# OBECNÁ TOPOLOGIE

## Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

Metrizovatelné kompakty jsou buď spočetné nebo mají mohutnost kontinua.

Oproti tomu pro velikost nosné množiny kompaktního Hausdorffova prostoru není žádné omezení. Stačí si uvědomit, že dokonce pro každé ordinální číslo $\alpha$ je prostor $\alpha + 1$ kompaktní.

Jednodušší příklad můžeme také získat jednobodovou kompaktifikací libovolně velkého diskrétního prostoru.

Metrizovatelné kompakty jsou buď spočetné nebo mají mohutnost kontinua.

Oproti tomu pro velikost nosné množiny kompaktního Hausdorffova prostoru není žádné omezení. Stačí si uvědomit, že dokonce pro každé ordinální číslo $\alpha$ je prostor $\alpha + 1$ kompaktní.

Jednodušší příklad můžeme také získat jednobodovou kompaktifikací libovolně velkého diskrétního prostoru.

Metrizovatelné kompakty jsou buď spočetné nebo mají mohutnost kontinua.

Oproti tomu pro velikost nosné množiny kompaktního Hausdorffova prostoru není žádné omezení. Stačí si uvědomit, že dokonce pro každé ordinální číslo $\alpha$ je prostor $\alpha + 1$ kompaktní.

Jednodušší příklad můžeme také získat jednobodovou kompaktifikací libovolně velkého diskrétního prostoru.

Kompaktní podprostory prostoru $\omega^\omega$ mají prázdný vnitřek. Projekce kompaktního podprostoru na jednotlivé složky musí být totiž konečné.

Prostor $\omega^\omega$ nelze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha svých kompaktních podprostorů. To lze v tomto případě dokázat pomocí diagonálního triku. Alternativně je možné užít Baireovu větu, protože v tomto úplném prostoru jsou kompakty řídké.

Kompaktní podprostory racionálních čísel mají také prázdný vnitřek.

Kompaktní podprostory Sorgenfreyovy přímky jsou spočetné, protože nemohou obsahovat nekonečné rostoucí posloupnosti.

Kompaktní podprostory prostoru $\omega^\omega$ mají prázdný vnitřek. Projekce kompaktního podprostoru na jednotlivé složky musí být totiž konečné.

Prostor $\omega^\omega$ nelze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha svých kompaktních podprostorů. To lze v tomto případě dokázat pomocí diagonálního triku. Alternativně je možné užít Baireovu větu, protože v tomto úplném prostoru jsou kompakty řídké.

Kompaktní podprostory racionálních čísel mají také prázdný vnitřek.

Kompaktní podprostory Sorgenfreyovy přímky jsou spočetné, protože nemohou obsahovat nekonečné rostoucí posloupnosti.

Kompaktní podprostory prostoru $\omega^\omega$ mají prázdný vnitřek. Projekce kompaktního podprostoru na jednotlivé složky musí být totiž konečné.

Prostor $\omega^\omega$ nelze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha svých kompaktních podprostorů. To lze v tomto případě dokázat pomocí diagonálního triku. Alternativně je možné užít Baireovu větu, protože v tomto úplném prostoru jsou kompakty řídké.

Kompaktní podprostory racionálních čísel mají také prázdný vnitřek.

Kompaktní podprostory Sorgenfreyovy přímky jsou spočetné, protože nemohou obsahovat nekonečné rostoucí posloupnosti.

Kompaktní podprostory prostoru $\omega^\omega$ mají prázdný vnitřek. Projekce kompaktního podprostoru na jednotlivé složky musí být totiž konečné.

Prostor $\omega^\omega$ nelze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha svých kompaktních podprostorů. To lze v tomto případě dokázat pomocí diagonálního triku. Alternativně je možné užít Baireovu větu, protože v tomto úplném prostoru jsou kompakty řídké.

Kompaktní podprostory racionálních čísel mají také prázdný vnitřek.

Kompaktní podprostory Sorgenfreyovy přímky jsou spočetné, protože nemohou obsahovat nekonečné rostoucí posloupnosti.

**TVRZENÍ**

*Lineárně uspořádaný prostor $X$ je kompaktní, právě když každá jeho podmnožina (včetně prázdné!) má supremum. (Pak má také každá podmnožina infimum.)*

**Důkaz.**

Kdybychom totiž měli množinu $M \subset X$, která nemá supremum, pak můžeme definovat otevřené pokrytí $X$ neobsahující konečné podpokrytí. Pro $x \in X$, které je menší než nějaký prvek $M$ uvažujeme otevřený interval $(\leftarrow, x)$ a abychom dostali pokrytí přidáme ještě množinu všech $y \in X$, která jsou větší než všechny prvky z $M$.

Naopak předpokládejme, že každá podmnožina $X$ má supremum a ať je dáno nějaké otevřené pokrytí. Uvažujme supremum množiny těch $x \in X$, pro které lze interval $(\leftarrow, x]$ pokrýt konečně mnoha prvky daného pokrytí. Snadno se již ukáže, že toto supremum se rovná největšímu prvku v $X$ a tedy $X$ je kompaktní.

Tomuto způsobu dokazování se názorně říká metoda plížení. □

**TVRZENÍ**

*Lineárně uspořádaný prostor $X$ je kompaktní, právě když každá jeho podmnožina (včetně prázdné!) má supremum. (Pak má také každá podmnožina infimum.)*

**Důkaz.**

Kdybychom totiž měli množinu $M \subset X$, která nemá supremum, pak můžeme definovat otevřené pokrytí $X$ neobsahující konečné podpokrytí. Pro $x \in X$, které je menší než nějaký prvek $M$ uvažujeme otevřený interval $(\leftarrow, x)$ a abychom dostali pokrytí přidáme ještě množinu všech $y \in X$, která jsou větší než všechny prvky z $M$.

Naopak předpokládejme, že každá podmnožina $X$ má supremum a ať je dáno nějaké otevřené pokrytí. Uvažujme supremum množiny těch $x \in X$, pro které lze interval $(\leftarrow, x]$ pokrýt konečně mnoha prvky daného pokrytí. Snadno se již ukáže, že toto supremum se rovná největšímu prvku v $X$ a tedy $X$ je kompaktní. Tomuto způsobu dokazování se názorně říká metoda plížení. $\square$

**TVRZENÍ**

*Lineárně uspořádaný prostor $X$ je kompaktní, právě když každá jeho podmnožina (včetně prázdné!) má supremum. (Pak má také každá podmnožina infimum.)*

**Důkaz.**

Kdybychom totiž měli množinu $M \subset X$, která nemá supremum, pak můžeme definovat otevřené pokrytí $X$ neobsahující konečné podpokrytí. Pro $x \in X$, které je menší než nějaký prvek $M$ uvažujeme otevřený interval $(\leftarrow, x)$ a abychom dostali pokrytí přidáme ještě množinu všech $y \in X$, která jsou větší než všechny prvky z $M$.

Naopak předpokládejme, že každá podmnožina $X$ má supremum a ať je dáno nějaké otevřené pokrytí. Uvažujme supremum množiny těch $x \in X$, pro které lze interval $(\leftarrow, x]$ pokrýt konečně mnoha prvky daného pokrytí. Snadno se již ukáže, že toto supremum se rovná největšímu prvku v $X$ a tedy $X$ je kompaktní.
Tomuto způsobu dokazování se názorně říká metoda plížení. □

Hellyho prostor $H$ je definován jako prostor všech neklesajících funkcí $[0,1] \to [0,1]$ s topologií bodové konvergence. Tento prostor má řadu zajímavých vlastností.

Jde o uzavřený podprostor kompaktu $[0,1]^{[0,1]}$ a proto je $H$ kompakt.

Tento prostor je separabilní. Spočetnou hustou podmnožinu dostaneme například tak, že uvažujeme ty funkce z $H$, které nabývají jen konečně mnoha racionálních hodnot a mají skoky jen v racionálních bodech.

**TVRZENÍ**

*Každý bod $f$ v prostoru $H$ má spočetnou lokální bázi.*

**Důkaz.**

K tomu se užije fakt, že neklesající funkce $f$ má jen spočetně bodů nespojitosti - označme množinu těchto bodů $M$. Ještě označme jako $N$ spočetnou hustou podmnožinu intervalu $[0,1]$. Pro každou konečnou podmnožinu $M \cup N$ a pro $n$ přirozené stačí nyní uvažovat množinu všech funkcí v $H$, které se v bodech z $K$ liší od $f$ nejvýše o $\frac{1}{n}$. Tím dostaneme spočetnou lokální bázi. □

Hellyho prostor $H$ je definován jako prostor všech neklesajících funkcí $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ s topologií bodové konvergence. Tento prostor má řadu zajímavých vlastností.

