6. ZOBECNĚNÁ KOMPAKTNOST

Nápověda

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih, David Chodounský

KMA MFF UK

2008

Pro $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ uniformní pokrytí množiny X budeme značit
$\mathcal{G} \wedge \mathcal{H} = \{G \cap H; G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$.
Zápis $\mathcal{G} \prec^* \mathcal{H}$ bude značit, že $\mathcal{G}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{H}$ a $\mathcal{G} \prec \mathcal{H}$ značí $\mathcal{G}$ zjemňuje $\mathcal{H}$.
Je užitečné si uvědomit (mimo jiné) následující jednoduché vlastnosti.
Pokud $\mathcal{G} \prec^* \mathcal{H}$ potom i $\mathcal{G} \prec \mathcal{H}$.
Pokud $\mathcal{G} \prec \mathcal{U}$ a $\mathcal{G} \prec \mathcal{V}$ potom $\mathcal{G} \prec \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$.
Pokud $\mathcal{G} \prec^* \mathcal{U}$ a $\mathcal{G} \prec^* \mathcal{V}$ potom $\mathcal{G} \prec^* \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$.
Pokud $\mathcal{G} \prec^* \mathcal{H}$ a $\mathcal{U} \prec^* \mathcal{V}$, potom i $\mathcal{G} \wedge \mathcal{U} \prec^* \mathcal{H} \wedge \mathcal{V}$.

Nyní již není těžké dokázat následující charakterizace.

Buď $\mathcal{A}$ soustava pokrytí na množiny X.
Označme $M(\mathcal{A}) = \{V_1 \wedge V_2 \wedge \cdots \wedge V_n : V_i \in \mathcal{A}\}$.

TVRZENÍ

Soustava $\mathcal{A}$ je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{A}$ existuje $U \in M(\mathcal{A})$ tak, že $U \prec^* V$.
$M(\mathcal{A})$ je v tomto případě bází této uniformity.

Pro soubor $\mathcal{B}$ relací označme $N(\mathcal{B}) = \{V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n : V_i \in \mathcal{B}\}$.

TVRZENÍ

Soustava $\mathcal{B}$ reflexivních symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{B}$ existuje $U \in N(\mathcal{B})$ tak, že $U \circ U \subset V$.
$N(\mathcal{B})$ je v tomto případě bází této uniformity.

Buď $\mathcal{A}$ soustava pokrytí na množiny X.
Označme $M(\mathcal{A}) = \{V_1 \wedge V_2 \wedge \cdots \wedge V_n : V_i \in \mathcal{A}\}$.

TVRZENÍ

Soustava $\mathcal{A}$ je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{A}$ existuje $U \in M(\mathcal{A})$ tak, že $U \prec^* V$.
$M(\mathcal{A})$ je v tomto případě bází této uniformity.

Pro soubor $\mathcal{B}$ relací označme $N(\mathcal{B}) = \{V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n : V_i \in \mathcal{B}\}$.

TVRZENÍ

Soustava $\mathcal{B}$ reflexivních symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{B}$ existuje $U \in N(\mathcal{B})$ tak, že $U \circ U \subset V$.
$N(\mathcal{B})$ je v tomto případě bází této uniformity.

Buď $\mathcal{A}$ soustava pokrytí na množiny X.
Označme $M(\mathcal{A}) = \{V_1 \wedge V_2 \wedge \cdots \wedge V_n : V_i \in \mathcal{A}\}$.

TVRZENÍ

Soustava $\mathcal{A}$ je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{A}$ existuje $U \in M(\mathcal{A})$ tak, že $U \prec^* V$.
$M(\mathcal{A})$ je v tomto případě bází této uniformity.

Pro soubor $\mathcal{B}$ relací označme $N(\mathcal{B}) = \{V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n : V_i \in \mathcal{B}\}$.

