Důkaz.

K důkazu je třeba si rozmyslet, že pro libovolný cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ v prostoru Y je $\mathcal{F}' = \{V[F] : V \in \mathcal{V}, F \in \mathcal{F}\}$ minimální cauchyovský filtr obsažený v $\mathcal{F}$ a $\{F \cap X : F \in \mathcal{F}'\}$ je cauchyovský filtr v X. Ten má podle předpokladu hromadný bod, který je nutně hromadným bodem původního filtru $\mathcal{F}$. □

Uniformitu $\mathcal{V}$ na Y definujeme pomocí báze okolí diagonály, kterou budou tvořit množiny

$$\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \text{existuje } F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 : F \times F \subset U\}$$

za každé $U \in \mathcal{U}$.
Původní prostor X se do Y vnoří tím nejpřirozenějším způsobem. Bodu x přiřadíme cauchyovský filtr všech (ne nutně otevřených) okolí tohoto bodu.

A jak ověříme úplnost výsledného prostoru $(Y, \mathcal{V})$? K tomu nám dobře poslouží následující pozorování.

LEMMA (Ověřování úplnosti na husté podmnožině)

Je-li $(Y, \mathcal{V})$ uniformní prostor a X jeho hustá podmnožina taková, že každý cauchyovských filtr v X má v prostoru Y hromadný bod, pak je již prostor Y úplný.

Důkaz.

K důkazu je třeba si rozmyslet, že pro libovolný cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ v prostoru Y je $\mathcal{F}' = \{V[F] : V \in \mathcal{V}, F \in \mathcal{F}\}$ minimální cauchyovský filtr obsažený v $\mathcal{F}$ a $\{F \cap X : F \in \mathcal{F}'\}$ je cauchyovský filtr v X. Ten má podle předpokladu hromadný bod, který je nutně hromadným bodem původního filtru $\mathcal{F}$. □

Uniformitu $\mathcal{V}$ na Y definujeme pomocí báze okolí diagonály, kterou budou tvořit množiny

$$\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \text{existuje } F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 : F \times F \subset U\}$$

za každé $U \in \mathcal{U}$.
Původní prostor X se do Y vnoří tím nejpřirozenějším způsobem. Bodu x přiřadíme cauchyovský filtr všech (ne nutně otevřených) okolí tohoto bodu.

A jak ověříme úplnost výsledného prostoru $(Y, \mathcal{V})$? K tomu nám dobře poslouží následující pozorování.

LEMMA (Ověřování úplnosti na husté podmnožině)

Je-li $(Y, \mathcal{V})$ uniformní prostor a X jeho hustá podmnožina taková, že každý cauchyovských filtr v X má v prostoru Y hromadný bod, pak je již prostor Y úplný.

Důkaz.

K důkazu je třeba si rozmyslet, že pro libovolný cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ v prostoru Y je $\mathcal{F}' = \{V[F] : V \in \mathcal{V}, F \in \mathcal{F}\}$ minimální cauchyovský filtr obsažený v $\mathcal{F}$ a $\{F \cap X : F \in \mathcal{F}'\}$ je cauchyovský filtr v X. Ten má podle předpokladu hromadný bod, který je nutně hromadným bodem původního filtru $\mathcal{F}$. $\square$

Uniformitu $\mathcal{V}$ na Y definujeme pomocí báze okolí diagonály, kterou budou tvořit množiny

$$\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \text{existuje } F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 : F \times F \subset U\}$$

za každé $U \in \mathcal{U}$.
Původní prostor X se do Y vnoří tím nejpřirozenějším způsobem. Bodu x přiřadíme cauchyovský filtr všech (ne nutně otevřených) okolí tohoto bodu.

A jak ověříme úplnost výsledného prostoru $(Y, \mathcal{V})$? K tomu nám dobře poslouží následující pozorování.

LEMMA (Ověřování úplnosti na husté podmnožině)

Je-li $(Y, \mathcal{V})$ uniformní prostor a X jeho hustá podmnožina taková, že každý cauchyovských filtr v X má v prostoru Y hromadný bod, pak je již prostor Y úplný.

Důkaz.

