6. UNIFORMNÍ PROSTORY

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Lze vytušit, že axiómy pro uniformní okolí diagonály jsou odvozeny z axiómů pseudometriky pro stejnoměrná okolí diagonály U_r. Na diagonále se každá pseudometrika anuluje a tedy množiny U_r obsahují diagonálu. Pseudometrika je symetrická funkce a tedy množiny U_r jsou symetrické. Trojúhelníková nerovnost dává $U_{r/2} \circ U_{r/2} \subset U_r$.

Tyto axiómy se dají popsat elegantněji (ale zase méně praktičtěji) pomocí operací nad soustavami relací:

$\mathcal{U}$ je filtr podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi

1. $\bigcap \mathcal{U} \supset \Delta_X$;
2. $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Už není tak snadné odvodit axiómy pro uniformní pokrytí přímo z vlastností pseudometrických prostorů. Tyto axiómy vznikly abstrakcí vlastností jiných prostorů než metrických.

Lze vytušit, že axiómy pro uniformní okolí diagonály jsou odvozeny z axiómů pseudometriky pro stejnoměrná okolí diagonály U_r. Na diagonále se každá pseudometrika anuluje a tedy množiny U_r obsahují diagonálu. Pseudometrika je symetrická funkce a tedy množiny U_r jsou symetrické. Trojúhelníková nerovnost dává $U_{r/2} \circ U_{r/2} \subset U_r$.

Tyto axiómy se dají popsat elegantněji (ale zase méně praktičtěji) pomocí operací nad soustavami relací:

$\mathcal{U}$ je filtr podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi

1. $\bigcap \mathcal{U} \supset \Delta_X$;
2. $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Už není tak snadné odvodit axiómy pro uniformní pokrytí přímo z vlastností pseudometrických prostorů. Tyto axiómy vznikly abstrakcí vlastností jiných prostorů než metrických.

Lze vytušit, že axiómy pro uniformní okolí diagonály jsou odvozeny z axiómů pseudometriky pro stejnoměrná okolí diagonály U_r. Na diagonále se každá pseudometrika anuluje a tedy množiny U_r obsahují diagonálu. Pseudometrika je symetrická funkce a tedy množiny U_r jsou symetrické. Trojúhelníková nerovnost dává $U_{r/2} \circ U_{r/2} \subset U_r$.

Tyto axiómy se dají popsat elegantněji (ale zase méně praktičtěji) pomocí operací nad soustavami relací:

$\mathcal{U}$ je filtr podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi

1. $\bigcap \mathcal{U} \supset \Delta_X$;
2. $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Už není tak snadné odvodit axiómy pro uniformní pokrytí přímo z vlastností pseudometrických prostorů. Tyto axiómy vznikly abstrakcí vlastností jiných prostorů než metrických.

Lze vytušit, že axiómy pro uniformní okolí diagonály jsou odvozeny z axiómů pseudometriky pro stejnoměrná okolí diagonály U_r. Na diagonále se každá pseudometrika anuluje a tedy množiny U_r obsahují diagonálu. Pseudometrika je symetrická funkce a tedy množiny U_r jsou symetrické. Trojúhelníková nerovnost dává $U_{r/2} \circ U_{r/2} \subset U_r$.

Tyto axiómy se dají popsat elegantněji (ale zase méně praktičtěji) pomocí operací nad soustavami relací:

$\mathcal{U}$ je filtr podmnožin $X \times X$ s vlastnostmi

1. $\bigcap \mathcal{U} \supset \Delta_X$;
2. $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}$;
3. $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Už není tak snadné odvodit axiómy pro uniformní pokrytí přímo z vlastností pseudometrických prostorů. Tyto axiómy vznikly abstrakcí vlastností jiných prostorů než metrických.

Pseudometrika v tvrzení o metrizovatelnosti normálních posloupností je hrubší než daná normální posloupnost a tedy každá uniformita je infimem množiny všech pseudometrických hrubších prostorů. Existuje tedy jednoznačný vztah mezi uniformitami a jistými množinami pseudometrik. Axiómy pro tyto množiny $\mathfrak{M}$ pseudometrik na množině X lze snadno nalézt:

1. pro $d_1, d_2 \in \mathfrak{M}$ je $\sup(d_1, d_2) \in \mathfrak{M}$;
2. $d \in \mathfrak{M}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $d' \in \mathfrak{M}$ a $\delta > 0$ tak, že $d(x, y) < \varepsilon$ jakmile $d'(x, y) < \delta$.

Lze tedy říci, že uniformní prostory zobecňují pseudometrické prostory tím, že místo jedné pseudometriky se zkoumají vhodné množiny pseudometrik.