TVRZENÍ

Soustava $\mathcal{B}$ reflexivních symetrických relací na množině X je subbází nějaké uniformity právě když pro každé $V \in \mathcal{B}$ existuje $U \in N(\mathcal{B})$ tak, že $U \circ U \subset V$.
$N(\mathcal{B})$ je v tomto případě bází této uniformity.

Z tohoto popisu subbází uniformit a faktu, že uniformita součinu je slabě vytvářena projekcemi, okamžitě vyplývá popis báze součinu uniformních prostorů.

Z předcházejících charekterizací již také plyne, že sjednocení jakéhokoli systému uniformit (jak ve smyslu soustav pokrytí tak i ve smyslu soustav okolí diagonály) na množině X je subbáze nejhrubší uniformity, která je jemnější než všechny uniformity tohoto systému.

Stejně lze ověřit, že pro soubor $\mathcal{U}_a$ uniformit (uniformních pokrytí) na množině X je množina všech relací (pokrytí), které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací (hvězdovitě se zjemňujících pokrytí) ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$, subbází uniformity. Je to zřejmě nejjemnější uniformita hrubší než všechny uniformity v tomto souboru.

Máme tedy dokázánu tuto větu.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Z předcházejících charekterizací již také plyne, že sjednocení jakéhokoli systému uniformit (jak ve smyslu soustav pokrytí tak i ve smyslu soustav okolí diagonály) na množině X je subbáze nejhrubší uniformity, která je jemnější než všechny uniformity tohoto systému.

Stejně lze ověřit, že pro soubor $\mathcal{U}_a$ uniformit (uniformních pokrytí) na množině X je množina všech relací (pokrytí), které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací (hvězdovitě se zjemňujících pokrytí) ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$, subbází uniformity. Je to zřejmě nejjemnější uniformita hrubší než všechny uniformity v tomto souboru.

Máme tedy dokázánu tuto větu.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

Z předcházejících charekterizací již také plyne, že sjednocení jakéhokoli systému uniformit (jak ve smyslu soustav pokrytí tak i ve smyslu soustav okolí diagonály) na množině X je subbáze nejhrubší uniformity, která je jemnější než všechny uniformity tohoto systému.

Stejně lze ověřit, že pro soubor $\mathcal{U}_a$ uniformit (uniformních pokrytí) na množině X je množina všech relací (pokrytí), které jsou prvním členem posloupnosti normálních relací (hvězdovitě se zjemňujících pokrytí) ležících v $\bigcap \mathcal{U}_a$, subbází uniformity. Je to zřejmě nejjemnější uniformita hrubší než všechny uniformity v tomto souboru.

Máme tedy dokázánu tuto větu.

TVRZENÍ (Úplný svaz uniformit)

Množina všech uniformit na dané množině tvoří úplný svaz.

TVRZENÍ

Každý nuldimenzionální topologický prostor je vytvořen uniformně nuldimenzionálním uniformním prostorem.

Důkaz.

Na nuldimenzioním prostoru jsou relace ekvivalence dané rozklady prostoru na disjunktní obojetné množiny bází uniformity, která generuje původní topologii. □

TVRZENÍ

Uniformní prostor je uniformně nuldimenzionální právě když je slabě vytvořen zobrazeními do uniformně diskrétních prostorů.

Důkaz.

Nuldimenzionalita takto slabě vytvořené uniformity je z popisu její báze zřejmá. Naopak za každou relaci ekvivalence v bázi nuldimenzionální uniformity uvažujeme přirozenou projekci do diskrétního uniformního prostoru na třídách této ekvivalence. Tato zobrazení jsou stejnoměrně spojitá a slabě vytvářejí danou uniformitu. □

TVRZENÍ

Každý parakompaktní prostor je normální.

Důkaz.

Není těžké ukázat, že tvoří-li všechna otevřená pokrytí prostoru bázi uniformních pokrytí, pak tvoří bázi nějaké uniformity i konečná otevřená pokrytí. Nyní použijeme fakt, že prostory, kde má každé konečné otevřené pokrytí otevřené hvězdovité zjemnění, jsou právě normální prostory. □

TVRZENÍ

Každý pseudometrizovatelný (X, d) *prostor je parakompaktní.*

Důkaz.

