6. UNIFORMNÍ PROSTORY

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformních pokrytí)

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor.

1. *jsou-li $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ uniformní pokrytí množiny X, je i $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ jejím uniformním pokrytím;*
2. *pokrytí množiny X, které je zjemňováno uniformním pokrytím, je uniformní;*
3. *každé uniformní pokrytí X je hvězdovitě zjemňováno uniformním pokrytím.*

Důkaz.

1. Jestliže $\{G_i\}_I$ a $\{H_J\}_J$ jsou zjemňovány $\{U[x]\}_X$ a $\{V[x]\}_X$ resp., je $\{G_i \cap H_j; i \in I, j \in J\}$ zjemňováno $(U \cap V[x]\}_X$.
2. Tato druhá vlastnost plyne hned z definice.
3. Jestliže $V \circ V \subset U$, pak $\{V[x]\}_X$ hvězdovitě zjemňuje $\{U[x]\}_X$.

$\square$

TVRZENÍ (Uniformita pomocí uniformních pokrytí)

Nechť η je soustava pokrytí množiny X, která splňuje vlastnosti předchozí věty. Pak existuje jediná uniformita na X, která má za soustavu uniformních pokrytí právě soustavu η.

Důkaz.

Nechť $\mathcal{U}$ je množina všech relací na X, které obsahují $\bigcup\{G \times G; G \in \mathcal{G}\}$ pro nějaké $\mathcal{G} \in \eta$. Pak $\mathcal{U}$ je filtr symetrických reflexivních relací. Zbývá dokázat tranzitivitu $\mathcal{U}$. Jestliže $\mathcal{H}$ je hvězdovité zjemnění hvězdovitého zjemnění pokrytí $\mathcal{G}$ (tj. dvojité hvězdovité zjemnění), je

$\bigcup\{H \times H; H \in \mathcal{H}\} \circ \bigcup\{H \times H; H \in \mathcal{H}\} \subset \bigcup\{G \times G; G \in \mathcal{G}\}$. □

TVRZENÍ (Uniformní metrizovatelnost)

Uniformní prostor je pseudometrizovatelný právě když má spočetnou bázi.

Důkaz.

Nechť uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ má spočetnou bázi $\{U_n\}$. Můžeme předpokládat, že tato báze má vlastnosti: $U_0 = X \times X$, $U_n = U_n^{-1}$, $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ pro všechna n. Pro $x, y \in X$ položme $p(x,y) = \inf\{2^{-n}; (x,y) \in U_n\}$. Pak p je symetrická funkce anulující se na diagonále, ale trojúhelníková nerovnost nemusí být splněna. Vezměme za d supremum všech pseudometrik menších než p. To je pseudometrika popsaná vztahem $d(x,y) =$
$\inf\{\sum_{i\le n} p(x_i, x_{i+1}); \{x_i\}$ jsou konečné posloupnosti prvků X s vlastností $x_0 = x, x_{n+1} = y\}$. Zřejmě je $U_{n+1} \subset \{(x,y); d(x,y) < 2^{-n}\}$ a stačí nyní ukázat, že $\{(x,y); d(x,y) < 2^{-n-1}\} \subset U_n$. Tj., máme ukázat, že jestliže $\sum_{i\le n} p(x_i, x_{i+1}) < 2^{-n-1}$ pro nějakou posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, je $(x_1, x_{n+1}) \in U_n$.
Můžeme předpokládat, že $2^{-n-2} \le \sum_{i\le n} p(x_i, x_{i+1})$. Nechť $k \le n$ je největší index s vlastností $\sum_{i\le k} p(x_i, x_{i+1}) < 2^{-n-2}$. Zřejmě je $k < n$ a $\sum_{i\le k+1} p(x_i, x_{i+1}) \ge 2^{-n-2}$, takže $\sum_{k+2\le i\le n} p(x_i, x_{i+1}) < 2^{-n-2}$. Odtud dostáváme
$(x_1, x_{k+1} \in U_k \subset U_{n-1}, (x_{k+1}, x_{k+2}) \in U_{n-1}, (x_{k+2}, x_{n+1}) \in U_{n-1}$, takže
$((x_1, x_{n+1}) \in U_{n-1} \circ U_{n-1} \circ U_{n-1} \subset U_n$. $\square$