Lze očekávat, že daná pseudometrizovatelná uniformita může být vytvořena různými pseudometrikami (najděte příklady např. na uniformně diskrétním prostoru nebo na obvyklé uniformitě $\mathbb{R}$). Pseudometriky, které vytvářejí stejnou uniformitu, se nazývají uniformně ekvivalentní (nebo stejnoměrně ekvivalentní). Je zřejmé, že uniformně ekvivalentní pseudometriky jsou (topologicky) ekvivalentní. Také je zřejmé, že dvě pseudometriky d, e na množině X jsou stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X : (X, d) \to (X, e), 1_X : (X, e) \to (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Pseudometrika v tvrzení o metrizovatelnosti normálních posloupností je hrubší než daná normální posloupnost a tedy každá uniformita je infimem množiny všech pseudometrických hrubších prostorů. Existuje tedy jednoznačný vztah mezi uniformitami a jistými množinami pseudometrik. Axiómy pro tyto množiny $\mathfrak{M}$ pseudometrik na množině X lze snadno nalézt:

1. pro $d_1, d_2 \in \mathfrak{M}$ je $\sup(d_1, d_2) \in \mathfrak{M}$;
2. $d \in \mathfrak{M}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $d' \in \mathfrak{M}$ a $\delta > 0$ tak, že $d(x, y) < \varepsilon$ jakmile $d'(x, y) < \delta$.

Lze tedy říci, že uniformní prostory zobecňují pseudometrické prostory tím, že místo jedné pseudometriky se zkoumají vhodné množiny pseudometrik.

Lze očekávat, že daná pseudometrizovatelná uniformita může být vytvořena různými pseudometrikami (najděte příklady např. na uniformně diskrétním prostoru nebo na obvyklé uniformitě $\mathbb{R}$). Pseudometriky, které vytvářejí stejnou uniformitu, se nazývají uniformně ekvivalentní (nebo stejnoměrně ekvivalentní). Je zřejmé, že uniformně ekvivalentní pseudometriky jsou (topologicky) ekvivalentní. Také je zřejmé, že dvě pseudometriky d, e na množině X jsou stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X : (X, d) \to (X, e), 1_X : (X, e) \to (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Pseudometrika v tvrzení o metrizovatelnosti normálních posloupností je hrubší než daná normální posloupnost a tedy každá uniformita je infimem množiny všech pseudometrických hrubších prostorů. Existuje tedy jednoznačný vztah mezi uniformitami a jistými množinami pseudometrik. Axiómy pro tyto množiny $\mathfrak{M}$ pseudometrik na množině X lze snadno nalézt:

1. pro $d_1, d_2 \in \mathfrak{M}$ je $\sup(d_1, d_2) \in \mathfrak{M}$;
2. $d \in \mathfrak{M}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $d' \in \mathfrak{M}$ a $\delta > 0$ tak, že $d(x, y) < \varepsilon$ jakmile $d'(x, y) < \delta$.

Lze tedy říci, že uniformní prostory zobecňují pseudometrické prostory tím, že místo jedné pseudometriky se zkoumají vhodné množiny pseudometrik.

Lze očekávat, že daná pseudometrizovatelná uniformita může být vytvořena různými pseudometrikami (najděte příklady např. na uniformně diskrétním prostoru nebo na obvyklé uniformitě $\mathbb{R}$). Pseudometriky, které vytvářejí stejnou uniformitu, se nazývají uniformně ekvivalentní (nebo stejnoměrně ekvivalentní). Je zřejmé, že uniformně ekvivalentní pseudometriky jsou (topologicky) ekvivalentní. Také je zřejmé, že dvě pseudometriky d, e na množině X jsou stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X : (X, d) \to (X, e), 1_X : (X, e) \to (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Pseudometrika v tvrzení o metrizovatelnosti normálních posloupností je hrubší než daná normální posloupnost a tedy každá uniformita je infimem množiny všech pseudometrických hrubších prostorů. Existuje tedy jednoznačný vztah mezi uniformitami a jistými množinami pseudometrik. Axiómy pro tyto množiny $\mathfrak{M}$ pseudometrik na množině X lze snadno nalézt:

1. pro $d_1, d_2 \in \mathfrak{M}$ je $\sup(d_1, d_2) \in \mathfrak{M}$;
2. $d \in \mathfrak{M}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $d' \in \mathfrak{M}$ a $\delta > 0$ tak, že $d(x, y) < \varepsilon$ jakmile $d'(x, y) < \delta$.

Lze tedy říci, že uniformní prostory zobecňují pseudometrické prostory tím, že místo jedné pseudometriky se zkoumají vhodné množiny pseudometrik.

Lze očekávat, že daná pseudometrizovatelná uniformita může být vytvořena různými pseudometrikami (najděte příklady např. na uniformně diskrétním prostoru nebo na obvyklé uniformitě $\mathbb{R}$). Pseudometriky, které vytvářejí stejnou uniformitu, se nazývají uniformně ekvivalentní (nebo stejnoměrně ekvivalentní). Je zřejmé, že uniformně ekvivalentní pseudometriky jsou (topologicky) ekvivalentní. Také je zřejmé, že dvě pseudometriky d, e na množině X jsou stejnoměrně ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X : (X, d) \to (X, e), 1_X : (X, e) \to (X, d)$ jsou stejnoměrně spojitá.

$\Rightarrow$

Uniformní ekvivalence pseudometrik se někdy hůře dokazuje, a proto se často používá speciální případ, tzv. lipschitzovská ekvivalence.