Stačí dokázat, že každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má hvězdovité otevřené zjemnění. Pro každý bod $x \in X$ tohoto prostoru najdeme reálné číslo ϵ_x takové, že pokrytí koulemi $B_{\epsilon_x}(x)$ zjemňuje pokrytí $\mathcal{U}$. Nyní ukážeme, že pokrytí koulemi $\{B_{\epsilon_x/4}(x) : x \in X\}$ je hvězdovité zjemnění původního pokrytí.
Pro $a \in X$ označme $S = \{y : a \in B_{\epsilon_y/4}(y)\}$. Platí, že pro $z \in S$ takové, že $\epsilon_z/3 > \inf\{\epsilon_y/4 : y \in S\}$, je $\text{star}_{\{B_{\epsilon_x/4}(x)\}}(a) \subset B_{\epsilon_z}(z)$.
Pokud je totiž $b \in \text{star}_{\{B_{\epsilon_x/4}(x)\}}(a)$, pak je to proto, že existuje $c \in S$, $\{a, b\} \subset B_{\epsilon_c/4}(c)$, tedy $d(a, b) < 2/4\epsilon_c < 2/3\epsilon_z$. A dále

$$d(z, b) < d(z, a) + d(a, b) < \epsilon_z/4 + 2/3\epsilon_z < \epsilon_z$$

což znamená, že $b \in B_{\epsilon_z}(z)$.

□

TVRZENÍ

Uniformita vytvořená pseudometrikou d na uniformním prostoru X je hrubší než uniformita tohoto prostoru, právě když je zobrazení $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojité.

Důkaz.

Předpokládejme nejprve, že pro každé rálné δ je $\{B_\delta(x) : x \in X\}$ uniformní pokrytí X. Zvolme uniformní pokrytí $\mathbb{R}$ ve tvaru $\{(t, t+\epsilon) : t \in \mathbb{R}\}$ (takováto pokrytí tvoří bázi uniformních pokrytí $\mathbb{R}$). Z charakterizace báze součinové uniformity víme, že $\{B_{\epsilon/4}(x) \times B_{\epsilon/4}(y) : x, y \in X\}$ je uniformní pokrytí součinu. Pokud $(r, s), (u, v) \in B_{\epsilon/4}(x) \times B_{\epsilon/4}(y)$, pak

$$|d(r,s) - d(u,v)| \leq |d(r,s) - d(r,y)| + |d(r,y) - d(x,y)| +$$

$$+|d(x,y) - d(x,v)| + |d(x,v) - d(s,v)| < \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon.$$

To znamená, že $d[B_{\epsilon/4}(x) \times B_{\epsilon/4}(y)] \subset (t, t+\epsilon)$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ a d je stejnoměrně spojitá reálná funkce na součinu.

Předpokládejme naopak, že d je stejnoměrně spojitá pseudometrika. Zvolíme-li tedy libovolné reálné ϵ, víme, že existuje uniformní pokrytí $\mathcal{C}$ prostoru $X \times X$ takové, že pro každé $(x, y), (u, v) \in C \in \mathcal{C}$ je $|d(x, y) - d(u, v)| < \epsilon$. Nyní z charakterizace báze uniformity součinu víme, že existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X takové, že $\{U \times V : U, V \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{C}$. Tedy pro $x, z \in U \in \mathcal{U}$ je $(x, x), (z, x) \in U \times U$ a proto $d(z, x) = |d(x, x) - d(z, x)| < \epsilon$. Pokrytí X koulemi $B_\epsilon(x)$ je zjemňováno uniformním pokrytím $\mathcal{U}$ a tedy je uniformní.