Jde o uzavřený podprostor kompaktu $[0,1]^{[0,1]}$ a proto je $H$ kompakt.

Tento prostor je separabilní. Spočetnou hustou podmnožinu dostaneme například tak, že uvažujeme ty funkce z $H$, které nabývají jen konečně mnoha racionálních hodnot a mají skoky jen v racionálních bodech.

**TVRZENÍ**

*Každý bod $f$ v prostoru $H$ má spočetnou lokální bázi.*

**Důkaz.**

K tomu se užije fakt, že neklesající funkce $f$ má jen spočetně bodů nespojitosti - označme množinu těchto bodů $M$. Ještě označme jako $N$ spočetnou hustou podmnožinu intervalu $[0,1]$. Pro každou konečnou podmnožinu $M \cup N$ a pro $n$ přirozené stačí nyní uvažovat množinu všech funkcí v $H$, které se v bodech z $K$ liší od $f$ nejvýše o $\frac{1}{n}$. Tím dostaneme spočetnou lokální bázi. □

Hellyho prostor $H$ je definován jako prostor všech neklesajících funkcí $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ s topologií bodové konvergence. Tento prostor má řadu zajímavých vlastností.

Jde o uzavřený podprostor kompaktu $[0,1]^{[0,1]}$ a proto je $H$ kompakt.

Tento prostor je separabilní. Spočetnou hustou podmnožinu dostaneme například tak, že uvažujeme ty funkce z $H$, které nabývají jen konečně mnoha racionálních hodnot a mají skoky jen v racionálních bodech.

**TVRZENÍ**

*Každý bod $f$ v prostoru $H$ má spočetnou lokální bázi.*

**Důkaz.**

K tomu se užije fakt, že neklesající funkce $f$ má jen spočetně bodů nespojitosti - označme množinu těchto bodů $M$. Ještě označme jako $N$ spočetnou hustou podmnožinu intervalu $[0,1]$. Pro každou konečnou podmnožinu $M \cup N$ a pro $n$ přirozené stačí nyní uvažovat množinu všech funkcí v $H$, které se v bodech z $K$ liší od $f$ nejvýše o $\frac{1}{n}$. Tím dostaneme spočetnou lokální bázi. □

Hellyho prostor $H$ je definován jako prostor všech neklesajících funkcí $[0,1] \to [0,1]$ s topologií bodové konvergence. Tento prostor má řadu zajímavých vlastností.

Jde o uzavřený podprostor kompaktu $[0,1]^{[0,1]}$ a proto je $H$ kompakt.

Tento prostor je separabilní. Spočetnou hustou podmnožinu dostaneme například tak, že uvažujeme ty funkce z $H$, které nabývají jen konečně mnoha racionálních hodnot a mají skoky jen v racionálních bodech.

**TVRZENÍ**

*Každý bod $f$ v prostoru $H$ má spočetnou lokální bázi.*

Důkaz.

K tomu se užije fakt, že neklesající funkce $f$ má jen spočetně bodů nespojitosti - označme množinu těchto bodů $M$. Ještě označme jako $N$ spočetnou hustou podmnožinu intervalu $[0,1]$. Pro každou konečnou podmnožinu $M \cup N$ a pro $n$ přirozené stačí nyní uvažovat množinu všech funkcí v $H$, které se v bodech z $K$ liší od $f$ nejvýše o $\frac{1}{n}$. Tím dostaneme spočetnou lokální bázi. □

Hellyho prostor $H$ je definován jako prostor všech neklesajících funkcí $[0,1] \to [0,1]$ s topologií bodové konvergence. Tento prostor má řadu zajímavých vlastností.

Jde o uzavřený podprostor kompaktu $[0,1]^{[0,1]}$ a proto je $H$ kompakt.

Tento prostor je separabilní. Spočetnou hustou podmnožinu dostaneme například tak, že uvažujeme ty funkce z $H$, které nabývají jen konečně mnoha racionálních hodnot a mají skoky jen v racionálních bodech.

**TVRZENÍ**

*Každý bod $f$ v prostoru $H$ má spočetnou lokální bázi.*

**Důkaz.**

K tomu se užije fakt, že neklesající funkce $f$ má jen spočetně bodů nespojitosti - označme množinu těchto bodů $M$. Ještě označme jako $N$ spočetnou hustou podmnožinu intervalu $[0,1]$. Pro každou konečnou podmnožinu $M \cup N$ a pro $n$ přirozené stačí nyní uvažovat množinu všech funkcí v $H$, které se v bodech z $K$ liší od $f$ nejvýše o $\frac{1}{n}$. Tím dostaneme spočetnou lokální bázi. □

**TVRZENÍ**

*Hellyho prostor není metrizovatelný.*

**Důkaz.**

Pro $x \in [0,1]$ označme jako $f_x$ funkci $[0,1] \to [0,1]$, která je nulová na intervalu $[0,x)$, rovna jedné na intervalu $(x,1]$ a v bodě $x$ nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$. Pak je množina $\{f_x \in H : x \in [0,1]\}$ diskrétní podprostor $H$ mohutnosti kontinua. Z toho je již možné odvodit, že prostor $H$ není metrizovatelný. Stačí si vzpomenout na to, že metrizovatelné kompakty jsou dědičně separabilní. $\square$

**TVRZENÍ**

*Hellyho prostor není metrizovatelný.*

**Důkaz.**

Pro $x \in [0,1]$ označme jako $f_x$ funkci $[0,1] \to [0,1]$, která je nulová na intervalu $[0,x)$, rovna jedné na intervalu $(x,1]$ a v bodě $x$ nabývá hodnoty $\frac{1}{2}$. Pak je množina $\{f_x \in H : x \in [0,1]\}$ diskrétní podprostor $H$ mohutnosti kontinua. Z toho je již možné odvodit, že prostor $H$ není metrizovatelný. Stačí si vzpomenout na to, že metrizovatelné kompakty jsou dědičně separabilní. $\square$

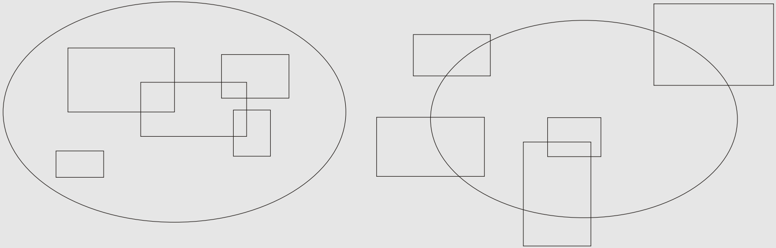
Pro libovolný topologický prostor $X$ se nabízí možnost definovat takzvaný hyperprostor, který budeme značit $2^X$.

Body v něm jsou tvořeny uzavřenými neprázdnými podmnožinami $X$ a topologie je určena subbázovými množinami $U^* = \{F \in 2^X : F \subset U\}$ a $V' = \{F \in 2^X : F \cap V \neq \emptyset\}$ pro otevřené podmnožiny $U$, $V$ prostoru $X$.

Pro libovolný topologický prostor $X$ se nabízí možnost definovat takzvaný hyperprostor, který budeme značit $2^X$.

Body v něm jsou tvořeny uzavřenými neprázdnými podmnožinami $X$ a topologie je určena subbázovými množinami $U^* = \{F \in 2^X : F \subset U\}$ a $V' = \{F \in 2^X : F \cap V \neq \emptyset\}$ pro otevřené podmnožiny $U$, $V$ prostoru $X$.

# Subbáze v hyperprostoru $2^X$ (dva typy)



Ukážeme si, že kompaktnost základního prostoru $X$ implikuje kompaktnost hyperprostoru. Použijeme k tomu Alexandrovu větu, která nám říká, že namísto všech otevřených pokrytí se můžeme při ověřování kompaktnosti omezit na otevřená pokrytí z nějaké předem vybrané subbáze. V našem případě budeme samozřejmě uvažovat tu subbázi, pomocí které je topologie hyperprostoru $2^X$ definována.

