5. ZOBECNĚNÁ KOMPAKTNOST

Nápověda

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih, David Chodounský

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ

Topologický prostor je pseudokompaktní právě když je jeho každý lokálně konečný soubor otevřených množin konečný.

TVRZENÍ (Charakterizace pseudokompaktnosti)

Prostor X je pseudokompaktní právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek

1. *Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) otevřených množin má hromadný bod.*
2. *Každá klesající posloupnost $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ neprázdných otevřených množin v X má neprázdný průnik svých uzáverů.*

Důkaz.

Obě podmínky jsou ekvivalentní: Je-li U_i, $i \in \omega$ otevřená sub(báze) filtru, pak $G_i = \bigcap_{n \leq i} U_i$ je klesající posloupnost neprázdných otevřených množin a bod v průniku jejich uzávěrů je hromadný bod filtru.
Naopak bod v průniku uzávěrů klesající posloupnosti otevřených neprázdných množin je hromadný bod filtru, jehož jsou tyto množiny bází.
Množiny G_i tvoří nekonečný soubor otevřených neprázdných podmnožin pseudokompaktního prostoru. Tento soubor tedy není lokálně konečný a jeho hromadný bod leží v uzávěru všech těchto množin.
Buď $f : X \to R$ spojitá. Položme $G_i = \{x \in X : i < |f(x)|\}$. Pokud by f byla neomezená, G_i splňují podmínky věty a existuje bod v jejich uzávěru. V tomto bodě však nemůže být f spojitá. Každá f je tedy omezená a X je pseudokompaktní.

□

TVRZENÍ

$T_{3\frac{1}{2}}$ *prostor je pseudokompaktní, právě když na něm jsou všechny spojité reálné funkce omezené.*

TVRZENÍ

Pro $T_{3\frac{1}{2}}$ topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. *X je pseudokompaktní.*
2. *V X platí Diniho Lemma. Tedy každá monotoní posloupnost spojitých reálných funkcí, která konverguje bodově ke spojité reálné funkci, konverguje i stejnoměrně.*

Důkaz.

Nechť posloupnost $f_n : X \to R, n \in \omega$ konverguje bodově ke spojité funkci f. Pro $\epsilon > 0$ označme $O_n = \{x \in X : |f_n - f| > \epsilon\}$. Pokud by byla všechna O_n neprázdné množiny, pak pseudokompaktnost X implikuje existenci bodu x, který leží v uzávěru všech O_n. V tom případě ale $f(x)$ nemohlo být limitou $\{f_n(x) : x \in \omega\}$.
Buď naopak X prostor, v němž platí Diniho Lemma a $f : X \to R^+$ spojitá reálná funkce. Musíme ukázat, že f je omezená.
Položme $f_n(x) = min(f(x), n)$. Pak tato posloupnost konverguje podle předpokladu k f stejnoměrně a tedy $f = f_n$ pro nějaké n. □

TVRZENÍ

Součin kompaktního prostoru X a pseudokompaktního prostoru Y je pseudokompaktní prostor.

Důkaz.

Musíme dokázat, že každý lokálně konečný soubor otevřených množin v $X \times Y$ je konečný.
Můžeme předpokládat, že tento soubor je tvaru $\{U_s \times V_s : s \in S\}$ kde $U_s \subset X$ a $V_s \subset Y$. Dokážeme, že soubor množin $\{V_s : s \in S\}$ je lokálně konečný a tedy musí být podle předpokladu na Y konečný.
Pro každý bod $y \in Y$ se podívejme na body $z \in p_Y^{-1}(y)$. Každý takový bod má nějaké otevřené okolí $U_z \times V_z$, které protíná pouze konečně mnoho množin z původního souboru. Protože je $p_Y^{-1}(y)$ isomorfní kompaktnímu prostoru X, existuje konečný systém Z takový, že $\{U_z \times V_z : z \in Z\}$ pokrývá $p_Y^{-1}(y)$. Potom $X \times \bigcap_{z \in Z} V_z$ je otevřené okolí $p_Y^{-1}(y)$, které protíná jen konečně mnoho množin původního souboru. To znamená, že $\bigcap_{z \in Z} V_z$ je otevřené okolí y , které protíná jen konečně mnoho množin V_s pro $s \in S$. $\square$

TVRZENÍ

Součin kompaktního prostoru X a spočetně kompaktního prostoru Y je spočetně kompaktní prostor.

Důkaz.

Musíme dokázat, že každá nekonečná množina $M \subset X \times Y$, má hromadný bod. Pokud je množina $p_Y[M]$ konečná, je pro nějaké $y \in p_Y[M]$ množina $M \cap p_Y^{-1}(y)$ nekonečná podmnožina kompaktního prostoru $p_Y^{-1}(y)$ a má hromadný bod. Můžeme tedy předpokládat, že $p_Y[M]$ je nekonečná podmnožina Y a má hromadný bod y_0. Předpokládejme ještě pro spor, že žádný bod v $p_Y^{-1}(y_0)$ není hromadným bodem M. Každý takový bod z má nějaké otevřené okolí $U_z \times V_z$, které obsahuje pouze konečně mnoho bodů z M. Protože je $p_Y^{-1}(y_0)$ isomorfní kompaktnímu prostoru X, existuje konečný systém Z takový, že $\{U_z \times V_z : z \in Z\}$ pokrývá $p_Y^{-1}(y_0)$. Potom $\bigcap_{z\in Z} V_z$ je otevřené okolí y_0, které obsahuje jen konečně mnoho bodů $p_Y[M]$, a tedy y_0 nemůže být hromadným bodem této množiny. $\square$

TVRZENÍ

Σ-součin kompaktních prostorů je spočetně kompaktní.