Zobrazení $f:(X,d)\to(Y,e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá lipschitzovsky spojitá (nebo jen lipschitzovská), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x),f(y))\le rd(x,y)$ pro všechna $x,y\in X$. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité.
Dvě pseudometriky d,e na množině X se pak nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X:(X,d)\to(X,e), 1_X:(X,e)\to(X,d)$ jsou lipschitzovská. Znamená to, že existují dvě kladné konstanty r,s tak, že

$$rd(x,y)\le e(x,y)\le sd(x,y) \quad \text{pro všechna } x,y\in X\,.$$

Lze jít ještě o něco dále a místo lipschitzovských zobrazení vzít jejich zobecnění, tzv. hölderovská zobrazení.

Zobrazení $f:(X,d)\to(Y,e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá hölderovsky spojitá (nebo jen hölderovské) stupně $\alpha\ge 0$ (nebo α-hölderovské), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x),f(y))\le rd^\alpha(x,y)$ pro všechna $x,y\in X$. Pro $\alpha=1$ se dostávají lipschitzovská zobrazení. Každé hölderovské zobrazení stupně $\alpha>0$ je stejnoměrně spojité. Nyní je možné definovat α-hölderovsky ekvivalentní pseudometriky podobným způsobem, jako předchozí ekvivalence.

Uniformní ekvivalence pseudometrik se někdy hůře dokazuje, a proto se často používá speciální případ, tzv. lipschitzovská ekvivalence.

Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá lipschitzovsky spojitá (nebo jen lipschitzovská), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité.

Dvě pseudometriky d, e na množině X se pak nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X : (X, d) \to (X, e), 1_X : (X, e) \to (X, d)$ jsou lipschitzovská. Znamená to, že existují dvě kladné konstanty r, s tak, že

$$rd(x, y) \leq e(x, y) \leq sd(x, y) \quad \text{pro všechna } x, y \in X\,.$$

Lze jít ještě o něco dále a místo lipschitzovských zobrazení vzít jejich zobecnění, tzv. hölderovská zobrazení.

Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá hölderovsky spojitá (nebo jen hölderovské) stupně $\alpha \geq 0$ (nebo α-hölderovské), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x), f(y)) \leq rd^\alpha(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Pro $\alpha = 1$ se dostávají lipschitzovská zobrazení. Každé hölderovské zobrazení stupně $\alpha > 0$ je stejnoměrně spojité. Nyní je možné definovat α-hölderovsky ekvivalentní pseudometriky podobným způsobem, jako předchozí ekvivalence.

Uniformní ekvivalence pseudometrik se někdy hůře dokazuje, a proto se často používá speciální případ, tzv. lipschitzovská ekvivalence.

Zobrazení $f:(X,d)\to(Y,e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá lipschitzovsky spojitá (nebo jen lipschitzovská), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x),f(y))\leq rd(x,y)$ pro všechna $x,y\in X$. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité.
Dvě pseudometriky d,e na množině X se pak nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X:(X,d)\to(X,e), 1_X:(X,e)\to(X,d)$ jsou lipschitzovská. Znamená to, že existují dvě kladné konstanty r,s tak, že

$$rd(x,y)\leq e(x,y)\leq sd(x,y)\quad \text{pro všechna } x,y\in X\,.$$

Lze jít ještě o něco dále a místo lipschitzovských zobrazení vzít jejich zobecnění, tzv. hölderovská zobrazení.

Zobrazení $f:(X,d)\to(Y,e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá hölderovsky spojitá (nebo jen hölderovské) stupně $\alpha\geq 0$ (nebo α-hölderovské), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x),f(y))\leq rd^\alpha(x,y)$ pro všechna $x,y\in X$. Pro $\alpha=1$ se dostávají lipschitzovská zobrazení. Každé hölderovské zobrazení stupně $\alpha>0$ je stejnoměrně spojité. Nyní je možné definovat α-hölderovsky ekvivalentní pseudometriky podobným způsobem, jako předchozí ekvivalence.

Uniformní ekvivalence pseudometrik se někdy hůře dokazuje, a proto se často používá speciální případ, tzv. lipschitzovská ekvivalence.

Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá lipschitzovsky spojitá (nebo jen lipschitzovská), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x), f(y)) \leq rd(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité.
Dvě pseudometriky d, e na množině X se pak nazývají lipschitzovsky ekvivalentní, jestliže identická zobrazení $1_X : (X, d) \to (X, e), 1_X : (X, e) \to (X, d)$ jsou lipschitzovská. Znamená to, že existují dvě kladné konstanty r, s tak, že

$$rd(x, y) \leq e(x, y) \leq sd(x, y) \quad \text{pro všechna } x, y \in X\,.$$

Lze jít ještě o něco dále a místo lipschitzovských zobrazení vzít jejich zobecnění, tzv. hölderovská zobrazení.

