OBECNÁ TOPOLOGIE

6. UNIFORMNÍ PROSTORY

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Už bylo zmíněno na začátku tohoto textu, že stejnoměrnou spojitost funkcí nelze popsat v topologických prostorech. Ani další důležitý pojem z matematické analýzy nejde v topologických prostorech definovat, a to stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí. Důvodem je lokální charakter topologických prostorů, kdežto stejnoměrná spojitost a konvergence mají globální charakter.

V metrických prostorech lze všechny tyto pojmy dobře definovat, protože se pracuje s čísly a lze vhodně volit stejná čísla na celém prostoru (např. stejné poloměry okolí bodů). To dává návod, jak zobecnit metrické prostory, aby bylo možné stejnoměrnost definovat. Potřebujeme znát otevřená pokrytí, které se v jistém smyslu skládají ze stejně velkých množin.

Zobecnění je potřeba, protože metrické prostory nemají nespočetné součiny, prostory funkcí (ve kterých se používá stejnoměrná konvergence) nemusejí být metrizovatelné a jsou i další důvody.

Je ještě jiný pohled na možné zobecnění metrických prostorů. V definici stejnoměrné spojitosti se uvažují dvojice bodů, které jsou od sebe nejvýše nějaké dané kladné číslo ε, resp. δ. To jsou podmnožiny čtverců, neboli relace. Je ovšem nutné najít vhodné axiómy jak pro ony

V metrických prostorech lze všechny tyto pojmy dobře definovat, protože se pracuje s čísly a lze vhodně volit stejná čísla na celém prostoru (např. stejné poloměry okolí bodů). To dává návod, jak zobecnit metrické prostory, aby bylo možné stejnoměrnost definovat. Potřebujeme znát otevřená pokrytí, které se v jistém smyslu skládají ze stejně velkých množin.

Zobecnění je potřeba, protože metrické prostory nemají nespočetné součiny, prostory funkcí (ve kterých se používá stejnoměrná konvergence) nemusejí být metrizovatelné a jsou i další důvody.

Je ještě jiný pohled na možné zobecnění metrických prostorů. V definici stejnoměrné spojitosti se uvažují dvojice bodů, které jsou od sebe nejvýše nějaké dané kladné číslo ε, resp. δ. To jsou podmnožiny čtverců, neboli relace. Je ovšem nutné najít vhodné axiómy jak pro ony soustavy relací, tak pro soustavy pokrytí. My vezmeme za základ soustavy relací a ostatní přístupy budeme chápat jako charakterizace.

V metrických prostorech lze všechny tyto pojmy dobře definovat, protože se pracuje s čísly a lze vhodně volit stejná čísla na celém prostoru (např. stejné poloměry okolí bodů). To dává návod, jak zobecnit metrické prostory, aby bylo možné stejnoměrnost definovat. Potřebujeme znát otevřená pokrytí, které se v jistém smyslu skládají ze stejně velkých množin.

Zobecnění je potřeba, protože metrické prostory nemají nespočetné součiny, prostory funkcí (ve kterých se používá stejnoměrná konvergence) nemusejí být metrizovatelné a jsou i další důvody.

Je ještě jiný pohled na možné zobecnění metrických prostorů. V definici stejnoměrné spojitosti se uvažují dvojice bodů, které jsou od sebe nejvýše nějaké dané kladné číslo ε, resp. δ. To jsou podmnožiny čtverců, neboli relace. Je ovšem nutné najít vhodné axiómy jak pro ony soustavy relací, tak pro soustavy pokrytí. My vezmeme za základ soustavy relací a ostatní přístupy budeme chápat jako charakterizace.

V metrických prostorech lze všechny tyto pojmy dobře definovat, protože se pracuje s čísly a lze vhodně volit stejná čísla na celém prostoru (např. stejné poloměry okolí bodů). To dává návod, jak zobecnit metrické prostory, aby bylo možné stejnoměrnost definovat. Potřebujeme znát otevřená pokrytí, které se v jistém smyslu skládají ze stejně velkých množin.

Zobecnění je potřeba, protože metrické prostory nemají nespočetné součiny, prostory funkcí (ve kterých se používá stejnoměrná konvergence) nemusejí být metrizovatelné a jsou i další důvody.

Je ještě jiný pohled na možné zobecnění metrických prostorů. V definici stejnoměrné spojitosti se uvažují dvojice bodů, které jsou od sebe nejvýše nějaké dané kladné číslo ε, resp. δ. To jsou podmnožiny čtverců, neboli relace. Je ovšem nutné najít vhodné axiómy jak pro ony soustavy relací, tak pro soustavy pokrytí. My vezmeme za základ soustavy relací a ostatní přístupy budeme chápat jako charakterizace.

Pro relace U, V na množině X (tj., $U, V \subset X \times X$) označujeme

$$U^{-1} = \{(x,y); (y,x) \in U\}, \quad U \circ V = \{(x,z); \text{existuje } y \text{ tak, že } (x,y) \in V, (y,z) \in U\}$$

(podobně jako skládání zobrazení). Pro soustavy zobrazení $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ na množině X označujeme

$$\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1}; U \in \mathcal{U}\}, \quad \mathcal{U} \circ \mathcal{V} = \{U \circ V; U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

DEFINICE (Definice uniformního prostoru)

Uniformní prostor je dvojice $(X, \mathcal{U})$, kde X je množina a $\mathcal{U}$ je neprázdná soustava podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi:

1. $\Delta_X = \{(x,x); x \in X\} \subset U$ pro každé $U \in \mathcal{U}$;
2. je-li $U \subset V \subset X \times X$ a $U \in \mathcal{U}$, je $V \in \mathcal{U}$;
3. je-li $U, V \in \mathcal{U}$ je $U \cap V \in \mathcal{U}$;
4. je-li $U \in \mathcal{U}$, je $U^{-1} \in \mathcal{U}$;
5. pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ tak, že $V \circ V \subset U$.

Množina X je pak nosná množina a soustava $\mathcal{U}$ uniformita prostoru $(X, \mathcal{U})$. Prvky $\mathcal{U}$ se nazývají uniformní okolí diagonály.