K důkazu je třeba si rozmyslet, že pro libovolný cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ v prostoru Y je $\mathcal{F}' = \{V[F] : V \in \mathcal{V}, F \in \mathcal{F}\}$ minimální cauchyovský filtr obsažený v $\mathcal{F}$ a $\{F \cap X : F \in \mathcal{F}'\}$ je cauchyovský filtr v X. Ten má podle předpokladu hromadný bod, který je nutně hromadným bodem původního filtru $\mathcal{F}$. □

Uniformitu $\mathcal{V}$ na Y definujeme pomocí báze okolí diagonály, kterou budou tvořit množiny

$$\{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) : \text{existuje } F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 : F \times F \subset U\}$$

za každé $U \in \mathcal{U}$.
Původní prostor X se do Y vnoří tím nejpřirozenějším způsobem. Bodu x přiřadíme cauchyovský filtr všech (ne nutně otevřených) okolí tohoto bodu.

A jak ověříme úplnost výsledného prostoru $(Y, \mathcal{V})$? K tomu nám dobře poslouží následující pozorování.

LEMMA (Ověřování úplnosti na husté podmnožině)

Je-li $(Y, \mathcal{V})$ uniformní prostor a X jeho hustá podmnožina taková, že každý cauchyovských filtr v X má v prostoru Y hromadný bod, pak je již prostor Y úplný.

Důkaz.

K důkazu je třeba si rozmyslet, že pro libovolný cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ v prostoru Y je $\mathcal{F}' = \{V[F] : V \in \mathcal{V}, F \in \mathcal{F}\}$ minimální cauchyovský filtr obsažený v $\mathcal{F}$ a $\{F \cap X : F \in \mathcal{F}'\}$ je cauchyovský filtr v X. Ten má podle předpokladu hromadný bod, který je nutně hromadným bodem původního filtru $\mathcal{F}$. $\square$

Z uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ můžeme přirozeným způsobem vyrobit jiný – takzvaný hyperprostor. Budeme ho značit $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$.

Jeho nosnou množinu budou tvořit všechny neprázdné uzavřené podmnožiny X (vzhledem k topologii generované uniformitou $\mathcal{U}$). Pro okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$ definujeme nové okolí diagonály

$$U' = \{(E,F) \in 2^X \times 2^X : E \subset U[F], F \subset U[E]\}.$$

Množiny U' pro $U \in \mathcal{U}$ tvoří bázi uniformity na 2^X.

Jaký je vztah prostoru X a jeho hyperprostoru 2^X? Pokud je prostor X Hausdorffův, můžeme definovat zobrazení $f : X \to 2^X$, které prvku x přiřadí jednobodovou (uzavřenou) množinu $\{x\}$. Zobrazení f i jeho inverze jsou stejnoměrně spojitá a obrazem je uzavřená podmnožina hyperprostoru. Z tohoto vztahu lze odvodit, které vlastnosti hyperprostoru 2^X se přenesou na X. Zajímavější je většinou přenášení vlastností v opačném směru.

Hyperprostory a prekompaktnost

Pokud je prostor $(X,\mathcal{U})$ totálně omezený, je také jeho hyperprostor $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ totálně omezený.

Máme-li zadané okolí diagonály U', kde $U \in \mathcal{U}$, najdeme nejprve $V \in \mathcal{U}$ a konečnou množinu $K \subset X$, že $V[K] = X$. Pak si stačí jen uvědomit, že neprázdných podmnožin K je jen konečně mnoho a že pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$ je $U'(U[F] \cap K) \ni F$.

Z uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ můžeme přirozeným způsobem vyrobit jiný – takzvaný hyperprostor. Budeme ho značit $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$.

Jeho nosnou množinu budou tvořit všechny neprázdné uzavřené podmnožiny X (vzhledem k topologii generované uniformitou $\mathcal{U}$). Pro okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$ definujeme nové okolí diagonály

$$U' = \{(E, F) \in 2^X \times 2^X : E \subset U[F], F \subset U[E]\}.$$

Množiny U' pro $U \in \mathcal{U}$ tvoří bázi uniformity na 2^X.

Jaký je vztah prostoru X a jeho hyperprostoru 2^X? Pokud je prostor X Hausdorffův, můžeme definovat zobrazení $f : X \to 2^X$, které prvku x přiřadí jednobodovou (uzavřenou) množinu $\{x\}$. Zobrazení f i jeho inverze jsou stejnoměrně spojitá a obrazem je uzavřená podmnožina hyperprostoru. Z tohoto vztahu lze odvodit, které vlastnosti hyperprostoru 2^X se přenesou na X. Zajímavější je většinou přenášení vlastností v opačném směru.