Mějme tedy zadané otevřené pokrytí subbázovými množinami $U_i^*$, $V_j'$. Množina $X \setminus \bigcup V_j$ je uzavřená podmnožina $X$ a tedy je to prvek hyperprostoru $2^X$. Nutně musí existovat nějaké $i_0$, pro které je $X \setminus \bigcup V_j \subset U_{i_0}$. Nyní užijeme kompaktnost prostoru $X$ k tomu, abychom našli konečnou podmnožinu indexů $j_0, \ldots, j_n$ tak, že $X \setminus U_{i_0} \subset V_{j_0} \cup \cdots \cup V_{j_n}$. Na obrázku si teď už snadno rozmyslíme, že množiny $U_{i_0}^*$, $V_{j_0}'$, …, $V_{j_n}'$ pokrývají celý hyperprostor $2^X$.

Ukážeme si, že kompaktnost základního prostoru $X$ implikuje kompaktnost hyperprostoru. Použijeme k tomu Alexandrovu větu, která nám říká, že namísto všech otevřených pokrytí se můžeme při ověřování kompaktnosti omezit na otevřená pokrytí z nějaké předem vybrané subbáze. V našem případě budeme samozřejmě uvažovat tu subbázi, pomocí které je topologie hyperprostoru $2^X$ definována.

Mějme tedy zadané otevřené pokrytí subbázovými množinami $U_i^*$, $V_j'$. Množina $X \setminus \bigcup V_j$ je uzavřená podmnožina $X$ a tedy je to prvek hyperprostoru $2^X$. Nutně musí existovat nějaké $i_0$, pro které je $X \setminus \bigcup V_j \subset U_{i_0}$. Nyní užijeme kompaktnost prostoru $X$ k tomu, abychom našli konečnou podmnožinu indexů $j_0, \dots, j_n$ tak, že $X \setminus U_{i_0} \subset V_{j_0} \cup \dots \cup V_{j_n}$. Na obrázku si teď už snadno rozmyslíme, že množiny $U_{i_0}^*, V_{j_0}', \dots, V_{j_n}'$ pokrývají celý hyperprostor $2^X$.

Spojité obrazy metrizovatelných prostorů nemusí být metrizovatelné. A to ani v případě kdy předpokládáme, že obrazem je Hausdorffův prostor (stačí uvažovat například projekci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Pokud navíc předpokládáme, že výchozí prostor je kompaktní, situace se výrazně zlepší.

**TVRZENÍ**

*Spojité Hausdorffovy obrazy metrizovatelných kompaktů jsou opět metrizovatelné.*

**Důkaz.**

Stačí nám ukázat, že takový spojitý obraz $f(M) = N$ metrického kompaktu $M$ má spočetnou bázi. Zafixujeme tedy spočetnou bázi prostoru $M$ a ukážeme, že (otevřené) množiny tvaru $N \setminus f(M \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k))$, kde $B_1, \ldots, B_k$ jsou prvky vybrané báze na $M$, tvoří již bázi obrazu. Zvolme tedy libovolný bod $y \in N$ a jeho okolí $V$. Po přechodu ke vzorům dostaneme otevřenou množinu $f^{-1}(V)$ obsahující uzavřenou $f^{-1}(y)$. Díky kompaktnosti množiny $f^{-1}(y)$ najdeme konečně mnoho prvků z té na začátku vybrané báze $B_1, \ldots, B_k$, pro něž je $f^{-1}(y) \subset B_1 \cup \cdots \cup B_k \subset f^{-1}(V)$. To nám již zaručí, že pro obrazy bude platit $y \in N \setminus f(M \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)) \subset V$. $\square$

Spojité obrazy metrizovatelných prostorů nemusí být metrizovatelné. A to ani v případě kdy předpokládáme, že obrazem je Hausdorffův prostor (stačí uvažovat například projekci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Pokud navíc předpokládáme, že výchozí prostor je kompaktní, situace se výrazně zlepší.

**TVRZENÍ**

*Spojité Hausdorffovy obrazy metrizovatelných kompaktů jsou opět metrizovatelné.*

Důkaz.

Stačí nám ukázat, že takový spojitý obraz $f(M) = N$ metrického kompaktu $M$ má spočetnou bázi. Zafixujeme tedy spočetnou bázi prostoru $M$ a ukážeme, že (otevřené) množiny tvaru $N \setminus f\big(M \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)\big)$, kde $B_1, \ldots, B_k$ jsou prvky vybrané báze na $M$, tvoří již bázi obrazu. Zvolme tedy libovolný bod $y \in N$ a jeho okolí $V$. Po přechodu ke vzorům dostaneme otevřenou množinu $f^{-1}(V)$ obsahující uzavřenou $f^{-1}(y)$. Díky kompaktnosti množiny $f^{-1}(y)$ najdeme konečně mnoho prvků z té na začátku vybrané báze $B_1, \ldots, B_k$, pro něž je $f^{-1}(y) \subset B_1 \cup \cdots \cup B_k \subset f^{-1}(V)$. To nám již zaručí, že pro obrazy bude platit $y \in N \setminus f\big(M \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)\big) \subset V$. $\square$

Spojité obrazy metrizovatelných prostorů nemusí být metrizovatelné. A to ani v případě kdy předpokládáme, že obrazem je Hausdorffův prostor (stačí uvažovat například projekci $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Pokud navíc předpokládáme, že výchozí prostor je kompaktní, situace se výrazně zlepší.

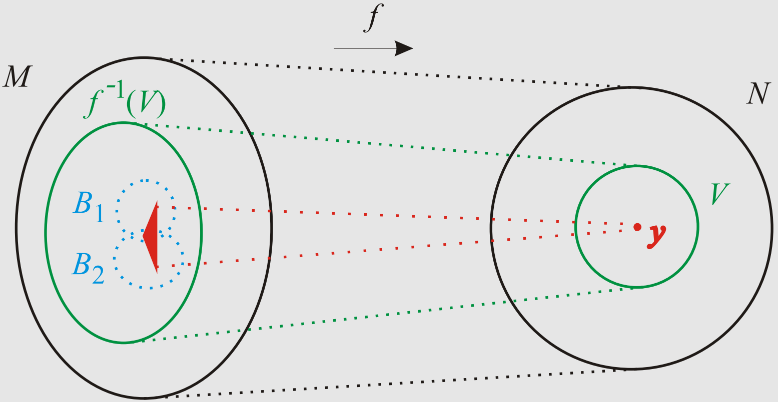
**TVRZENÍ**

*Spojité Hausdorffovy obrazy metrizovatelných kompaktů jsou opět metrizovatelné.*

**Důkaz.**

Stačí nám ukázat, že takový spojitý obraz $f(M) = N$ metrického kompaktu $M$ má spočetnou bázi. Zafixujeme tedy spočetnou bázi prostoru $M$ a ukážeme, že (otevřené) množiny tvaru $N \setminus f\big(M \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)\big)$, kde $B_1, \ldots, B_k$ jsou prvky vybrané báze na $M$, tvoří již bázi obrazu. Zvolme tedy libovolný bod $y \in N$ a jeho okolí $V$. Po přechodu ke vzorům dostaneme otevřenou množinu $f^{-1}(V)$ obsahující uzavřenou $f^{-1}(y)$. Díky kompaktnosti množiny $f^{-1}(y)$ najdeme konečně mnoho prvků z té na začátku vybrané báze $B_1, \ldots, B_k$, pro něž je $f^{-1}(y) \subset B_1 \cup \cdots \cup B_k \subset f^{-1}(V)$. To nám již zaručí, že pro obrazy bude platit $y \in N \setminus f\big(M \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_k)\big) \subset V$. $\square$

# Spojitý obraz metrizovatelného kompaktu je metrizovatelný



Zkuste pomocí přímočaré modifikace předchozího dokázat, že spojité Hausdorffovy obrazy kompaktů váhy $\kappa$ mají váhu nejvýše $\kappa$.

Jednobodová kompaktifikace reálné přímky je homeomorfní kružnici. Obecně jednobodovou kompaktifikací $n$-rozměrného euklidovského prostoru dostaneme $n$-dimenzionální sféru.

K důkazu lze použít tzv. stereografickou projekci, což je homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ a $n$-dimenzionální sféry s jedním vynechaným bodem.

S čím je homeomorfní jednobodová kompaktifikace uzavřené poloroviny?

Spočetný diskrétní prostor $\omega$ je obsažen v prostoru $\omega_1$ a přesto $\beta\omega$ je množinově mnohem větší než $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.

Jednobodová kompaktifikace reálné přímky je homeomorfní kružnici. Obecně jednobodovou kompaktifikací $n$-rozměrného euklidovského prostoru dostaneme $n$-dimenzionální sféru.

K důkazu lze použít tzv. stereografickou projekci, což je homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ a $n$-dimenzionální sféry s jedním vynechaným bodem.