Zobrazení $f : (X, d) \to (Y, e)$ mezi pseudometrickými prostory se nazývá hölderovsky spojitá (nebo jen hölderovské) stupně $\alpha \geq 0$ (nebo α-hölderovské), jestliže existuje konstanta r tak, že $e(f(x), f(y)) \leq rd^\alpha(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Pro $\alpha = 1$ se dostávají lipschitzovská zobrazení. Každé hölderovské zobrazení stupně $\alpha > 0$ je stejnoměrně spojité. Nyní je možné definovat α-hölderovsky ekvivalentní pseudometriky podobným způsobem, jako předchozí ekvivalence.

Pokud se oslabí axiómy uniformity, nemusí mít soustavy $\mathcal{U}[x]$ vlastnosti okolí bodu x v nějaké topologii. Podstatná je zde tranzitivita, symetrie podstatná není. Vynecháním axiómu symetrie se dostanou tzv. kvaziuniformity; každý uniformní prostor je vytvořen nějakým kvaziuniformním prostorem. Přidáním jednoduchého axiómu symetrie se toto vytváření podstatně zúží na úplně regulární prostory.

V popisu uzávěru pomocí uniformity není třeba tranzitivita, ale uzávěr pak nemusí být idempotentní. Vynechá-li se v axiómech uniformity tranzitivita, dostanou se tzv. semiuniformity, které vytvářejí tzv. uzávěrové prostory (prostor s uzávěrem, který obecně nesplňuje idempotenci), navíc symetrické (tj. $x \in \overline{y}$ pokud $y \in \overline{x}$).

Uvědomte si, proč se říká nejjemnější uniformitě *uniformně diskrétní*, kdežto nejhrubší jen *indiskrétní*. Diskrétní uniformita podle naší úmluvy je uniformita, která vytváří diskrétní topologii; takových uniformit je na nekonečném prostoru mnoho (viz příklady). Na indiskrétním topologickém prostoru však existuje jediná uniformita, proto nemůže dojít k nedorozumění. Pokud však použijete termín uniformně indiskrétní uniformita, chybu neuděláte.

Na indiskrétním topologickém prostoru existuje jediná uniformita i proto, že takový prostor je kompaktní. My jsme uvedli větu, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je vytvořen jedinou uniformitou. Toto tvrzení platí i pro úplně regulární kompaktní prostory (jednoduchý důkaz vyplývá z tvrzení pro Hausdorffovy prostory).

Pokud se oslabí axiómy uniformity, nemusí mít soustavy $\mathcal{U}[x]$ vlastnosti okolí bodu x v nějaké topologii. Podstatná je zde tranzitivita, symetrie podstatná není. Vynecháním axiómu symetrie se dostanou tzv. kvaziuniformity; každý uniformní prostor je vytvořen nějakým kvaziuniformním prostorem. Přidáním jednoduchého axiómu symetrie se toto vytváření podstatně zúží na úplně regulární prostory.

V popisu uzávěru pomocí uniformity není třeba tranzitivita, ale uzávěr pak nemusí být idempotentní. Vynechá-li se v axiómech uniformity tranzitivita, dostanou se tzv. semiuniformity, které vytvářejí tzv. uzávěrové prostory (prostor s uzávěrem, který obecně nesplňuje idempotenci), navíc symetrické (tj. $x \in \overline{y}$ pokud $y \in \overline{x}$).

Uvědomte si, proč se říká nejjemnější uniformitě *uniformně diskrétní*, kdežto nejhrubší jen *indiskrétní*. Diskrétní uniformita podle naší úmluvy je uniformita, která vytváří diskrétní topologii; takových uniformit je na nekonečném prostoru mnoho (viz příklady). Na indiskrétním topologickém prostoru však existuje jediná uniformita, proto nemůže dojít k nedorozumění. Pokud však použijete termín uniformně indiskrétní uniformita, chybu neuděláte.

Na indiskrétním topologickém prostoru existuje jediná uniformita i proto, že takový prostor je kompaktní. My jsme uvedli větu, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je vytvořen jedinou uniformitou. Toto tvrzení platí i pro úplně regulární kompaktní prostory (jednoduchý důkaz vyplývá z tvrzení pro Hausdorffovy prostory).

Pokud se oslabí axiómy uniformity, nemusí mít soustavy $\mathcal{U}[x]$ vlastnosti okolí bodu x v nějaké topologii. Podstatná je zde tranzitivita, symetrie podstatná není. Vynecháním axiómu symetrie se dostanou tzv. kvaziuniformity; každý uniformní prostor je vytvořen nějakým kvaziuniformním prostorem. Přidáním jednoduchého axiómu symetrie se toto vytváření podstatně zúží na úplně regulární prostory.

V popisu uzávěru pomocí uniformity není třeba tranzitivita, ale uzávěr pak nemusí být idempotentní. Vynechá-li se v axiómech uniformity tranzitivita, dostanou se tzv. semiuniformity, které vytvářejí tzv. uzávěrové prostory (prostor s uzávěrem, který obecně nesplňuje idempotenci), navíc symetrické (tj. $x \in \overline{y}$ pokud $y \in \overline{x}$).