Hyperprostory a prekompaktnost

Pokud je prostor $(X, \mathcal{U})$ totálně omezený, je také jeho hyperprostor $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ totálně omezený.

Máme-li zadané okolí diagonály U', kde $U \in \mathcal{U}$, najdeme nejprve $V \in \mathcal{U}$ a konečnou množinu $K \subset X$, že $V[K] = X$. Pak si stačí jen uvědomit, že neprázdných podmnožin K je jen konečně mnoho a že pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$ je $U'(U[F] \cap K) \ni F$.

Z uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ můžeme přirozeným způsobem vyrobit jiný – takzvaný hyperprostor. Budeme ho značit $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$.

Jeho nosnou množinu budou tvořit všechny neprázdné uzavřené podmnožiny X (vzhledem k topologii generované uniformitou $\mathcal{U}$). Pro okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$ definujeme nové okolí diagonály

$$U' = \{(E,F) \in 2^X \times 2^X : E \subset U[F], F \subset U[E]\}.$$

Množiny U' pro $U \in \mathcal{U}$ tvoří bázi uniformity na 2^X.

Jaký je vztah prostoru X a jeho hyperprostoru 2^X? Pokud je prostor X Hausdorffův, můžeme definovat zobrazení $f : X \to 2^X$, které prvku x přiřadí jednobodovou (uzavřenou) množinu $\{x\}$. Zobrazení f i jeho inverze jsou stejnoměrně spojitá a obrazem je uzavřená podmnožina hyperprostoru. Z tohoto vztahu lze odvodit, které vlastnosti hyperprostoru 2^X se přenesou na X. Zajímavější je většinou přenášení vlastností v opačném směru.

Hyperprostory a prekompaktnost

Pokud je prostor $(X,\mathcal{U})$ totálně omezený, je také jeho hyperprostor $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ totálně omezený.

Máme-li zadané okolí diagonály U', kde $U \in \mathcal{U}$, najdeme nejprve $V \in \mathcal{U}$ a konečnou množinu $K \subset X$, že $V[K] = X$. Pak si stačí jen uvědomit, že neprázdných podmnožin K je jen konečně mnoho a že pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$ je $U'\big(U[F] \cap K\big) \ni F$.

Z uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ můžeme přirozeným způsobem vyrobit jiný – takzvaný hyperprostor. Budeme ho značit $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$.

Jeho nosnou množinu budou tvořit všechny neprázdné uzavřené podmnožiny X (vzhledem k topologii generované uniformitou $\mathcal{U}$). Pro okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$ definujeme nové okolí diagonály

$$U' = \{(E, F) \in 2^X \times 2^X : E \subset U[F], F \subset U[E]\}.$$

Množiny U' pro $U \in \mathcal{U}$ tvoří bázi uniformity na 2^X.

Jaký je vztah prostoru X a jeho hyperprostoru 2^X? Pokud je prostor X Hausdorffův, můžeme definovat zobrazení $f : X \to 2^X$, které prvku x přiřadí jednobodovou (uzavřenou) množinu $\{x\}$. Zobrazení f i jeho inverze jsou stejnoměrně spojitá a obrazem je uzavřená podmnožina hyperprostoru. Z tohoto vztahu lze odvodit, které vlastnosti hyperprostoru 2^X se přenesou na X. Zajímavější je většinou přenášení vlastností v opačném směru.

Hyperprostory a prekompaktnost

Pokud je prostor $(X, \mathcal{U})$ totálně omezený, je také jeho hyperprostor $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ totálně omezený.

Máme-li zadané okolí diagonály U', kde $U \in \mathcal{U}$, najdeme nejprve $V \in \mathcal{U}$ a konečnou množinu $K \subset X$, že $V[K] = X$. Pak si stačí jen uvědomit, že neprázdných podmnožin K je jen konečně mnoho a že pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$ je $U'(U[F] \cap K) \ni F$.

Z uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ můžeme přirozeným způsobem vyrobit jiný – takzvaný hyperprostor. Budeme ho značit $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$.

Jeho nosnou množinu budou tvořit všechny neprázdné uzavřené podmnožiny X (vzhledem k topologii generované uniformitou $\mathcal{U}$). Pro okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$ definujeme nové okolí diagonály

$$U' = \{(E, F) \in 2^X \times 2^X : E \subset U[F], F \subset U[E]\}.$$

Množiny U' pro $U \in \mathcal{U}$ tvoří bázi uniformity na 2^X.

