4. KOMPAKTNOST

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Charakterizace kompaktních prostorů)

Následující vlastnosti topologického prostoru X jsou ekvivalentní.

1. *X je kompaktní.*
2. *Každý filtr v X s bází složenou z uzavřených množin má neprázdný průnik.*
3. *Každý filtr v X má hromadný bod.*
4. *Každý ultrafiltr v X konverguje.*
5. *Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.*

Důkaz.

Ekvivalence $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$ jsou jednoduché. Ekvivalence $3 \Leftrightarrow 5$ plyne z obecného vztahu mezi hromadnými body uspořádaných souborů nebo filtrů: je-li $\{x_a\}_A$ uspořádaný soubor v X, je $\{F_a; a \in A\}$, kde $F_a = \{x_b; b \in A, b \geq a\}$, báze filtru a tento filtr i daný usměrněný soubor mají tytéž hromadné body; obráceně, je-li $\mathcal{F}$ filtr v X a zvolí se $x_F \in F$ pro každé $F \in \mathcal{F}$, pak hromadný bod souboru $\{x_F\}_{\mathcal{F}}$ je hromadný bod filtru $\mathcal{F}$. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních prostorů)

1. *Každý spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní prostor.*
2. *Kompaktnost není zachovávána ani podprostory ani jemnějšími topologiemi.*
3. *Je-li Y kompaktní prostor, pak projekce $p : X \times Y \to X$ je uzavřené zobrazení pro každý prostor X.*
4. *Každá kompaktní podmnožina regulárního prostoru X má bázi okolí v X složenou z uzavřených množin. Speciálně, kompaktní regulární prostor je normální.*
5. *Třída všech kompaktních prostorů je uzavřená na součiny, uzavřené podprostory a konečné součty.*

Důkaz.

1. Je-li $f : X \to Y$ spojitá surjekce a $\mathcal{G}$ otevřené pokrytí Y, je $\{f^{-1}(G)\}_{\mathcal{G}}$ otevřené pokrytí X. Obraz jeho konečného podpokrytí pokrývá Y a je částí $\mathcal{G}$.
2. Jednoduché.
3. Nechť A je uzavřená podmnožina $X \times Y$ a $x \in X \setminus p(A)$. Pro každé $y \in Y$ existují okolí U_y bodu y v Y a U_x bodu x v X tak, že $U_x \times U_y \cap A = \emptyset$. Vybereme konečné pokrytí $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$ prostoru Y a položíme $U = U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$. Pak $U \cap p(A) = \emptyset$.
4. Nechť A je uzavřená podmnožina kompaktního regulárního prostoru X a W je jeho otevřené okolí. Pro každý bod $a \in A$ existuje jeho otevřené okolí $U_a \subset \overline{U_a} \subset W$. Vybereme konečné pokrytí $U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}$ množiny A a položíme $U = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$. Zřejmě je $A \subset U \subset \overline{U} \subset W$.
5. Dokážeme jen součinovost, ostatní tvrzení mají jednoduché důkazy. Nechť $X = \Pi_A X_a$ je součin kompaktních prostorů a $\mathcal{F}$ je ultrafiltr v X. Pak projekce na X_a ultrafiltru $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na X_a, který tedy má limitní bod x_a. Je jednoduché ukázat, že $\{x_a\}_A$ je limita ultrafiltru $\mathcal{F}$.

$\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktních T_2-prostorů)

1. *Každý kompaktní podprostor T_2-prostoru je v něm uzavřený.*
2. *Prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je vnoření.*
3. *Spojité zobrazení kompaktního prostoru do T_2-prostoru je uzavřené.*
4. *Kompaktní T_2-prostor je regulární (a tedy normální).*
5. *Třída všech kompaktních T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii Hausdorffových prostorů. (Příslušná reflekce prostoru X se nazývá jeho Čechovou–Stoneovou kompaktifikací a značí se βX.)*

Důkaz.