S čím je homeomorfní jednobodová kompaktifikace uzavřené poloroviny?

Spočetný diskrétní prostor $\omega$ je obsažen v prostoru $\omega_1$ a přesto $\beta\omega$ je množinově mnohem větší než $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.

Jednobodová kompaktifikace reálné přímky je homeomorfní kružnici. Obecně jednobodovou kompaktifikací $n$-rozměrného euklidovského prostoru dostaneme $n$-dimenzionální sféru.

K důkazu lze použít tzv. stereografickou projekci, což je homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ a $n$-dimenzionální sféry s jedním vynechaným bodem.

S čím je homeomorfní jednobodová kompaktifikace uzavřené poloroviny?

Spočetný diskrétní prostor $\omega$ je obsažen v prostoru $\omega_1$ a přesto $\beta\omega$ je množinově mnohem větší než $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.

Jednobodová kompaktifikace reálné přímky je homeomorfní kružnici. Obecně jednobodovou kompaktifikací $n$-rozměrného euklidovského prostoru dostaneme $n$-dimenzionální sféru.

K důkazu lze použít tzv. stereografickou projekci, což je homeomorfismus $\mathbb{R}^n$ a $n$-dimenzionální sféry s jedním vynechaným bodem.

S čím je homeomorfní jednobodová kompaktifikace uzavřené poloroviny?

Spočetný diskrétní prostor $\omega$ je obsažen v prostoru $\omega_1$ a přesto $\beta\omega$ je množinově mnohem větší než $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.

Prostor $\beta\mathbb{R}$ má stejnou mohutnost jako $\beta\omega$.

K tomu nám stačí uvažovat následující dvě spojitá zobrazení: inkluzi $f : \omega \to \mathbb{R}$ a libovolnou bijekci $g : \omega \to \mathbb{Q}$. Obě tato zobrazení můžeme spojitě rozšířit na zobrazení $\overline{f} : \beta\omega \to \beta\mathbb{R}$ a $\overline{g} : \beta\omega \to \beta\mathbb{R}$. Zobrazení $\overline{f}$ je prosté a tedy $|\beta\omega| \leq |\beta\mathbb{R}|$. Na druhou stranu zobrazení $\overline{g}$ je surjektivní (protože obraz při $\overline{g}$ je kompakt obsahující hustou podmnožinu $\beta\mathbb{R}$), odkud dostáváme obrácenou nerovnost $|\beta\omega| \geq |\beta\mathbb{R}|$

Dokonce platí, že do beta obalu libovolného nekompaktního metrizovatelného prostoru $X$ můžeme prostor $\beta\omega$ vnořit. Udělá se to tak v prostoru $X$ najdeme nekonečnou spočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu $S$. Protože každou spojitou omezenou funkci definovanou na $S$ můžeme spojitě rozšířit podle Tietzeho věty na celé $X$ a toto rozšíření opět rozšířit na celé $\beta X$, dostáváme, že $\overline{S} = \beta S$.

Prostor $\beta\mathbb{R}$ má stejnou mohutnost jako $\beta\omega$.

K tomu nám stačí uvažovat následující dvě spojitá zobrazení: inkluzi $f : \omega \to \mathbb{R}$ a libovolnou bijekci $g : \omega \to \mathbb{Q}$. Obě tato zobrazení můžeme spojitě rozšířit na zobrazení $\bar{f} : \beta\omega \to \beta\mathbb{R}$ a $\bar{g} : \beta\omega \to \beta\mathbb{R}$. Zobrazení $\bar{f}$ je prosté a tedy $|\beta\omega| \leq |\beta\mathbb{R}|$. Na druhou stranu zobrazení $\bar{g}$ je surjektivní (protože obraz při $\bar{g}$ je kompakt obsahující hustou podmnožinu $\beta\mathbb{R}$), odkud dostáváme obrácenou nerovnost $|\beta\omega| \geq |\beta\mathbb{R}|$

Dokonce platí, že do beta obalu libovolného nekompaktního metrizovatelného prostoru $X$ můžeme prostor $\beta\omega$ vnořit. Udělá se to tak v prostoru $X$ najdeme nekonečnou spočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu $S$. Protože každou spojitou omezenou funkci definovanou na $S$ můžeme spojitě rozšířit podle Tietzeho věty na celé $X$ a toto rozšíření opět rozšířit na celé $\beta X$, dostáváme, že $\overline{S} = \beta S$.

Prostor $\beta\mathbb{R}$ má stejnou mohutnost jako $\beta\omega$.

K tomu nám stačí uvažovat následující dvě spojitá zobrazení: inkluzi $f : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ a libovolnou bijekci $g : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$. Obě tato zobrazení můžeme spojitě rozšířit na zobrazení $\bar{f} : \beta\omega \longrightarrow \beta\mathbb{R}$ a $\bar{g} : \beta\omega \longrightarrow \beta\mathbb{R}$. Zobrazení $\bar{f}$ je prosté a tedy $|\beta\omega| \leq |\beta\mathbb{R}|$. Na druhou stranu zobrazení $\bar{g}$ je surjektivní (protože obraz při $\bar{g}$ je kompakt obsahující hustou podmnožinu $\beta\mathbb{R}$), odkud dostáváme obrácenou nerovnost $|\beta\omega| \geq |\beta\mathbb{R}|$

Dokonce platí, že do beta obalu libovolného nekompaktního metrizovatelného prostoru $X$ můžeme prostor $\beta\omega$ vnořit. Udělá se to tak v prostoru $X$ najdeme nekonečnou spočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu $S$. Protože každou spojitou omezenou funkci definovanou na $S$ můžeme spojitě rozšířit podle Tietzeho věty na celé $X$ a toto rozšíření opět rozšířit na celé $\beta X$, dostáváme, že $\overline{S} = \beta S$.

Prostor všech spočetných ordinálních čísel s topologií danou uspořádáním má tu vlastnost, že každá spojitá funkce na něm definovaná je od nějakého indexu konstantní. Z toho jako důsledek vyplývá, že beta obal tohoto prostoru je to samé jako jeho jednobodová kompaktifikace tj. $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$. Platí však dokonce mnohem silnější tvrzení.

**TVRZENÍ**

*Pro libovolný Hausdorffův kompakt $K$ platí, že $\beta(\omega_1 \times K) = (\omega_1 + 1) \times K$.*

**Důkaz.**

Zvolíme-li spojitou funkci $f : \omega_1 \times K \to [0, 1]$, pak pro každé přirozené číslo $i$ a pro limitní $\alpha < \omega_1$ existuje $\Phi_i(\alpha) < \alpha$, že nerovnost $|f(\gamma, x) - f(\alpha, x)| < \frac{1}{i}$ platí pro každé $x \in X$ a pro každé $\gamma$ splňující $\Phi_i(\alpha) < \gamma \leq \alpha$. Nyní podle pressing down lemmatu existuje pro každé $i$ přirozené nějaké $\alpha_i < \omega_1$, že množina $\{\alpha < \omega_1 | \Phi_i(\alpha) = \alpha_i\}$ je nespočetná. Nyní stačí položit za $\alpha$ supremum spočetných ordinálů $\alpha_i$. Funkci $f$ spojitě dodefinujeme v bodech $(\omega_1, x)$ hodnotou $f(\alpha, x)$. $\square$

Prostor všech spočetných ordinálních čísel s topologií danou uspořádáním má tu vlastnost, že každá spojitá funkce na něm definovaná je od nějakého indexu konstantní. Z toho jako důsledek vyplývá, že beta obal tohoto prostoru je to samé jako jeho jednobodová kompaktifikace tj. $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$. Platí však dokonce mnohem silnější tvrzení.

**TVRZENÍ**

*Pro libovolný Hausdorffův kompakt $K$ platí, že $\beta(\omega_1 \times K) = (\omega_1 + 1) \times K$.*

Důkaz.