DEFINICE (Definice uniformního prostoru)

Uniformní prostor je dvojice $(X, \mathcal{U})$, kde X je množina a $\mathcal{U}$ je neprázdná soustava podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi:

1. $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\} \subset U$ pro každé $U \in \mathcal{U}$;
2. je-li $U \subset V \subset X \times X$ a $U \in \mathcal{U}$, je $V \in \mathcal{U}$;
3. je-li $U, V \in \mathcal{U}$ je $U \cap V \in \mathcal{U}$;
4. je-li $U \in \mathcal{U}$, je $U^{-1} \in \mathcal{U}$;
5. pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ tak, že $V \circ V \subset U$.

Množina X je pak nosná množina a soustava $\mathcal{U}$ uniformita prostoru $(X, \mathcal{U})$. Prvky $\mathcal{U}$ se nazývají uniformní okolí diagonály.

DEFINICE (Definice uniformního prostoru)

Uniformní prostor je dvojice $(X, \mathcal{U})$, kde X je množina a $\mathcal{U}$ je neprázdná soustava podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi:

1. $\Delta_X = \{(x, x); x \in X\} \subset U$ pro každé $U \in \mathcal{U}$;
2. je-li $U \subset V \subset X \times X$ a $U \in \mathcal{U}$, je $V \in \mathcal{U}$;
3. je-li $U, V \in \mathcal{U}$ je $U \cap V \in \mathcal{U}$;
4. je-li $U \in \mathcal{U}$, je $U^{-1} \in \mathcal{U}$;
5. pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ tak, že $V \circ V \subset U$.

Množina X je pak nosná množina a soustava $\mathcal{U}$ uniformita prostoru $(X, \mathcal{U})$. Prvky $\mathcal{U}$ se nazývají uniformní okolí diagonály.

Pro neprázdné množiny X znamenají uvedené vlastnosti, že $\mathcal{U}$ je symetrický a tranzitivní filtr reflexivních relací. Můžeme však do tohoto popisu zahrnout i triviální případ prázdného prostoru (pak $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$).

Pro uniformity (a přeneseně pro uniformní prostory) lze od filtrů přejmout pojmy jako báze, subbáze. Rozpis vlastností báze a subbáze uniformity najdete ve cvičeních. Při možných nedorozuměních s topologickými pojmy budeme používat termíny uniformní báze a uniformní subbáze.

Pro uniformity (a přeneseně pro uniformní prostory) lze od filtrů přejmout pojmy jako báze, subbáze. Rozpis vlastností báze a subbáze uniformity najdete ve cvičeních. Při možných nedorozuměních s topologickými pojmy budeme používat termíny uniformní báze a uniformní subbáze.

Typickou uniformitou je uniformita vytvořená pseudometrikou d na množině X: bázi tvoří množiny $U_r = \{(x,y) \in X \times X; d(x,y) < r\}$ pro $r > 0$. Uniformita se nazývá pseudometrizovatelná, jestliže je vytvořená pseudometrikou (metrizovatelná, je-li vytvořená metrikou).

Soustava všech reflexivních relací na množině X je tzv. uniformně diskrétní uniformita. Je to zřejmě největší uniformita na dané množině a má za bázi množinu Δ_X. Je vytvořená diskrétní metrikou.

Soustava všech reflexivních relací na množině X je tzv. uniformně diskrétní uniformita. Je to zřejmě největší uniformita na dané množině a má za bázi množinu Δ_X. Je vytvořená diskrétní metrikou.

Nejmenší uniformitou na množině X je $\{X \times X\}$. Tato uniformita se nazývá indiskrétní. Je vytvořená triviální pseudometrikou.
Další příklady jsou uvedeny v příkladech.

Ekvivalence na množině X je bází uniformity na X, která se nazývá uniformitou vytvořenou ekvivalencí. Speciálním případem jsou oba předchozí příklady.

Ekvivalence na množině X je bází uniformity na X, která se nazývá uniformitou vytvořenou ekvivalencí. Speciálním případem jsou oba předchozí příklady.

Pro uniformní prostory platí podobné úmluvy jako pro topologické. Nyní ovšem nebudeme používat slovo *prostor* bez příslušného adjektiva *topologický* nebo *uniformní* (kromě výjimečných jasných případů).

Uvedeme nyní alternativní popis uniformit slibovaný v úvodu, pomocí pokrytí.

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x \in X\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$.

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P \subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(P) = \bigcup \{A \in \mathfrak{A}; A \cap P \neq \emptyset\}.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*
2. *pokrytí množiny X, které je zjemňováno uniformním pokrytím, je uniformní;*

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x \in X\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$.

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P \subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\operatorname{star}_{\mathfrak{A}}(P) = \bigcup \{A \in \mathfrak{A}; A \cap P \neq \emptyset\}.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\operatorname{star}_{\mathfrak{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*
2. *pokrytí množiny X, které je zjemňováno uniformním pokrytím, je uniformní;*
3. *každé uniformní pokrytí X je hvězdovitě zjemňováno uniformním pokrytím.*

▶ Důkaz

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x\in X\}$ pro nějaké $U\in\mathcal{U}$.

V úvodu zmiňovaná pokrytí metrického prostoru jsou právě uvedeného typu, jsou to pokrytí koulemi s daným stejným poloměrem.

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P\subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(P)=\bigcup\{A\in\mathfrak{A}; A\cap P\neq\emptyset\}.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(x); x\in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i\cap H_j; i\in I, j\in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x \in X\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$.

Jedna z důležitých vlastností uniformních pokrytí je silnější než existence zjemnění (v následující definici budeme opět ignorovat rozdíl mezi body a jednobodovými množinami):

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P \subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(P) = \bigcup \{A \in \mathfrak{A}; A \cap P \neq \emptyset\}.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x \in X\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$.

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P \subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(P) = \bigcup \{A \in \mathfrak{A}; A \cap P \neq \emptyset\}\,.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*
2. *pokrytí množiny X, které je zjemňováno uniformním pokrytím, je uniformní;*
3. *každé uniformní pokrytí X je hvězdovitě zjemňováno uniformním pokrytím.*

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x \in X\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$.