Tvrzení 1 plyne z toho, že pro $x \in \overline{A}$ je $\{U \cap A; U \text{ okolí } x\}$ filtr v A, který má jedinou limitu v X.
Tvrzení 3 plyne ihned z 1 a tvrzení 2 z 3. Čtvrté tvrzení se dokáže podobně jako se dokazovala normalita regulárního kompaktního prostoru. Poslední tvrzení plyne z obecné věty a ze součinovosti a uzavřené dědičnosti kompaktních Hausdorffových prostorů. □

TVRZENÍ (Vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru)

Následující vlastnosti pro topologický prostor jsou ekvivalentní:

1. *X je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.*
2. *X lze vnořit do kompaktního Hausdorffova prostoru.*
3. *X má kompaktifikaci, která je Hausdorffovým prostorem.*
4. *X je vnořen do βX.*

Důkaz.

Každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor X lze vnořit do mocniny $[0,1]$ (což je kompaktní prostor podle Tichonovovy věty), takže $1 \Rightarrow 2$.
Uzávěr obrazu vnoření do kompaktního Hausdorffova prostoru je kompaktifikace X, takže $2 \Leftrightarrow 3$.
Z popisu epireflekce βX vyplývá ihned $3 \Rightarrow 4$.
Poslední implikace $4 \Rightarrow 1$ plyne z toho, že βX je normální Hausdorffův prostor, tedy i $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor a stejně tak má tuto poslední vlastnost i každý jeho podprostor. □

TVRZENÍ (Charakterizace βX)

Nechť Y je kompaktní Hausdorffův prostor obsahující X jako hustý podprostor. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *Y je β-obal prostoru X.*
2. *Každé spojité zobrazení z X do kompaktního Hausdorffova prostoru lze spojitě rozšířit na Y.*
3. *Každá omezená spojitá reálná funkce na X lze spojitě rozšířit na Y.*

Důkaz.

Implikace $1 \Rightarrow 2$ je vlastně popis epireflekce βX Další implikace je triviální. Zbývá ukázat $3 \Rightarrow 2$ protože $2 \Rightarrow 1$ je uvedený popis epireflekce.
Nechť $f : X \to Y$ je spojité zobrazení, Y je kompaktní T_2-prostor. Jako úplně regulární prostor vnoříme Y do nějaké mocniny $[0, 1]^A$. Složení f s projekcí do $[0, 1]$ lze podle předpokladu spojitě rozšířit na βX. Diagonální součin všech těchto rozšíření je spojité zobrazení $\beta X \to [0, 1]^A$, jehož obraz leží v Y, protože Y je uzavřený v $[0, 1]^A$. Příslušné zúžení na obraz je hledané rozšíření $\beta X \to Y$. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

1. *Kompaktně otevřená topologie na Y^X je jemnější než topologie bodové konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
2. *Kompaktně otevřená topologie na $\mathbb{R}^X$ je hrubší než topologie stejnoměrné konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
3. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 0, 1, 2$), má i kompaktně otevřená topologie na Y^X stejnou vlastnost.*
4. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 3, 3\frac{1}{2}$), má i $C_{co}(X, Y)$ stejnou vlastnost.*

Důkaz.

Jedině poslední dvě tvrzení nemají jednoduchý důkaz. Poslední tvrzení vyplyne později z popisu topologií na prostorech funkcí pomocí uniformit (dá se samozřejmě dokázat i přímo – zkuste to).

Nechť Y je regulární, $f \in C(X, Y)$ a $f \in U(K, G)$ pro nějakou kompaktní množinu $K \subset X$ a otevřenou množinu $G \subset Y$. Pak G je okolí uzavřené množiny $f(K)$ a tedy existuje otevřená množina H v Y tak, že $f)K) \subset H \subset \overline{H} \subset G$. Pak $U(K, H)$ je hledané okolí f, jehož uzávěr leží v $U(K, G)$. $\square$

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí subbáze)

Nechť $\mathcal{B}$ je otevřená subbáze a $\mathcal{C}$ uzavřená subbáze prostoru X. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

1. *X je kompaktní.*
2. *Každé pokrytí množiny X z prvků subbáze $\mathcal{B}$ má konečné podpokrytí.*
3. *Každá subbáze filtru složená z prvků subbáze $\mathcal{C}$ má neprázdný průnik.*

Důkaz.