Jaký je vztah prostoru X a jeho hyperprostoru 2^X? Pokud je prostor X Hausdorffův, můžeme definovat zobrazení $f : X \to 2^X$, které prvku x přiřadí jednobodovou (uzavřenou) množinu $\{x\}$. Zobrazení f i jeho inverze jsou stejnoměrně spojitá a obrazem je uzavřená podmnožina hyperprostoru. Z tohoto vztahu lze odvodit, které vlastnosti hyperprostoru 2^X se přenesou na X. Zajímavější je většinou přenášení vlastností v opačném směru.

Hyperprostory a prekompaktnost

Pokud je prostor $(X, \mathcal{U})$ totálně omezený, je také jeho hyperprostor $(2^X, 2^{\mathcal{U}})$ totálně omezený.

Máme-li zadané okolí diagonály U', kde $U \in \mathcal{U}$, najdeme nejprve $V \in \mathcal{U}$ a konečnou množinu $K \subset X$, že $V[K] = X$. Pak si stačí jen uvědomit, že neprázdných podmnožin K je jen konečně mnoho a že pro každou uzavřenou neprázdnou $F \subset X$ je $U'\big(U[F] \cap K\big) \ni F$.

Některé pojmy se nepřenáší na celý hyperprostor, ale jen na jeho speciální část. Ta je tvořená všemi neprázdnými kompaktními podmnožinami původního prostoru.

TVRZENÍ

Označme jako $Z(X)$ podprostor hyperprostoru 2^X tvořený všemi neprázdnými kompaktními množinami v prostoru X. Pokud je prostor X úplný, pak je také prostor $Z(X)$ úplný.

Důkaz.

K ověření úplnosti potřebujeme ukázat, že každý cauchyovský usměrněný soubor K_α pro $\alpha \in A$ má limitu. V našem případě jsou K_α kompaktní podmnožiny X. Ukážeme, že limitou je kompakt

$$K = \bigcap_{\alpha \in A} \overline{\bigcup_{\beta > \alpha} K_\beta}.$$

Jak ověříme, že K je kompakt? Víme, že jde o uzavřený podprostor úplného prostoru, tedy K je úplný. Ještě potřebujeme ověřit totální omezenost. K tomu budeme uvažovat libovolné okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$. Najdeme $V \in \mathcal{U}$, aby $V \circ V \circ V \subset U$. Z cauchyovskosti najdeme index α_0 od kterého počínaje máme $(K_\alpha, K_{\alpha_0}) \in V'$. Kompakt K_{α_0} je již totálně omezený a proto můžeme najít konečnou množinu $S \subset X$, aby $V[S] \supset K_{\alpha_0}$. Z cauchyovskosti dané posloupnosti obdržíme pro každé $\alpha \geq \alpha_0$ inkluze $V \circ V[S] \supset V[K_{\alpha_0}] \supset K_\alpha$. To můžeme přepsat do tvaru $V \circ V[S] \supset \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} K_\alpha$. Když na předchozí inkluze vypustíme ještě jednou relaci V dostaneme

Některé pojmy se nepřenáší na celý hyperprostor, ale jen na jeho speciální část. Ta je tvořená všemi neprázdnými kompaktními podmnožinami původního prostoru.

TVRZENÍ

Označme jako $Z(X)$ podprostor hyperprostoru 2^X tvořený všemi neprázdnými kompaktními množinami v prostoru X. Pokud je prostor X úplný, pak je také prostor $Z(X)$ úplný.

Důkaz.

K ověření úplnosti potřebujeme ukázat, že každý cauchyovský usměrněný soubor K_α pro $\alpha \in A$ má limitu. V našem případě jsou K_α kompaktní podmnožiny X. Ukážeme, že limitou je kompakt

$$K = \bigcap_{\alpha \in A} \overline{\bigcup_{\beta > \alpha} K_\beta}.$$

Jak ověříme, že K je kompakt? Víme, že jde o uzavřený podprostor úplného prostoru, tedy K je úplný. Ještě potřebujeme ověřit totální omezenost. K tomu budeme uvažovat libovolné okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$. Najdeme $V \in \mathcal{U}$, aby $V \circ V \circ V \subset U$. Z cauchyovskosti najdeme index α_0 od kterého počínaje máme $(K_\alpha, K_{\alpha_0}) \in V'$. Kompakt K_{α_0} je již totálně omezený a proto můžeme najít konečnou množinu $S \subset X$, aby $V[S] \supset K_{\alpha_0}$. Z cauchyovskosti dané posloupnosti obdržíme pro každé $\alpha \geq \alpha_0$ inkluze $V \circ V[S] \supset V[K_{\alpha_0}] \supset K_\alpha$. To můžeme přepsat do tvaru $V \circ V[S] \supset \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} K_\alpha$. Když na předchozí inkluze vypustíme ještě jednou relaci V dostaneme

Některé pojmy se nepřenáší na celý hyperprostor, ale jen na jeho speciální část. Ta je tvořená všemi neprázdnými kompaktními podmnožinami původního prostoru.