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že jsou-li $\mathcal{U}_a$ uniformity na množině X, je $\bigcup_a \mathcal{U}_a$ subbáze uniformity na X. $\square$

TVRZENÍ (Stejnoměrná spojitost a suprema, infima)

Je-li f stejnoměrně spojité zobrazení $(X,\mathcal{U}_a) \to (Y,\mathcal{V}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f stejnoměrně spojité i jako zobrazení $(X,\sup_A \mathcal{U}_a) \to (Y,\sup_A \mathcal{V}_a)$ a $(X,\inf_A \mathcal{U}_a) \to (Y,\inf_A \mathcal{V}_a)$.

Důkaz.

Důkaz plyne z popisu infima a suprema uniformit □

TVRZENÍ (Slabá uniformita)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor uniformních prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší uniformita $\mathcal{U}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X,\mathcal{U}) \to Y_a$ jsou stejnoměrně spojitá.

Důkaz.

Podobně jako u topologických prostorů plyne tato věta z tvrzení o stejnoměrně spojitosti na supremu uniformit. □

TVRZENÍ (Vnoření do součinu pseudometrických prostorů)

Každý uniformní prostor lze stejnoměrně vnořit do součinu pseudometrických prostorů.

Důkaz.

Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a $U \in \mathcal{U}$. Na základě tvrzení o pseudometrizaci normálních posloupností vezmeme pro normální posloupnost $\{U_n\} \subset \mathcal{U}$ s $U_0 = U$ příslušnou pseudometriku d_U. Zobrazení $1_X : (X,\mathcal{U}) \to (X, d_U)$ je stejnoměrně spojité, takže $\mathcal{U}$ je infimem uniformit všech těchto pseudometrik d_U, $U \in \mathcal{U}$. Odtud tvrzení. □

TVRZENÍ (Topologie uniformního prostoru)

Je-li $(X, \mathcal{U})$ uniformní prostor, tvoří soustavy $\{U[x]; U \in \mathcal{U}\}, x \in X$, báze okolí bodů v nějakém topologickém prostoru $(X, \mathcal{G})$.

Důkaz.

Jedinou vlastností okolí, která není triviální pro filtry $\{U[x]; U \in \mathcal{U}\}$, je poslední vlastnost. Pro $U \in \mathcal{U}$ vezmeme symetrické $V \in \mathcal{U}$ s vlastností $V \circ V \subset U$. Potom $U[x]$ je okolím každého bodu z $V[x]$. □

TVRZENÍ (Uzávěr uniformní topologie)

Uzávěr v topologii vytvořené uniformitou $\mathcal{U}$ je dán vzorcem

$$\overline{A} = \bigcap \{U[A]; U \in \mathcal{U}\}\,.$$

Důkaz.

Nechť $x \in \overline{A}$ a $U \in \mathcal{U}$ je symetrická relace. Pak existuje $a \in A$ tak, že $(x, a) \in U$, takže $x \in U[a] \subset U[A]$. Tento postup lze i otočit, takže se dostane zbývající inkluze. □

TVRZENÍ (Zachovávání slabého vytváření)

Přiřazení topologií uniformitám zachovává slabé vytváření.

Důkaz.

Nechť $f_a : (X,\mathcal{U}) \to (Y_a,\mathcal{U}_a)$ je slabě vytvářející soubor v uniformních prostorech. Pak uniformita $\mathcal{U}$ má za subbázi $\{(f_a \times f_a)^{-1}(U); U \in \mathcal{U}_a, a \in A\}$ a tedy jí vytvořená topologie má otevřenou subbázi $\{(f_a \times f_a)^{-1}(U)[x]; U \in \mathcal{U}_a, a \in A, x \in X\}$.
Topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}_a$ má otevřenou bázi $\{U[y]; U \in \mathcal{U}_a, y \in Y_a\}$ a tedy slabá topologie vytvořená zobrazeními f_a na X do těchto topologických prostorů má otevřenou subbázi $\{f_a^{-1}((U)[y]); U \in \mathcal{U}_a, a \in A, y \in Y_a\}$. Protože $f_a^{-1}((U)[y]) = (f_a \times f_a)^{-1}(U)[x]$ pro $f_a(x) = y$, je tato topologie stejná jako ta vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$. $\square$