Zvolíme-li spojitou funkci $f : \omega_1 \times K \to [0,1]$, pak pro každé přirozené číslo $i$ a pro limitní $\alpha < \omega_1$ existuje $\Phi_i(\alpha) < \alpha$, že nerovnost $|f(\gamma, x) - f(\alpha, x)| < \frac{1}{i}$ platí pro každé $x \in X$ a pro každé $\gamma$ splňující $\Phi_i(\alpha) < \gamma \leq \alpha$. Nyní podle pressing down lemmatu existuje pro každé $i$ přirozené nějaké $\alpha_i < \omega_1$, že množina $\{\alpha < \omega_1 | \Phi_i(\alpha) = \alpha_i\}$ je nespočetná. Nyní stačí položit za $\alpha$ supremum spočetných ordinálů $\alpha_i$. Funkci $f$ spojitě dodefinujeme v bodech $(\omega_1, x)$ hodnotou $f(\alpha, x)$. $\square$

Prostor všech spočetných ordinálních čísel s topologií danou uspořádáním má tu vlastnost, že každá spojitá funkce na něm definovaná je od nějakého indexu konstantní. Z toho jako důsledek vyplývá, že beta obal tohoto prostoru je to samé jako jeho jednobodová kompaktifikace tj. $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$. Platí však dokonce mnohem silnější tvrzení.

## TVRZENÍ

*Pro libovolný Hausdorffův kompakt $K$ platí, že $\beta(\omega_1 \times K) = (\omega_1 + 1) \times K$.*

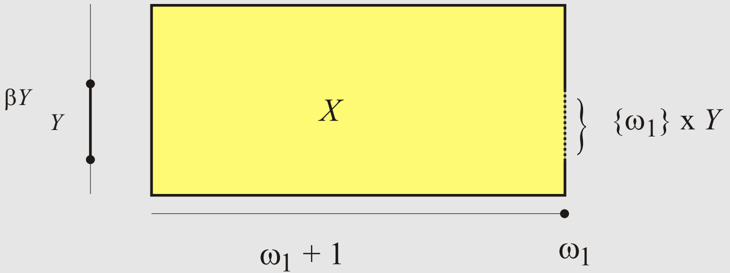
## Důkaz.

Zvolíme-li spojitou funkci $f : \omega_1 \times K \to [0, 1]$, pak pro každé přirozené číslo $i$ a pro limitní $\alpha < \omega_1$ existuje $\Phi_i(\alpha) < \alpha$, že nerovnost $|f(\gamma, x) - f(\alpha, x)| < \frac{1}{i}$ platí pro každé $x \in X$ a pro každé $\gamma$ splňující $\Phi_i(\alpha) < \gamma \leq \alpha$. Nyní podle pressing down lemmatu existuje pro každé $i$ přirozené nějaké $\alpha_i < \omega_1$, že množina $\{\alpha < \omega_1 | \Phi_i(\alpha) = \alpha_i\}$ je nespočetná. Nyní stačí položit za $\alpha$ supremum spočetných ordinálů $\alpha_i$. Funkci $f$ spojitě dodefinujeme v bodech $(\omega_1, x)$ hodnotou $f(\alpha, x)$. $\square$

Z tohoto výsledku již vyplývá, že každý Tichonovův prostor $Y$ je přírůstkem nějakého Tichonovova prostoru $X$. Stačí si vzít $X = (\omega_1 + 1) \times \beta Y \setminus \{\omega_1\} \times (\beta Y \setminus Y)$. Díky inklusím $\omega_1 \times \beta Y \subseteq X \subseteq (\omega_1 + 1) \times \beta Y$ a předchozímu pozorování dostáváme, že $\beta X \setminus X = Y$.

Každý Tichonovův prostor $Y$ může být přírůstkem do β - obalu:

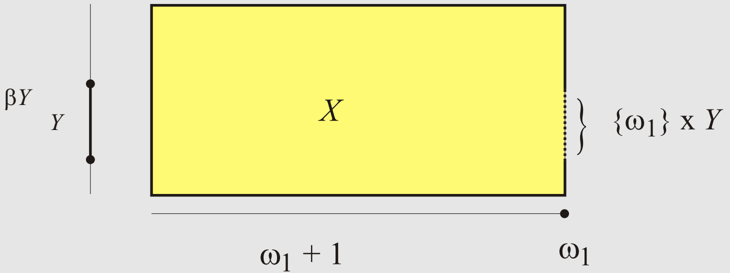
$$X := (\omega_1 + 1) \times \beta Y \setminus (\{\omega_1\} \times Y)$$



Z tohoto výsledku již vyplývá, že každý Tichonovův prostor $Y$ je přírůstkem nějakého Tichonovova prostoru $X$. Stačí si vzít $X = (\omega_1 + 1) \times \beta Y \setminus \{\omega_1\} \times (\beta Y \setminus Y)$. Díky inklusím $\omega_1 \times \beta Y \subseteq X \subseteq (\omega_1 + 1) \times \beta Y$ a předchozímu pozorování dostáváme, že $\beta X \setminus X = Y$.

Každý Tichonovův prostor $Y$ může být přírůstkem do β - obalu:

$$X := (\omega_1 + 1) \text{ x } \beta Y \ \setminus \ (\{\omega_1\} \text{ x } Y)$$

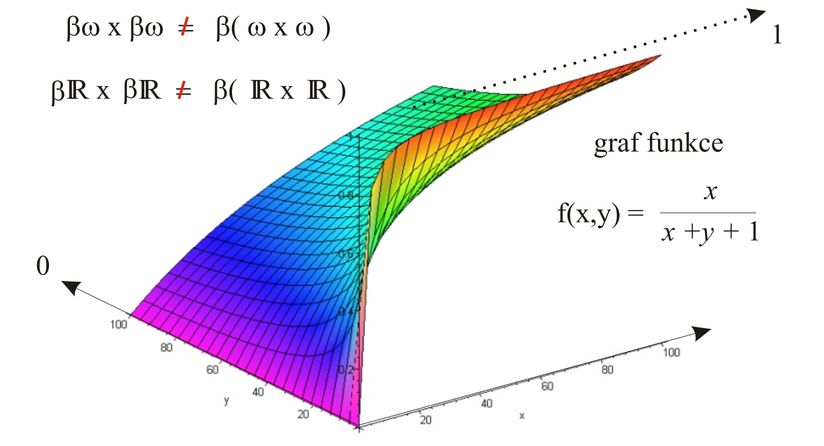


Beta-obal součinu nemusí být součinem beta-obalů jednotlivých prostorů!

Není například pravda, že $\beta\omega \times \beta\omega = \beta(\omega \times \omega)$.

Beta-obal součinu nemusí být součinem beta-obalů jednotlivých prostorů!

Není například pravda, že $\beta\omega \times \beta\omega = \beta(\omega \times \omega)$.


$\beta\omega \times \beta\omega \neq \beta(\omega \times \omega)$
$\beta\mathbb{R} \times \beta\mathbb{R} \neq \beta(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$
1
graf funkce
$f(x,y) = \dfrac{x}{x+y+1}$
0
100
80
60
40
20
y
x

Uvažujme spojitou funkci $f : \omega \times \omega \to [0,1]$ danou předpisem $f(i,j) = \frac{i}{i+j+1}$. Tuto funkci nelze spojitě rozšířit na celý prostor $\beta\omega \times \beta\omega$. Jak to dokážeme?

Zafixujeme libovolný bod $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$ a uvědomíme si, že pokud by $F$ bylo nějaké spojité rozšíření $f$, pak musí být $F(\xi, n) = 0$ a $F(n, \xi) = 1$ pro každé $n \in \omega$. Ale jaká by pak měla být hodnota $F(\xi, \xi)$, aby se nezkazila spojitost?

Uvažujme spojitou funkci $f : \omega \times \omega \to [0,1]$ danou předpisem $f(i,j) = \frac{i}{i+j+1}$. Tuto funkci nelze spojitě rozšířit na celý prostor $\beta\omega \times \beta\omega$. Jak to dokážeme?

Zafixujeme libovolný bod $\xi \in \beta\omega \setminus \omega$ a uvědomíme si, že pokud by $F$ bylo nějaké spojité rozšíření $f$, pak musí být $F(\xi, n) = 0$ a $F(n, \xi) = 1$ pro každé $n \in \omega$. Ale jaká by pak měla být hodnota $F(\xi, \xi)$, aby se nezkazila spojitost?

Kompaktifikace daného prostoru mohou mít stejný přírůstek a přesto být různé.

Uvažujme na množině $\mathbb{R}$ diskrétní topologii. Kompaktifikace $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{a, b\}$ bude dána tak, že okolí bodu $a$ jsou množiny tvaru $\{a\} \cup (-\infty, 0) \setminus K$, kde $K$ je konečná množina. Okolí bodu $b$ budou množiny tvaru $\{b\} \cup (0, \infty) \setminus K$. Kompaktifikace $\gamma\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{u, v\}$ je dána tak, že okolí bodu $u$ jsou množiny tvaru $\{u\} \cup \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup K)$ a okolí bodu $v$ množiny tvaru $\{v\} \cup \mathbb{N} \setminus K$, kde $K$ je opět konečná množina.