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P \subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\operatorname{star}_{\mathfrak{A}}(P) = \bigcup\{A \in \mathfrak{A}; A \cap P \neq \emptyset\}.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\operatorname{star}_{\mathfrak{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*
2. *pokrytí množiny X, které je zjemňováno uniformním pokrytím, je uniformní;*
3. *každé uniformní pokrytí X je hvězdovitě zjemňováno uniformním pokrytím.*

Důkaz

DEFINICE

Pokrytí uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ se nazývá uniformní pokrytí, jestliže je zjemňováno pokrytím $\{U[x]; x \in X\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$.

DEFINICE

Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava podmnožin množiny X a $P \subset X$. Pak hvězda množiny P vzhledem k $\mathfrak{A}$ je množina

$$\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(P) = \bigcup \{A \in \mathfrak{A}; A \cap P \neq \emptyset\}.$$

Říkáme, že pokrytí $\mathfrak{A}$ množiny X hvězdovitě zjemňuje pokrytí $\mathfrak{B}$, jestliže pokrytí hvězdami $\{\mathrm{star}_{\mathfrak{A}}(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathfrak{B}$.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*
2. *pokrytí množiny X, které je zjemňováno uniformním pokrytím, je uniformní;*
3. *každé uniformní pokrytí X je hvězdovitě zjemňováno uniformním pokrytím.*

Důkaz

Nyní slibovaná charakterizace uniformit pomocí uniformních pokrytí.

TVRZENÍ (Uniformita pomocí uniformních pokrytí)

Nechť η je soustava pokrytí množiny X, která splňuje vlastnosti předchozí věty. Pak existuje jediná uniformita na X, která má za soustavu uniformních pokrytí právě soustavu η.

Důkaz

TVRZENÍ (Uniformita pomocí uniformních pokrytí)

Nechť η *je soustava pokrytí množiny* X*, která splňuje vlastnosti předchozí věty. Pak existuje jediná uniformita na* X*, která má za soustavu uniformních pokrytí právě soustavu* η*.*

Důkaz

TVRZENÍ (Uniformita pomocí uniformních pokrytí)

Nechť η je soustava pokrytí množiny X, která splňuje vlastnosti předchozí věty. Pak existuje jediná uniformita na X, která má za soustavu uniformních pokrytí právě soustavu η.

Důkaz

Existují ještě další různé charakterizace uniformit (např. s použitím uniformních soustav okolí bodů, nebo pomocí soustav pseudometrik – o této charakterizaci viz poznámky).
My budeme používat buď uniformní okolí diagonály nebo uniformní pokrytí, podle toho, co bude pro daný případ vhodnější.

Každá pseudometrizovatelná uniformita má spočetnou bázi složenou např. z množin $U_{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Na rozdíl od topologických prostorů, kde je charakterizace metrizovatelnosti poměrně složitá, je uniformní metrizovatelnost jednodušší a má bohaté důsledky.

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

▸ Důkaz

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.

Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X, \mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X, \mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x, y) \in X \times X; d(x, z) < 1\} \subset U_1$, resp.).

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

Důkaz

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X,\mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x,y) \in X \times X; d(x,z) < 1\} \subset U_1$, resp.).

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

Důkaz

Z postupu důkazu vyplývá důležitý poznatek. Zformulujeme ho pomocí pokrytí i okolí diagonály. K lepší formulaci zavedeme další pojem:

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X,\mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x,y) \in X \times X; d(x,z) < 1\} \subset U_1$, resp.).

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

Důkaz

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X,\mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x,y) \in X \times X; d(x,z) < 1\} \subset U_1$, resp.).

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

▸ Důkaz

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

Někdy se nazývá otevřené pokrytí topologického prostoru normální pokrytí, jestliže je prvním členem normální posloupnosti složené z otevřených pokrytí.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X,\mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x,y) \in X \times X; d(x,z) < 1\} \subset U_1$, resp.).

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

Důkaz

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

Uvědomte si, že normální pokrytí i normální posloupnost relací tvoří bázi uniformity, a tedy jsou vytvořeny pseudometrikou.
Každý člen uniformity (relace nebo pokrytí) je prvním členem normální posloupnosti ležící v této uniformitě. Odtud vyplývá následující tvrzení. Použijeme v něm termín z následující části: pseudometrika d je *stejnoměrně spojitá* na uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$, jestliže uniformita této pseudometriky je menší než $\mathcal{U}$.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X,\mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x,y) \in X \times X; d(x,z) < 1\} \subset U$, resp.)

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

Důkaz

DEFINICE (Normální pokrytí)

Posloupnost $\{\mathcal{A}_n\}$ pokrytí množiny X se nazývá normální, pokud $\mathcal{A}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{A}_n$ pro každé n.
Posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ reflexivních relací na množině X se nazývá normální, pokud $\mathcal{U}_{n+1} \circ \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n$ pro každé n.

DŮSLEDEK (Metrizace normální posloupnosti)

Nechť $\mathcal{G}$ je uniformní pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$ (resp. $U \in \mathcal{U}$). Pak existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na $(X,\mathcal{U})$ tak, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 zjemňuje $\mathcal{A}_1$ (nebo $\{(x,y) \in X \times X; d(x,z) < 1\} \subset U_1$, resp.).

Stejně jako u topologických prostorů je i u uniformních prostorů důležitý vztah mezi nimi, který je zprostředkováván vhodnými zobrazeními. Na rozdíl od spojitosti bude základní definice analogická definici stejnoměrné spojitosti v metrických prostorech.

DEFINICE (Stejnoměrná spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory a $f: X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ pro každé $V \in \mathcal{V}$, tj. vzor uniformního okolí diagonály v Y je uniformní okolí diagonály v X.

Uvedená definice se jednoduše převede na uniformní pokrytí:

Zobrazení mezi uniformními prostory je stejnoměrně spojité právě když vzor uniformního pokrytí je uniformní pokrytí.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti stejnoměrné spojitosti)

Složení dvou stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité zobrazení.