$\square$

TVRZENÍ

Pro každý uniformní prostor X tvoří bázi jeho uniformních pokrytí všechna otevřená uniformní pokrytí i všechna uzavřená uniformní pokrytí.

Důkaz.

Buď $\mathcal{U}$ nějaké uniformní pokrytí X. Podle věty o metrizaci normální posloupnosti existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na X taková, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 vzhledem k této metrice zjemňuje $\mathcal{U}$. To znamená, že pokrytí uzavřenými koulemi o poloměru $1/2$ a pokrytí otevřenými koulemi o poloměru $1/2$ je uzavřené respektive otevřené uniformní pokrytí X zjemňující $\mathcal{U}$. □

TVRZENÍ

Je-li pseudometrika d *stejnoměrně spojitá na uniformním prostoru* X *a* $A \subset X$*, je funkce* $d(x, A) : X \to \mathbb{R}$ *stejnoměrně spojitá.*

Důkaz.

Z předchozí věty víme, že pro každé $\epsilon \in \mathbb{R}$ existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ pro které platí $x, y \in U \in \mathcal{U} \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$. Potom víme, že pro všechna $x, y \in U \in \mathcal{U}$ platí $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < \epsilon$ a $d(x, A)$ je tedy stejnoměrně spojitá funkce. □

TVRZENÍ

Je-li spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi uniformními prostory stejnoměrně spojité na husté podmnožině $A \subset X$, je stejnoměrně spojité na X.

Důkaz.

Nejprve si uvědomme následující tvrzení, které přímo plyne z faktu, že bázi uniformních pokrytí každého prostoru tvoří jak všechna uzavřená tak i všechna otevřená uniformní pokrytí.

Zobrazení $f : X \to Y$ mezi uniformními prostory není stejnoměrně spojité právě když existuje uniformní uzavřené pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru Y takové, že pro každé otevřené uniformní pokrytí $\mathcal{V}$ prostoru X existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že pro každé $V \in \mathcal{V}$ je $V \setminus f^{-1}[U]$ neprázdná množina (takto jsme vyjádřili, že $f^{-1}[\mathcal{U}]$ není zjemňováno žádným $\mathcal{V}$).

Je-li navíc zobrazení f spojité je $V \setminus f^{-1}[U]$ neprázdná otevřená množina a tedy i $V \setminus f^{-1}[U] \cap A$ je neprázná. To ovšem znamená, že ani zúžení f na A není stejnoměrně spojité. $\square$

TVRZENÍ

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X,\mathcal{U})$. Soustava $\mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$, kde $\mathcal{G}$ probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru $(X,\mathcal{U})$, je báze okolí bodu $x \in X$.

Důkaz.

Z důkazu věty o zadání uniformity pomocí uniformních pokrytí víme, že báze uniformity na X je tvořena množinami $R_{\mathcal{G}} = \bigcup\{U \times U : U \in \mathcal{G}\}$ kde $\mathcal{G}$ probíhá bázi uniformních pokrytí prostoru X. Báze okolí bodu $x \in X$ je z definice tvořena množinami $R_{\mathcal{G}}[x]$. Nyní si stačí uvědomit $R_{\mathcal{G}}[x] = \mathrm{star}_{\mathcal{G}}(x)$. □

TVRZENÍ

Nechť X je topologický prostor vytvořený uniformním prostorem $(X, \mathcal{U})$. Každé uniformní okolí diagonály U obsahuje otevřené uniformní okolí diagonály a uzavřené uniformní okolí diagonály.

Důkaz.