Kompaktifikace $\alpha\mathbb{R}$ a $\gamma\mathbb{R}$ nejen, že nejsou ekvivalentní, ale nejsou dokonce ani homeomorfní, protože kompaktifikace $\gamma\mathbb{R}$ obsahuje neizolovaný bod, který má spočetnou lokální bázi. Takový bod ovšem v prostoru $\alpha\mathbb{R}$ neexistuje.

Kompaktifikace daného prostoru mohou mít stejný přírůstek a přesto být různé.

Uvažujme na množině $\mathbb{R}$ diskrétní topologii. Kompaktifikace $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{a, b\}$ bude dána tak, že okolí bodu $a$ jsou množiny tvaru $\{a\} \cup (-\infty, 0) \setminus K$, kde $K$ je konečná množina. Okolí bodu $b$ budou množiny tvaru $\{b\} \cup (0, \infty) \setminus K$. Kompaktifikace $\gamma\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{u, v\}$ je dána tak, že okolí bodu $u$ jsou množiny tvaru $\{u\} \cup \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup K)$ a okolí bodu $v$ množiny tvaru $\{v\} \cup \mathbb{N} \setminus K$, kde $K$ je opět konečná množina.

Kompaktifikace $\alpha\mathbb{R}$ a $\gamma\mathbb{R}$ nejen, že nejsou ekvivalentní, ale nejsou dokonce ani homeomorfní, protože kompaktifikace $\gamma\mathbb{R}$ obsahuje neizolovaný bod, který má spočetnou lokální bázi. Takový bod ovšem v prostoru $\alpha\mathbb{R}$ neexistuje.

Kompaktifikace daného prostoru mohou mít stejný přírůstek a přesto být různé.

Uvažujme na množině $\mathbb{R}$ diskrétní topologii. Kompaktifikace $\alpha\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{a, b\}$ bude dána tak, že okolí bodu $a$ jsou množiny tvaru $\{a\} \cup (-\infty, 0) \setminus K$, kde $K$ je konečná množina. Okolí bodu $b$ budou množiny tvaru $\{b\} \cup (0, \infty) \setminus K$. Kompaktifikace $\gamma\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{u, v\}$ je dána tak, že okolí bodu $u$ jsou množiny tvaru $\{u\} \cup \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup K)$ a okolí bodu $v$ množiny tvaru $\{v\} \cup \mathbb{N} \setminus K$, kde $K$ je opět konečná množina.

Kompaktifikace $\alpha\mathbb{R}$ a $\gamma\mathbb{R}$ nejen, že nejsou ekvivalentní, ale nejsou dokonce ani homeomorfní, protože kompaktifikace $\gamma\mathbb{R}$ obsahuje neizolovaný bod, který má spočetnou lokální bázi. Takový bod ovšem v prostoru $\alpha\mathbb{R}$ neexistuje.

Pokud víme, že jednobodová kompaktifikace nějakého prostoru $X$ je metrizovatelná, pak je určitě prostor $X$ metrizovatelný, separabilní a lokálně kompaktní. Tyto tři vlastnosti nám již stačí k tomu, aby platila také obrácená implikace.

**TVRZENÍ**

*Jednobodová kompaktifikace (nekompaktního) separabilního lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru $X$ je opět metrizovatelná.*

**Důkaz.**

K tomu nám stačí najít vhodné vnoření do Hilbertovy krychle $[0,1]^\omega$. Nejprve si musíme uvědomit, že prostor $X$ má spočetnou bázi tvořenou otevřenými množinami, jejichž uzávěr je kompaktní (Z čeho plyne její existence?). Nyní pro každé dvě množiny $U$, $V$ z této báze splňující $\overline{U} \subseteq V$ najdeme jednu spojitou funkci z $X$ do intervalu $[0,1]$, která nabývá hodnoty 1 na $U$ a hodnoty nula na $X \setminus V$. Tímto postupem získáme systém $C$ obsahující spočetně mnoho spojitých funkcí s kompaktním nosičem, které oddělují body a uzavřené množiny. Nakonec si zopakujme definici Tichonovova vnoření $i : X \to [0,1]^C$, které je dáno předpisem $i(x) = (f(x))_{f \in C}$. Zbývá ověřit, že $\overline{i(X)} = i(X) \cup \{0\}$ je hledaná jednobodová kompaktifikace $X$. □

Pokud víme, že jednobodová kompaktifikace nějakého prostoru $X$ je metrizovatelná, pak je určitě prostor $X$ metrizovatelný, separabilní a lokálně kompaktní. Tyto tři vlastnosti nám již stačí k tomu, aby platila také obrácená implikace.

**TVRZENÍ**

*Jednobodová kompaktifikace (nekompaktního) separabilního lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru $X$ je opět metrizovatelná.*

**Důkaz.**

K tomu nám stačí najít vhodné vnoření do Hilbertovy krychle $[0,1]^\omega$. Nejprve si musíme uvědomit, že prostor $X$ má spočetnou bázi tvořenou otevřenými množinami, jejichž uzávěr je kompaktní (Z čeho plyne její existence?). Nyní pro každé dvě množiny $U, V$ z této báze splňující $\overline{U} \subseteq V$ najdeme jednu spojitou funkci z $X$ do intervalu $[0,1]$, která nabývá hodnoty 1 na $U$ a hodnoty nula na $X \setminus V$. Tímto postupem získáme systém $C$ obsahující spočetně mnoho spojitých funkcí s kompaktním nosičem, které oddělují body a uzavřené množiny. Nakonec si zopakujme definici Tichonovova vnoření $i : X \to [0,1]^C$, které je dáno předpisem $i(x) = (f(x))_{f \in C}$. Zbývá ověřit, že $\overline{i(X)} = i(X) \cup \{0\}$ je hledaná jednobodová kompaktifikace $X$. $\square$

Pokud víme, že jednobodová kompaktifikace nějakého prostoru $X$ je metrizovatelná, pak je určitě prostor $X$ metrizovatelný, separabilní a lokálně kompaktní. Tyto tři vlastnosti nám již stačí k tomu, aby platila také obrácená implikace.

**TVRZENÍ**

*Jednobodová kompaktifikace (nekompaktního) separabilního lokálně kompaktního metrizovatelného prostoru $X$ je opět metrizovatelná.*

**Důkaz.**

K tomu nám stačí najít vhodné vnoření do Hilbertovy krychle $[0,1]^\omega$. Nejprve si musíme uvědomit, že prostor $X$ má spočetnou bázi tvořenou otevřenými množinami, jejichž uzávěr je kompaktní (Z čeho plyne její existence?). Nyní pro každé dvě množiny $U, V$ z této báze splňující $\overline{U} \subseteq V$ najdeme jednu spojitou funkci z $X$ do intervalu $[0,1]$, která nabývá hodnoty 1 na $U$ a hodnoty nula na $X \setminus V$. Tímto postupem získáme systém $C$ obsahující spočetně mnoho spojitých funkcí s kompaktním nosičem, které oddělují body a uzavřené množiny. Nakonec si zopakujme definici Tichonovova vnoření $i : X \to [0,1]^C$, které je dáno předpisem $i(x) = (f(x))_{f \in C}$. Zbývá ověřit, že $\overline{i(X)} = i(X) \cup \{0\}$ je hledaná jednobodová kompaktifikace $X$. $\square$

Uzavřené podmnožiny přímky jsou buď malé (konečné, spočetné) nebo mají stejnou mohutnost jako celá přímka. V prostoru $\beta\omega$ platí dokonce následující.

**LEMMA**

*Uzavřené podmnožiny prostoru $\beta\omega$ jsou buď konečné nebo mají mohutnost stejně velkou jako celý prostor.*

**Důkaz.**

Máme-li totiž nekonečnou uzavřenou podmnožinu $F \subset \beta\omega$, můžeme indukcí najít pro každé $i \in \omega$ prvek $a_i \in F$ a jeho okolí $U_i$ tak, aby bylo disjunktní s každou množinou $U_j$ pro $j < i$. Označme si $A = \{a_i : i \in \omega\}$. Okamžitě je vidět, že $\overline{A} \subset F$. Máme-li nyní zadanou libovolnou spojitou funkci $g : A \to [0, 1]$, můžeme definovat nějakou funkci $f : \omega \to [0, 1]$ tak, aby v bodech z množiny $\omega \cap U_i$ nabývala hodnoty $g(a_i)$. Jako $\overline{f} : \beta\omega \to [0, 1]$ si označme spojité rozšíření funkce $f$. Jeho existenci nám zaručují vlastnosti beta-obalu. Protože každý bod $a_i$ leží v uzávěru množiny $\omega \cap U_i$, musí být díky spojitosti $\overline{f}(a_i) = g(a_i)$. To ale neříká nic jiného, než že funkce $\overline{f}$ rozšiřuje původní funkci $g$. Tím jsme dokázali, že uzávěr množiny $A$ je jejím beta-obalem. Na závěr si stačí uvědomit, že prostor $A$ je diskrétní. Proto je $\overline{A} = \beta A$ homeomorfní celému prostoru $\beta\omega$. □

Předchozí pozorování nám speciálně říká, že v prostoru $\beta\omega$ je každá konvergentní posloupnost od nějakého indexu konstantní.