Uvědomte si, proč se říká nejjemnější uniformitě *uniformně diskrétní*, kdežto nejhrubší jen *indiskrétní*. Diskrétní uniformita podle naší úmluvy je uniformita, která vytváří diskrétní topologii; takových uniformit je na nekonečném prostoru mnoho (viz příklady). Na indiskrétním topologickém prostoru však existuje jediná uniformita, proto nemůže dojít k nedorozumění. Pokud však použijete termín uniformně indiskrétní uniformita, chybu neuděláte.

Na indiskrétním topologickém prostoru existuje jediná uniformita i proto, že takový prostor je kompaktní. My jsme uvedli větu, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je vytvořen jedinou uniformitou. Toto tvrzení platí i pro úplně regulární kompaktní prostory (jednoduchý důkaz vyplývá z tvrzení pro Hausdorffovy prostory).

Pokud se oslabí axiómy uniformity, nemusí mít soustavy $\mathcal{U}[x]$ vlastnosti okolí bodu x v nějaké topologii. Podstatná je zde tranzitivita, symetrie podstatná není. Vynecháním axiómu symetrie se dostanou tzv. kvaziuniformity; každý uniformní prostor je vytvořen nějakým kvaziuniformním prostorem. Přidáním jednoduchého axiómu symetrie se toto vytváření podstatně zúží na úplně regulární prostory.

V popisu uzávěru pomocí uniformity není třeba tranzitivita, ale uzávěr pak nemusí být idempotentní. Vynechá-li se v axiómech uniformity tranzitivita, dostanou se tzv. semiuniformity, které vytvářejí tzv. uzávěrové prostory (prostor s uzávěrem, který obecně nesplňuje idempotenci), navíc symetrické (tj. $x \in \overline{y}$ pokud $y \in \overline{x}$).

Uvědomte si, proč se říká nejjemnější uniformitě *uniformně diskrétní*, kdežto nejhrubší jen *indiskrétní*. Diskrétní uniformita podle naší úmluvy je uniformita, která vytváří diskrétní topologii; takových uniformit je na nekonečném prostoru mnoho (viz příklady). Na indiskrétním topologickém prostoru však existuje jediná uniformita, proto nemůže dojít k nedorozumění. Pokud však použijete termín uniformně indiskrétní uniformita, chybu neuděláte.

Na indiskrétním topologickém prostoru existuje jediná uniformita i proto, že takový prostor je kompaktní. My jsme uvedli větu, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je vytvořen jedinou uniformitou. Toto tvrzení platí i pro úplně regulární kompaktní prostory (jednoduchý důkaz vyplývá z tvrzení pro Hausdorffovy prostory).

Podle tvrzení ze cvičení má každá uniformita bázi složenou z otevřených okolí diagonály, resp. z otevřených pokrytí. Přirozenou otázkou je, zda soustava všech otevřených okolí (resp. všech otevřených pokrytí) úplně regulárního prostoru je bází nějaké uniformity. Odpověď je záporná, jak ukazuje prostor ω_1.

Pokud by však soustava všech otevřených okolí (resp. všech otevřených pokrytí) úplně regulárního prostoru X byla bází nějaké uniformity, lze očekávat, že X bude mít nějaké pěkné vlastnosti. Vskutku tomu tak je a je vhodné takovým prostorům přiřadit termín. U pokrytí jsme se s následujícím termínem již setkali, u okolí diagonály tomu tak není, protože tyto topologické prostory nejsou tak důležité – nebudeme se tedy o nich již zmiňovat.

Je zřejmé, že pokud je uniformita tvořená všemi otevřenými okolími diagonály nebo všemi otevřenými pokrytími, je jemná. Dále je snadné ukázat, že pokud všechna otevřená pokrytí tvoří bázi uniformity, tvoří i všechna okolí diagonály bázi uniformity (stejné). Opak nemusí platit (příkladem takového prostoru je ω_1).

Pokud by však soustava všech otevřených okolí (resp. všech otevřených pokrytí) úplně regulárního prostoru X byla bází nějaké uniformity, lze očekávat, že X bude mít nějaké pěkné vlastnosti. Vskutku tomu tak je a je vhodné takovým prostorům přiřadit termín. U pokrytí jsme se s následujícím termínem již setkali, u okolí diagonály tomu tak není, protože tyto topologické prostory nejsou tak důležité – nebudeme se tedy o nich již zmiňovat.

Je zřejmé, že pokud je uniformita tvořená všemi otevřenými okolími diagonály nebo všemi otevřenými pokrytími, je jemná. Dále je snadné ukázat, že pokud všechna otevřená pokrytí tvoří bázi uniformity, tvoří i všechna okolí diagonály bázi uniformity (stejné). Opak nemusí platit (příkladem takového prostoru je ω_1).

Pokud by však soustava všech otevřených okolí (resp. všech otevřených pokrytí) úplně regulárního prostoru X byla bází nějaké uniformity, lze očekávat, že X bude mít nějaké pěkné vlastnosti. Vskutku tomu tak je a je vhodné takovým prostorům přiřadit termín. U pokrytí jsme se s následujícím termínem již setkali, u okolí diagonály tomu tak není, protože tyto topologické prostory nejsou tak důležité – nebudeme se tedy o nich již zmiňovat.

