4. KOMPAKTNOST

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Je-li $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ pokrytím množiny X, říká se často, že $\mathcal{S}'$ je podpokrytí nebo že je pokrytím vybraným z $\mathcal{S}$.

Relaci zjemnění soustav množin budeme nejvíce používat pro pokrytí. Jestliže $\mathcal{T}$ zjemňuje pokrytí $\mathcal{S}$ množiny X, je podle definice i $\mathcal{T}$ pokrytím množiny X.

Je zřejmé, že kompaktnost lze definovat i pomocí zjemnění: *každé otevřené pokrytí má konečné zjemnění*. Tato definice je vhodná pro určitá zobecnění, např. pro parakompaktnost, jak uvidíme v pozdějších kapitolách. Původní definice kompaktnosti je vhodná zase pro jiná zobecnění, jak uvidíme v následující kapitole.

Tvrzení, že spojitý obraz kompaktu je kompakt znáte ze speciálního případu z analýzy: *Každá spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá svého maxima a svého minima.*

Je-li $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ pokrytím množiny X, říká se často, že $\mathcal{S}'$ je podpokrytí nebo že je pokrytím vybraným z $\mathcal{S}$.

Relaci zjemnění soustav množin budeme nejvíce používat pro pokrytí. Jestliže $\mathcal{T}$ zjemňuje pokrytí $\mathcal{S}$ množiny X, je podle definice i $\mathcal{T}$ pokrytím množiny X.

Je zřejmé, že kompaktnost lze definovat i pomocí zjemnění: *každé otevřené pokrytí má konečné zjemnění*. Tato definice je vhodná pro určitá zobecnění, např. pro parakompaktnost, jak uvidíme v pozdějších kapitolách. Původní definice kompaktnosti je vhodná zase pro jiná zobecnění, jak uvidíme v následující kapitole.

Tvrzení, že spojitý obraz kompaktu je kompakt znáte ze speciálního případu z analýzy: *Každá spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá svého maxima a svého minima.*

Je-li $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ pokrytím množiny X, říká se často, že $\mathcal{S}'$ je podpokrytí nebo že je pokrytím vybraným z $\mathcal{S}$.

Relaci zjemnění soustav množin budeme nejvíce používat pro pokrytí. Jestliže $\mathcal{T}$ zjemňuje pokrytí $\mathcal{S}$ množiny X, je podle definice i $\mathcal{T}$ pokrytím množiny X.

Je zřejmé, že kompaktnost lze definovat i pomocí zjemnění: *každé otevřené pokrytí má konečné zjemnění*. Tato definice je vhodná pro určitá zobecnění, např. pro parakompaktnost, jak uvidíme v pozdějších kapitolách. Původní definice kompaktnosti je vhodná zase pro jiná zobecnění, jak uvidíme v následující kapitole.

Tvrzení, že spojitý obraz kompaktu je kompakt znáte ze speciálního případu z analýzy: *Každá spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá svého maxima a svého minima.*

Je-li $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ pokrytím množiny X, říká se často, že $\mathcal{S}'$ je podpokrytí nebo že je pokrytím vybraným z $\mathcal{S}$.

Relaci zjemnění soustav množin budeme nejvíce používat pro pokrytí. Jestliže $\mathcal{T}$ zjemňuje pokrytí $\mathcal{S}$ množiny X, je podle definice i $\mathcal{T}$ pokrytím množiny X.

Je zřejmé, že kompaktnost lze definovat i pomocí zjemnění: *každé otevřené pokrytí má konečné zjemnění*. Tato definice je vhodná pro určitá zobecnění, např. pro parakompaktnost, jak uvidíme v pozdějších kapitolách. Původní definice kompaktnosti je vhodná zase pro jiná zobecnění, jak uvidíme v následující kapitole.

Tvrzení, že spojitý obraz kompaktu je kompakt znáte ze speciálního případu z analýzy: *Každá spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu nabývá svého maxima a svého minima.*

Je jednoduché si uvědomit, že pro zjišťování kompaktnosti lze brát pokrytí složená z otevřených množin z nějaké dané báze, protože každé otevřené pokrytí má zjemnění složené z množin z dané otevřené báze.
Jednoduché však není ukázat, že lze použít i otevřené subbáze – viz cvičení.

Proto lze i v charakterizacích kompaktnosti pomocí uzavřených množin použít báze filtrů složených z prvků nějaké dané uzavřené báze.