Důkaz.

Máme X_i, $i \in I$ kompaktní prostory, $f \in \prod_I X_i$ a
$\Sigma = \{x \in \prod_I X_i : |\{i \in I : x(i) \neq f(i)\}| \leq \omega\}$.
Musíme ukázat, že každá nekonečná spočetná množina A má v Σ hromadný bod.
Položme $I_0 = \{i \in I : \text{ existuje } x \in A \text{ že } x(i) \neq f(i)\}$. Prostor $\prod_{I_0} X_i$ je kompaktní a Σ obsahuje jeho homeomorfní kopii, která je nadmnožinou A. Množina A má hromadný bod v tomto kompaktním prostoru a tedy i v Σ. $\square$

TVRZENÍ (Spočetná kompaktnost pomocí filtrů)

Pro prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

X je spočetně kompaktní

Každý filtr v X mající spočetnou bází (nebo subbázi) má hromadný bod.

Každá klesající posloupnost $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ uzavřených množin v X má neprázdný průnik.

Důkaz.

Buď $\{B_i : i \in \omega\}$ (sub)báze filtru. Pokud by tento filtr neměl hromadný bod, pak $X \setminus \overline{B_i}$ je spočetný soubor otevřených množin pokrývají spočetně kompaktní prostor X a tedy existuje jeho konečný podsoubor pokrývající X. Odpovídající množiny B_i ale mají prázný průnik a nemůže se jednat o (sub)bázi filtru.

Klesající posloupnost uzavřených množin je bází filtru a jeho hromadný bod leží ve všech těchto množinách.

Pro spočetný soubor otevřených množin $\{O_n : n \in \omega\}$ je $\{F_i = X \setminus \bigcup_{n<i} O_n : i \in \omega\}$ klesající posloupnost uzavřených podmnožin X. Je-li $\{O_n : n \in \omega\}$ pokrytí X, je průnik těchto množin prázdný a existuje tedy i, že $F_i = \emptyset$. Tedy $\{O_n : n < i\}$ je konečné pokrytí X. □

TVRZENÍ

Topologický prostor je spočetně kompaktní právě když má každá jeho podmnožina hromadný bod.

TVRZENÍ

Topologický prostor je spočetně kompaktní právě když je jeho každý lokálně konečný soubor neprázných množin konečný.

TVRZENÍ

Spočetný součin sekvenciálně kompaktních prostorů je sekvenciálně kompaktní.

Důkaz.

Z posloupnosti $F = \{f_n : n \in \omega\}$ bodů v $\Pi_{i\in\omega} X_i$ máme vybrat konvergentní podposloupnost. Nejprve vybereme $F_0 = \{f_n^0 : n \in \omega\}$ podposloupnost F takovou, že $f_n^0(0)$, $n \in \omega$ je konvergentní posloupnost v sekvenciálně kompaktním prostoru X_0. Dále pak vybereme F_1 podposloupnost F_0 tak, že $f_n^1(1)$, $n \in \omega$ konverguje v X_1. Takto pokračuje dále až máme spočetně mnoho do sebe zanořených posloupností. Nyní je $\{f_n^n : n \in \omega\}$ hledaná posloupnost konvergující v celém součinu. $\square$

Část IV

Lindelöfovy prostory

LEMMA

Existuje T_2 spočetný prostor X, který není regulární. Tedy T_2 Lindelöfův neimplikuje regulární.

Důkaz.

$X = \omega \times (\omega + 1) \cup \{\infty\}$, kde $\omega \times (\omega + 1)$ je otevřený podprostor se součinovou topologii a báze okolí ∞ je soubor
$\{\{\infty\} \cup A : A \subset \omega \times \omega, |\{n \in \omega : |(\{n\} \times \omega) \setminus A| = \omega\}| < \omega\}$. □

TVRZENÍ (Charakterizace Lindelöfových prostorů)

Prostor X je Lindelöfův právě když každý každý filtr v X se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod.

Důkaz.

Tento důkaz je zcela standardní. □

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je Hausdorffův prostor právě když je X Hausdorffův a každý jeho bod má uzavřené Lindelöfovo okolí.

Důkaz.

