5. ZOBECNĚNÁ KOMPAKTNOST

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Omezíme-li se na Hausdorffovy prostory (nebo jen na úplně regulární Hausdorffovy prostory), víme, že kompaktní prostory tvoří epireflektivní třídu s Čechovou-Stoneovou kompaktifikací β jako reflekcí. Kompaktní prostory jsou tu popsány jako prostory vnořitelné na uzavřené části mocnin $[0,1]^\kappa$ a βX jako uzávěr vnoření X do $[0,1]^{C^*(X)}$.

Kompaktnost výsledku je dána kompaktností prostoru $[0,1]$. Z úplně regulárního Hausdorffova prostoru lze na jeho Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci rozšířit každá omezená spojitá reálná funkce – omezenost těchto rozšiřitelných funkcí je opět dána použitým omezeným uzavřeným intervalem.

Co kdybychom chtěli pracovat i s neomezenými spojitými funkcemi? Stačí vzít předchozí konstrukci a jen změnit interval $[0,1]$ na $\mathbb{R}$? Opravdu to stačí a dostanou se prostory s obecnými vlastnostmi podobnými kompaktnosti.

Omezíme-li se na Hausdorffovy prostory (nebo jen na úplně regulární Hausdorffovy prostory), víme, že kompaktní prostory tvoří epireflektivní třídu s Čechovou-Stoneovou kompaktifikací β jako reflekcí. Kompaktní prostory jsou tu popsány jako prostory vnořitelné na uzavřené části mocnin $[0,1]^\kappa$ a βX jako uzávěr vnoření X do $[0,1]^{C^*(X)}$.

Kompaktnost výsledku je dána kompaktností prostoru $[0,1]$. Z úplně regulárního Hausdorffova prostoru lze na jeho Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci rozšířit každá omezená spojitá reálná funkce – omezenost těchto rozšiřitelných funkcí je opět dána použitým omezeným uzavřeným intervalem.

Co kdybychom chtěli pracovat i s neomezenými spojitými funkcemi? Stačí vzít předchozí konstrukci a jen změnit interval $[0,1]$ na $\mathbb{R}$? Opravdu to stačí a dostanou se prostory s obecnými vlastnostmi podobnými kompaktnosti.

Omezíme-li se na Hausdorffovy prostory (nebo jen na úplně regulární Hausdorffovy prostory), víme, že kompaktní prostory tvoří epireflektivní třídu s Čechovou-Stoneovou kompaktifikací β jako reflekcí. Kompaktní prostory jsou tu popsány jako prostory vnořitelné na uzavřené části mocnin $[0,1]^\kappa$ a βX jako uzávěr vnoření X do $[0,1]^{C^*(X)}$.

Kompaktnost výsledku je dána kompaktností prostoru $[0,1]$. Z úplně regulárního Hausdorffova prostoru lze na jeho Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci rozšířit každá omezená spojitá reálná funkce – omezenost těchto rozšiřitelných funkcí je opět dána použitým omezeným uzavřeným intervalem.

Co kdybychom chtěli pracovat i s neomezenými spojitými funkcemi? Stačí vzít předchozí konstrukci a jen změnit interval $[0,1]$ na $\mathbb{R}$? Opravdu to stačí a dostanou se prostory s obecnými vlastnostmi podobnými kompaktnosti.

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^\kappa$.

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^{\kappa}$.

Z definice je vidět, že každý reálně kompaktní prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor. Zřejmě je každý kompaktní Hausdorffův prostor reálně kompaktní, každý euklidovský prostor je reálně kompaktní. Spočetný diskrétní prostor je reálně kompaktní (je homeomorfní s $\mathbb{N}$).

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^{\kappa}$.

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^\kappa$.

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^\kappa$.

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

Obecná charakterizace epireflektivních tříd v Hausdorffových prostorech dává následující tvrzení:

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^{\kappa}$.

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

DEFINICE (Reálně kompaktní prostory)

Topologický prostor se nazývá reálně kompaktní, jestliže je homeomorfní uzavřené podmnožině nějaké mocniny $\mathbb{R}^\kappa$.

Následující tvrzení plyne přímo z definice:

TVRZENÍ (Součinovost a uzavřená dědičnost)

Třída reálně kompaktních prostorů je součinová a uzavřeně dědičná.