Předchozí zúžení výběru pro testování kompaktnosti však nelze přenést na konvergenci. Existují nekompaktní Fréchetovy prostory (dokonce prostory mající spočetné báze okolí), kde každá posloupnost má hromadný bod – např. prostor spočetných ordinálů ω_1.
Výjimkou jsou metrizovatelné prostory, které jsou kompaktní právě když každá posloupnost v nich má hromadný bod (a tedy platí více: každá posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost).

Kompaktní uspořádatelné prostory mají otevřenou subbázi takovou, že každé otevřené pokrytí prvky této subbáze obsahuje podpokrytí složené z nejvýše dvou množin. Prostory, které mají takovouto otevřenou subbázi, se nazývají *superkompaktní*. Tyto prostory zahrnují kompaktní uspořádané prostory a kompaktní metrické prostory (to je těžké dokázat). Třída těchto prostorů je součinová, ale není uzavřeně dědičná (protože existují kompaktní prostory, které nejsou superkompaktní.

Je jednoduché si uvědomit, že pro zjišťování kompaktnosti lze brát pokrytí složená z otevřených množin z nějaké dané báze, protože každé otevřené pokrytí má zjemnění složené z množin z dané otevřené báze.
Jednoduché však není ukázat, že lze použít i otevřené subbáze – viz cvičení.

Proto lze i v charakterizacích kompaktnosti pomocí uzavřených množin použít báze filtrů složených z prvků nějaké dané uzavřené báze.

Předchozí zúžení výběru pro testování kompaktnosti však nelze přenést na konvergenci. Existují nekompaktní Fréchetovy prostory (dokonce prostory mající spočetné báze okolí), kde každá posloupnost má hromadný bod – např. prostor spočetných ordinálů ω_1.
Výjimkou jsou metrizovatelné prostory, které jsou kompaktní právě když každá posloupnost v nich má hromadný bod (a tedy platí více: každá posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost).

Kompaktní uspořádatelné prostory mají otevřenou subbázi takovou, že každé otevřené pokrytí prvky této subbáze obsahuje podpokrytí složené z nejvýše dvou množin. Prostory, které mají takovouto otevřenou subbázi, se nazývají *superkompaktní*. Tyto prostory zahrnují kompaktní uspořádané prostory a kompaktní metrické prostory (to je těžké dokázat). Třída těchto prostorů je součinová, ale není uzavřeně dědičná (protože existují kompaktní prostory, které nejsou superkompaktní.

Je jednoduché si uvědomit, že pro zjišťování kompaktnosti lze brát pokrytí složená z otevřených množin z nějaké dané báze, protože každé otevřené pokrytí má zjemnění složené z množin z dané otevřené báze.
Jednoduché však není ukázat, že lze použít i otevřené subbáze – viz cvičení.

Proto lze i v charakterizacích kompaktnosti pomocí uzavřených množin použít báze filtrů složených z prvků nějaké dané uzavřené báze.

Předchozí zúžení výběru pro testování kompaktnosti však nelze přenést na konvergenci. Existují nekompaktní Fréchetovy prostory (dokonce prostory mající spočetné báze okolí), kde každá posloupnost má hromadný bod – např. prostor spočetných ordinálů ω_1.
Výjimkou jsou metrizovatelné prostory, které jsou kompaktní právě když každá posloupnost v nich má hromadný bod (a tedy platí více: každá posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost).

Kompaktní uspořádatelné prostory mají otevřenou subbázi takovou, že každé otevřené pokrytí prvky této subbáze obsahuje podpokrytí složené z nejvýše dvou množin. Prostory, které mají takovouto otevřenou subbázi, se nazývají *superkompaktní*. Tyto prostory zahrnují kompaktní uspořádané prostory a kompaktní metrické prostory (to je těžké dokázat). Třída těchto prostorů je součinová, ale není uzavřeně dědičná (protože existují kompaktní prostory, které nejsou superkompaktní.

Je jednoduché si uvědomit, že pro zjišťování kompaktnosti lze brát pokrytí složená z otevřených množin z nějaké dané báze, protože každé otevřené pokrytí má zjemnění složené z množin z dané otevřené báze.
Jednoduché však není ukázat, že lze použít i otevřené subbáze – viz cvičení.

Proto lze i v charakterizacích kompaktnosti pomocí uzavřených množin použít báze filtrů složených z prvků nějaké dané uzavřené báze.