Identické zobrazení uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.

DEFINICE (Stejnoměrná spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{U}),(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ pro každé $V \in \mathcal{V}$, tj. vzor uniformního okolí diagonály v Y je uniformní okolí diagonály v X.

Uvedená definice se jednoduše převede na uniformní pokrytí:

Zobrazení mezi uniformními prostory je stejnoměrně spojité právě když vzor uniformního pokrytí je uniformní pokrytí.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti stejnoměrné spojitosti)

Složení dvou stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité zobrazení.
Identické zobrazení uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.

DEFINICE (Stejnoměrná spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{U}),(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory a $f:X\to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže $(f\times f)^{-1}(V)\in\mathcal{U}$ pro každé $V\in\mathcal{V}$, tj. vzor uniformního okolí diagonály v Y je uniformní okolí diagonály v X.

Uvedená definice se jednoduše převede na uniformní pokrytí:

Zobrazení mezi uniformními prostory je stejnoměrně spojité právě když vzor uniformního pokrytí je uniformní pokrytí.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti stejnoměrné spojitosti)

Složení dvou stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité zobrazení.
Identické zobrazení uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.

DEFINICE (Stejnoměrná spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{U}),(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ pro každé $V \in \mathcal{V}$, tj. vzor uniformního okolí diagonály v Y je uniformní okolí diagonály v X.

Uvedená definice se jednoduše převede na uniformní pokrytí:

Zobrazení mezi uniformními prostory je stejnoměrně spojité právě když vzor uniformního pokrytí je uniformní pokrytí.

Zobrazení mezi uniformními prostory je stejnoměrně spojité pokud je konstantní nebo definiční obor je uniformně diskrétní nebo obor hodnot je indiskrétní.
Je celkem zřejmé, že pojem stejnoměrné spojitosti nelze lokalizovat ve smyslu, že zobrazení je stejnoměrně spojité pokud je stejnoměrně spojité v bodě (tento termín nemá ani smysl) nebo na prvcích uniformního pokrytí.
Následující vlastnosti jsou důležité a zřejmé.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti stejnoměrné spojitosti)

Složení dvou stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité zobrazení.
Identické zobrazení uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.

DEFINICE (Stejnoměrná spojitost zobrazení)

Nechť $(X,\mathcal{U}),(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory a $f : X \to Y$ zobrazení. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ pro každé $V \in \mathcal{V}$, tj. vzor uniformního okolí diagonály v Y je uniformní okolí diagonály v X.

Uvedená definice se jednoduše převede na uniformní pokrytí:

Zobrazení mezi uniformními prostory je stejnoměrně spojité právě když vzor uniformního pokrytí je uniformní pokrytí.

TVRZENÍ (Základní vlastnosti stejnoměrné spojitosti)

Složení dvou stejnoměrně spojitých zobrazení je stejnoměrně spojité zobrazení.
Identické zobrazení uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.

Uniformní vlastnosti budou ty vlastnosti, které se nemění při přechodu od jednoho uniformního prostoru k uniformně stejnému prostoru pomocí obdoby topologického homeomorfizmu. Protože termín *uniformní homeomorfizmus* (nebo *stejnoměrný*) je dvojznačný, budeme potřebný termín nazývat izomorfizmem.

DEFINICE (Izomorfizmy)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá izomorfizmus, jestliže je stejnoměrně spojité a existuje inverzní stejnoměrně spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají izomorfní.

Uniformní vlastnosti budou ty vlastnosti, které se nemění při přechodu od jednoho uniformního prostoru k uniformně stejnému prostoru pomocí obdoby topologického homeomorfizmu. Protože termín *uniformní homeomorfizmus* (nebo *stejnoměrný*) je dvojznačný, budeme potřebný termín nazývat izomorfizmem.

DEFINICE (Izomorfizmy)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá izomorfizmus, jestliže je stejnoměrně spojité a existuje inverzní stejnoměrně spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají izomorfní.

Uniformní vlastnosti budou ty vlastnosti, které se nemění při přechodu od jednoho uniformního prostoru k uniformně stejnému prostoru pomocí obdoby topologického homeomorfizmu. Protože termín *uniformní homeomorfizmus* (nebo *stejnoměrný*) je dvojznačný, budeme potřebný termín nazývat izomorfizmem.

DEFINICE (Izomorfizmy)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : X \to Y$. Zobrazení f se nazývá izomorfizmus, jestliže je stejnoměrně spojité a existuje inverzní stejnoměrně spojité zobrazení $g : Y \to X$. Prostory X, Y se pak nazývají izomorfní.

Ač jsou intervaly $(0, 1)$ a $(0, \infty)$ homeomorfní, nejsou izomorfní (při topologiích a uniformitách definovaných obvyklou metrikou).
Dva omezené intervaly v $\mathbb{R}$ stejného typu (např. oba otevřené) jsou izomorfní.

Podobně jako v topologických prostorech lze zavést uspořádání uniformit, slabé a silné vytváření a tedy podprostory, součiny, součty a kvocienty uniformních prostorů. Postupy jsou analogické a nebudeme tedy uvádět všechny podrobnosti.

Uspořádání na množině všech uniformit na X bude opět obrácená inkluze.

DEFINICE (Definice uspořádání uniformit)

Množina všech uniformit na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, říkáme, že $\mathcal{U}$ je jemnější než $\mathcal{V}$ a že $\mathcal{V}$ je hrubší než $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X, \mathcal{U}_a) \to (Y, \mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz

Uspořádání na množině všech uniformit na X bude opět obrácená inkluze.