Je zřejmé, že pokud je uniformita tvořená všemi otevřenými okolími diagonály nebo všemi otevřenými pokrytími, je jemná. Dále je snadné ukázat, že pokud všechna otevřená pokrytí tvoří bázi uniformity, tvoří i všechna okolí diagonály bázi uniformity (stejné). Opak nemusí platit (příkladem takového prostoru je ω_1).

DEFINICE (Parakompaktní prostory)

Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ se nazývá parakompaktní, jestliže množina všech jeho otevřených pokrytí tvoří uniformitu, která vytváří topologii $\mathcal{G}$.

Pozorování o parakompaktních prostorech

1. Každý parakompaktní prostor je úplně regulární.
2. Úplně regulární prostor je parakompaktní právě když každé jeho otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění.
3. Každý parakompaktní prostor je normální (k důkazu se použije charakterizace normality pomocí pokrytí).
4. Každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.

DEFINICE (Parakompaktní prostory)

Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ se nazývá parakompaktní, jestliže množina všech jeho otevřených pokrytí tvoří uniformitu, která vytváří topologii $\mathcal{G}$.

Parakompaktní prostory budou studovány podrobně v dalších kapitolách, nyní se zmíníme jen o jednoduchých vlastnostech. Obvykle se definují pomocí lokálně konečných zjemnění (úplně regulární prostor, ve kterém má každé otevřené pokrytí lokálně konečné otevřené zjemnění) – tato definice i ta předchozí jsou ekvivalentní.

Pozorování o parakompaktních prostorech

1. Každý parakompaktní prostor je úplně regulární.
2. Úplně regulární prostor je parakompaktní právě když každé jeho otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění.
3. Každý parakompaktní prostor je normální (k důkazu se použije charakterizace normality pomocí pokrytí).
4. Každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.

DEFINICE (Parakompaktní prostory)

Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ se nazývá parakompaktní, jestliže množina všech jeho otevřených pokrytí tvoří uniformitu, která vytváří topologii $\mathcal{G}$.

Pozorování o parakompaktních prostorech

1. Každý parakompaktní prostor je úplně regulární.
2. Úplně regulární prostor je parakompaktní právě když každé jeho otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění.
3. Každý parakompaktní prostor je normální (k důkazu se použije charakterizace normality pomocí pokrytí).
4. Každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.

DEFINICE (Parakompaktní prostory)

Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ se nazývá parakompaktní, jestliže množina všech jeho otevřených pokrytí tvoří uniformitu, která vytváří topologii $\mathcal{G}$.

Pozorování o parakompaktních prostorech

1. Každý parakompaktní prostor je úplně regulární.
2. Úplně regulární prostor je parakompaktní právě když každé jeho otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění.
3. Každý parakompaktní prostor je normální (k důkazu se použije charakterizace normality pomocí pokrytí).
4. Každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.

DEFINICE (Parakompaktní prostory)

Topologický prostor $(X, \mathcal{G})$ se nazývá parakompaktní, jestliže množina všech jeho otevřených pokrytí tvoří uniformitu, která vytváří topologii $\mathcal{G}$.

Pozorování o parakompaktních prostorech

1. Každý parakompaktní prostor je úplně regulární.
2. Úplně regulární prostor je parakompaktní právě když každé jeho otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění.
3. Každý parakompaktní prostor je normální (k důkazu se použije charakterizace normality pomocí pokrytí).
4. Každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní.

Ze cvičení a z příkladů vyplývají různé vztahy mezi topologicky a uniformně nuldimenzionálními prostory. Můžeme je nyní shrnout.

Každý uniformně nuldimenzionální prostor je zřejmě i (topologicky) nuldimenzionální. Na nuldimenzionálním prostoru však může existovat uniformita, která není uniformně nuldimenzionální, ale vždy na něm existuje uniformně nuldimenzionální uniformita.
Má-li tedy úplně regulární prostor X jen jedinou uniformitu $\mathcal{U}$, která ho vytváří, je X nuldimenzionální právě když je $\mathcal{U}$ uniformně nuldimenzionální.
Odtud vyplývá, že uniformita kompaktního nuldimenzionálního prostoru je uniformně nuldimenzionální a uniformita na ω_1 je také uniformně nuldimenzionální.

Je otázka, zda mezi uniformně nuldimenzionálními uniformitami na nuldimenzionálním topologickém prostoru existují nějaké speciální.
Nechť X je nuldimenzionální topologický prostor. Je jeho jemná uniformita uniformně nuldimenzionální? To by znamenalo, že každé uniformní pokrytí má disjunktní otevřené zjemnění. Speciálně pro parakompaktní prostor by to znamenalo, že každé otevřené pokrytí má disjunktní otevřené zjemnění. To obecně neplatí, ale příklad není jednoduchý. Platí to pro lokálně kompaktní parakompaktní prostory nebo pro Lindelöfovy regulární prostory.

Ze cvičení a z příkladů vyplývají různé vztahy mezi topologicky a uniformně nuldimenzionálními prostory. Můžeme je nyní shrnout.

