5. ZOBECNĚNÁ KOMPAKTNOST

Cvičení

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Podobně jako kompaktnost lze i spočetnou kompaktnost charakterizovat pomocí filtrů.

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Prostor X je spočetně kompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Prostor X je spočetně kompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik.*

Třída spočetně kompaktních prostorů není konečně součinová. Nicméně, součiny speciálních spočetně kompaktních prostorů mohou být spočetně komúpaktní. Existuje mnoho takových tvrzení, my uvedeme jen jedno základní.

TVRZENÍ (Součin spočetně kompaktních prostorů)

Součin spočetně kompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Prostor X je spočetně kompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik.*

Třída spočetně kompaktních prostorů není konečně součinová. Nicméně, součiny speciálních spočetně kompaktních prostorů mohou být spočetně komúpaktní. Existuje mnoho takových tvrzení, my uvedeme jen jedno základní.

TVRZENÍ (Součin spočetně kompaktních prostorů)

Součin spočetně kompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Prostor X je spočetně kompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik.*

Třída spočetně kompaktních prostorů není konečně součinová. Nicméně, součiny speciálních spočetně kompaktních prostorů mohou být spočetně komúpaktní. Existuje mnoho takových tvrzení, my uvedeme jen jedno základní.

TVRZENÍ (Součin spočetně kompaktních prostorů)

Součin spočetně kompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Prostor X je spočetně kompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik.*

Třída spočetně kompaktních prostorů není konečně součinová. Nicméně, součiny speciálních spočetně kompaktních prostorů mohou být spočetně komúpaktní. Existuje mnoho takových tvrzení, my uvedeme jen jedno základní.

TVRZENÍ (Součin spočetně kompaktních prostorů)

Součin spočetně kompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Prostor X je spočetně kompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bázi (nebo subbázi) má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik.*

Třída spočetně kompaktních prostorů není konečně součinová. Nicméně, součiny speciálních spočetně kompaktních prostorů mohou být spočetně komúpaktní. Existuje mnoho takových tvrzení, my uvedeme jen jedno základní.

TVRZENÍ (Součin spočetně kompaktních prostorů)

Součin spočetně kompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Důkaz předchozího tvrzení není jednoduchý. Použijte skutečnost z důkazu prvního tvrzení věty o pseudokompaktnosti spočetně kompaktního prostoru, že každý lokálně konečný soubor neprázdných množin ve spočetně kompaktním prostoru je konečný.

I pseudokompaktní prostory lze charakterizovat pomocí jistých filtrů.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzávěrů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzáverů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzáverů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzáverů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bázi (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzáverů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Pro důkaz lze použít předchozí charakterizaci pseudokompaktnosti (druhá vlastnost).

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bázi (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzávěrů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \ldots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik svých uzáverů.*

Také pro pseudokompaktní prostory existuje hodně tvrzení popisujících, kdy jejich součin je pseudokompaktní. Uvedeme podobné tvrzení jako pro spočetně kompaktní prostory.

TVRZENÍ (Součin pseudokompaktních prostorů)

Součin pseudokompaktního prostoru s kompaktním prostorem je spočetně kompaktní.

Je vhodné si uvědomit následující modifikaci definice pseudokompaktnposti.

TVRZENÍ (Pseudokompaktní prostory a diskrétní soubory)

Prostor X je pseudokompaktní právě když každá jeho diskrétní otevřená soustava je konečná.

V pseudokompatních prostorech platí známá Diniho věta:

TVRZENÍ (Dini theorem)

Jestliže monotónní posloupnost spojitých reálných funkcí bodově konverguje na pseudokompaktním prostoru ke spojité funkci, konverguje stejnoměrně.

V pseudokompatních prostorech platí známá Diniho věta:

TVRZENÍ (Dini theorem)

Jestliže monotónní posloupnost spojitých reálných funkcí bodově konverguje na pseudokompaktním prostoru ke spojité funkci, konverguje stejnoměrně.

V pseudokompatních prostorech platí známá Diniho věta:

TVRZENÍ (Dini theorem)

Jestliže monotónní posloupnost spojitých reálných funkcí bodově konverguje na pseudokompaktním prostoru ke spojité funkci, konverguje stejnoměrně.

