OBECNÁ TOPOLOGIE

2. ODDĚLOVÁNÍ BODŮ A MNOŽIN

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

2008

V předcházejících částech jsme museli v několika případech požadovat pro nějakou vlastnost topologických prostorů specifické podmínky, např. že každý bod je uzavřený, což znamená, že pro libovolné dva body x, y z prostoru X existují jejich okolí U_x, U_y, které neobsahují druhý bod. To je jistá oddělitelnost bodů pomocí okolí.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

V předcházejících částech jsme museli v několika případech požadovat pro nějakou vlastnost topologických prostorů specifické podmínky, např. že každý bod je uzavřený, což znamená, že pro libovolné dva body x, y z prostoru X existují jejich okolí U_x, U_y, které neobsahují druhý bod. To je jistá oddělitelnost bodů pomocí okolí.

Začneme nejslabší oddělitelností a postupně budeme naše požadavky zvyšovat. První nejslabší podmínka není v jistém smyslu symetrická.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

DEFINICE (T_0-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_0-prostor, jestliže pro libovolné dva body existuje okolí jednoho z nich, které neobsahuje druhý bod.

Indiskrétní aspoň dvoubodový prostor není T_0-prostor. Diskrétní prostor je T_0-prostor, stejně tak každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor. Sorgenfreyova i Michaelova přímka a Sierpińského prostor jsou T_0-prostory.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz

T_0-modifikace je popsána ve cvičení.

Dalším krokem je požadavek, že předchozí oddělování je symetrické.

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostor, právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a sumy.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_1-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflexe prostoru se nazývá jeho T_1-modifikace.)*

Důkaz.

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

Aspoň dvoubodový indiskrétní prostor není T_1-prostor, ani Sierpińského prostor (který je T_0-prostor) není T_1-prostor. Každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor je T_1-prostor. Hrubá T_1-topologie na množině X je nejhrubší T_1-topologie na této množině.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz

DEFINICE (T_1-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_1-prostor, jestliže každé jeho dva body mají okolí neobsahující druhý bod.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

▸ Důkaz

Na rozdíl od T_0-prostorů nelze popsat T_1-modifikaci jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

Dalším zesílením je požadavek, aby oddělující okolí byly disjunktní. Dostane se tak velmi důležitá třída topologických prostorů.

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

▸ Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

T_2-prostory se často nazývají Hausdorffovy prostory, protože Felix Hausdorff je ve své knize z r.1914 zavedl.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

T_2-prostory se často nazývají Hausdorffovy prostory, protože Felix Hausdorff je ve své knize z r.1914 zavedl.

Každý metrizovatelný i uspořádatelný prostor je T_2-prostor. Hrubý T_1-prostor na nekonečné množině není T_2-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

$\Longrightarrow$

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

DEFINICE (T_2-prostory)

Řekneme, že topologický prostor je T_2-prostor, jestliže každé jeho dva body mají disjunktní okolí.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz

Ani T_2-modifikaci nelze popsat jednoduchou ekvivalencí. Příslušná reflektivní zobrazení jsou opět kvocientová, ale obecně nejsou slabě vytvářející.

$\Rightarrow$

Z následujících tvrzení bude vidět důležitost Hausdorffových prostorů. Jsou to tvrzení, která znáte z matematické analýzy (jedno takové tvrzení o jednoznačnosti limit již bylo na předchozí stránce).

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz

DŮSLEDEK

Důkaz

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz

Toto tvrzení má důsledek, který bude často používán. Říká, že pokud lze spojitě rozšířit spojité zobrazení do Hausdorffova prostoru z husté části na celý prostor, pak je takové rozšíření jediné.

DŮSLEDEK

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz

Toto tvrzení má důsledek, který bude často používán. Říká, že pokud lze spojitě rozšířit spojité zobrazení do Hausdorffova prostoru z husté části na celý prostor, pak je takové rozšíření jediné.

Můžete i ukázat, že jak předchozí věta tak následující první důsledek charakterizují Hausdorffovy prostory (tj. např. pro důsledek: není-li Y Hausdorffův, existují dvě různá spojitá zobrazení z nějakého prostoru X do Y, která se shodují na husté podmnožině X).

DŮSLEDEK

Důkaz

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz

DŮSLEDEK

1. *Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y, která se shodují na husté podmnožině X. Pak se shodují na X.*
2. *Je-li podprostor T_2-prostoru jeho retraktem, je v něm uzavřený.*

Důkaz

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

▸ Důkaz

DŮSLEDEK

1. *Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y, která se shodují na husté podmnožině X. Pak se shodují na X.*
2. *Je-li podprostor T_2-prostoru jeho retraktem, je v něm uzavřený.*

▸ Důkaz

I když existují další možné variace předchozího oddělování dvou bodů, nejsou příliš důležité.
Pro jeden příklad viz cvičení.
Dalším krokem bude oddělování bodu a množiny.