Nechť je jednobodové Lindelöfovo rozšíření X Hausdorffovo. Pak je X Hausdorffův prostor, protože je podprostorem Hausdorffova prostoru. Pro $x \in X$ vezměme otevřené $U \subset X$ takové, že $\infty \notin \overline{U}$. Pak $\overline{U}$ je uzavřené Lindelöfovo okolí x.
Dokažme naopak, že pro X se zadanými vlastnostmi je jeho rozšíření Hausdorffovo. Pro každé $x \in X$ vezměme otevřené $U_x \subset X$ takové, že $\overline{U_x}$ je Lindelöfovo okolí x. Pak U_x a $\{\infty\} \cup X \setminus \overline{U_x}$ jsou okolí oddělující x a ∞. Když A a B jsou otevřená okolí oddělující v X body x a y, tak $A \cap U_x$ a $B \cap U_y$ oddělují tyto body v Lindelöfově rozšíření. □

TVRZENÍ (Jednobodové Lindelöfovo rozšíření)

Jednobodové Lindelöfovo rozšíření prostoru X je Hausdorffův prostor právě když je X Hausdorffův a každý jeho bod má uzavřené Lindelöfovo okolí.

Důkaz.

Nechť je jednobodové Lindelöfovo rozšíření X Hausdorffovo. Pak je X Hausdorffův prostor, protože je podprostorem Hausdorffova prostoru. Pro $x \in X$ vezměme otevřené $U \subset X$ takové, že $\infty \notin \overline{U}$. Pak $\overline{U}$ je uzavřené Lindelöfovo okolí x.
Dokažme naopak, že pro X se zadanými vlastnostmi je jeho rozšíření Hausdorffovo. Pro každé $x \in X$ vezměme otevřené $U_x \subset X$ takové, že $\overline{U_x}$ je Lindelöfovo okolí x. Pak U_x a $\{\infty\} \cup X \setminus \overline{U_x}$ jsou okolí oddělující x a ∞. Když A a B jsou otevřená okolí oddělující v X body x a y, tak $A \cap U_x$ a $B \cap U_y$ oddělují tyto body v Lindelöfově rozšíření. □

TVRZENÍ

Součin kompaktního prostoru X a Lindelöfova prostoru Y je Lindelöfův.

Důkaz.

Stačí uvažovat podkrytí $X \times Y$ otevřenými množinami typu $\{U_s \times V_s : s \in S\}$.
Protože pro každé $y \in Y$ je fíbr $p_X^{-1}(y)$ homeomorfní kompaktnímu X, existuje pro toto y konečný soubor $S_y \subset S$ takový, že $\{U_s \times V_s : s \in S_y\}$ pokrývá tento fíbr a navíc $y \in V_s$ pro všechna $s \in S_y$.
Označme $W_y = \bigcap_{s \in S_y} V_s$. Tento otevřený soubor je otevřené pokrytí Y. Označme Y' spočetnou podmnožinu Y, že $\{W_y : y \in Y'\}$ pokrývá Y. Pak
$\{U_s \times V_s : s \in \bigcup_{y \in Y'} S_y\}$ je spočetné pokrytí $X \times Y$. □

Sorgenfreyova přímka

Sorgenfreyova přímka S je Lindelöfova: S je homeomorfní spočetnému disjunktnímu sjednocení prostorů $S_0 = S \cap [0,1)$, stačí tedy ukázat, že S_0 je Lindelöfův. Mějme $\mathcal{A}$ otevřené pokrytí S_0. Položme

$$B = \bigcup\{[0,x) : \text{ existuje } \mathcal{A}' \in [\mathcal{A}]^{\leq\omega}, [0,x) \subset \bigcup \mathcal{A}'\}$$

Nejprve si všimněme, že existuje $\mathcal{A}_0$, $|\mathcal{A}_0| \leq \omega$ a $B = \bigcup \mathcal{A}_0$. Pokud $B \neq S_0$, označme $y = \inf S_0 \setminus B$. V $\mathcal{A}$ existuje množina A taková, že $y \in A$. Pak je ale $\mathcal{A}_0 \cup \{A\}$ spočetný soubor, který pokrývá nějaký interval ostře větší než B. To není možné a $\mathcal{A}_0$ je spočetné pokrytí S_0.

Součin dvou Sorgenfreyových přímek je regulární prostor, který není normální a nemůže tedy být Lindelöfův.

Sorgenfreyova přímka není pseudokompaktní, $\{[i, i+1) : i \in \omega\}$ je nekonečný lokálně konečný soubor neprázdých otevřených podmnožin množin S.

Sorgenfreyova přímka není lokálně kompaktní, protože každá její otevřená podmnožina obsahuje homeomorfní kopii S jako uzavřený podprostor.

Michaelova přímka

Michaelova přímka M je Lindelöfova: M můžeme rozložit na sjednocení racionálních čísel Q a iracionálních čísel P. Jakožto podprostory jsou oba tyto prostory Lindelöfovy, Q je spočetný diskrétní prostor a na P je topologie zděděná z reálné přímky, tedy má spočetnou bázi. M je tedy Lindelöfovův prostor.
Michaelova přímka není pseudokompaktní, $\{[i, i+1) : i \in \omega\}$ je nekonečný lokálně konečný soubor neprázdých otevřených podmnožin množin M.
Michaelova přímka není lokálně kompaktní, protože každá otevřené okolí iracionálního čísla obsahuje homeomorfní kopii P jako uzavřený podprostor.