Každý uniformně nuldimenzionální prostor je zřejmě i (topologicky) nuldimenzionální. Na nuldimenzionálním prostoru však může existovat uniformita, která není uniformně nuldimenzionální, ale vždy na něm existuje uniformně nuldimenzionální uniformita.
Má-li tedy úplně regulární prostor X jen jedinou uniformitu $\mathcal{U}$, která ho vytváří, je X nuldimenzionální právě když je $\mathcal{U}$ uniformně nuldimenzionální.
Odtud vyplývá, že uniformita kompaktního nuldimenzionálního prostoru je uniformně nuldimenzionální a uniformita na ω_1 je také uniformně nuldimenzionální.

Je otázka, zda mezi uniformně nuldimenzionálními uniformitami na nuldimenzionálním topologickém prostoru existují nějaké speciální.
Nechť X je nuldimenzionální topologický prostor. Je jeho jemná uniformita uniformně nuldimenzionální? To by znamenalo, že každé uniformní pokrytí má disjunktní otevřené zjemnění. Speciálně pro parakompaktní prostor by to znamenalo, že každé otevřené pokrytí má disjunktní otevřené zjemnění. To obecně neplatí, ale příklad není jednoduchý. Platí to pro lokálně kompaktní parakompaktní prostory nebo pro Lindelöfovy regulární prostory.

Ze cvičení a z příkladů vyplývají různé vztahy mezi topologicky a uniformně nuldimenzionálními prostory. Můžeme je nyní shrnout.

Každý uniformně nuldimenzionální prostor je zřejmě i (topologicky) nuldimenzionální. Na nuldimenzionálním prostoru však může existovat uniformita, která není uniformně nuldimenzionální, ale vždy na něm existuje uniformně nuldimenzionální uniformita.
Má-li tedy úplně regulární prostor X jen jedinou uniformitu $\mathcal{U}$, která ho vytváří, je X nuldimenzionální právě když je $\mathcal{U}$ uniformně nuldimenzionální.
Odtud vyplývá, že uniformita kompaktního nuldimenzionálního prostoru je uniformně nuldimenzionální a uniformita na ω_1 je také uniformně nuldimenzionální.

Je otázka, zda mezi uniformně nuldimenzionálními uniformitami na nuldimenzionálním topologickém prostoru existují nějaké speciální.
Nechť X je nuldimenzionální topologický prostor. Je jeho jemná uniformita uniformně nuldimenzionální? To by znamenalo, že každé uniformní pokrytí má disjunktní otevřené zjemnění. Speciálně pro parakompaktní prostor by to znamenalo, že každé otevřené pokrytí má disjunktní otevřené zjemnění. To obecně neplatí, ale příklad není jednoduchý. Platí to pro lokálně kompaktní parakompaktní prostory nebo pro Lindelöfovy regulární prostory.

Uniformní prostory nelze charakterizovat pomocí konvergence, to se dá očekávat. Existuje nějaká „zobecněná konvergence", pomocí které lze uniformity popsat? Návod dává důkaz tvrzení, že každá uniformita je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního uniformního prostoru. Tento uniformní prostor je tvořen dvěma usměrněnými soubory, které s postupem indexů jsou k sobě blíže a blíže.

DEFINICE (Přilehlé soubory)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Dva usměrněné soubory $\{x_a\}_A$, $\{y_a\}_A$ v X se nazývají přilehlé v $(X,\mathcal{U})$, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, y_b) \in U$ pro každé $b \geq a$.

Jinými slovy, dva usměrněné soubory $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ v X jsou přilehlé, jestliže soubor $\{(x_a, y_a)\}_A$ konverguje k diagonále (mající za filtr okolí soustavu $\mathcal{U}$).

Uniformní prostory nelze charakterizovat pomocí konvergence, to se dá očekávat. Existuje nějaká „zobecněná konvergence", pomocí které lze uniformity popsat? Návod dává důkaz tvrzení, že každá uniformita je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního uniformního prostoru. Tento uniformní prostor je tvořen dvěma usměrněnými soubory, které s postupem indexů jsou k sobě blíže a blíže.

DEFINICE (Přilehlé soubory)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Dva usměrněné soubory $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ v X se nazývají přilehlé v $(X,\mathcal{U})$, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, y_b) \in U$ pro každé $b \geq a$.

Jinými slovy, dva usměrněné soubory $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ v X jsou přilehlé, jestliže soubor $\{(x_a, y_a)\}_A$ konverguje k diagonále (mající za filtr okolí soustavu $\mathcal{U}$).

Uniformní prostory nelze charakterizovat pomocí konvergence, to se dá očekávat. Existuje nějaká „zobecněná konvergence”, pomocí které lze uniformity popsat? Návod dává důkaz tvrzení, že každá uniformita je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního uniformního prostoru. Tento uniformní prostor je tvořen dvěma usměrněnými soubory, které s postupem indexů jsou k sobě blíže a blíže.

DEFINICE (Přilehlé soubory)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor. Dva usměrněné soubory $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ v X se nazývají přilehlé v $(X,\mathcal{U})$, jestliže pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $a \in A$ tak, že $(x_b, y_b) \in U$ pro každé $b \geq a$.