DEFINICE (Definice uspořádání uniformit)

Množina všech uniformit na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, říkáme, že $\mathcal{U}$ je jemnější než $\mathcal{V}$ a že $\mathcal{V}$ je hrubší než $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X, \mathcal{U}_a) \to (Y, \mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz

DEFINICE (Definice uspořádání uniformit)

Množina všech uniformit na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, říkáme, že $\mathcal{U}$ je jemnější než $\mathcal{V}$ a že $\mathcal{V}$ je hrubší než $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X, \mathcal{U}_a) \to (Y, \mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz

DEFINICE (Definice uspořádání uniformit)

Množina všech uniformit na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, říkáme, že $\mathcal{U}$ je jemnější než $\mathcal{V}$ a že $\mathcal{V}$ je hrubší než $\mathcal{U}$.

Místo uvedených termínu se používají i termíny *slabší – silnější*, lze samozřejmě používat i termíny *větší – menší*.
Platí očekávané věty, že uniformity na X tvoří svaz a že stejnoměrně spojitá zobrazení se chovají rozumně při supremech a infimech.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X, \mathcal{U}_a) \to (Y, \mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz

DEFINICE (Definice uspořádání uniformit)

Množina všech uniformit na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, říkáme, že $\mathcal{U}$ je jemnější než $\mathcal{V}$ a že $\mathcal{V}$ je hrubší než $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X,\mathcal{U}_a) \to (Y,\mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X,\sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y,\sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X,\inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y,\inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz

DEFINICE (Definice uspořádání uniformit)

Množina všech uniformit na množině X je uspořádaná opačnou inkluzí $\supset$.

Je-li $\mathcal{U} \supset \mathcal{V}$, říkáme, že $\mathcal{U}$ je jemnější než $\mathcal{V}$ a že $\mathcal{V}$ je hrubší než $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X, \mathcal{U}_a) \to (Y, \mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz

Z dalšího uvidíte, že konstrukce slabých a silných uniformit je analogická příslušným konstrukcím v topologických prostorech. Tyto konstrukce lze zobecnit na mnohem obecnější struktury a vše, co tu uvádíme, jsou pak jen speciální případy.
Neuvedené důkazy jsou modifikacemi důkazů z topologické části.

TVRZENÍ (Slabá uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá slabá uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak slabá uniformita na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, má subbázi

$$\{(f_a \times f_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}.$$

TVRZENÍ (Slabá uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá slabá uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak slabá uniformita na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$, má subbázi

$$\{(f_a \times f_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}.$$

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Slabá uniformita)

Nechť X *je množina,* $\{Y_a\}_A$ *je soubor uniformních prostorů a pro každé* $a \in A$ *je dáno zobrazení* $f_a : X \to Y_a$. *Pak existuje nejhrubší uniformita* $\mathcal{U}$ *na* X *taková, že všechna zobrazení* $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ *jsou stejnoměrně spojitá.*

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá slabá uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ *uniformity prostorů* Y_a, *pak slabá uniformita na* X *vytvořená souborem* $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, *má subbázi*

$$\{(f_a \times f_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}.$$

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Slabá uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá slabá uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : X \to Y_a, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : (X, \mathcal{U}) \to Y_a$ se pak nazývá slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Popis slabé uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak slabá uniformita na X vytvořená souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$, má subbázi

$$\{(f_a \times f_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}.$$

$\Rightarrow$

Další analogické věty:

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé uniformity)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, mezi uniformními prostory:

1. *Uniformní prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.*
2. *Je-li Z uniformní prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je stejnoměrně spojité právě když každé složení $f_a\, g$, $a \in A$, je stejnoměrně spojité.*

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory stejnoměrně spojitých zobrazení mezi uniformními prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\, a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\, a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé uniformity)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, mezi uniformními prostory:

1. *Uniformní prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.*
2. *Je-li Z uniformní prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je stejnoměrně spojité právě když každé složení $f_a\, g$, $a \in A$, je stejnoměrně spojité.*

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory stejnoměrně spojitých zobrazení mezi uniformními prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\ a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i};\ a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé uniformity)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, mezi uniformními prostory:

1. *Uniformní prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.*
2. *Je-li Z uniformní prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je stejnoměrně spojité právě když každé složení $f_a\, g$, $a \in A$, je stejnoměrně spojité.*

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory stejnoměrně spojitých zobrazení mezi uniformními prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé uniformity)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, mezi uniformními prostory:

1. *Uniformní prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$.*
2. *Je-li Z uniformní prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je stejnoměrně spojité právě když každé složení $f_a\, g$, $a \in A$, je stejnoměrně spojité.*

TVRZENÍ (Skládání slabých vytváření)

Nechť $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, jsou soubory stejnoměrně spojitých zobrazení mezi uniformními prostory. Pak platí:

1. *Je-li soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející, je i soubor $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ slabě vytvářející.*
2. *Jsou-li soubory $\{f_a : X \to Y_a\}_A$ a $\{g_{a,i} : Y_a \to Z_{a,i}\}_{I_a}$, $a \in A$, slabě vytvářející, je i soubor $\{g_{a,i}\, f_a : X \to Z_{a,i}; a \in A, i \in I_a\}$ slabě vytvářející.*

Pokračujeme v analogiích.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X, \mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y, \mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y); U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y, \mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X, \mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y, \mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X, \mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y); U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ stejnoměrné vnoření, pak prostor Y je izomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y);\, U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ stejnoměrné vnoření, pak prostor Y je izomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y);\, U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ stejnoměrné vnoření, pak prostor Y je izomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y); U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ stejnoměrné vnoření, pak prostor Y je izomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y); U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

I uniformní vnoření se definují obdobně jako v topologiích.

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y); U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ stejnoměrné vnoření, pak prostor Y je izomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

DEFINICE (Podprostor uniformního prostoru)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $Y \subset X$. Uniformní prostor $(Y,\mathcal{V})$ slabě vytvořený zobrazením $1_Y : Y \to (X,\mathcal{U})$ se nazývá podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

TVRZENÍ (Vlastnosti podprostorů)

Nechť $(Y,\mathcal{V})$ je podprostor uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$.