Po zkušenostech z převodu definice pomocí otevřených pokrytí na charakterizaci pomocí filtrů snadno dokážete následující tvrzení (filtr $\mathcal{F}$ má spočetnou průnikovou vlastnost, jestliže $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ pro každou spočetnou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$).

TVRZENÍ (Charakterizace Lindelöfových prostorů)

Prostor X je Lindelöfův právě když každý každý filtr v X se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod.

Podobně jako existuje jednobodová kompaktifikace, existuje i jednobodové rozšíření, které je Lindelöfovo.
Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je prostor $Y = X \cup \{a\}$, kde $a \notin X$, X je otevřený podprostor Y a báze okolí a jsou doplňky uzavřených Lindelöfových podprostorů X.

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

TVRZENÍ (Charakterizace Lindelöfových prostorů)

Prostor X je Lindelöfův právě když každý každý filtr v X se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod.

Podobně jako existuje jednobodová kompaktifikace, existuje i jednobodové rozšíření, které je Lindelöfovo:
Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je prostor $Y = X \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin X$, X je otevřený podprostor Y a báze okolí ∞ jsou doplňky uzavřených Lindelöfových podmnožin X.

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je Hausdorffův prostor právě když je X Hausdorffův a každý jeho bod má uzavřené Lindelöfovo okolí.

TVRZENÍ (Charakterizace Lindelöfových prostorů)

Prostor X je Lindelöfův právě když každý každý filtr v X se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod.

Podobně jako existuje jednobodová kompaktifikace, existuje i jednobodové rozšíření, které je Lindelöfovo:
Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je prostor $Y = X \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin X$, X je otevřený podprostor Y a báze okolí ∞ jsou doplňky uzavřených Lindelöfových podmnožin X.

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je Hausdorffův prostor právě když je X Hausdorffův a každý jeho bod má uzavřené Lindelöfovo okolí.

TVRZENÍ (Charakterizace Lindelöfových prostorů)

Prostor X je Lindelöfův právě když každý každý filtr v X se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod.

Podobně jako existuje jednobodová kompaktifikace, existuje i jednobodové rozšíření, které je Lindelöfovo:
Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je prostor $Y = X \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin X$, X je otevřený podprostor Y a báze okolí ∞ jsou doplňky uzavřených Lindelöfových podmnožin X.

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je Hausdorffův prostor právě když je X Hausdorffův a každý jeho bod má uzavřené Lindelöfovo okolí.

TVRZENÍ (Charakterizace Lindelöfových prostorů)

Prostor X je Lindelöfův právě když každý každý filtr v X se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod.

Podobně jako existuje jednobodová kompaktifikace, existuje i jednobodové rozšíření, které je Lindelöfovo:
Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je prostor $Y = X \cup \{\infty\}$, kde $\infty \notin X$, X je otevřený podprostor Y a báze okolí ∞ jsou doplňky uzavřených Lindelöfových podmnožin X.

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je Hausdorffův prostor právě když je X Hausdorffův a každý jeho bod má uzavřené Lindelöfovo okolí.

Samozřejmě existují i další jednobodová Lindelöfova rozšíření, např. jednobodová kompaktifikace. Dost často se používá jednobodové Lindelöfovo rozšíření diskrétního prostoru.

Podobně jako u předchozích zobecnění kompaktnosti platí i zde následující tvrzení.

TVRZENÍ (Součin Lindelöfových prostorů)

Součin Lindelöfova prostoru s kompaktním prostorem je Lindelöfův.

Uveďme ještě jednoduchou vlastnost Lindelöfových prostorů: neobsahují nespočetné uzavřené diskrétní podmnožiny.

Podobně jako u předchozích zobecnění kompaktnosti platí i zde následující tvrzení.

TVRZENÍ (Součin Lindelöfových prostorů)

Součin Lindelöfova prostoru s kompaktním prostorem je Lindelöfův.

Uveďme ještě jednoduchou vlastnost Lindelöfových prostorů: neobsahují nespočetné uzavřené diskrétní podmnožiny.

Podobně jako u předchozích zobecnění kompaktnosti platí i zde následující tvrzení.

TVRZENÍ (Součin Lindelöfových prostorů)

Součin Lindelöfova prostoru s kompaktním prostorem je Lindelöfův.

Uveďme ještě jednoduchou vlastnost Lindelöfových prostorů: neobsahují nespočetné uzavřené diskrétní podmnožiny.