Uzavřené podmnožiny přímky jsou buď malé (konečné, spočetné) nebo mají stejnou mohutnost jako celá přímka. V prostoru $\beta\omega$ platí dokonce následující.

**LEMMA**

*Uzavřené podmnožiny prostoru $\beta\omega$ jsou buď konečné nebo mají mohutnost stejně velkou jako celý prostor.*

**Důkaz.**

Máme-li totiž nekonečnou uzavřenou podmnožinu $F \subset \beta\omega$, můžeme indukcí najít pro každé $i \in \omega$ prvek $a_i \in F$ a jeho okolí $U_i$ tak, aby bylo disjunktní s každou množinou $U_j$ pro $j < i$. Označme si $A = \{a_i : i \in \omega\}$. Okamžitě je vidět, že $\overline{A} \subset F$. Máme-li nyní zadanou libovolnou spojitou funkci $g : A \to [0, 1]$, můžeme definovat nějakou funkci $f : \omega \to [0, 1]$ tak, aby v bodech z množiny $\omega \cap U_i$ nabývala hodnoty $g(a_i)$. Jako $\overline{f} : \beta\omega \to [0, 1]$ si označme spojité rozšíření funkce $f$. Jeho existenci nám zaručují vlastnosti beta-obalu. Protože každý bod $a_i$ leží v uzávěru množiny $\omega \cap U_i$, musí být díky spojitosti $\overline{f}(a_i) = g(a_i)$. To ale neříká nic jiného, než že funkce $\overline{f}$ rozšiřuje původní funkci $g$. Tím jsme dokázali, že uzávěr množiny $A$ je jejím beta-obalem. Na závěr si stačí uvědomit, že prostor $A$ je diskrétní. Proto je $\overline{A} = \beta A$ homeomorfní celému prostoru $\beta\omega$. □

Předchozí pozorování nám speciálně říká, že v prostoru $\beta\omega$ je každá konvergentní posloupnost od nějakého indexu konstantní.

Uzavřené podmnožiny přímky jsou buď malé (konečné, spočetné) nebo mají stejnou mohutnost jako celá přímka. V prostoru $\beta\omega$ platí dokonce následující.

## LEMMA

*Uzavřené podmnožiny prostoru $\beta\omega$ jsou buď konečné nebo mají mohutnost stejně velkou jako celý prostor.*

## Důkaz.

Máme-li totiž nekonečnou uzavřenou podmnožinu $F \subset \beta\omega$, můžeme indukcí najít pro každé $i \in \omega$ prvek $a_i \in F$ a jeho okolí $U_i$ tak, aby bylo disjunktní s každou množinou $U_j$ pro $j < i$. Označme si $A = \{a_i : i \in \omega\}$. Okamžitě je vidět, že $\overline{A} \subset F$. Máme-li nyní zadanou libovolnou spojitou funkci $g : A \to [0,1]$, můžeme definovat nějakou funkci $f : \omega \to [0,1]$ tak, aby v bodech z množiny $\omega \cap U_i$ nabývala hodnoty $g(a_i)$. Jako $\overline{f} : \beta\omega \to [0,1]$ si označme spojité rozšíření funkce $f$. Jeho existenci nám zaručují vlastnosti beta-obalu. Protože každý bod $a_i$ leží v uzávěru množiny $\omega \cap U_i$, musí být díky spojitosti $\overline{f}(a_i) = g(a_i)$. To ale neříká nic jiného, než že funkce $\overline{f}$ rozšiřuje původní funkci $g$. Tím jsme dokázali, že uzávěr množiny $A$ je jejím beta-obalem. Na závěr si stačí uvědomit, že prostor $A$ je diskrétní. Proto je $\overline{A} = \beta A$ homeomorfní celému prostoru $\beta\omega$. □

Předchozí pozorování nám speciálně říká, že v prostoru $\beta\omega$ je každá konvergentní posloupnost od nějakého indexu konstantní.

Uzavřené podmnožiny přímky jsou buď malé (konečné, spočetné) nebo mají stejnou mohutnost jako celá přímka. V prostoru $\beta\omega$ platí dokonce následující.

**LEMMA**

*Uzavřené podmnožiny prostoru $\beta\omega$ jsou buď konečné nebo mají mohutnost stejně velkou jako celý prostor.*

**Důkaz.**

Máme-li totiž nekonečnou uzavřenou podmnožinu $F \subset \beta\omega$, můžeme indukcí najít pro každé $i \in \omega$ prvek $a_i \in F$ a jeho okolí $U_i$ tak, aby bylo disjunktní s každou množinou $U_j$ pro $j < i$. Označme si $A = \{a_i : i \in \omega\}$. Okamžitě je vidět, že $\overline{A} \subset F$. Máme-li nyní zadanou libovolnou spojitou funkci $g : A \to [0,1]$, můžeme definovat nějakou funkci $f : \omega \to [0,1]$ tak, aby v bodech z množiny $\omega \cap U_i$ nabývala hodnoty $g(a_i)$. Jako $\overline{f} : \beta\omega \to [0,1]$ si označme spojité rozšíření funkce $f$. Jeho existenci nám zaručují vlastnosti beta-obalu. Protože každý bod $a_i$ leží v uzávěru množiny $\omega \cap U_i$, musí být díky spojitosti $\overline{f}(a_i) = g(a_i)$. To ale neříká nic jiného, než že funkce $\overline{f}$ rozšiřuje původní funkci $g$. Tím jsme dokázali, že uzávěr množiny $A$ je jejím beta-obalem. Na závěr si stačí uvědomit, že prostor $A$ je diskrétní. Proto je $\overline{A} = \beta A$ homeomorfní celému prostoru $\beta\omega$. □

Předchozí pozorování nám speciálně říká, že v prostoru $\beta\omega$ je každá konvergentní posloupnost od nějakého indexu konstantní.

Prostor $\beta\omega$ má nepřeberné množství zajímavých vlastností. Jednou z nich je, že v jeho podprostoru $\beta\omega \setminus \omega$ najdeme kontinuum mnoho otevřených neprázdných navzájem disjunktních množin. Takže speciálně je prostor $\beta\omega \setminus \omega$ neseparabilní, ačkoliv $\beta\omega$ je separabilní.

Jak zmíněné otevřené množiny najdeme?

Použijeme velice důležitou konstrukci, kterou se vyplatí zapamatovat.

Na spočetné množině $\omega$ najdeme kontinuum mnoho nekonečných množin tak, že každé dvě se budou protínat pouze v konečné. Takový systém množin se nazývá skoro disjunktní.

To se může zdát na první pohled jako nemožné, proto si pro jistotu ukážeme hned dva důkazy – jeden kombinatorický a druhý topologický.

Prostor $\beta\omega$ má nepřeberné množství zajímavých vlastností. Jednou z nich je, že v jeho podprostoru $\beta\omega \setminus \omega$ najdeme kontinuum mnoho otevřených neprázdných navzájem disjunktních množin. Takže speciálně je prostor $\beta\omega \setminus \omega$ neseparabilní, ačkoliv $\beta\omega$ je separabilní.

Jak zmíněné otevřené množiny najdeme?

Použijeme velice důležitou konstrukci, kterou se vyplatí zapamatovat.

Na spočetné množině $\omega$ najdeme kontinuum mnoho nekonečných množin tak, že každé dvě se budou protínat pouze v konečné. Takový systém množin se nazývá skoro disjunktní.

To se může zdát na první pohled jako nemožné, proto si pro jistotu ukážeme hned dva důkazy – jeden kombinatorický a druhý topologický.