Nejrve vezměme nějaké uniformní pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru X, pro které je $R_{\mathcal{G}} = \bigcup\{U \times U : U \in \mathcal{G}\}$ podmnožinou U. Z věty o metrizovatelnosti normální posloupnosti plyne existence stejnoměrně spojité pseudometriky d na X takové, že pokrytí X koulemi o poloměru 1 vzhledem k této metrice zjemňuje $R_{\mathcal{G}}$. Protože $d : X \times X \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, je $d^{-1}[[0, 1/2]]$ a $d^{-1}[[0, 1/2)]$ uzavřená respektive otevřená podmnožina U obsahující diagonálu. Stejnoměrná spojitost pseudometriky nyní zajišťuje, že tyto množiny jsou uniformními okolími diagonály. □

Z faktu, že každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní, plyne, že soubor všech otevřených pokrytí $\mathbb{R}$ tvoří bázi nějaké uniformity. Protože každá uniformita generující odpovídající topologii má bázi uniformních pokrytí složenou z otevřených uniformních pokrytí, je tato uniformita zřejmě nejjemnější uniformitou na $\mathbb{R}$. Uniformní okolí diagonály vzhledem k této uniformitě jsou všechny její otevřené nadmnožiny.

Označme $r_n = \sum_{i \in \mathbb{N}, i \leq n} 1/i$. Uvažujme pokrytí

$$\{(-\infty, r_2), \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (r_{2i}, r_{2i+2}), \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (r_{2i-1}, r_{2i+1})\}.$$

To je uniformní pokrytí vzhledem k Čechově uniformitě. Vzhledem k běžné uniformitě na $\mathbb{R}$ ale toto pokrytí není uniformní, protože jej nemůže zjemňovat žádné pokrytí sestávající z intervalů s konstatními délkami. Naopak pokrytí

$$\{(-\infty, 1)\} \cup \{(i, i+2) : i \in \omega\}$$

je uniformní pokrytí vzhledem k běžné uniformitě, není ale zjemňováno žádným konečným pokrytím a není tedy uniformní vzhledem k Čechově uniformitě.
$\mathbb{R}$ není uniformně izomorfní s intervalem $(0, 1)$. Tento prostor má totiž tuto vlastnost: Pro každé uniformní pokrytí U existuje konečná množina $F \subset (0, 1)$ pro kterou systém $\{\mathrm{star}_U(x) : x \in F\}$ pokrývá celý prostor $(0, 1)$.

Z faktu, že každý pseudometrizovatelný prostor je parakompaktní, plyne, že soubor všech otevřených pokrytí $\mathbb{R}$ tvoří bázi nějaké uniformity. Protože každá uniformita generující odpovídající topologii má bázi uniformních pokrytí složenou z otevřených uniformních pokrytí, je tato uniformita zřejmě nejjemnější uniformitou na $\mathbb{R}$. Uniformní okolí diagonály vzhledem k této uniformitě jsou všechny její otevřené nadmnožiny.

Označme $r_n = \sum_{i \in \mathbb{N}, i \leq n} 1/i$. Uvažujme pokrytí

$$\{(-\infty, r_2), \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (r_{2i}, r_{2i+2}), \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (r_{2i-1}, r_{2i+1})\}.$$

To je uniformní pokrytí vzhledem k Čechově uniformitě. Vzhledem k běžné uniformitě na $\mathbb{R}$ ale toto pokrytí není uniformní, protože jej nemůže zjemňovat žádné pokrytí sestávající z intervalů s konstatními délkami. Naopak pokrytí

$$\{(-\infty, 1)\} \cup \{(i, i+2) : i \in \omega\}$$

je uniformní pokrytí vzhledem k běžné uniformitě, není ale zjemňováno žádným konečným pokrytím a není tedy uniformní vzhledem k Čechově uniformitě.
$\mathbb{R}$ není uniformně izomorfní s intervalem $(0, 1)$. Tento prostor má totiž tuto vlastnost: Pro každé uniformní pokrytí U existuje konečná množina $F \subset (0, 1)$ pro kterou systém $\{\mathrm{star}_U(x) : x \in F\}$ pokrývá celý prostor $(0, 1)$.