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

Indiskrétní prostory jsou regulární, každý metrizovatelný nebo uspořádatelný prostor je T_3-prostor, Sierpińského prostor není regulární.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

▶ Důkaz

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

⇒

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz

$\Rightarrow$

DEFINICE (T_3-prostory)

Topologický prostor X se nazývá regulární, jestliže každý bod a uzavřená množina, která jej neobsahuje, mají disjunktní okolí. Regulární T_0-prostor se nazývá T_3-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

▸ Důkaz

$\Rightarrow$

Regulární prostory mají podobně jako Hausdorffovy prostory význačnou vlastnost pro rozšiřování zobrazení. Můžete ukázat, že tato vlastnost charakterizuje regulární prostory.

TVRZENÍ (Rozšíření zobrazení do regulárního prostoru)

Nechť A je hustá část prostoru X a f je zobrazení X do regulárního prostoru, které je spojité na každém podprostoru $A \cup \{x\}$, $x \in X$. Pak je f spojité na X.

Důkaz

Význam předchozí věty tkví v tom, že stačí (do regulárního prostoru) rozšiřovat spojitě zobrazení na jednotlivé body, tj. při dokazování spojitosti není třeba brát v úvahu ostatní body v rozšíření.

TVRZENÍ (Rozšíření zobrazení do regulárního prostoru)

Nechť A je hustá část prostoru X a f je zobrazení X do regulárního prostoru, které je spojité na každém podprostoru $A \cup \{x\}, x \in X$. Pak je f spojité na X.

Důkaz

Význam předchozí věty tkví v tom, že stačí (do regulárního prostoru) rozšiřovat spojitě zobrazení na jednotlivé body, tj. při dokazování spojitosti není třeba brát v úvahu ostatní body v rozšíření.

TVRZENÍ (Rozšíření zobrazení do regulárního prostoru)

Nechť A je hustá část prostoru X a f je zobrazení X do regulárního prostoru, které je spojité na každém podprostoru $A \cup \{x\}, x \in X$. Pak je f spojité na X.

Důkaz

Význam předchozí věty tkví v tom, že stačí (do regulárního prostoru) rozšiřovat spojitě zobrazení na jednotlivé body, tj. při dokazování spojitosti není třeba brát v úvahu ostatní body v rozšíření.

Po oddělování dvou bodů a bodu od množiny je dalším krokem oddělování dvou množin.

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.

Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

▸ Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

Indiskrétní prostory jsou normální, Sierpińského prostor je normální. Každý metrizovatelný nebo uspořádatelný prostor je T_4-prostor (pro uspořádatelný prostor, obecněji i pro GO-prostor, není už důkaz jednoduchý – viz Cvičení). V Příkladech jsou uvedeny T_3-prostory, které nejsou normální.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

DEFINICE (T_4-prostory)

Topologický prostor X se nazývá normální, jestliže každé jeho dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.
Normální T_1-prostor se nazývá T_4-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz

Třída normálních prostorů se oproti předchozím třídám chová spíše nenormálně (důvod pro termín „normální prostor” je historický). Přesto je normalita jako vlastnost prostoru velmi důležitá, což bude vidět i z Uryonových vět.

V předchozí části jsme uvedli zužování tříd prostorů pomocí vlastností, které spočívaly v oddělování bodů nebo množin jejich okolími. V kapitole o slabé topologii jsme uváděli oddělování bodů nebo množin pomocí zobrazení. Toto oddělování má výhodu v tom, že dostáváme popis těchto prostorů pomocí vnoření do součinu nebo mocniny (např. vnoření do mocniny Sierpińského prostoru nebo do mocniny diskrétního dvoubodového prostoru.).

V předchozí části jsme uvedli zužování tříd prostorů pomocí vlastností, které spočívaly v oddělování bodů nebo množin jejich okolími. V kapitole o slabé topologii jsme uváděli oddělování bodů nebo množin pomocí zobrazení. Toto oddělování má výhodu v tom, že dostáváme popis těchto prostorů pomocí vnoření do součinu nebo mocniny (např. vnoření do mocniny Sierpińského prostoru nebo do mocniny diskrétního dvoubodového prostoru.).

Jiným velmi užitečným prostorem je samozřejmě prostor $\mathbb{R}$ reálných čísel a dá se očekávat, že prostory, ve kterých lze oddělovat body a množiny spojitými reálnými funkcemi, jsou důležité.

V předchozí části jsme uvedli zužování tříd prostorů pomocí vlastností, které spočívaly v oddělování bodů nebo množin jejich okolími. V kapitole o slabé topologii jsme uváděli oddělování bodů nebo množin pomocí zobrazení. Toto oddělování má výhodu v tom, že dostáváme popis těchto prostorů pomocí vnoření do součinu nebo mocniny (např. vnoření do mocniny Sierpińského prostoru nebo do mocniny diskrétního dvoubodového prostoru.).