Prostory ordinálů

Na ordinálech uvažujeme vždy T_2 topologii odpovídající uspořádání.
Ordinál $\alpha + 1$ je vždy kompaktní prostor.
Limitní ordinál α je sekvenciálně kompaktní právě když $cf\,\alpha \neq \omega$. Z každé nekonečné posloupnosti ordinálů totiž můžeme vybrat neklesající nekonečnou podposloupnost. Limita této podposloupnosti je pro α s nespočetnou kofinalitou vždy prvkem α a topologickou limitou této podposloupnosti. Naopak spočetná kofinální posloupnost v α nemá v α žádnou konvergentní podposloupnost.
Limitní ordinál α je Lindelöfův právě když $cf\,\alpha = \omega$. Buď α_i, $i \in \kappa$ rostoucí kofinální posloupnost v α a $cf\,\alpha = \kappa$. Pokud $\kappa = \omega$ potom $\alpha = \bigcup_{i\in\omega} \alpha_i + 1$ je spočetné sjednocení kompaktních prostorů. Naopak $\{\alpha_i : i \in \kappa\}$ je vždy pokrytí α, které nemá žádné podpokrytí ostře menší mohutnosti.

Příklad

Existuje Hausdorffův sekvenciálně kompaktní prostor, který není regulární.
Uvažujme prostor $\omega_1 + 1$ a přidejme do subbáze jeho topologie množinu $\{(\omega_1 + 1) \setminus \alpha : \alpha$ je spočetný limitní ordinál$\}$. Výsledný prostor je spočetně kompaktní, z každé posloupnosti vybereme nekonečnou neklesající podposloupnost, a ta je konvergentní. Hausdorffovost se ověří snadno.
Množina $\{\alpha \in \omega_1 : \alpha$ je limitní ordinál$\}$ je uzavřená množina a každá její otevřená nadmnožina protíná každé okolí bodu ω_1. Tento prostor tedy není regulární.

Okolo $\beta\mathbb{N}$

$\beta\mathbb{N}$ je sekvenciálně kompaktní. Každá nekonečná uzavřená podmnožina prostoru $\beta\mathbb{N}$ kopii tohoto prostoru a má tedy velikost 2^{2^ω}. $\beta\mathbb{N}$ tak nemůže obsahovat žádnou netriviální konvergentní posloupnost.
Mějme $A \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, $|A| < 2^{2^\omega}$. Uvažujeme prostor $B = \beta\mathbb{N} \setminus A$. Pro libovolnou nekonečnou spočetnou $X \subset B$ víme, že $|\overline{X}^{\beta\mathbb{N}} \setminus A| = 2^{2^\omega}$ a X má nějaký hromadný bod v B. Tedy B je spočetně kompaktní.

V prostoru $\beta\mathbb{N}$ využijeme jeho kompaktnosti k definici funkce $f : [\beta\mathbb{N}]^\omega \to \beta\mathbb{N}$ tak, aby vždy platilo, že $f(X)$ je hromadný bod X. Každý podprostor $\beta\mathbb{N}$ uzavřený vzhledem k funkci f je tedy spočetně kompaktní. Označme F_0 nějaký takto uzavřený podprostor, který obsahuje $\mathbb{N}$ a $|F_0| = 2^\omega < 2^{2^\omega}$. Takový jistě existuje, stačí začít s $\mathbb{N}$ a množiny postupně uzavírat na f a sjednocovat. Dále označme $F_1 = \mathbb{N} \cup (\beta\mathbb{N} \setminus F_0)$. Nyní jsou F_0 i F_1 Hausdorffovy spočetně kompaktní podprostory $\beta\mathbb{N}$ a $F_0 \cap F_1 = \mathbb{N}$.
Označíme $D = \{(x, x) \in \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}\}$. Tedy D je diagonála a je to uzavřená podmnožina součinu. Nyní je již zrejmé, že $D' = D \cap F_0 \times F_1 = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ je uzavřená i otevřená nekonečná diskrétní podmnožina součinu $F_0 \times F_1$. Tento součin dvou spočetně kompaktních prostorů tak nemůže být ani pseudokompaktní.

Prostor 2^{2^ω} není sekvenciálně kompaktní. Jako indexovou množinu tohoto součinu budeme používat množinu všech funkcí $f : \omega \to 2$. Ukážeme, že posloupnost $\{g_i \in 2^{2^\omega} : g_i(f) = f(i) \text{ pro všechna } f, i \in \omega\}$ nemá žádnou konvergentní podposloupnost. Buď $\{g_i : i \in A\}$ její nekonečná podposloupnost. Rozdělme A na dvě nekonečné disjunktní množiny $A = A_0 \cup A_1$. Pak $\{h \in 2^{2^\omega} : h(\chi_{A_0}) = x(\chi_{A_0})\}$ je pro každý bod $x \in 2^{2^\omega}$ jeho otevřené okolí, které protíná pouze jednu z posloupností $\{g_i : i \in A_j\}$, $j \in 2$. Posloupnost $\{g_i : i \in A\}$ tedy není konvergentí, protože ji lze rozdělit na dvě podposloupnosti s disjunktními uzávěry.
Není také těžké ukázat uzávěr množiny $\{g_i \in 2^{2^\omega} : g_i(f) = f(i) \text{ pro všechna } f, i \in \omega\}$ je homeomorfní kopie prostoru $\beta\mathbb{N}$. Stačí si vzpomenout, že β-obal prostoru X je mezi kompaktifikacemi X charakterizován tím, že každé dvě disjunktní uzavřené podmnožiny X v něm mají disjunktní uzávěry.