Buď $\mathcal{F}$ volný filtr na (nekonečné) množině X. Pro každou množinu $F \in \mathcal{F}$ definujme relaci ekvivalence na X takto: $x \sim_F y$ právě když $\{x, y\} \subset F$.
Takto jsme zřejmě zadali bázi nuldimenzionální uniformity na X. Protože pro každý bod x existuje $F \in \mathcal{F}$ pro kterou $x \notin F$, je topologie generovaná touto uniformitou diskrétní.
Pro každé dva různé volné filtry jsou tyto uniformity také různé. Protože na každé nekonečné množině X existuje $2^{2^{|X|}}$ různých volných filtrů, máme na X množinu různých uniformit generůjících stejnou (diskrétní) topologii plné mohutnosti.
Dále si uvědomme, že nejmenší možná mohutnost báze takovéto uniformity je právě nejmenší možná velikost báze příslušného filtru. Protože na nekonečné množině vždy existují volné filtry, které nemají spočetnou bázi, nemohou být některé z těchto uniformit generovány pseudometrikou na X.
Speciálním (nejmenším) příkladem volného filtru je Fréchetům filtr
$\mathcal{F} = \{A \subset X : |X \setminus A| < \omega\}$.
Je snadné ověřit, že jemu příslušné relace ekvivalence musí být prvky každé uniformity generující na X diskrétní topologii. Jemu příslušná uniformita je tedy nejhrubší uniformita generující na X diskrétní topologii.

TVRZENÍ

Stejnoměrně spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi uniformními $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ prostory je spojité.

Důkaz.

Pro bod $y \in Y$ je báze jeho okolí tvořena množinami tvaru $V[y]$ pro $V \in \mathcal{V}$. Ze stejnoměrné spojitosti f víme, že existuje $U \in \mathcal{U}$ které je podmnožinou $(f \times f)^{-1}[V]$. To znamená, že $U[x]$ je okolí bodu $x \in f^{-1}(y)$ a $f[U[x]] \subset V[y]$. Tedy f je spojité. □

TVRZENÍ

Uniformní prostor $(X, \mathcal{U})$ *je Hausdorffův právě když* $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$.

Důkaz.

Topologie generovaná uniformitou je Hausdorffova právě když pro každé $x, y \in X$ existuje symetrické $U \in \mathcal{U}$ takové, že $U[x] \cap U[y] = \emptyset$. Tato rovnost je ekvivalentní s $(x, y) \notin U$. Odtud dokazované tvrzení. □

TVRZENÍ

Prostor X je Hausdorffův úplně regulární právě když je vytvořen uniformitou $\mathcal{U}$ s vlastností $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$.

Důkaz.

Pokud je topologie X vytvořena takovou uniformitou, stačí ověřit, že je úplně regulární. Bázi okolí bodu $a \in X$ tvoří množiny $\mathrm{star}_U(a)$ pro U uniformní pokrytí X. Uvědomme si, že $\{\mathrm{star}_U(a), \bigcup\{V \in U : a \notin V\}\}$ je také uniformní pokrytí X. Z věty o metrizovatelnosti uniformních pokrytí víme, že existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika d na X taková, že $B_1(a) \subset \mathrm{star}_U(a)$. Funkce $f(x) = \min(d(x,a),1)$ je pak spojitá reálná funkce, $f(a) = 0$ a pro $x \notin \mathrm{star}_U(a)$ je $f(x) = 1$.
Buď naopak X Hausdorffův úplně regulární topologický prostor. Označme I množinu všech spojitých reálných funkcí na X. Pro $J \in [I]^{<\omega}$ označme

$$D_J(x,y) = \max\{|f_i(x) - f_i(y)| : i \in J\}.$$

Všechna tato zobrazení jsou spojité pseudometriky na X a není těžké ověřit, že takto máme zadánu nějakou uniformitu $\mathcal{U}$ na X (pomocí množiny stejnoměrně spojitých pseudometrik). Úplná regularita X zajišťuje, že topologie generovaná touto uniformitou se shoduje s původní topologii X a Hausdorffovost implikuje $\bigcap \mathcal{U} = \Delta_X$. $\square$

TVRZENÍ

Pro každý uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$ *je* $\bigcap\mathcal{U}$ *ekvivalence na* X. *Kvocient* $(X,\mathcal{U})$ *podle této ekvivalence je Hausdorffova modifikace (reflexe) prostoru* $(X,\mathcal{U})$.