TVRZENÍ

Označme jako $Z(X)$ podprostor hyperprostoru 2^X tvořený všemi neprázdnými kompaktními množinami v prostoru X. Pokud je prostor X úplný, pak je také prostor $Z(X)$ úplný.

Důkaz.

K ověření úplnosti potřebujeme ukázat, že každý cauchyovský usměrněný soubor K_α pro $\alpha \in A$ má limitu. V našem případě jsou K_α kompaktní podmnožiny X. Ukážeme, že limitou je kompakt

$$K = \bigcap_{\alpha \in A} \overline{\bigcup_{\beta > \alpha} K_\beta}.$$

Jak ověříme, že K je kompakt? Víme, že jde o uzavřený podprostor úplného prostoru, tedy K je úplný. Ještě potřebujeme ověřit totální omezenost. K tomu budeme uvažovat libovolné okolí diagonály $U \in \mathcal{U}$. Najdeme $V \in \mathcal{U}$, aby $V \circ V \circ V \subset U$. Z cauchyovskosti najdeme index α_0 od kterého počínaje máme $(K_\alpha, K_{\alpha_0}) \in V'$. Kompakt K_{α_0} je již totálně omezený a proto můžeme najít konečnou množinu $S \subset X$, aby $V[S] \supset K_{\alpha_0}$. Z cauchyovskosti dané posloupnosti obdržíme pro každé $\alpha \geq \alpha_0$ inkluze $V \circ V[S] \supset V[K_{\alpha_0}] \supset K_\alpha$. To můžeme přepsat do tvaru $V \circ V[S] \supset \bigcup_{\alpha \geq \alpha_0} K_\alpha$. Když na předchozí inkluze vypustíme ještě jednou relaci V dostaneme

Pro prvočíslo p je p-adická uniformita $\mathcal{U}_p$ na celých číslech $\mathbb{Z}$ definována pomocí báze, kterou tvoří okolí diagonály tvaru $U_k = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^k | (a - b)\}$ pro $k \in \omega$.

Takto vzniklý uniformní prostor je metrizovatelný. Stačí definovat metriku $d(a, b) = \inf\{p^{-k} : p^k | (a - b)\}$. Zřejmě platí, že $U_k = \{(a, b) : d(a, b) \leq p^{-k}\}$.

Vlastnosti

Pro prvočíslo p je p-adická uniformita $\mathcal{U}_p$ na celých číslech $\mathbb{Z}$ definována pomocí báze, kterou tvoří okolí diagonály tvaru $U_k = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^k | (a - b)\}$ pro $k \in \omega$.

Takto vzniklý uniformní prostor je metrizovatelný. Stačí definovat metriku $d(a, b) = \inf\{p^{-k} : p^k | (a - b)\}$. Zřejmě platí, že $U_k = \{(a, b) : d(a, b) \leq p^{-k}\}$.

Vlastnosti

Pro prvočíslo p je p-adická uniformita $\mathcal{U}_p$ na celých číslech $\mathbb{Z}$ definována pomocí báze, kterou tvoří okolí diagonály tvaru $U_k = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^k | (a-b)\}$ pro $k \in \omega$.
Takto vzniklý uniformní prostor je metrizovatelný. Stačí definovat metriku $d(a,b) = \inf\{p^{-k} : p^k | (a-b)\}$. Zřejmě platí, že $U_k = \{(a,b) : d(a,b) \leq p^{-k}\}$.

Vlastnosti

1. Pro různá prvočísla p a q jsou uniformity $\mathcal{U}_p$ a $\mathcal{U}_q$ různé. Dokonce určují na $\mathbb{Z}$ různé topologie. Například proto, že posloupnost $(p^n : n \in \omega)$ konverguje k nule v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_p$ nikoli však v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_q$.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ není úplný. Posloupnost $1, 1+p, 1+p+p^2, \ldots$ je cauchyovská, není ale konvergentní.
3. Tento uniformní prostor je totálně omezený, protože pro libovolné $k \in \omega$ najdeme konečnou množinu $K = \{0, 1, \ldots, p^k\}$, pro kterou $U_k[K] = \mathbb{Z}$.