TVRZENÍ (Reálná kompaktifikace)

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je hustou částí reálně kompaktního prostoru υX, který je charakterizován vlastností, že každá spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na υX (nebo ekvivalentně, každé spojité zobrazení na X do reálně kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na υX).

Prostor υX se také nazývá Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

$\Rightarrow$

Není těžké ukázat, že υX je podprostorem βX a je to největší podmnožina v βX na kterou lze spojitě rozšířit každá reálná spojitá funkce (takže $\upsilon X = \beta X$ právě když X je pseudokompaktní $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor). Prostor ω_1 tedy není reálně kompaktní.

Víme, že βX se dá popsat jako množina $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Které z těchto $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů leží v υX? Protože na ně lze rozšiřovat neomezené spojité funkce, je jednoduché je popsat: jsou to ty $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, které mají tzv. spočetnou průnikovou vlastnost

Protože X je reálně kompaktní právě když $X = \upsilon X$, dostáváme z předchozího odstavce následující charakterizaci.

TVRZENÍ (Charakterizace reálné kompaktnosti)

$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je reálně kompaktní právě když každý jeho $\mathcal{Z}$-ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností má neprázdný průnik.

Z popisu Lindelöfových prostorů pomocí filtrů plyne snadno, že každý Lindelöfův $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je reálně kompaktní (a tedy i každý separabilní metrický prostor).

Víme, že βX se dá popsat jako množina $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Které z těchto $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů leží v υX? Protože na ně lze rozšiřovat neomezené spojité funkce, je jednoduché je popsat: jsou to ty $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, které mají tzv. spočetnou průnikovou vlastnost

Protože X je reálně kompaktní právě když $X = \upsilon X$, dostáváme z předchozího odstavce následující charakterizaci.

TVRZENÍ (Charakterizace reálné kompaktnosti)

$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je reálně kompaktní právě když každý jeho $\mathcal{Z}$-ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností má neprázdný průnik.

Z popisu Lindelöfových prostorů pomocí filtrů plyne snadno, že každý Lindelöfův $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je reálně kompaktní (a tedy i každý separabilní metrický prostor).

Víme, že βX se dá popsat jako množina $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Které z těchto $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů leží v υX? Protože na ně lze rozšiřovat neomezené spojité funkce, je jednoduché je popsat: jsou to ty $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, které mají tzv. spočetnou průnikovou vlastnost

Protože X je reálně kompaktní právě když $X = \upsilon X$, dostáváme z předchozího odstavce následující charakterizaci.

TVRZENÍ (Charakterizace reálné kompaktnosti)

$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je reálně kompaktní právě když každý jeho $\mathcal{Z}$-ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností má neprázdný průnik.

Z popisu Lindelöfových prostorů pomocí filtrů plyne snadno, že každý Lindelöfův $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je reálně kompaktní (a tedy i každý separabilní metrický prostor).

Víme, že βX se dá popsat jako množina $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Které z těchto $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů leží v υX? Protože na ně lze rozšiřovat neomezené spojité funkce, je jednoduché je popsat: jsou to ty $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, které mají tzv. spočetnou průnikovou vlastnost

Protože X je reálně kompaktní právě když $X = \upsilon X$, dostáváme z předchozího odstavce následující charakterizaci.

TVRZENÍ (Charakterizace reálné kompaktnosti)

$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je reálně kompaktní právě když každý jeho $\mathcal{Z}$-ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností má neprázdný průnik.

Z popisu Lindelöfových prostorů pomocí filtrů plyne snadno, že každý Lindelöfův $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je reálně kompaktní (a tedy i každý separabilní metrický prostor).

Víme, že βX se dá popsat jako množina $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů v X. Které z těchto $\mathcal{Z}$-ultrafiltrů leží v υX? Protože na ně lze rozšiřovat neomezené spojité funkce, je jednoduché je popsat: jsou to ty $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, které mají tzv. spočetnou průnikovou vlastnost

Protože X je reálně kompaktní právě když $X = \upsilon X$, dostáváme z předchozího odstavce následující charakterizaci.

TVRZENÍ (Charakterizace reálné kompaktnosti)

$T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X je reálně kompaktní právě když každý jeho $\mathcal{Z}$-ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností má neprázdný průnik.