Vějíř a ježek

Vějíř a ježek nejsou pseudokompaktní prostory. Množina všech prvních bodů konvergentních posloupností, ze kterých jsou složeny, je nekonečná otevřená i uzavřená diskrétní podmnožina obou těchto prostorů.
Vějíř a ježek nejsou lokálně kompaktní. Každé okolí limitního bodu 0 je totiž v obou případech homeomorfní s celým prostorem a tedy není kompaktní.
Vějíř a ježek jsou spočetné prostory a jsou tedy Lindelöfovy.

Topologický $(\mathbb{N}, \mathcal{S})$ prostor vzniklý z nekonečného skoro disjunktního systému podmnožin $\mathbb{N}$ je Lindelöfův právě když je spočetný. Množina $\mathcal{S}$ je totiž jeho diskrétní uzavřená podmnožina a takové množiny mohou být v Lindelöfových prostorech nejvýše spočetné. Tato množina také dokládá, že $(\mathbb{N}, \mathcal{S})$ není nikdy spočetně kompaktní.
$(\mathbb{N}, \mathcal{S})$ je pseudokompaktní právě když je $\mathcal{S}$ maximální skoro disjunktní systém. Když je $\mathcal{S} \cup \{A\}$ ostře větší skoro disjunktní systém na $\mathbb{N}$, tak je A otevřená i uzavřená nekonečná diskrétní podmnožina $(\mathbb{N}, \mathcal{S})$.
Buď naopak $\mathcal{S}$ maximální a f spojitá reálná funkce na $(\mathbb{N}, \mathcal{S})$. Pokud by f byla na $\mathbb{N}$ neomezená, najdeme nekonečnou množinu $B \subset \mathbb{N}$ takovou, že pro každé přirozené n platí $|\{i \in B : |f(i)| < n\}| < \omega$. Nyní vezměme $A \in \mathcal{S}$ které má s B nekonečný průnik. Funkce f nemůže být v A spojitá. f je tedy omezená na $\mathbb{N}$, a $\mathbb{N}$ je hustá část $(\mathbb{N}, \mathcal{S})$.
$(\mathbb{N}, \mathcal{S})$ je vždy lokálně kompaktní. Pro bod $x \in \mathbb{N}$ je $\{x\}$ jeho kompaktní okolí a pro $A \in S$ je $\{A\} \cup A$ kompaktní okolí A.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Část VI

Reálně kompaktní prostory

To je přeci snadné, stačí si uvědomit následující fakt:

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

LEMMA

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení z reálně kompaktního prostoru do Hausdorffova

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

Důkaz.

Pokud bod x neleží v $\prod_S A_s$ protože jeho s-tá souřadnice $x_s \notin A_s$, pak $(X_s \setminus A_s) \times \prod_{S\setminus\{s\}} X_s$ je otevřené okolí bodu x, které neprotíná $\prod_S A_s$. □

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

A jaké další vlastnosti reálně kompaktních prostorů ještě známe?

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

LEMMA

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení z reálně kompaktního prostoru do Hausdorffova

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

A jaké další vlastnosti reálně kompaktních prostorů ještě známe?

Já znám ještě tvrzení o průniku.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

LEMMA

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení z reálně kompaktního prostoru do Hausdorffova prosoru. Pak pro každý reálně kompaktní $Z \subset Y$ je $f^{-1}[Z]$ reálně kompaktní prostor.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

Důkaz.

Prostor $\bigcap_S A_s$ je homeomorfní s $\prod_S A_s \cap \triangle_S X$ což je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S A_s$, který je reálně kompaktní podle předchozího tvrzení. $\square$

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

A to je všechno?

LEMMA

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení z reálně kompaktního prostoru do Hausdorffova

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

A to je všechno?

Tak třeba ještě jedna vlastnost.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

LEMMA

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení z reálně kompaktního prostoru do Hausdorffova prosoru. Pak pro každý reálně kompaktní $Z \subset Y$ je $f^{-1}[Z]$ reálně kompaktní prostor.

LEMMA

Buď A_s uzavřená podmnožina prostoru X_s pro každé $s \in S$. Pak $\prod_S A_s$ je uzavřená podmnožina prostoru $\prod_S X_s$.

LEMMA

Buď A_s reálně kompaktní podprostor topologického prostoru X pro každé $s \in S$. Pak $\bigcap_S A_s$ je reálně kompaktní prostor.

LEMMA

Buď $f : X \to Y$ spojité zobrazení z reálně kompaktního prostoru do Hausdorffova prosoru. Pak pro každý reálně kompaktní $Z \subset Y$ je $f^{-1}[Z]$ reálně kompaktní prostor.

Důkaz.