Důkaz.

Je zapotřebí ověřit tranzitivitu $\bigcap\mathcal{U}$. Předpokládejme, že $(x,y) \notin \bigcap\mathcal{U}$. Tedy existuje $U \in \mathcal{U}$, pro které $(x,y) \notin U$. Vezměme nyní $V \in \mathcal{U}$ takové, že $V \circ V \subset U$. Potom nemůže být současně $(x,z) \in V$ a $(z,y) \in V$ pro žádné $z \in X$.
Hausdorffovost kvocientu plyne okamžitě z předchozích tvrzení.
Tvrzení o reflexi plyne z faktu, že spojité zobrazení z X do Hausdorffova prostoru musí být na každé třídě $\bigcap\mathcal{U}$ konstantní. □

TVRZENÍ

Úplně regulární prostor X je normální právě když soustava všech konečných otevřených pokrytí X je báze uniformity na X.

Důkaz ($\Leftarrow$).

Mejme bázi uniformity složenou právě ze všech konečných otevřených pokrytí X. Nechť jsou A, B disjunktní uzavřené podmnožiny X. Uvažujme konečné otevřené pokrytí U pro které $U \prec^* \{X \setminus A, X \setminus B\}$. Nyní jsou $\mathrm{star}_U(A), \mathrm{star}_U(B)$ otevřené množiny obsahující A respektive B. Pokud by existoval bod $x \in \mathrm{star}_U(A) \cap \mathrm{star}_U(B)$, pak $\mathrm{star}_U(x)$ protíná v neprázdné množině A i B a nemůže být podmnožinou ani $X \setminus A$ ani $X \setminus B$. $\square$

Důkaz ($\Rightarrow$).

Předpokládejme naopak, že X je normální prostor. Musíme ověřit, že každé jeho konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U} = \{U_i : i \in n\}$ lze hvězdovitě zjemnit nějakým otevřeným konečným pokrytím. Postupujme indukcí podle $k \in n$. Položme

$$Z = X \setminus \bigcup_{k \leq j < n} U_j \ \text{a} \ Y = X \setminus \bigcup_{k+1 \leq j < n} U_j$$

a předpokládejme, že jsme našli konečný systém $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{k-1}$ otevřených podmnožin prostoru X takový, že $Z \subset \bigcup \mathcal{W}$ a

$$(\forall x \in \bigcup \mathcal{W})\, (\exists j < k)\ \mathrm{star}_{\mathcal{W}}(x) \subset U_j.$$

Buď $F = Y \setminus \bigcup \mathcal{W}$ a oddělme množiny Z a F disjunktními otevřenými $O_1 \supset Z$, $O_2 \supset F$ tak, že $O_2 \subset U_k$. Položme

$$\mathcal{W}_k = \{O_2\} \cup \{O_1 \cap W;\ W \in \mathcal{W}\} \cup \{U_k \cap W;\ W \in \mathcal{W}\}.$$

Pokrytí $\mathcal{V} = \mathcal{W}_{n-1}$ je hledané konečné otevřené pokrytí, které hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$. □

LEMMA

Nechť $\mathcal{U}$ je nějaká uniformita vytvářející topologii prostoru ω_1. Je-li $\mathcal{G}$ uniformní pokrytí na $(\omega_1, \mathcal{U})$, existuje $G \in \mathcal{G}$ obsahující nějaký interval (α, ω_1).

Důkaz.