Zúplnění $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ bude tedy kompaktní. Je možné toto zúplnění nějak přímočaře popsat? Ukážeme, že ano.

Pro prvočíslo p je p-adická uniformita $\mathcal{U}_p$ na celých číslech $\mathbb{Z}$ definována pomocí báze, kterou tvoří okolí diagonály tvaru $U_k = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^k | (a-b)\}$ pro $k \in \omega$.
Takto vzniklý uniformní prostor je metrizovatelný. Stačí definovat metriku $d(a,b) = \inf\{p^{-k} : p^k | (a-b)\}$. Zřejmě platí, že $U_k = \{(a,b) : d(a,b) \leq p^{-k}\}$.

Vlastnosti

1. Pro různá prvočísla p a q jsou uniformity $\mathcal{U}_p$ a $\mathcal{U}_q$ různé. Dokonce určují na $\mathbb{Z}$ různé topologie. Například proto, že posloupnost $(p^n : n \in \omega)$ konverguje k nule v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_p$ nikoli však v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_q$.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ není úplný. Posloupnost $1, 1+p, 1+p+p^2, \dots$ je cauchyovská, není ale konvergentní.
3. Tento uniformní prostor je totálně omezený, protože pro libovolné $k \in \omega$ najdeme konečnou množinu $K = \{0, 1, \dots, p^k\}$, pro kterou $U_k[K] = \mathbb{Z}$.

Zúplnění $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ bude tedy kompaktní. Je možné toto zúplnění nějak přímočaře popsat? Ukážeme, že ano.

Pro prvočíslo p je p-adická uniformita $\mathcal{U}_p$ na celých číslech $\mathbb{Z}$ definována pomocí báze, kterou tvoří okolí diagonály tvaru $U_k = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^k|(a - b)\}$ pro $k \in \omega$.
Takto vzniklý uniformní prostor je metrizovatelný. Stačí definovat metriku $d(a, b) = \inf\{p^{-k} : p^k|(a - b)\}$. Zřejmě platí, že $U_k = \{(a, b) : d(a, b) \leq p^{-k}\}$.

Vlastnosti

1. Pro různá prvočísla p a q jsou uniformity $\mathcal{U}_p$ a $\mathcal{U}_q$ různé. Dokonce určují na $\mathbb{Z}$ různé topologie. Například proto, že posloupnost $(p^n : n \in \omega)$ konverguje k nule v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_p$ nikoli však v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_q$.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ není úplný. Posloupnost $1, 1 + p, 1 + p + p^2, \ldots$ je cauchyovská, není ale konvergentní.
3. Tento uniformní prostor je totálně omezený, protože pro libovolné $k \in \omega$ najdeme konečnou množinu $K = \{0, 1, \ldots, p^k\}$, pro kterou $U_k[K] = \mathbb{Z}$.

Zúplnění $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ bude tedy kompaktní. Je možné toto zúplnění nějak přímočaře popsat? Ukážeme, že ano.

Pro prvočíslo p je p-adická uniformita $\mathcal{U}_p$ na celých číslech $\mathbb{Z}$ definována pomocí báze, kterou tvoří okolí diagonály tvaru $U_k = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p^k | (a-b)\}$ pro $k \in \omega$.
Takto vzniklý uniformní prostor je metrizovatelný. Stačí definovat metriku $d(a,b) = \inf\{p^{-k} : p^k|(a-b)\}$. Zřejmě platí, že $U_k = \{(a,b) : d(a,b) \leq p^{-k}\}$.

Vlastnosti

1. Pro různá prvočísla p a q jsou uniformity $\mathcal{U}_p$ a $\mathcal{U}_q$ různé. Dokonce určují na $\mathbb{Z}$ různé topologie. Například proto, že posloupnost $(p^n : n \in \omega)$ konverguje k nule v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_p$ nikoli však v topologii určené uniformitou $\mathcal{U}_q$.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ není úplný. Posloupnost $1, 1+p, 1+p+p^2, \ldots$ je cauchyovská, není ale konvergentní.
3. Tento uniformní prostor je totálně omezený, protože pro libovolné $k \in \omega$ najdeme konečnou množinu $K = \{0, 1, \ldots, p^k\}$, pro kterou $U_k[K] = \mathbb{Z}$.