Jinými slovy, dva usměrněné soubory $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ v X jsou přilehlé, jestliže soubor $\{(x_a, y_a)\}_A$ konverguje k diagonále (mající za filtr okolí soustavu $\mathcal{U}$).

Je celkem zřejmé, že množiny dvojic přilehlých usměrněných souborů jsou různé pro různé uniformity. Uniformity se tedy dají pomocí těchto množin popsat. Nicméně, podobně jako u konvergence v topologii jsou některé vlastnosti potřebné pro tento popis složité a nebudeme je uvádět. Je však jednoduché popsat některé podstatné vlastnosti, obdobné těm v konvergenci.

TVRZENÍ (Vlastnosti přilehlých usměrněných souborů)

Nechť $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ jsou usměrněné soubory v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$.

1. *Jsou-li $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ přilehlé, jsou přilehlé i $\{x_a\}_B, \{y_a\}_B$, kde B je konfinální část v A.*
2. *Soubor $\{x_a\}_A$ konverguje k $x \in X$ právě když soubory $\{x_a\}_A, \{x\}_A$ jsou přilehlé.*
3. *Relace přilehlosti je ekvivalence.*

Je celkem zřejmé, že množiny dvojic přilehlých usměrněných souborů jsou různé pro různé uniformity. Uniformity se tedy dají pomocí těchto množin popsat. Nicméně, podobně jako u konvergence v topologii jsou některé vlastnosti potřebné pro tento popis složité a nebudeme je uvádět. Je však jednoduché popsat některé podstatné vlastnosti, obdobné těm v konvergenci.

TVRZENÍ (Vlastnosti přilehlých usměrněných souborů)

Nechť $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ *jsou usměrněné soubory v uniformním prostoru* $(X, \mathcal{U})$.

1. *Jsou-li* $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ *přilehlé, jsou přilehlé i* $\{x_a\}_B, \{y_a\}_B$, *kde* B *je konfinální část v* A.
2. *Soubor* $\{x_a\}_A$ *konverguje k* $x \in X$ *právě když soubory* $\{x_a\}_A, \{x\}_A$ *jsou přilehlé.*
3. *Relace přilehlosti je ekvivalence.*

Je celkem zřejmé, že množiny dvojic přilehlých usměrněných souborů jsou různé pro různé uniformity. Uniformity se tedy dají pomocí těchto množin popsat. Nicméně, podobně jako u konvergence v topologii jsou některé vlastnosti potřebné pro tento popis složité a nebudeme je uvádět. Je však jednoduché popsat některé podstatné vlastnosti, obdobné těm v konvergenci.

TVRZENÍ (Vlastnosti přilehlých usměrněných souborů)

Nechť $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ jsou usměrněné soubory v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$.

1. *Jsou-li $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ přilehlé, jsou přilehlé i $\{x_a\}_B, \{y_a\}_B$, kde B je konfinální část v A.*
2. *Soubor $\{x_a\}_A$ konverguje k $x \in X$ právě když soubory $\{x_a\}_A, \{x\}_A$ jsou přilehlé.*
3. *Relace přilehlosti je ekvivalence.*

Je celkem zřejmé, že množiny dvojic přilehlých usměrněných souborů jsou různé pro různé uniformity. Uniformity se tedy dají pomocí těchto množin popsat. Nicméně, podobně jako u konvergence v topologii jsou některé vlastnosti potřebné pro tento popis složité a nebudeme je uvádět. Je však jednoduché popsat některé podstatné vlastnosti, obdobné těm v konvergenci.

TVRZENÍ (Vlastnosti přilehlých usměrněných souborů)

Nechť $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ *jsou usměrněné soubory v uniformním prostoru* $(X, \mathcal{U})$.

1. *Jsou-li* $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ *přilehlé, jsou přilehlé i* $\{x_a\}_B, \{y_a\}_B$*, kde* B *je konfinální část v* A.
2. *Soubor* $\{x_a\}_A$ *konverguje k* $x \in X$ *právě když soubory* $\{x_a\}_A, \{x\}_A$ *jsou přilehlé.*
3. *Relace přilehlosti je ekvivalence.*

Je celkem zřejmé, že množiny dvojic přilehlých usměrněných souborů jsou různé pro různé uniformity. Uniformity se tedy dají pomocí těchto množin popsat. Nicméně, podobně jako u konvergence v topologii jsou některé vlastnosti potřebné pro tento popis složité a nebudeme je uvádět. Je však jednoduché popsat některé podstatné vlastnosti, obdobné těm v konvergenci.

TVRZENÍ (Vlastnosti přilehlých usměrněných souborů)

Nechť $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ jsou usměrněné soubory v uniformním prostoru $(X, \mathcal{U})$.

1. *Jsou-li $\{x_a\}_A, \{y_a\}_A$ přilehlé, jsou přilehlé i $\{x_a\}_B, \{y_a\}_B$, kde B je konfinální část v A.*
2. *Soubor $\{x_a\}_A$ konverguje k $x \in X$ právě když soubory $\{x_a\}_A, \{x\}_A$ jsou přilehlé.*
3. *Relace přilehlosti je ekvivalence.*