DŮSLEDEK (Uniformizovatelné topologie)

1. *Topologie je vytvořena nějakou uniformitou právě když je úplně regulární.*
2. *Pro každou úplně regulární topologii existuje nejjemnější uniformita, která ji vytváří. Tato uniformita se nazývá jemná uniformita dané topologie.*
3. *Spojité zobrazení jemné uniformity do uniformního prostoru je stejnoměrně spojité.*

Důkaz.

1. Každá uniformita se dá vnořit do součinu pseudometrických prostorů a tedy jí vytvořená topologie se dá vnořit do součinu pseudometrizovatelných topologických prostorů – musí proto být úplně regulární.

   Každý úplně regulární prostor X je slabě vytvořen nějakým souborem $f_a : X \to [0, 1]$. Vezměme uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ slabě vytvořený stejným souborem, ale nyní chápaným jako zobrazení do uniformního prostoru $[0, 1]$. Zřejmě $\mathcal{U}$ vytváří topologii topologického prostoru X.

2. Jemná uniformita je infimem všech uniformit, které vytvářejí danou úplně regulární topologii. Podle předchozí věty je topologie tohoto infima rovna infimu vytvořených topologií, a tedy daná topologie. Všimněte si, že bylo možné vzít infimum všech uniformit vytvářejících topologii hrubší než je daná topologie.

3. Nechť $f : (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ je spojité zobrazení a $\mathcal{U}$ je jemná uniformita. Uniformita $\mathcal{W}$ slabě vytvořená zobrazením f vytváří topologii hrubší než je topologie vytvořená uniformitou $\mathcal{U}$. Protože $\mathcal{U}$ je jemná, je jemnější než $\mathcal{W}$ a tedy f je stejnoměrně spojité.

□

TVRZENÍ (Uniformity na kompaktním prostoru)

Kompaktní Hausdorffův prostor je vytvářen jedinou uniformitou, která má za bázi všechna okolí diagonály (ekvivalentně, všechna otevřená (konečná) pokrytí).

Důkaz.

Každá uniformita má bázi uniformních pokrytí složenou z otevřených okolí diagonály. Musíme ukázat, že pokud $\mathcal{U}$ je uniformita na kompaktním Hausdorffově prostoru X, je každé otevřené okolí diagonály uniformní vzhledem k $\mathcal{U}$. Nechť G je otevřené okolí diagonály Δ_X a pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $(x_U, y_U) \in U \setminus G$. Nyní stačí ukázat, že uzávěr množiny všech (x_U, y_U) protíná diagonálu. Pokud ne, má každá bod $x \in X$ okolí $U_x[x]$ pro nějaké $U_x \in \mathcal{U}$ takové, že $U_x[x] \times U_x[x]$ neobsahuje žádný bod tvaru (x_U, y_U). Vybereme konečné podpokrytí z $\{U_x[x]\}_X$ odpovídající bodům $x_1, \ldots, x_n$ a vezmeme symetrické $V \in \mathcal{U}$, $V \circ V \subset U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$. Pak V je disjunktní s množinou všech (x_U, y_U), což je spor. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflexe se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.

TVRZENÍ (Vlastnosti uniformně nuldimenzionálních prostorů)

1. *Topologie vytvořená uniformně nuldimenzionálním prostorem je nuldimenzionální.*
2. *Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.*
3. *Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.*
4. *Hausdorffův uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když se dá vnořit do mocniny nějakého uniformně diskrétního prostoru.*
5. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je dědičná, součinová a uzavřená na součty.*
6. *Každý uniformní prostor je kvocientem nuldimenzionálního diskrétního prostoru.*
7. *Třída všech (Hausdorffových) uniformně nuldimenzionálních prostorů je bireflektivní (resp. epireflektivní) ve třídě všech uniformních prostorů. Příslušná reflekce se nazývá (Hausdorffova) uniformně nuldimenzionálních modifikace.*

Důkaz.