Zúplnění $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ bude tedy kompaktní. Je možné toto zúplnění nějak přímočaře popsat? Ukážeme, že ano.

Podívejme se na prostor p^ω, kde p je p-prvkový diskrétní prostor. Mocnina p^ω je kompaktní a existuje na ní tedy právě jedna uniformita. Uvažujme podprostor $Y \subset p^\omega$, který obsahuje pouze takové posloupnosti, které jsou jen na konečně mnoha místech různé od nuly nebo jen na konečně mnoha místech různé od $p-1$.

Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ a prostor Y (s uniformitou zděděnou z p^ω) můžeme ztotožnit pomocí izomorfismu $\varphi : Y \to \mathbb{Z}$ splňujícího

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{k} a_n p^n$$

pokud $0 = a_k = a_{k+1} = \ldots$

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{k} a_n p^n - p^{k+1}$$

pokud $p - 1 = a_k = a_{k+1} = \ldots$.
Protože je navíc Y husté v p^ω, můžeme prostor p^ω považovat za zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$.
Posloupnost $1, 1+p, 1+p+p^2, \ldots$ v tomto zúplnění konverguje k prvku $(1, 1, \ldots) \in p^\omega$.

Podívejme se na prostor p^ω, kde p je p-prvkový diskrétní prostor. Mocnina p^ω je kompaktní a existuje na ní tedy právě jedna uniformita. Uvažujme podprostor $Y \subset p^\omega$, který obsahuje pouze takové posloupnosti, které jsou jen na konečně mnoha místech různé od nuly nebo jen na konečně mnoha místech různé od $p-1$.

Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ a prostor Y (s uniformitou zděděnou z p^ω) můžeme ztotožnit pomocí izomorfismu $\varphi : Y \to \mathbb{Z}$ splňujícího

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{k} a_n p^n$$

pokud $0 = a_k = a_{k+1} = \dots$

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{k} a_n p^n - p^{k+1}$$

pokud $p - 1 = a_k = a_{k+1} = \dots$.

Protože je navíc Y husté v p^ω, můžeme prostor p^ω považovat za zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$. Posloupnost $1, 1+p, 1+p+p^2, \dots$ v tomto zúplnění konverguje k prvku $(1, 1, \dots) \in p^\omega$.

Podívejme se na prostor p^ω, kde p je p-prvkový diskrétní prostor. Mocnina p^ω je kompaktní a existuje na ní tedy právě jedna uniformita. Uvažujme podprostor $Y \subset p^\omega$, který obsahuje pouze takové posloupnosti, které jsou jen na konečně mnoha místech různé od nuly nebo jen na konečně mnoha místech různé od $p-1$.

Uniformní prostor $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$ a prostor Y (s uniformitou zděděnou z p^ω) můžeme ztotožnit pomocí izomorfismu $\varphi : Y \to \mathbb{Z}$ splňujícího

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{k} a_n p^n$$

pokud $0 = a_k = a_{k+1} = \dots$

$$\varphi((a_n)) = \sum_{n=0}^{k} a_n p^n - p^{k+1}$$

pokud $p - 1 = a_k = a_{k+1} = \dots$.
Protože je navíc Y husté v p^ω, můžeme prostor p^ω považovat za zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_p)$.
Posloupnost $1, 1+p, 1+p+p^2, \dots$ v tomto zúplnění konverguje k prvku $(1, 1, \dots) \in p^\omega$.

Podobnou konstrukci můžeme provést na racionálních číslech.

Definujeme uniformitu $\mathcal{V}_p$ tak, že bází okolí diagonály budou množiny

$$V_k = \{(q,r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q - r = p^k \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \not| b\}.$$

Vlastnosti

- Uniformita zúžená na podprostor $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ je stejná jako v předchozí části.
- Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ je opět metrizovatelný. Jak vypadá nějaká kompatibilní metrika?

Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ není lokálně omezený. Například pro okolí diagonály V_0 a pro libovolnou konečnou množinu $K \subset \mathbb{Q}$ dostaneme $V_0[K] \subsetneq \mathbb{Q}$. A to jak? Podíváme se na nejmenší mocninu k čísla p, která nedělí jmenovatele zlomků z množiny K zapsané v základním tvaru. Pak si stačí jen uvědomit, že $p^{-k} \notin V_0[K]$.
Zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ se nazývá p-adická čísla. Není ani kompaktní, protože výchozí prostor nebyl lokálně omezený.