Prostor $\beta\omega$ má nepřeberné množství zajímavých vlastností. Jednou z nich je, že v jeho podprostoru $\beta\omega \setminus \omega$ najdeme kontinuum mnoho otevřených neprázdných navzájem disjunktních množin. Takže speciálně je prostor $\beta\omega \setminus \omega$ neseparabilní, ačkoliv $\beta\omega$ je separabilní.

Jak zmíněné otevřené množiny najdeme?

Použijeme velice důležitou konstrukci, kterou se vyplatí zapamatovat.

Na spočetné množině $\omega$ najdeme kontinuum mnoho nekonečných množin tak, že každé dvě se budou protínat pouze v konečné. Takový systém množin se nazývá skoro disjunktní.

To se může zdát na první pohled jako nemožné, proto si pro jistotu ukážeme hned dva důkazy – jeden kombinatorický a druhý topologický.

Prostor $\beta\omega$ má nepřeberné množství zajímavých vlastností. Jednou z nich je, že v jeho podprostoru $\beta\omega \setminus \omega$ najdeme kontinuum mnoho otevřených neprázdných navzájem disjunktních množin. Takže speciálně je prostor $\beta\omega \setminus \omega$ neseparabilní, ačkoliv $\beta\omega$ je separabilní.

Jak zmíněné otevřené množiny najdeme?

Použijeme velice důležitou konstrukci, kterou se vyplatí zapamatovat.

Na spočetné množině $\omega$ najdeme kontinuum mnoho nekonečných množin tak, že každé dvě se budou protínat pouze v konečné. Takový systém množin se nazývá skoro disjunktní.

To se může zdát na první pohled jako nemožné, proto si pro jistotu ukážeme hned dva důkazy – jeden kombinatorický a druhý topologický.

Prostor $\beta\omega$ má nepřeberné množství zajímavých vlastností. Jednou z nich je, že v jeho podprostoru $\beta\omega \setminus \omega$ najdeme kontinuum mnoho otevřených neprázdných navzájem disjunktních množin. Takže speciálně je prostor $\beta\omega \setminus \omega$ neseparabilní, ačkoliv $\beta\omega$ je separabilní.

Jak zmíněné otevřené množiny najdeme?

Použijeme velice důležitou konstrukci, kterou se vyplatí zapamatovat.

Na spočetné množině $\omega$ najdeme kontinuum mnoho nekonečných množin tak, že každé dvě se budou protínat pouze v konečné. Takový systém množin se nazývá skoro disjunktní.

To se může zdát na první pohled jako nemožné, proto si pro jistotu ukážeme hned dva důkazy – jeden kombinatorický a druhý topologický.

Nejprve si očíslujeme vrcholy nekonečného binárního stromu pomocí přirozených čísel. V základní hladině tedy máme vrchol nula, o patro výš vrcholy 1 a 2, atd. Ke každé větvi (kterých je kontinuum mnoho) teď uvažujeme množinu všech jejích vrcholů. Tak získáme skoro disjunktní systém, protože dvě různé větve mají společných je konečně mnoho vrcholů.

Jiný způsob spočívá v tom, že místo na množině $\omega$ budeme hledat skoro disjunktní systém na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Ke každému reálnému číslu $r \in \mathbb{R}$ zafixujeme libovolnou množinu racionálních čísel, která tvoří posloupnost konvergující k $r$. Pro různá čísla $r$ a $s$ se mohou příslušné množiny protínat jen v konečně mnoha bodech.

Teď je již snadné si uvědomit, že každý skoro disjunktní systém na $\omega$ tvořený nekonečnými množinami určuje disjunktní systém otevřených neprázdných množin na $\beta\omega \setminus \omega$.

Nejprve si očíslujeme vrcholy nekonečného binárního stromu pomocí přirozených čísel. V základní hladině tedy máme vrchol nula, o patro výš vrcholy 1 a 2, atd. Ke každé větvi (kterých je kontinuum mnoho) teď uvažujeme množinu všech jejích vrcholů. Tak získáme skoro disjunktní systém, protože dvě různé větve mají společných je konečně mnoho vrcholů.

Jiný způsob spočívá v tom, že místo na množině $\omega$ budeme hledat skoro disjunktní systém na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Ke každému reálnému číslu $r \in \mathbb{R}$ zafixujeme libovolnou množinu racionálních čísel, která tvoří posloupnost konvergující k $r$. Pro různá čísla $r$ a $s$ se mohou příslušné množiny protínat jen v konečně mnoha bodech.

Teď je již snadné si uvědomit, že každý skoro disjunktní systém na $\omega$ tvořený nekonečnými množinami určuje disjunktní systém otevřených neprázdných množin na $\beta\omega \setminus \omega$.

Nejprve si očíslujeme vrcholy nekonečného binárního stromu pomocí přirozených čísel. V základní hladině tedy máme vrchol nula, o patro výš vrcholy 1 a 2, atd. Ke každé větvi (kterých je kontinuum mnoho) teď uvažujeme množinu všech jejích vrcholů. Tak získáme skoro disjunktní systém, protože dvě různé větve mají společných je konečně mnoho vrcholů.

Jiný způsob spočívá v tom, že místo na množině $\omega$ budeme hledat skoro disjunktní systém na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Ke každému reálnému číslu $r \in \mathbb{R}$ zafixujeme libovolnou množinu racionálních čísel, která tvoří posloupnost konvergující k $r$. Pro různá čísla $r$ a $s$ se mohou příslušné množiny protínat jen v konečně mnoha bodech.

Teď je již snadné si uvědomit, že každý skoro disjunktní systém na $\omega$ tvořený nekonečnými množinami určuje disjunktní systém otevřených neprázdných množin na $\beta\omega \setminus \omega$.

**TVRZENÍ**

*Všechny kompaktifikace daného Tichonovova prostoru $X$ mají stejnou hustotu.*

Důkaz.

Zvolme libovolnou kompaktifikaci $\alpha X$. Hustota prostoru $\alpha X$ je určitě menší nebo rovna hustotě $X$ ale pozor na to, že může být třeba i ostře menší než hustota $X$!
Pokusíme se tedy ukázat, že $\alpha X$ má stejnou hustotu jako beta-obal $\beta X$. Víme, že existuje spojité zobrazení $f : \beta X \to \alpha X$, které je identické na $X$. Protože toto zobrazení je surjektivní, dostáváme nerovnost $d(\alpha X) \leq d(\beta X)$. Na druhou stranu předpokládejme, že $S$ je hustá podmnožina $\alpha X$ nejmenší možné mohutnosti. Ať množina $T \subset \beta X$ má stejnou mohutnost jako $S$ a platí $f(T) = S$. Kdyby množina $T$ nebyla hustá v $\beta X$, pak najdeme nějaký bod $x \in X \setminus \overline{T}$. Navíc víme, že množina $f(\overline{T})$ je kompakt obsahující $S$, tedy $f(\overline{T}) = \alpha X$. Proto existuje $y \in \overline{T}$ pro něž je $f(y) = x$. To je ovšem spor, neboť víme, že zobrazení $f$ posílá přírůstek na přírůstek. Dostáváme tak i opačnou nerovnost $d(\alpha X) \geq d(\beta X)$. $\square$

**TVRZENÍ**

*Všechny kompaktifikace daného Tichonovova prostoru $X$ mají stejnou hustotu.*

**Důkaz.**

Zvolme libovolnou kompaktifikaci $\alpha X$. Hustota prostoru $\alpha X$ je určitě menší nebo rovna hustotě $X$ ale pozor na to, že může být třeba i ostře menší než hustota $X$!
Pokusíme se tedy ukázat, že $\alpha X$ má stejnou hustotu jako beta-obal $\beta X$. Víme, že existuje spojité zobrazení $f : \beta X \to \alpha X$, které je identické na $X$. Protože toto zobrazení je surjektivní, dostáváme nerovnost $d(\alpha X) \leq d(\beta X)$. Na druhou stranu předpokládejme, že $S$ je hustá podmnožina $\alpha X$ nejmenší možné mohutnosti. Ať množina $T \subset \beta X$ má stejnou mohutnost jako $S$ a platí $f(T) = S$. Kdyby množina $T$ nebyla hustá v $\beta X$, pak najdeme nějaký bod $x \in X \setminus \overline{T}$. Navíc víme, že množina $f(\overline{T})$ je kompakt obsahující $S$, tedy $f(\overline{T}) = \alpha X$. Proto existuje $y \in \overline{T}$ pro něž je $f(y) = x$. To je ovšem spor, neboť víme, že zobrazení $f$ posílá přírůstek na přírůstek. Dostáváme tak i opačnou nerovnost $d(\alpha X) \geq d(\beta X)$. □