1. $\mathcal{V} = \{U \cap (Y \times Y);\, U \in \mathcal{U}\}$.
2. *Zobrazení prostoru Z do $(Y,\mathcal{V})$ je stejnoměrně spojité právě když je stejnoměrně spojité jako zobrazení do $(X,\mathcal{U})$.*
3. *Nechť Z je uniformní prostor s nosnou množinou ležící v Y. Pak Z je podprostor prostoru $(Y,\mathcal{V})$ právě když je podprostorem prostoru $(X,\mathcal{U})$.*

DEFINICE (Stejnoměrné vnoření)

Nechť X, Y jsou uniformní prostory a $f : Y \to X$ je prosté zobrazení. Je-li f slabě vytvářející, nazývá se stejnoměrné vnoření prostoru Y do prostoru X. Symbol $Y \hookrightarrow X$ značí, že Y je stejnoměrně vnořen do X.

TVRZENÍ

Je-li $f : Y \to X$ stejnoměrné vnoření, pak prostor Y je izomorfní s podprostorem $f(Y)$ prostoru X.

Součiny uniformních prostorů se nyní definují zřejmým způsobem.

DEFINICE (Součin uniformních prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{U}_a)\}_A$ je soubor uniformních prostoru ů $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{U}_a)\}_A$ se nazývá součinem uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$.

TVRZENÍ (Popis uniformity součinu)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ je součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$.

1. $\{(\mathrm{pr}_a \times \mathrm{pr}_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}$ *je subbáze uniformity $\mathcal{U}$.*
2. *Zobrazení uniformního prostoru Z do $(X, \mathcal{U})$ je stejnoměrně spojité právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna jeho složení s projekcemi pr_a.*
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{U}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X, \mathcal{U})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

DEFINICE (Součin uniformních prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{U}_a)\}_A$ je soubor uniformních prostoru ů $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a, \mathcal{U}_a)\}_A$ se nazývá součinem uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$.

TVRZENÍ (Popis uniformity součinu)

Nechť $(X, \mathcal{U})$ je součin uniformních prostorů $(X_a, \mathcal{U}_a)$.

1. $\{(\mathrm{pr}_a \times \mathrm{pr}_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}$ *je subbáze uniformity* $\mathcal{U}$.
2. *Zobrazení uniformního prostoru Z do $(X, \mathcal{U})$ je stejnoměrně spojité právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor $(X_a, \mathcal{U}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X, \mathcal{U})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

DEFINICE (Součin uniformních prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{U}_a)\}_A$ je soubor uniformních prostoru ů $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a,\mathcal{U}_a)\}_A$ se nazývá součinem uniformních prostorů $(X_a\,,\mathcal{U}_a)$.

Z popisu slabé uniformity a jeho vlastností vyplývá následující tvrzení.

TVRZENÍ (Popis uniformity součinu)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je součin uniformních prostorů $(X_a,\mathcal{U}_a)$.

1. $\{(\mathrm{pr}_a \times \mathrm{pr}_a)^{-1}(U);\, U \in \mathcal{U}_a,\, a \in A\}$ *je subbáze uniformity* $\mathcal{U}$.
2. *Zobrazení uniformního prostoru Z do $(X,\mathcal{U})$ je stejnoměrně spojité právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor $(X_a,\mathcal{U}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X,\mathcal{U})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

DEFINICE (Součin uniformních prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{U}_a)\}_A$ je soubor uniformních prostoru ů $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a,\mathcal{U}_a)\}_A$ se nazývá součinem uniformních prostorů $(X_a\,,\mathcal{U}_a)$.

TVRZENÍ (Popis uniformity součinu)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je součin uniformních prostorů $(X_a,\mathcal{U}_a)$.

1. $\{(\mathrm{pr}_a \times \mathrm{pr}_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}$ *je subbáze uniformity* $\mathcal{U}$.
2. *Zobrazení uniformního prostoru Z do $(X,\mathcal{U})$ je stejnoměrně spojité právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna jeho složení s projekcemi pr_a.*
3. *Je-li každý prostor $(X_a,\mathcal{U}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X,\mathcal{U})$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.*

DEFINICE (Součin uniformních prostorů)

Nechť $\{(X_a \mathcal{U}_a)\}_A$ je soubor uniformních prostoru ů $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a,\mathcal{U}_a)\}_A$ se nazývá součinem uniformních prostorů $(X_a ,\mathcal{U}_a)$.

TVRZENÍ (Popis uniformity součinu)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ *je součin uniformních prostorů* $(X_a,\mathcal{U}_a)$.

1. $\{(\mathrm{pr}_a \times \mathrm{pr}_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}$ *je subbáze uniformity* $\mathcal{U}$.
2. *Zobrazení uniformního prostoru* Z *do* $(X,\mathcal{U})$ *je stejnoměrně spojité právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor* $(X_a,\mathcal{U}_a)$ *součinem prostorů* $T_{a,i}, i \in I_a$, *je* $(X,\mathcal{U})$ *součinem prostorů* $T_{a,i}, a \in A, i \in I_a$.

DEFINICE (Součin uniformních prostorů)

Nechť $\{(X_a\mathcal{U}_a)\}_A$ je soubor uniformních prostoru ů $X = \Pi_A X_a$ je součin jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ slabě vytvořený souborem projekcí $\{\mathrm{pr}_a : X \to (X_a,\mathcal{U}_a)\}_A$ se nazývá součinem uniformních prostorů $(X_a\,,\mathcal{U}_a)$.

TVRZENÍ (Popis uniformity součinu)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je součin uniformních prostorů $(X_a,\mathcal{U}_a)$.

1. $\{(\mathrm{pr}_a \times \mathrm{pr}_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}$ *je subbáze uniformity* $\mathcal{U}$.
2. *Zobrazení uniformního prostoru Z do $(X,\mathcal{U})$ je stejnoměrně spojité právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna jeho složení s projekcemi* pr_a.
3. *Je-li každý prostor $(X_a,\mathcal{U}_a)$ součinem prostorů $T_{a,i}$, $i \in I_a$, je $(X,\mathcal{U})$ součinem prostorů* $T_{a,i}$, $a \in A$, $i \in I_a$.

Pokračujeme v analogii.

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, je soubor stejnoměrně spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení $\Delta f_a : X \to \prod_A Y_a$ je slabě vytvářející.