Z popisu Lindelöfových prostorů pomocí filtrů plyne snadno, že každý Lindelöfův $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je reálně kompaktní (a tedy i každý separabilní metrický prostor).

Následující tvrzení už není jednoduché dokázat. Používá se tzv měřitelný kardinál, což je kardinální číslo množiny, na které existuje netriviální dvouhodnotová míra (s hodnotami 0 v bodech a hodnotou 1 na celé množině). První takový kardinál je silně nedosažitelný a existují teorie množin, kde měřitelné kardinály neexistují.

TVRZENÍ (Reálná kompaktnost metrizovatelných prostorů)

Metrizovatelný prostor je reálně kompaktní právě když má neměřitelnou mohutnost.

V praxi používané metrizovatelné prostory jsou tedy všechny reálně kompaktní. Předchozí věta má značně obecnější formulaci pomocí unifomních prostorů (tzv. Shirotova věta, která zobecňuje Katětovovu větu pro reálnou kompaktnost parakompaktních prostorů).

Následující tvrzení už není jednoduché dokázat. Používá se tzv měřitelný kardinál, což je kardinální číslo množiny, na které existuje netriviální dvouhodnotová míra (s hodnotami 0 v bodech a hodnotou 1 na celé množině). První takový kardinál je silně nedosažitelný a existují teorie množin, kde měřitelné kardinály neexistují.

TVRZENÍ (Reálná kompaktnost metrizovatelných prostorů)

Metrizovatelný prostor je reálně kompaktní právě když má neměřitelnou mohutnost.

V praxi používané metrizovatelné prostory jsou tedy všechny reálně kompaktní. Předchozí věta má značně obecnější formulaci pomocí unifomních prostorů (tzv. Shirotova věta, která zobecňuje Katětovovu větu pro reálnou kompaktnost parakompaktních prostorů).

Následující tvrzení už není jednoduché dokázat. Používá se tzv měřitelný kardinál, což je kardinální číslo množiny, na které existuje netriviální dvouhodnotová míra (s hodnotami 0 v bodech a hodnotou 1 na celé množině). První takový kardinál je silně nedosažitelný a existují teorie množin, kde měřitelné kardinály neexistují.

TVRZENÍ (Reálná kompaktnost metrizovatelných prostorů)

Metrizovatelný prostor je reálně kompaktní právě když má neměřitelnou mohutnost.

V praxi používané metrizovatelné prostory jsou tedy všechny reálně kompaktní. Předchozí věta má značně obecnější formulaci pomocí unifomních prostorů (tzv. Shirotova věta, která zobecňuje Katětovovu větu pro reálnou kompaktnost parakompaktních prostorů).

Následující tvrzení už není jednoduché dokázat. Používá se tzv měřitelný kardinál, což je kardinální číslo množiny, na které existuje netriviální dvouhodnotová míra (s hodnotami 0 v bodech a hodnotou 1 na celé množině). První takový kardinál je silně nedosažitelný a existují teorie množin, kde měřitelné kardinály neexistují.

TVRZENÍ (Reálná kompaktnost metrizovatelných prostorů)

Metrizovatelný prostor je reálně kompaktní právě když má neměřitelnou mohutnost.

V praxi používané metrizovatelné prostory jsou tedy všechny reálně kompaktní. Předchozí věta má značně obecnější formulaci pomocí unifomních prostorů (tzv. Shirotova věta, která zobecňuje Katětovovu větu pro reálnou kompaktnost parakompaktních prostorů).

Následující tvrzení už není jednoduché dokázat. Používá se tzv měřitelný kardinál, což je kardinální číslo množiny, na které existuje netriviální dvouhodnotová míra (s hodnotami 0 v bodech a hodnotou 1 na celé množině). První takový kardinál je silně nedosažitelný a existují teorie množin, kde měřitelné kardinály neexistují.

TVRZENÍ (Reálná kompaktnost metrizovatelných prostorů)

Metrizovatelný prostor je reálně kompaktní právě když má neměřitelnou mohutnost.

V praxi používané metrizovatelné prostory jsou tedy všechny reálně kompaktní. Předchozí věta má značně obecnější formulaci pomocí unifomních prostorů (tzv. Shirotova věta, která zobecňuje Katětovovu větu pro reálnou kompaktnost parakompaktních prostorů).

