4. KOMPAKTNOST

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

Příklady kompaktních prostorů

1. Nekonečný hrubý T_1-prostor je kompaktní, ale není normální, ani regulární.
2. Prostor ω_1 není kompaktní, ale každá jeho nekonečná podmnožina má hromadný bod.
3. Prostor $\omega_1 + 1$ je kompaktní.
4. Pro $\alpha < \omega_1$ je prostor ordinálů nejvýše rovných α kompaktní metrizovatelný nuldimenzionální prostor.
5. Na množině $[0,1] \times \{0,1\}$ definujme topologii: body $(x,+)$ jsou izolované, báze okolí bodu $(x,0)$ jsou množiny $U_x \times \{0,1\} \setminus (x,1)$, kde U_x je okolí x v $[0,1]$. Tento prostor je kompaktní a je to kompaktifikace Y množiny $X = [0,1]$ s diskrétní topologií, přičemž „zbytek" $Y \setminus X$ je homeomorfní s $[0,1]$ s obvyklou topologií. Tento prostor se často nazývá *Aleksandrovův dvojitý interval*.
6. Lexikografické uspořádání na součinu $[0,1] \times [0,1]$ dává kompaktní topologii. Tento prostor není separabilní ale má v každém bodě spočetnou bázi okolí.
7. Podprostor $[0,1] \times \{0,1\}$ předchozího prostoru je kompaktní separabilní nemetrizovatelný prostor (obsahuje část Sorgenfreyovy přímky). Často se nazývá *dvě šipky*.

V Aleksandrovově dvojitém intervalu lze místo $[0,1]$ vzít i jiný prostor. Startuje-li se s kompaktním Hausdorffovým prostorem X, získá se kompaktifikace diskrétního prostoru na $|X|$, jejíž „zbytek" je homeomorfní s X.

Příklady kompaktifikací

1. Obvyklé rozšíření $\mathbb{R}$ o body $-\infty$ a $+\infty$ je kompaktifikace $\mathbb{R}$, která není ekvivalentní s $\beta\mathbb{R}$.
2. $|\beta\mathbb{R}| \geq 2^{(2^\omega)}$.
3. $\omega_1 + 1 = \beta\omega_1$.
4. Konvergentní posloupnosti v $\beta\mathbb{N}$ jsou jedině skoro konstantní posloupnosti (od určitého indexu konstantní).

Příklady kompaktifikací

1. Obvyklé rozšíření $\mathbb{R}$ o body $-\infty$ a $+\infty$ je kompaktifikace $\mathbb{R}$, která není ekvivalentní s $\beta\mathbb{R}$.
2. $|\beta\mathbb{R}| \geq 2^{(2^\omega)}$.
3. $\omega_1 + 1 = \beta\omega_1$.
4. Konvergentní posloupnosti v $\beta\mathbb{N}$ jsou jedině skoro konstantní posloupnosti (od určitého indexu konstantní).

Příklady kompaktifikací

1. Obvyklé rozšíření $\mathbb{R}$ o body $-\infty$ a $+\infty$ je kompaktifikace $\mathbb{R}$, která není ekvivalentní s $\beta\mathbb{R}$.
2. $|\beta\mathbb{R}| \geq 2^{(2^\omega)}$.
3. $\omega_1 + 1 = \beta\omega_1$.
4. Konvergentní posloupnosti v $\beta\mathbb{N}$ jsou jedině skoro konstantní posloupnosti (od určitého indexu konstantní).

Příklady kompaktifikací

1. Obvyklé rozšíření $\mathbb{R}$ o body $-\infty$ a $+\infty$ je kompaktifikace $\mathbb{R}$, která není ekvivalentní s $\beta\mathbb{R}$.
2. $|\beta\mathbb{R}| \geq 2^{(2^{\omega})}$.
3. $\omega_1 + 1 = \beta\omega_1$.
4. Konvergentní posloupnosti v $\beta\mathbb{N}$ jsou jedině skoro konstantní posloupnosti (od určitého indexu konstantní).

1. $C_{co}([0,1])$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená stejnoměrnou konvergenci.
2. $C_{co}(\mathbb{R})$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená lokálně stejnoměrnou konvergenci. Podobně pro $\mathbb{R}^n$ místo $\mathbb{R}$.
3. Je-li X diskrétní prostor, je kompaktně otevřená topologie na Y^X totožná s topologií bodové konvergence.
4. Je-li Y indiskrétní prostor, je i kompaktně otevřená topologie na Y^X indiskrétní.

1. $C_{co}([0,1])$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená stejnoměrnou konvergenci.
2. $C_{co}(\mathbb{R})$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená lokálně stejnoměrnou konvergenci. Podobně pro $\mathbb{R}^n$ místo $\mathbb{R}$.
3. Je-li X diskrétní prostor, je kompaktně otevřená topologie na Y^X totožná s topologií bodové konvergence.
4. Je-li Y indiskrétní prostor, je i kompaktně otevřená topologie na Y^X indiskrétní.

1. $C_{co}([0,1])$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená stejnoměrnou konvergenci.
2. $C_{co}(\mathbb{R})$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená lokálně stejnoměrnou konvergenci. Podobně pro $\mathbb{R}^n$ místo $\mathbb{R}$.
3. Je-li X diskrétní prostor, je kompaktně otevřená topologie na Y^X totožná s topologií bodové konvergence.
4. Je-li Y indiskrétní prostor, je i kompaktně otevřená topologie na Y^X indiskrétní.

1. $C_{co}([0,1])$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená stejnoměrnou konvergenci.
2. $C_{co}(\mathbb{R})$ je metrizovatelný prostor a konvergence $f_n \longrightarrow f$ v tomto prostoru znamená lokálně stejnoměrnou konvergenci. Podobně pro $\mathbb{R}^n$ místo $\mathbb{R}$.
3. Je-li X diskrétní prostor, je kompaktně otevřená topologie na Y^X totožná s topologií bodové konvergence.
4. Je-li Y indiskrétní prostor, je i kompaktně otevřená topologie na Y^X indiskrétní.