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a, a \in A$, *je soubor stejnoměrně spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení* $\Delta f_a : X \to \Pi_A Y_a$ *je slabě vytvářející.*

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, je soubor stejnoměrně spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení $\Delta f_a : X \to \prod_A Y_a$ je slabě vytvářející.

V případě, že zobrazení Δf_a z předchozí věty je prosté, je toto zobrazení stejnoměrným vnořením (pokud je uvedený soubor slabě vytvářející).

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Slabé vytváření a součiny)

Nechť $f_a : X \to Y_a$, $a \in A$, *je soubor stejnoměrně spojitých zobrazení. Tento soubor je slabě vytvářející právě když diagonální zobrazení* $\Delta f_a : X \to \prod_A Y_a$ *je slabě vytvářející.*

Dají se sepsat podmínky na uniformní prostor X, aby se dal stejnoměrně vnořit do mocniny jiného uniformního prostoru, ale jednak je nebudeme potřebovat a jednak jsou složitější a méně použitelná než v případě topologických prostorů. Uvedeme pouze jedinou aplikaci, která je však velmi důležitá.

TVRZENÍ (Vnoření do součinu pseudometrických prostorů)

Každý uniformní prostor lze stejnoměrně vnořit do součinu pseudometrických prostorů.

Důkaz

TVRZENÍ (Vnoření do součinu pseudometrických prostorů)

Každý uniformní prostor lze stejnoměrně vnořit do součinu pseudometrických prostorů.

Důkaz

Kromě definice a popisu silných uniformit nebudeme již opakovat obdobná tvrzení z topologické části.

TVRZENÍ (Silná uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{U})$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá silná uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G}), a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak silná uniformita na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{U \subset X \times X; (f_a \times f_a)^{-1}(U) \in \mathcal{U}_a, \forall a \in A\} .$$

TVRZENÍ (Silná uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{U})$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá silná uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G})$, $a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak silná uniformita na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{U \subset X \times X; (f_a \times f_a)^{-1}(U) \in \mathcal{U}_a, \forall a \in A\} .$$

TVRZENÍ (Silná uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{U})$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá silná uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G}), a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak silná uniformita na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{U \subset X \times X; (f_a \times f_a)^{-1}(U) \in \mathcal{U}_a, \forall a \in A\}.$$

TVRZENÍ (Silná uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soustava uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : Y_a \to X$. Pak existuje nejjemnější uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{U})$ jsou stejnoměrně spojitá.

DEFINICE

Uniformita $\mathcal{U}$ z předchozí věty se nazývá silná uniformita vytvořená souborem (nebo zobrazeními) $f_a : Y_a \to X, a \in A$. Soubor zobrazení $f_a : Y_a \to (X, \mathcal{G}), a \in A$, se pak nazývá silně vytvářející.

TVRZENÍ (Popis silné uniformity)

Jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity prostorů Y_a, pak silná uniformita na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{U \subset X \times X; (f_a \times f_a)^{-1}(U) \in \mathcal{U}_a, \forall a \in A\}.$$

Ani v této části nebudeme uvádět podrobnosti a opakovat analogie. Zavedeme pouze definice.

DEFINICE (Uniformní kvocient)

Nechť X je uniformní prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ silně vytvořený zobrazením $f : X \to Y$ se nazývá kvocient uniformního prostoru X podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

DEFINICE (Součet uniformních prostorů)

Nechť $\{X_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : X_a \to X\}_A$ se nazývá součtem uniformních prostorů X_a.

Na rozdíl od topologických prostorů neplatí v uniformitách pozorování, že součet stejných topologických prostorů X indexovaných množinou A je roven součinu diskrétního prostoru A s prostorem X. To je důležitý rozdíl.

DEFINICE (Uniformní kvocient)

Nechť X je uniformní prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ silně vytvořený zobrazením $f : X \to Y$ se nazývá kvocient uniformního prostoru X podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

DEFINICE (Součet uniformních prostorů)

Nechť $\{X_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : X_a \to X\}_A$ se nazývá součtem uniformních prostorů X_a.

Na rozdíl od topologických prostorů neplatí v uniformitách pozorování, že součet stejných topologických prostorů X indexovaných množinou A je roven součinu diskrétního prostoru A s prostorem X. To je důležitý rozdíl.

DEFINICE (Uniformní kvocient)

Nechť X je uniformní prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ silně vytvořený zobrazením $f : X \to Y$ se nazývá kvocient uniformního prostoru X podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

DEFINICE (Součet uniformních prostorů)

Nechť $\{X_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : X_a \to X\}_A$ se nazývá součtem uniformních prostorů X_a.

Na rozdíl od topologických prostorů neplatí v uniformitách pozorování, že součet stejných topologických prostorů X indexovaných množinou A je roven součinu diskrétního prostoru A s prostorem X. To je důležitý rozdíl.

DEFINICE (Uniformní kvocient)

Nechť X je uniformní prostor a f je zobrazení X na množinu Y. Uniformní prostor $(Y, \mathcal{V})$ silně vytvořený zobrazením $f : X \to Y$ se nazývá kvocient uniformního prostoru X podle zobrazení f, které se pak nazývá kvocientové.

DEFINICE (Součet uniformních prostorů)

Nechť $\{X_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a $X = \sum_A X_a$ je součet jejich nosných množin. Uniformní prostor $(X, \mathcal{G})$ silně vytvořený souborem injekcí $\{\mathrm{inj}_a : X_a \to X\}_A$ se nazývá součtem uniformních prostorů X_a.

Na rozdíl od topologických prostorů neplatí v uniformitách pozorování, že součet stejných topologických prostorů X indexovaných množinou A je roven součinu diskrétního prostoru A s prostorem X. To je důležitý rozdíl.

Podle vzoru z metrických prostorů zavedeme na uniformním prostoru topologii. Je-li d metrika na X, tvoří otevřené koule se středem v daném bodě jeho bázi okolí. Při použití uniformních okolí diagonály $U_r = \{(x,y); d(x,y) < r\}$ je koule o poloměru r a středu x rovna množině $U_r[x]$.