Jestliže P je nějaká topologická vlastnost, pak topologický prostor má vlastnost P lokálně, jestliže každý bod má bázi okolí složenou z množin majících vlastnost P.
Jestliže každý bod prostoru má aspoň jedno okolí s vlastností P, říkáme, že prostor má vlastnost P slabě lokálně.

Zřejmě lokální vlastnost implikuje slabě lokální vlastnost. V některých případech jsou lokální vlastnost a slabě lokální vlastnost ekvivalentní, např. pro vlastnost P býti spočetnou množinou, nebo v Hausdorffových prostorech pro vlastnost P býti kompaktní množinou.
V prostorech, které nejsou Hausdorffovy však lokálně kompaktní prostory a slabě lokálně kompaktní prostory jsou různé pojmy. V tomto případě jsou lokálně kompaktní prostory vhodnější než slabě lokálně kompaktní.

Pro jednobodovou kompaktifikaci je nutné brát za okolí ideálního bodu doplňky uzavřených kompaktních množin a pro oddělování bodů je pak nutné, aby prostor měl báze okolí složené z uzavřených kompaktních množin. To jsou však regulární prostory a snadno se ukáže, že i úplně regulární. Pokud se navíc dají oddělovat body, výsledkem jsou $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory (což tak musí být, protože ona jednobodová kompaktifikace je pak Hausdorffova a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$).

Jestliže P je nějaká topologická vlastnost, pak topologický prostor má vlastnost P lokálně, jestliže každý bod má bázi okolí složenou z množin majících vlastnost P.
Jestliže každý bod prostoru má aspoň jedno okolí s vlastností P, říkáme, že prostor má vlastnost P slabě lokálně.

Zřejmě lokální vlastnost implikuje slabě lokální vlastnost. V některých případech jsou lokální vlastnost a slabě lokální vlastnost ekvivalentní, např. pro vlastnost P býti spočetnou množinou, nebo v Hausdorffových prostorech pro vlastnost P býti kompaktní množinou.
V prostorech, které nejsou Hausdorffovy však lokálně kompaktní prostory a slabě lokálně kompaktní prostory jsou různé pojmy. V tomto případě jsou lokálně kompaktní prostory vhodnější než slabě lokálně kompaktní.

Pro jednobodovou kompaktifikaci je nutné brát za okolí ideálního bodu doplňky uzavřených kompaktních množin a pro oddělování bodů je pak nutné, aby prostor měl báze okolí složené z uzavřených kompaktních množin. To jsou však regulární prostory a snadno se ukáže, že i úplně regulární. Pokud se navíc dají oddělovat body, výsledkem jsou $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory (což tak musí být, protože ona jednobodová kompaktifikace je pak Hausdorffova a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$).

Jestliže P je nějaká topologická vlastnost, pak topologický prostor má vlastnost P lokálně, jestliže každý bod má bázi okolí složenou z množin majících vlastnost P.
Jestliže každý bod prostoru má aspoň jedno okolí s vlastností P, říkáme, že prostor má vlastnost P slabě lokálně.

Zřejmě lokální vlastnost implikuje slabě lokální vlastnost. V některých případech jsou lokální vlastnost a slabě lokální vlastnost ekvivalentní, např. pro vlastnost P býti spočetnou množinou, nebo v Hausdorffových prostorech pro vlastnost P býti kompaktní množinou.
V prostorech, které nejsou Hausdorffovy však lokálně kompaktní prostory a slabě lokálně kompaktní prostory jsou různé pojmy. V tomto případě jsou lokálně kompaktní prostory vhodnější než slabě lokálně kompaktní.

Pro jednobodovou kompaktifikaci je nutné brát za okolí ideálního bodu doplňky uzavřených kompaktních množin a pro oddělování bodů je pak nutné, aby prostor měl báze okolí složené z uzavřených kompaktních množin. To jsou však regulární prostory a snadno se ukáže, že i úplně regulární. Pokud se navíc dají oddělovat body, výsledkem jsou $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory (což tak musí být, protože ona jednobodová kompaktifikace je pak Hausdorffova a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$).