Zřejmě je $1 \Rightarrow 2 \Leftrightarrow 3$. Dokážeme, že $3 \Rightarrow 1$. Nechť X není kompaktní a $\mathcal{F}$ je báze filtru složená z uzavřených množin, která má prázdný průnik. Z Kuratowského–Zornova lemmatu plyne, že taková báze filtru existuje maximální ve smyslu inkluze $\subset$. Každý prvek $F \in \mathcal{F}$ je průnikem konečných sjednocení prvků z $\mathcal{C}$ a z maximality plyne, že z každého tohoto konečného sjednocení musí do $\mathcal{F}$ náležet aspoň jeden prvek (a průnik těchto prvků je částí F). To znamená, že $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ je subbáze filtru, který má průnik obsažený v průniku $\mathcal{F}$ a tedy prázdný. To je spor s předpokladem v 3. $\square$

TVRZENÍ (Kompaktnost pomocí hromadných bodů)

Prostor X je kompaktní právě když každá jeho nekonečná podmnožina má úplný hromadný bod.

Důkaz.

Nechť X je kompaktní a $A \subset X$ je nekonečná množina, která nemá úplný hromadný bod. Pak každý bod $x \in X$ má otevřené okolí U_x takové, že $|U_x \cap A| < |A|$. Existuje konečné pokrytí X množinami $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Protože $A = (A \cap U_{x_1}) \cup \ldots \cup (A \cap U_{x_n}$, je $|A| \leq |A \cap U_{x_1}| + \ldots + |(A \cap U_{x_n}| < |A|$, což je spor.
Nechť každá nekonečná podmnožina X má úplný hromadný bod a X není kompaktní. Existuje tedy otevřené pokrytí $\mathcal{G}$, které neobsahuje konečné podpokrytí. Transfinitní indukcí (nebo pomocí Kuratowského-Zornova lemmatu) se sestrojí podpokrytí $\{V_\alpha\}_\kappa$ takové, že $V_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \neq \emptyset$. Nyní stačí z právě uvedených rozdílů vzít body x_α a jimi utvořená množina nebude mít úplný hromadný bod. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti kompaktně otevřené topologie.)

1. *Kompaktně otevřená topologie na Y^X je jemnější než topologie bodové konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
2. *Kompaktně otevřená topologie na $\mathbb{R}^X$ je hrubší než topologie stejnoměrné konvergence. Tyto dvě topologie nemusejí být stejné.*
3. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 0, 1, 2$), má i kompaktně otevřená topologie na Y^X stejnou vlastnost.*
4. *Je-li Y T_i-prostor ($i = 3, 3\frac{1}{2}$), má i $C_{co}(X, Y)$ stejnou vlastnost.*

Důkaz.

První tři vlastnosti jsou jednoduché (viz též prostory funkcí v Příkladech). Regularita $C_{co}(X, Y)$ také není složitá: je-li $f \in U(K, G)$, je $f(K)$ kompaktní a z regularity Y plyne existence otevřené množiny H tak, že $f(K) \subset H \subset \overline{H} \subset G$. Pak $U(K, H) \subset U(K, \overline{H}) \subset U(K, G)$.

Je-li Y úplně regulární a $f(K) \subset G$, K kompaktní, pak existuje spojitá $\varphi : Y \to [0, 1]$ s hodnotou 0 na $f(K$ a s hodnotou 1 mimo G. Funkce $\Phi : C(X, Y) \to [0, 1]$ definovaná jako $\Phi(g) = \sup_{x \in K} \varphi(g(x))$ je spojitá v kompaktně otevřené topologii a odděluje f od doplňku $U(K, G)$. □