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X,\mathcal{U})$ uniformní prostor, tvoří soustavy $\{U[x]; U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru $(X,\mathcal{G})$.

Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ je dán vzorcem

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A]; U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X,\mathcal{U})$ *uniformní prostor, tvoří soustavy* $\{U[x];\, U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, *báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru* $(X,\mathcal{G})$.

Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ *je dán vzorcem*

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A];\, U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím vytvořenými příslušnými uniformitami.

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X,\mathcal{U})$ *uniformní prostor, tvoří soustavy* $\{U[x];\, U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, *báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru* $(X,\mathcal{G})$.

Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ *je dán vzorcem*

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A];\, U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím vytvořenými příslušnými uniformitami.

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X, \mathcal{U})$ uniformní prostor, tvoří soustavy $\{U[x]; U \in \mathcal{U}\}$, $x \in X$, báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

Používají se samozřejmě i různé modifikace uvedeného termínu, např. topologie uniformity nebo uniformní topologie.
Ve cvičení jsou uvedeny souvislosti mezi uniformními okolími diagonály a topologickými okolími diagonály a mezi uniformními pokrytími a otevřenými pokrytími.
Snadno lze popsat i uzávěr uniformní topologie:

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ je dán vzorcem

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A]; U \in \mathcal{U}\}.$$

Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X, \mathcal{U})$ *uniformní prostor, tvoří soustavy* $\{U[x]; U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, *báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru* $(X, \mathcal{G})$.

▸ Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ *je dán vzorcem*

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A]; U \in \mathcal{U}\}.$$

▸ Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím vytvořenými příslušnými uniformitami.

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X,\mathcal{U})$ *uniformní prostor, tvoří soustavy* $\{U[x];\, U\in\mathcal{U}\}, x\in X$, *báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru* $(X,\mathcal{G})$.

▸ Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ *je dán vzorcem*

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A];\, U\in\mathcal{U}\}\,.$$

▸ Důkaz

Důležitá úmluva:

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím vytvořenými příslušnými uniformitami.

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X,\mathcal{U})$ *uniformní prostor, tvoří soustavy* $\{U[x];\, U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, *báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru* $(X,\mathcal{G})$.

Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ *je dán vzorcem*

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A];\, U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím vytvořenými příslušnými uniformitami.

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X,\mathcal{U})$ uniformní prostor, tvoří soustavy $\{U[x];\, U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru $(X,\mathcal{G})$.

Důkaz

DEFINICE

Topologie popsaná v předchozí větě se nazývá topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ je dán vzorcem

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A];\, U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Důkaz

Topologické vlastnosti uniformit

Použije-li se topologický pojem na uniformní prostory nebo jeho vztahy, vztahuje se k topologiím vytvořenými příslušnými uniformitami.

Tak například separabilní uniformní prostor je uniformní prostor, jehož topologie je separabilní. Diskrétní uniformní prostor má diskrétní topologii.

$\Rightarrow$

Následující tvrzení se dá očekávat podle podobného tvrzení známého z matematické analýzy, jeho důkaz je jednoduchý.
Další uvedené tvrzení je podstatné pro vztahy mezi uniformitami a topologiemi.

TVRZENÍ (Spojitost a stejnoměrná spojitost)

Stejnoměrně spojité zobrazení mezi uniformními prostory je spojité.

TVRZENÍ (Zachovávání slabého vytváření)

Přiřazení topologií uniformitám zachovává slabé vytváření.

Důkaz

$\Longrightarrow$

TVRZENÍ (Spojitost a stejnoměrná spojitost)

Stejnoměrně spojité zobrazení mezi uniformními prostory je spojité.

TVRZENÍ (Zachovávání slabého vytváření)

Přiřazení topologií uniformitám zachovává slabé vytváření.

Důkaz

$\Rightarrow$

TVRZENÍ (Spojitost a stejnoměrná spojitost)

Stejnoměrně spojité zobrazení mezi uniformními prostory je spojité.

TVRZENÍ (Zachovávání slabého vytváření)

Přiřazení topologií uniformitám zachovává slabé vytváření.

▸ Důkaz

$\Rightarrow$

Předchozí věta má mnoho důležitých důsledků, které nyní uvedeme. Nejdříve obecné důsledky, potom jejich použití na speciální případy.

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz

DŮSLEDEK (Topologie součinu uniformit)

1. *Je-li X uniformní podprostor uniformního prostoru Y, je i topologickým podprostorem Y.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů X_a je součin topologií prostorů X_a.*
3. *Topologie infima uniformit $\mathcal{U}_a$ je infimum topologií vytvořených uniformitami $\mathcal{U}_a$.*

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz

Podle předchozího tvrzení je každý kompaktní Hausdorffův prostor vytvořen nějakou uniformitou. Tuto uniformitu nyní popíšeme a ukážeme, že je to jediná uniformita vytvářející danou topologii.

TVRZENÍ (Uniformity na kompaktním prostoru)

Kompaktní Hausdorffův prostor je vytvářen jedinou uniformitou, která má za bázi všechna okolí diagonály (ekvivalentně, všechna otevřená (konečná) pokrytí).

Důkaz

TVRZENÍ (Uniformity na kompaktním prostoru)

Kompaktní Hausdorffův prostor je vytvářen jedinou uniformitou, která má za bázi všechna okolí diagonály (ekvivalentně, všechna otevřená (konečná) pokrytí).

Důkaz

TVRZENÍ (Uniformity na kompaktním prostoru)

Kompaktní Hausdorffův prostor je vytvářen jedinou uniformitou, která má za bázi všechna okolí diagonály (ekvivalentně, všechna otevřená (konečná) pokrytí).

Důkaz

Jak je vidět z příkladů, může být nekompaktní topologický prostor (např. $\mathbb{R}$ nebo nekonečný diskrétní prostor) vytvořen mnoha uniformitami. Vlastnost být vytvořen jedinou uniformitou však kompaktnost necharakterizuje (viz příklad ω_1).