Předchozí zúžení výběru pro testování kompaktnosti však nelze přenést na konvergenci. Existují nekompaktní Fréchetovy prostory (dokonce prostory mající spočetné báze okolí), kde každá posloupnost má hromadný bod – např. prostor spočetných ordinálů ω_1.
Výjimkou jsou metrizovatelné prostory, které jsou kompaktní právě když každá posloupnost v nich má hromadný bod (a tedy platí více: každá posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost).

Kompaktní uspořádatelné prostory mají otevřenou subbázi takovou, že každé otevřené pokrytí prvky této subbáze obsahuje podpokrytí složené z nejvýše dvou množin. Prostory, které mají takovouto otevřenou subbázi, se nazývají *superkompaktní*. Tyto prostory zahrnují kompaktní uspořádané prostory a kompaktní metrické prostory (to je těžké dokázat). Třída těchto prostorů je součinová, ale není uzavřeně dědičná (protože existují kompaktní prostory, které nejsou superkompaktní.

Kompaktní Hausdorffovy prostory mají hodně příjemných vlastností, které činí jejich zkoumání a použití jednodušší. I z tohoto důvodu se obecné kompaktní prostory dříve mnoho nezkoumaly. V posledních desetiletích se však objevily aplikace topologie v informatice, které pracují s prostory, které jsou jen T_0 nebo T_1. Kompaktní prostory hrají i v těchto aplikacích velkou roli.

Je vhodné si uvědomit některé vlastnosti, které mají kompaktní Hausdorffovy prostory a nemají obecné kompaktní prostory.

- Průnik kompaktních podmnožin nemusí být kompaktní.
- Kompaktní podmnožina nemusí být uzavřená.
- Prosté spojité zobrazení nemusí být kvocientové (a tedy vnoření).
- Kompaktní prostor nemusí být ani normální, ani regulární.
- Topologický prostor X nemusí mít takovou kompaktifikaci Y, že každé spojité zobrazení z X do kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na Y (a to ani když se omezíme na T_1 prostory).

Kompaktní Hausdorffovy prostory mají hodně příjemných vlastností, které činí jejich zkoumání a použití jednodušší. I z tohoto důvodu se obecné kompaktní prostory dříve mnoho nezkoumaly. V posledních desetiletích se však objevily aplikace topologie v informatice, které pracují s prostory, které jsou jen T_0 nebo T_1. Kompaktní prostory hrají i v těchto aplikacích velkou roli.

Je vhodné si uvědomit některé vlastnosti, které mají kompaktní Hausdorffovy prostory a nemají obecné kompaktní prostory.

1. Průnik kompaktních podmnožin nemusí být kompaktní.
2. Kompaktní podmnožina nemusí být uzavřená.
3. Prosté spojité zobrazení nemusí být kvocientové (a tedy vnoření).
4. Kompaktní prostor nemusí být ani normální, ani regulární.
5. Topologický prostor X nemusí mít takovou kompaktifikaci Y, že každé spojité zobrazení z X do kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na Y (a to ani když se omezíme na T_1-prostory).

Kompaktní Hausdorffovy prostory mají hodně příjemných vlastností, které činí jejich zkoumání a použití jednodušší. I z tohoto důvodu se obecné kompaktní prostory dříve mnoho nezkoumaly. V posledních desetiletích se však objevily aplikace topologie v informatice, které pracují s prostory, které jsou jen T_0 nebo T_1. Kompaktní prostory hrají i v těchto aplikacích velkou roli.

Je vhodné si uvědomit některé vlastnosti, které mají kompaktní Hausdorffovy prostory a nemají obecné kompaktní prostory.

1. Průnik kompaktních podmnožin nemusí být kompaktní.
2. Kompaktní podmnožina nemusí být uzavřená.
3. Prosté spojité zobrazení nemusí být kvocientové (a tedy vnoření).
4. Kompaktní prostor nemusí být ani normální, ani regulární.
5. Topologický prostor X nemusí mít takovou kompaktifikaci Y, že každé spojité zobrazení z X do kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na Y (a to ani když se omezíme na T_1-prostory).

Kompaktní Hausdorffovy prostory mají hodně příjemných vlastností, které činí jejich zkoumání a použití jednodušší. I z tohoto důvodu se obecné kompaktní prostory dříve mnoho nezkoumaly. V posledních desetiletích se však objevily aplikace topologie v informatice, které pracují s prostory, které jsou jen T_0 nebo T_1. Kompaktní prostory hrají i v těchto aplikacích velkou roli.

Je vhodné si uvědomit některé vlastnosti, které mají kompaktní Hausdorffovy prostory a nemají obecné kompaktní prostory.