Označme G_f graf zobrazení f. Víme, že $X \times Z$ je reálně kompaktní a G_f je uzařená podmnožina $X \times Y$ (f je spojité). Protože $f^{-1}[Z]$ je homeomorfní $(X \times Z) \cap G_f$, je homeomorfní uzavřené podmnožině reálně kompaktního prostoru. $\square$

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak teď by se dost hodil nějaký popis, jak to υX vlastně vypadá a jak jde zkonstruovat. Znáš nějaký?

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.
Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.
Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné funkce na X. Je to tedy hledaná Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak teď by se dost hodil nějaký popis, jak to υX vlastně vypadá a jak jde zkonstruovat. Znáš nějaký?

Když to má být podmnožina βX, tak co kdyby jsme zkusili napodobit ultrafiltovou konstrukci βX, nebrali by jsme všechny $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, ale vybrali si jen některé?

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.
Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.
Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak teď by se dost hodil nějaký popis, jak to υX vlastně vypadá a jak jde zkonstruovat. Znáš nějaký?

Když to má být podmnožina βX, tak co kdyby jsme zkusili napodobit ultrafiltovou konstrukci βX, nebrali by jsme všechny $\mathcal{Z}$-ultrafiltry, ale vybrali si jen některé?

Počkej, nepředbíhej, zkusme to nějak pomocí souboru všech spojitých funkcí z X do $\mathbb{R}$.

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.
Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak dobře, označne $\mathcal{F}$ všechny spojité reálné funkce z X do $\mathbb{R}$. Vsadím se, že υX bude uzávěr obrazu $\triangle\mathcal{F}$ v prostoru $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$.

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.
Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.
Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné funkce na X. Je to tedy hledaná Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak dobře, označne $\mathcal{F}$ všechny spojité reálné funkce z X do $\mathbb{R}$. Vsadím se, že υX bude uzávěr obrazu $\triangle\mathcal{F}$ v prostoru $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$.

Tak to by jsi určitě vyhrál, uděláme to však ještě jinak.

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.
Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.
Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.

Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.

Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné funkce na X. Je to tedy hledaná Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.

Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.

Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné funkce na X. Je to tedy hledaná Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.

Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.

Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné funkce na X. Je to tedy hledaná Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Označme $\alpha\mathbb{R}$ jednobodovou kompaktifikaci reálné přímky a $\mathcal{F}$ jsou stále všechny spojité funkce z X do reálné přímky.
Pro každou $f \in \mathcal{F}$ uvažujme její spojité rozšíření $F : \beta X \to \alpha\mathbb{R}$.
Již víme, že všechny vzory $F^{-1}[\mathbb{R}]$ jdou reálně kompaktní a také že jejich průnik $\upsilon X = \bigcap_{\mathcal{F}} F^{-1}[\mathbb{R}]$ je reálně kompaktní podprostor βX.

Máme tedy že X je hustý podprostor υX a tento reálně kompaktní prostor je zřejmě největší prostor, na který jdou rozšířit všechny spojité reálné funkce na X. Je to tedy hledaná Hewittova-Nachbinova reálná kompaktifikace.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Nejprve si ukážeme, že na $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ se spočetnou průnikovou vlastností můžeme spojitě rozšířit libovolnou spojitou reálnou funkci f.

Rozlišme dva případy. Nechť nejprve existuje množina $A \in \mathcal{U}$ taková, že f je na A omezená.

Buď naopak f na každé množině z $\mathcal{U}$ neomezená. Označme $A_n = \{x : n \leq |f(x)|\}$. Všechny tyto množiny musí být v $\mathcal{U}$ a tedy i jejich průnik by měl být v $\mathcal{U}$. Takový průnik je ale nutně prázdný a tento případ tedy nemůže nastat.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Nejprve si ukážeme, že na $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ se spočetnou průnikovou vlastností můžeme spojitě rozšířit libovolnou spojitou reálnou funkci f.

Rozlišme dva případy. Nechť nejprve existuje množina $A \in \mathcal{U}$ taková, že f je na A omezená.

Buď naopak f na každé množině z $\mathcal{U}$ neomezená. Označme $A_n = \{x : n \leq |f(x)|\}$. Všechny tyto množiny musí být v $\mathcal{U}$ a tedy i jejich průnik by měl být v $\mathcal{U}$. Takový průnik je ale nutně prázdný a tento případ tedy nemůže nastat.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Nejprve si ukážeme, že na $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ se spočetnou průnikovou vlastností můžeme spojitě rozšířit libovolnou spojitou reálnou funkci f.

Rozlišme dva případy. Nechť nejprve existuje množina $A \in \mathcal{U}$ taková, že f je na A omezená.

Potom je ale $f \restriction A$ funkcí do nějakého omezeného (a tedy kompaktního) intervalu. Průnik uzavřených podmnožin tohoto intervalu, jejichž vzor při zobrazení f leží v $\mathcal{U}$, je jednobodový a je to právě hledaná hodnota f na $\mathcal{U}$.

Buď naopak f na každé množině z $\mathcal{U}$ neomezená. Označme $A_n = \{x : n < |f(x)|\}$. Všechny tyto množiny musí být v $\mathcal{U}$ a tedy i jejich průnik

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Nejprve si ukážeme, že na $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ se spočetnou průnikovou vlastností můžeme spojitě rozšířit libovolnou spojitou reálnou funkci f.