Podobnou konstrukci můžeme provést na racionálních číslech.

Definujeme uniformitu $\mathcal{V}_p$ tak, že bází okolí diagonály budou množiny

$$V_k = \{(q,r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q - r = p^k \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \not| b\}.$$

Podobnou konstrukci můžeme provést na racionálních číslech.

Definujeme uniformitu $\mathcal{V}_p$ tak, že bází okolí diagonály budou množiny

$$V_k = \{(q, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q - r = p^k \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \not| b\}.$$

Vlastnosti

1. Uniformita zděděná na podprostor $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ je stejná jako v předchozí části.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ je opět metrizovatelný. Jak vypadá nějaká kompatibilní metrika?

Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ není totálně omezený. Například pro okolí diagonály V_0 a pro libovolnou konečnou množinu $K \subset \mathbb{Q}$ dostaneme $V_0[K] \subsetneq \mathbb{Q}$. A to jak? Podíváme se na nejmenší mocninu k čísla p, která nedělí jmenovatele zlomků z množiny K zapsané v základním tvaru. Pak si stačí jen uvědomit, že $p^{-k} \notin V_0[K]$.
Zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ se nazývá p-adická čísla. Není to kompakt, protože výchozí prostor nebyl totálně omezený.

Podobnou konstrukci můžeme provést na racionálních číslech.

Definujeme uniformitu $\mathcal{V}_p$ tak, že bází okolí diagonály budou množiny

$$V_k = \{(q, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q - r = p^k \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \nmid b\}.$$

Vlastnosti

1. Uniformita zděděná na podprostor $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ je stejná jako v předchozí části.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ je opět metrizovatelný. Jak vypadá nějaká kompatibilní metrika?

Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ není totálně omezený. Například pro okolí diagonály V_0 a pro libovolnou konečnou množinu $K \subset \mathbb{Q}$ dostaneme $V_0[K] \subsetneq \mathbb{Q}$. A to jak? Podíváme se na nejmenší mocninu k čísla p, která nedělí jmenovatele zlomků z množiny K zapsané v základním tvaru. Pak si stačí jen uvědomit, že $p^{-k} \notin V_0[K]$.
Zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ se nazývá p-adická čísla. Není to kompakt, protože výchozí prostor nebyl totálně omezený.

Podobnou konstrukci můžeme provést na racionálních číslech.

Definujeme uniformitu $\mathcal{V}_p$ tak, že bází okolí diagonály budou množiny

$$V_k = \{(q, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q - r = p^k \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \nmid b\}.$$

Vlastnosti

1. Uniformita zděděná na podprostor $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ je stejná jako v předchozí části.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ je opět metrizovatelný. Jak vypadá nějaká kompatibilní metrika?

Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ není totálně omezený. Například pro okolí diagonály V_0 a pro libovolnou konečnou množinu $K \subset \mathbb{Q}$ dostaneme $V_0[K] \subsetneq \mathbb{Q}$. A to jak? Podíváme se na nejmenší mocninu k čísla p, která nedělí jmenovatele zlomků z množiny K zapsané v základním tvaru. Pak si stačí jen uvědomit, že $p^{-k} \notin V_0[K]$.

Zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ se nazývá p-adická čísla. Není to kompakt, protože výchozí prostor nebyl totálně omezený.

Podobnou konstrukci můžeme provést na racionálních číslech.

Definujeme uniformitu $\mathcal{V}_p$ tak, že bází okolí diagonály budou množiny

$$V_k = \{(q, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q - r = p^k \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \not| b\}.$$

Vlastnosti

1. Uniformita zděděná na podprostor $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ je stejná jako v předchozí části.
2. Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ je opět metrizovatelný. Jak vypadá nějaká kompatibilní metrika?

Uniformní prostor $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ není totálně omezený. Například pro okolí diagonály V_0 a pro libovolnou konečnou množinu $K \subset \mathbb{Q}$ dostaneme $V_0[K] \subsetneq \mathbb{Q}$. A to jak? Podíváme se na nejmenší mocninu k čísla p, která nedělí jmenovatele zlomků z množiny K zapsané v základním tvaru. Pak si stačí jen uvědomit, že $p^{-k} \notin V_0[K]$.

Zúplnění uniformního prostoru $(\mathbb{Q}, \mathcal{V}_p)$ se nazývá p-adická čísla. Není to kompakt, protože výchozí prostor nebyl totálně omezený.