1. Průnik kompaktních podmnožin nemusí být kompaktní.
2. Kompaktní podmnožina nemusí být uzavřená.
3. Prosté spojité zobrazení nemusí být kvocientové (a tedy vnoření).
4. Kompaktní prostor nemusí být ani normální, ani regulární.
5. Topologický prostor X nemusí mít takovou kompaktifikaci Y, že každé spojité zobrazení z X do kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na Y (a to ani když se omezíme na T_1-prostory).

Kompaktní Hausdorffovy prostory mají hodně příjemných vlastností, které činí jejich zkoumání a použití jednodušší. I z tohoto důvodu se obecné kompaktní prostory dříve mnoho nezkoumaly. V posledních desetiletích se však objevily aplikace topologie v informatice, které pracují s prostory, které jsou jen T_0 nebo T_1. Kompaktní prostory hrají i v těchto aplikacích velkou roli.

Je vhodné si uvědomit některé vlastnosti, které mají kompaktní Hausdorffovy prostory a nemají obecné kompaktní prostory.

1. Průnik kompaktních podmnožin nemusí být kompaktní.
2. Kompaktní podmnožina nemusí být uzavřená.
3. Prosté spojité zobrazení nemusí být kvocientové (a tedy vnoření).
4. Kompaktní prostor nemusí být ani normální, ani regulární.
5. Topologický prostor X nemusí mít takovou kompaktifikaci Y, že každé spojité zobrazení z X do kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na Y (a to ani když se omezíme na T_1-prostory).

Kompaktní Hausdorffovy prostory mají hodně příjemných vlastností, které činí jejich zkoumání a použití jednodušší. I z tohoto důvodu se obecné kompaktní prostory dříve mnoho nezkoumaly. V posledních desetiletích se však objevily aplikace topologie v informatice, které pracují s prostory, které jsou jen T_0 nebo T_1. Kompaktní prostory hrají i v těchto aplikacích velkou roli.

Je vhodné si uvědomit některé vlastnosti, které mají kompaktní Hausdorffovy prostory a nemají obecné kompaktní prostory.

1. Průnik kompaktních podmnožin nemusí být kompaktní.
2. Kompaktní podmnožina nemusí být uzavřená.
3. Prosté spojité zobrazení nemusí být kvocientové (a tedy vnoření).
4. Kompaktní prostor nemusí být ani normální, ani regulární.
5. Topologický prostor X nemusí mít takovou kompaktifikaci Y, že každé spojité zobrazení z X do kompaktního prostoru lze spojitě rozšířit na Y (a to ani když se omezíme na T_1-prostory).

Pro tuto stránku nechť je X nekompaktní (a tedy nekonečný) prostor.

Označme nyní γX první uvedenou kompaktifikaci s jedním přidaným bodem, jehož okolí je celé γX a X je otevřená podmnožina v γX. Tato kompaktifikace je T_0, pokud je X T_0, ale není nikdy T_1.
Ve smyslu naší relace srovnání kompaktifikací je γX nejhrubší kompaktifikace prostoru X. Nejjemnější kompaktifikace neexistuje.

Jednobodová kompaktifikace αX prostoru X nemusí z X přenášet oddělování T_0, ale zachovává vlastnost T_1. Kompaktifikace αX nemusí být Hausdorffova ani když je X metrizovatelný (např. pro $\mathbb{Q}$). V další kapitole bude uvedena důležitá třída prostorů, pro kterou je αX Hausdorffův prostor – tzv. lokálně kompaktní prostory.

Pro tuto stránku nechť je X nekompaktní (a tedy nekonečný) prostor.

Označme nyní γX první uvedenou kompaktifikaci s jedním přidaným bodem, jehož okolí je celé γX a X je otevřená podmnožina v γX. Tato kompaktifikace je T_0, pokud je X T_0, ale není nikdy T_1.
Ve smyslu naší relace srovnání kompaktifikací je γX nejhrubší kompaktifikace prostoru X. Nejjemnější kompaktifikace neexistuje.

Jednobodová kompaktifikace αX prostoru X nemusí z X přenášet oddělování T_0, ale zachovává vlastnost T_1. Kompaktifikace αX nemusí být Hausdorffova ani když je X metrizovatelný (např. pro $\mathbb{Q}$). V další kapitole bude uvedena důležitá třída prostorů, pro kterou je αX Hausdorffův prostor – tzv. lokálně kompaktní prostory.

Pro tuto stránku nechť je X nekompaktní (a tedy nekonečný) prostor.