Rozlišme dva případy. Nechť nejprve existuje množina $A \in \mathcal{U}$ taková, že f je na A omezená.

Buď naopak f na každé množině z $\mathcal{U}$ neomezená. Označme $A_n = \{x : n \leq |f(x)|\}$. Všechny tyto množiny musí být v $\mathcal{U}$ a tedy i jejich průnik by měl být v $\mathcal{U}$. Takový průnik je ale nutně prázdný a tento případ tedy nemůže nastat.

Teď ještě zbývá ukázat, že pro každý $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ na X, který nemá spočetnou průnikovou vlastnost, najdeme spojitou reálnou funkci f na X, která na tento ultrafiltr nejde spojitě rozšířit.

Takový ultrafiltr obsahuje klesající posloupnost $\mathcal{Z}$-množin $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, která má prázdný průnik.
Nyní zafixujme pro každé $n \in \omega$ funkci $g_n : X \to [0,1]$ takovou, že $g_n^{-1}(0) = A_n$.
Položíme

$$g = \sum_{n \in \omega} 2^{-n} g_n$$

Tato funkce je spojitá a nikde nenabývá hodnoty 0, můžeme tedy položit $f = 1/g$.
Funkce f nabývá na každé množině z ultrafiltru $\mathcal{U}$ libovolně velkou hodnotu a proto nelze spojitě rozšířit na $\mathcal{U}$ žádným reálným číslem.

Teď ještě zbývá ukázat, že pro každý $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ na X, který nemá spočetnou průnikovou vlastnost, najdeme spojitou reálnou funkci f na X, která na tento ultrafiltr nejde spojitě rozšířit.

Takový ultrafiltr obsahuje klesající posloupnost $\mathcal{Z}$-množin $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, která má prázdný průnik.

Nyní zafixujme pro každé $n \in \omega$ funkci $g_n : X \to [0,1]$ takovou, že $g_n^{-1}(0) = A_n$. Položíme

$$g = \sum_{n \in \omega} 2^{-n} g_n$$

Tato funkce je spojitá a nikde nenabývá hodnoty 0, můžeme tedy položit $f = 1/g$. Funkce f nabývá na každé množině z ultrafiltru $\mathcal{U}$ libovolně velkou hodnotu a proto nelze spojitě rozšířit na $\mathcal{U}$ žádným reálným číslem.

Teď ještě zbývá ukázat, že pro každý $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ na X, který nemá spočetnou průnikovou vlastnost, najdeme spojitou reálnou funkci f na X, která na tento ultrafiltr nejde spojitě rozšířit.

Takový ultrafiltr obsahuje klesající posloupnost $\mathcal{Z}$-množin $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, která má prázdný průnik.
Nyní zafixujme pro každé $n \in \omega$ funkci $g_n : X \to [0,1]$ takovou, že $g_n^{-1}(0) = A_n$.
Položíme

$$g = \sum_{n\in\omega} 2^{-n} g_n$$

Tato funkce je spojitá a nikde nenabývá hodnoty 0, můžeme tedy položit $f = 1/g$. Funkce f nabývá na každé množině z ultrafiltru $\mathcal{U}$ libovolně velkou hodnotu a proto nelze spojitě rozšířit na $\mathcal{U}$ žádným reálným číslem.

Teď ještě zbývá ukázat, že pro každý $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ na X, který nemá spočetnou průnikovou vlastnost, najdeme spojitou reálnou funkci f na X, která na tento ultrafiltr nejde spojitě rozšířit.

Takový ultrafiltr obsahuje klesající posloupnost $\mathcal{Z}$-množin $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, která má prázdný průnik.
Nyní zafixujme pro každé $n \in \omega$ funkci $g_n : X \to [0,1]$ takovou, že $g_n^{-1}(0) = A_n$.
Položíme

$$g = \sum_{n \in \omega} 2^{-n} g_n$$

Tato funkce je spojitá a nikde nenabývá hodnoty 0, můžeme tedy položit $f = 1/g$.
Funkce f nabývá na každé množině z ultrafiltru $\mathcal{U}$ libovolně velkou hodnotu a proto nelze spojitě rozšířit na $\mathcal{U}$ žádným reálným číslem.

Teď ještě zbývá ukázat, že pro každý $\mathcal{Z}$-ultrafiltr $\mathcal{U}$ na X, který nemá spočetnou průnikovou vlastnost, najdeme spojitou reálnou funkci f na X, která na tento ultrafiltr nejde spojitě rozšířit.

Takový ultrafiltr obsahuje klesající posloupnost $\mathcal{Z}$-množin $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, která má prázdný průnik.
Nyní zafixujme pro každé $n \in \omega$ funkci $g_n : X \to [0,1]$ takovou, že $g_n^{-1}(0) = A_n$.
Položíme

$$g = \sum_{n \in \omega} 2^{-n} g_n$$

Tato funkce je spojitá a nikde nenabývá hodnoty 0, můžeme tedy položit $f = 1/g$.
Funkce f nabývá na každé množině z ultrafiltru $\mathcal{U}$ libovolně velkou hodnotu a proto nelze spojitě rozšířit na $\mathcal{U}$ žádným reálným číslem.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Prostor ω_1 je přeci pseudokompaktní, protože všechny reálné funkce jsou na něm omezené.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Prostor ω_1 je přeci pseudokompaktní, protože všechny reálné funkce jsou na něm omezené.