Buď $\mathcal{H}$ otevřené uniformní pokrytí, pro které $\mathcal{H} \prec^* \mathcal{G}$. Pro každé $\beta \in \omega_1$ označme $f(\beta)$ takový ordinál v ω_1, že $(f(\beta), \beta + 1) \subset H$ pro nějaké $H \in \mathcal{H}$. Funkce $f : \omega_1 \to \omega_1$ je regresivní ($f(\beta) < \beta$) a podle Fodorova lemmatu existuje $\alpha \in \omega_1$ a neomezená množina $A \subset \omega_1$, pro kterou $f[A] = \{\alpha\}$. To znamená, že $(\alpha, \omega_1) \subset \mathrm{star}_{\mathcal{H}}(\alpha + 1)$ a tedy existuje $G \in \mathcal{G}$ obsahující interval (α, ω_1). $\square$

LEMMA

Nekompaktní prostor ω_1 je vytvářen jedinou uniformitou mající za bázi všechna konečná otevřená pokrytí.

Důkaz.

Stačí ukázat, že každé uniformní pokrytí $\mathcal{G}$ je zjemňováno nějakým konečným otevřeným pokrytím. Můžeme předpokládat, že $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí a že $(\alpha, \omega_1) \in \mathcal{G}$ pro nějaké α. $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí kompaktnního prostoru $\alpha + 1$ a existuje tedy jeho konečné podpokrytí $\mathcal{H}$. Soubor $\mathcal{H} \cup (\alpha, \omega_1)$ je konečné otevřené pokrytí $\mathcal{H}$ zjemňující $\mathcal{G}$. $\square$

LEMMA

Každá otevřená množina $H \subset \omega_1 \times \omega_1$ *obsahující diagonálu je prvkem (jediné) uniformity na* ω_1.

Důkaz.

Pro každé $\beta \in \omega_1$ najdeme $f(\beta)$ takové, že $(f(\beta), \beta + 1) \times (f(\beta), \beta + 1) \subset H$. Funkce $f : \omega_1 \to \omega_1$ je regresivní ($f(\beta) < \beta$) a podle Fodorova lemmatu existuje $\alpha \in \omega_1$ a neomezená množina $A \subset \omega_1$, pro kterou $f[A] = \{\alpha\}$. Tedy $(\alpha, \omega_1) \subset H$. Dále $H \cap (\alpha + 1 \times \alpha + 1)$ je otevřené uniformní okolí diagonály pro kompaktní prostor $\alpha + 1$ a existuje tedy $\mathcal{G}$ konečné otevřené pokrytí $\alpha + 1$ takové, že $O = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} (G \times G) \subset H$. Dohromady je $O \cup ((\alpha, \omega_1) \times (\alpha, \omega_1))$ uniformní okolí diagonály v $\omega_1 \times \omega_1$, které je podmnožinou H. $\square$

LEMMA

Racionální čísla $\mathbb{Q}$ s obvyklou metrizovatelnou uniformitou nejsou uniformně nuldimenzionální. Totéž platí i pro prostor iracionálních čísel.

Důkaz.

Buď $A \cup B = \mathbb{Q}$ rozklad racionálních čísel na neprázdné disjunktní množiny. Ukážeme, že toto pokrytí není uniformní. Protože $\mathbb{R}$ je souvislý prostor, existuje $r \in \mathbb{R}$, takové, že $r \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Nyní je již zřejmé, že pokrytí $\{A, B\}$ nemůže být zjemňováno žádným pokrytím sestávajícím z koulí s konstantními poloměry.
Pro iracionální čísla lze použít totožný argument. $\square$

LEMMA

Racionální nebo iracionální čísla s jemnou uniformitou tvoří uniformně nuldimenzionální prostory.

Důkaz.

Oba tyto prostory jsou metrizovatelné a tedy parakompaktní a báze jejich uniformity je tvořena všemi spočetnými otevřenými pokrytími z intervalů s reálnými koncovými body. Stačí tedy ověřit, že každé takové pokrytí lze zjemnit rozkladem na obojetné množiny. $\square$