Označme nyní γX první uvedenou kompaktifikaci s jedním přidaným bodem, jehož okolí je celé γX a X je otevřená podmnožina v γX. Tato kompaktifikace je T_0, pokud je X T_0, ale není nikdy T_1.
Ve smyslu naší relace srovnání kompaktifikací je γX nejhrubší kompaktifikace prostoru X. Nejjemnější kompaktifikace neexistuje.

Jednobodová kompaktifikace αX prostoru X nemusí z X přenášet oddělování T_0, ale zachovává vlastnost T_1. Kompaktifikace αX nemusí být Hausdorffova ani když je X metrizovatelný (např. pro $\mathbb{Q}$). V další kapitole bude uvedena důležitá třída prostorů, pro kterou je αX Hausdorffův prostor – tzv. lokálně kompaktní prostory.

Kompaktifikace αX je nejhrubší kompaktifikace T_1-prostoru X mezi všemi jeho T_1-kompaktifikacemi. Jak bylo uvedeno na předchozí stránce, taková nejjemnější kompaktifikace neexistuje.

Pokud požadujeme na kompaktifikaci oddělovací axiomy, nemusí např. dvoubodové kompaktifikace existovat. Např. euklidovské prostory (dimenze aspoň 1) mají dvoubodovou Hausdorffovu kompaktifikaci jedině pro $\mathbb{R}$ a nemají n-bodové Hausdorffovy kompaktifikace pro $n > 2$ (tj. takové kompaktifikace Y prostoru X, že $|Y \setminus X| = n$.

Kompaktifikace αX je nejhrubší kompaktifikace T_1-prostoru X mezi všemi jeho T_1-kompaktifikacemi. Jak bylo uvedeno na předchozí stránce, taková nejjemnější kompaktifikace neexistuje.

Pokud požadujeme na kompaktifikaci oddělovací axiomy, nemusí např. dvoubodové kompaktifikace existovat. Např. euklidovské prostory (dimenze aspoň 1) mají dvoubodovou Hausdorffovu kompaktifikaci jedině pro $\mathbb{R}$ a nemají n-bodové Hausdorffovy kompaktifikace pro $n > 2$ (tj. takové kompaktifikace Y prostoru X, že $|Y \setminus X| = n$.

Čechova-Stoneova kompaktifikace se používá hlavně pro T3$\frac{1}{2}$-prostory, které pak obsahuje jako hustý podprostor. Nicméně, rozšiřovací vlastnosti má pro libovolné prostory. Pro libovolný topologický prostor X se vezme jeho T3$\frac{1}{2}$-modifikace X' a potom $\beta X'$. Je snadné dokázat, že pro každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru Y existuje (jediné) spojité zobrazení z $\beta X'$ do Y, které složené s přirozeným zobrazením $X \to X' \to \beta X'$ dává původní zobrazení.

V tomto smyslu je třída všech kompaktních Hausdorffových prostorů *reflektivní* v třídě všech topologických prostorů. Nelze mluvit o epireflekci, protože ono zobrazení $X \to X' \to \beta X'$ není epimorfizmus v topologických prostorech.

Velmi zajímavý je výsledek, že právě T3$\frac{1}{2}$-prostory jsou podprostory kompaktních Hausdorffových prostorů a mají tedy Hausdorffovy kompaktifikace. Definice a ani charakterizace kompaktnosti nemají mnoho společného s reálnými čísly, kdežto T3$\frac{1}{2}$-prostory jsou definovány pomocí reálných čísel.

Čechova-Stoneova kompaktifikace se používá hlavně pro T3$\frac{1}{2}$-prostory, které pak obsahuje jako hustý podprostor. Nicméně, rozšiřovací vlastnosti má pro libovolné prostory. Pro libovolný topologický prostor X se vezme jeho T3$\frac{1}{2}$-modifikace X' a potom $\beta X'$. Je snadné dokázat, že pro každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru Y existuje (jediné) spojité zobrazení z $\beta X'$ do Y, které složené s přirozeným zobrazením $X \to X' \to \beta X'$ dává původní zobrazení.

V tomto smyslu je třída všech kompaktních Hausdorffových prostorů *reflektivní* v třídě všech topologických prostorů. Nelze mluvit o epireflekci, protože ono zobrazení $X \to X' \to \beta X'$ není epimorfizmus v topologických prostorech.

Velmi zajímavý je výsledek, že právě T3$\frac{1}{2}$-prostory jsou podprostory kompaktních Hausdorffových prostorů a mají tedy Hausdorffovy kompaktifikace. Definice a ani charakterizace kompaktnosti nemají mnoho společného s reálnými čísly, kdežto T3$\frac{1}{2}$-prostory jsou definovány pomocí reálných čísel.