Kdyby byl i reálně kompaktní, tak musí být dokonce kompaktní, to ale víme, že není.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak z té věty o reálné kompaktnosti metrizovatelných prostorů tedy moc moudrý nejsem.

Tak se na to pojďme podívat v jednoduchém případě diskrétního prostoru na kardinálu κ.

Ten je podle charakterizace reálně kompaktní právě když na κ není žádný ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností.

Protože to by byl $\mathcal{Z}$-ultrafiltr s prázdným průnikem.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak z té věty o reálné kompaktnosti metrizovatelných prostorů tedy moc moudrý nejsem.

Tak se na to pojďme podívat v jednoduchém případě diskrétního prostoru na kardinálu κ.

Ten je podle charakterizace reálně kompaktní právě když na κ není žádný ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností.

Protože to by byl $\mathcal{Z}$-ultrafiltr s prázdným průnikem.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak z té věty o reálné kompaktnosti metrizovatelných prostorů tedy moc moudrý nejsem.

Tak se na to pojďme podívat v jednoduchém případě diskrétního prostoru na kardinálu κ.

Ten je podle charakterizace reálně kompaktní právě když na κ není žádný ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností.

Protože to by byl $\mathcal{Z}$-ultrafiltr s prázdným průnikem.

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak z té věty o reálné kompaktnosti metrizovatelných prostorů tedy moc moudrý nejsem.

Tak se na to pojďme podívat v jednoduchém případě diskrétního prostoru na kardinálu κ.

Ten je podle charakterizace reálně kompaktní právě když na κ není žádný ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností.

Proč?

Část VI

Reálně kompaktní prostory

Tak z té věty o reálné kompaktnosti metrizovatelných prostorů tedy moc moudrý nejsem.

Tak se na to pojďme podívat v jednoduchém případě diskrétního prostoru na kardinálu κ.

Ten je podle charakterizace reálně kompaktní právě když na κ není žádný ultrafiltr se spočetnou průnikovou vlastností.

Protože to by byl $\mathcal{Z}$-ultrafiltr s prázdným průnikem.

Aha, a takové ultrafiltry jsou vlastně právě dvouhodnotové spočetně aditivní míry: Množina má míru 1 právě když je v ultrafiltru.

Takže prostor κ není reálně kompaktní právě když je κ měřitelný kardinál.

No a jak to bude v případě obecného metrizovatelného prostoru?

To bude asi trochu složitější, ale třeba by stačilo kontrolovat jen diskrétní podprostory takových prostorů.

Dobrý nápad, ale stejně to asi bude moc složité. Necháme to raději na jindy.

Aha, a takové ultrafiltry jsou vlastně právě dvouhodnotové spočetně aditivní míry: Množina má míru 1 právě když je v ultrafiltru.

Takže prostor κ není reálně kompaktní právě když je κ měřitelný kardinál.

No a jak to bude v případě obecného metrizovatelného prostoru?

To bude asi trochu složitější, ale třeba by stačilo kontrolovat jen diskrétní podprostory takových prostorů.

Dobrý nápad, ale stejně to asi bude moc složité. Necháme to raději na jindy.

Aha, a takové ultrafiltry jsou vlastně právě dvouhodnotové spočetně aditivní míry: Množina má míru 1 právě když je v ultrafiltru.

Takže prostor κ není reálně kompaktní právě když je κ měřitelný kardinál.

No a jak to bude v případě obecného metrizovatelného prostoru?

To bude asi trochu složitější, ale třeba by stačilo kontrolovat jen diskrétní podprostory takových prostorů.

Dobrý nápad, ale stejně to asi bude moc složité. Necháme to raději na jindy.

Aha, a takové ultrafiltry jsou vlastně právě dvouhodnotové spočetně aditivní míry: Množina má míru 1 právě když je v ultrafiltru.

Takže prostor κ není reálně kompaktní právě když je κ měřitelný kardinál.

No a jak to bude v případě obecného metrizovatelného prostoru?

To bude asi trochu složitější, ale třeba by stačilo kontrolovat jen diskrétní podprostory takových prostorů.

Dobrý nápad, ale stejně to asi bude moc složité. Necháme to raději na jindy.

Aha, a takové ultrafiltry jsou vlastně právě dvouhodnotové spočetně aditivní míry: Množina má míru 1 právě když je v ultrafiltru.

Takže prostor κ není reálně kompaktní právě když je κ měřitelný kardinál.

No a jak to bude v případě obecného metrizovatelného prostoru?

To bude asi trochu složitější, ale třeba by stačilo kontrolovat jen diskrétní podprostory takových prostorů.

Dobrý nápad, ale stejně to asi bude moc složité. Necháme to raději na jindy.