Jiným velmi užitečným prostorem je samozřejmě prostor $\mathbb{R}$ reálných čísel a dá se očekávat, že prostory, ve kterých lze oddělovat body a množiny spojitými reálnými funkcemi, jsou důležité.

Nebudeme se zabývat vlastností, že $C(X)$ odděluje body prostoru X (pro stručný popis viz cvičení). Přejdeme rovnou k oddělování bodů a uzavřených množin spojitými reálnými funkcemi, protože toto oddělování dává vnoření do součinu.

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.

Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

Indiskrétní prostory jsou úplně regulární, Sierpińského prostor není úplně regulární, metrizovatelné nebo uspořádatelné (obecněji i GO-prostory) jsou $T_{3\frac{1}{2}}$-prostory.

Definice oddělování bodů od uzavřených množin není zrovna jednoduchá. V našem případě lze popis značně zjednodušit.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \longrightarrow [0,1]$ taková, že $f(x) = 0$, $f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

DEFINICE (Úplně regulární prostory)

Topologický prostor se nazývá úplně regulární, jestliže $C(X)$ odděluje body a uzavřené množiny.
Úplně regulární T_0-prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor.

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \longrightarrow [0,1]$ taková, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

Tvrzení o vkládání do součinu prostorů použité na definici úplně regulárních prostorů dává zajímavý popis těchto prostorů.

TVRZENÍ (Vložení $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů do mocniny intervalu)

1. *Topologický prostor je úplně regulární právě když je slabě vytvořen reálnými funkcemi.*
2. *Topologický prostor je úplně regulární právě když se dá vnořit do součinu indiskrétního prostoru a mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0, 1]$).*
3. *Topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor právě když se dá vnořit do mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0, 1]$).*

TVRZENÍ (Vložení $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů do mocniny intervalu)

1. *Topologický prostor je úplně regulární právě když je slabě vytvořen reálnými funkcemi.*
2. *Topologický prostor je úplně regulární právě když se dá vnořit do součinu indiskrétního prostoru a mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0, 1]$).*
3. *Topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor právě když se dá vnořit do mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0, 1]$).*

TVRZENÍ (Vložení $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů do mocniny intervalu)

1. *Topologický prostor je úplně regulární právě když je slabě vytvořen reálnými funkcemi.*
2. *Topologický prostor je úplně regulární právě když se dá vnořit do součinu indiskrétního prostoru a mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0,1]$).*
3. *Topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor právě když se dá vnořit do mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0,1]$).*

TVRZENÍ (Vložení $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů do mocniny intervalu)

1. *Topologický prostor je úplně regulární právě když je slabě vytvořen reálnými funkcemi.*
2. *Topologický prostor je úplně regulární právě když se dá vnořit do součinu indiskrétního prostoru a mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0,1]$).*
3. *Topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor právě když se dá vnořit do mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0,1]$).*

Viděli jsme, že úplná regularita je silnější vlastnost než regularita. Neboli, oddělování bodů a uzavřených množin spojitými reálnými funkcemi je silnější vlastnost než jejich oddělování okolími.
Bude stejná situace u oddělování uzavřených množin?

TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)

Nechť X je normální prostor, A je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na A shoduje s f.

Důkaz

DŮSLEDEK (Urysonovo lemma)

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Důkaz

Viděli jsme, že úplná regularita je silnější vlastnost než regularita. Neboli, oddělování bodů a uzavřených množin spojitými reálnými funkcemi je silnější vlastnost než jejich oddělování okolími.
Bude stejná situace u oddělování uzavřených množin?

Protože dvě množiny oddělené spojitou reálnou funkcí jsou oddělitelné okolíma, otázka zní, zda existuje normální prostor, jehož nějaké dvě uzavřené disjunktní množiny nelze oddělit spojitou reálnou funkcí? Vynikající Urysonova věta tvrdí, že takový prostor neexistuje. V Poznámkách uvádíme nástin klasického důkazu této věty; zde uvedený důkaz je důsledkem jiné hluboké věty (Stoneovy–Weierstrassovy).

TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)

Nechť X je normální prostor, A je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na A shoduje s f.

▸ Důkaz

DŮSLEDEK (Urysonovo lemma)

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)

Nechť X je normální prostor, A je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, která se na A shoduje s f.

▸ Důkaz

DŮSLEDEK (Urysonovo lemma)

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \longrightarrow [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)

Nechť X je normální prostor, A je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, která se na A shoduje s f.

▸ Důkaz

DŮSLEDEK (Urysonovo lemma)

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \longrightarrow [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

▸ Důkaz

TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)

Nechť X je normální prostor, A je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na A shoduje s f.

Důkaz

DŮSLEDEK (Urysonovo lemma)

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Důkaz

V dalších kapitolách uvidíme, jak lze oddělitelnost dvou (nebo konečně mnoha) uzavřených množin v normálních prostorech popsat pomocí tzv. otevřených pokrytí, což dá možnost pokračovat dále v oddělování pomocí vlastností otevřených pokrytí.