Čechova-Stoneova kompaktifikace se používá hlavně pro T3$\frac{1}{2}$-prostory, které pak obsahuje jako hustý podprostor. Nicméně, rozšiřovací vlastnosti má pro libovolné prostory. Pro libovolný topologický prostor X se vezme jeho T3$\frac{1}{2}$-modifikace X' a potom $\beta X'$. Je snadné dokázat, že pro každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru Y existuje (jediné) spojité zobrazení z $\beta X'$ do Y, které složené s přirozeným zobrazením $X \to X' \to \beta X'$ dává původní zobrazení.

V tomto smyslu je třída všech kompaktních Hausdorffových prostorů *reflektivní* v třídě všech topologických prostorů. Nelze mluvit o epireflekci, protože ono zobrazení $X \to X' \to \beta X'$ není epimorfizmus v topologických prostorech.

Velmi zajímavý je výsledek, že právě T3$\frac{1}{2}$-prostory jsou podprostory kompaktních Hausdorffových prostorů a mají tedy Hausdorffovy kompaktifikace. Definice a ani charakterizace kompaktnosti nemají mnoho společného s reálnými čísly, kdežto T3$\frac{1}{2}$-prostory jsou definovány pomocí reálných čísel.

Jedním z důležitých tvrzení pro vztah z předchozího odstavce je Tichonovova věta. Její původní důkaz nebyl vůbec jednoduchý. V té době ještě nebyly ultrafiltry známy a bylo nutné se vypořádat se skutečností, že hromadné body projekce filtru nemusí tvořit hromadný bod původního filtru.

Čechova-Stoneova kompaktifikace může být veliká (např. $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^\omega}$) a navíc komplikovaná. Prvky $\beta\mathbb{N}$ jsou ultrafiltry na $\mathbb{N}$, které jsou navzájem hodně odlišné. Struktuře $\beta\mathbb{N}$ se věnovala a věnuje značná pozornost.

Jedním z důležitých tvrzení pro vztah z předchozího odstavce je Tichonovova věta. Její původní důkaz nebyl vůbec jednoduchý. V té době ještě nebyly ultrafiltry známy a bylo nutné se vypořádat se skutečností, že hromadné body projekce filtru nemusí tvořit hromadný bod původního filtru.

Čechova-Stoneova kompaktifikace může být veliká (např. $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\omega}}$) a navíc komplikovaná. Prvky $\beta\mathbb{N}$ jsou ultrafiltry na $\mathbb{N}$, které jsou navzájem hodně odlišné. Struktuře $\beta\mathbb{N}$ se věnovala a věnuje značná pozornost.

Je-li X kompaktní prostor, tvoří otevřenou subbázi v kompaktně otevřené topologii na Y^X množiny $U(F, G)$, kde F je uzavřená podmnožina X a G je otevřená podmnožina Y. Pro $Y = \mathbb{R}$ se snadno ukáže, že tato topologie je na $C(X)$ totožná s topologií stejnoměrné konvergence – viz též cvičení.
Souvislost se stejnoměrnými konvergencemi bude lépe vidět po zavedení uniformit.

Je celkem zřejmé, jak lze modifikovat kompaktně otevřenou topologii na Y^X. Stačí místo kompaktních množin K brát množiny z nějaké jiné vhodné třídy $\mathcal{S}$ podmnožin X. Aby výsledná topologie byla jemnější než topologie bodové konvergence (což je většinou žádoucí), musí být soustava $\mathcal{S}$ pokrytím množiny X.

Je-li X kompaktní prostor, tvoří otevřenou subbázi v kompaktně otevřené topologii na Y^X množiny $U(F,G)$, kde F je uzavřená podmnožina X a G je otevřená podmnožina Y. Pro $Y = \mathbb{R}$ se snadno ukáže, že tato topologie je na $C(X)$ totožná s topologií stejnoměrné konvergence – viz též cvičení.
Souvislost se stejnoměrnými konvergencemi bude lépe vidět po zavedení uniformit.

Je celkem zřejmé, jak lze modifikovat kompaktně otevřenou topologii na Y^X. Stačí místo kompaktních množin K brát množiny z nějaké jiné vhodné třídy $\mathcal{S}$ podmnožin X. Aby výsledná topologie byla jemnější než topologie bodové konvergence (což je většinou žádoucí), musí být soustava $\mathcal{S}$ pokrytím množiny X.