3. ODDĚLOVÁNÍ

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Regulární prostor jen s konstantními spoj. funkcemi

Lze snadno ukázat, že zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je prosté (injekce) právě když platí ($fg = fh \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Duálně: zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je zobrazení na Q (surjekce) právě když platí ($gf = hf \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Totéž platí pro spojitá zobrazení mezi topologickými prostory. Protože v jiných případech ne vždy dají uvedené vlastnosti injekce nebo surjekce, nazývají se zobrazení, která splňují uvedené implikace, monomorfizmy, resp. epimorfizmy.

Takže, např. spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi regulárními prostory se nazývá epimorfizmus ve třídě všech regulárních topologických prostorů, jestliže pro libovolná spojitá zobrazení $g, h : Y \to Z$ do regulárního prostoru Z platí $gf = hf \Rightarrow g = h$.

Monomorfizmy v mnoha třídách topologických prostorů jsou právě prostá spojitá zobrazení. Stačí, aby zkoumaná třída obsahovala jednobodový prostor nebo dostatek konstantních zobrazení do prostorů z třídy.

Lze snadno ukázat, že zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je prosté (injekce) právě když platí ($fg = fh \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Duálně: zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je zobrazení na Q (surjekce) právě když platí ($gf = hf \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Totéž platí pro spojitá zobrazení mezi topologickými prostory. Protože v jiných případech ne vždy dají uvedené vlastnosti injekce nebo surjekce, nazývají se zobrazení, která splňují uvedené implikace, monomorfizmy, resp. epimorfizmy.

Takže, např. spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi regulárními prostory se nazývá epimorfizmus ve třídě všech regulárních topologických prostorů, jestliže pro libovolná spojitá zobrazení $g, h : Y \to Z$ do regulárního prostoru Z platí $gf = hf \Rightarrow g = h$.

Monomorfizmy v mnoha třídách topologických prostorů jsou právě prostá spojitá zobrazení. Stačí, aby zkoumaná třída obsahovala jednobodový prostor nebo dostatek konstantních zobrazení do prostorů z třídy.

Lze snadno ukázat, že zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je prosté (injekce) právě když platí ($fg = fh \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Duálně: zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je zobrazení na Q (surjekce) právě když platí ($gf = hf \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Totéž platí pro spojitá zobrazení mezi topologickými prostory. Protože v jiných případech ne vždy dají uvedené vlastnosti injekce nebo surjekce, nazývají se zobrazení, která splňují uvedené implikace, monomorfizmy, resp. epimorfizmy.

Takže, např. spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi regulárními prostory se nazývá epimorfizmus ve třídě všech regulárních topologických prostorů, jestliže pro libovolná spojitá zobrazení $g, h : Y \to Z$ do regulárního prostoru Z platí $gf = hf \Rightarrow g = h$.

Monomorfizmy v mnoha třídách topologických prostorů jsou právě prostá spojitá zobrazení. Stačí, aby zkoumaná třída obsahovala jednobodový prostor nebo dostatek konstantních zobrazení do prostorů z třídy.

Lze snadno ukázat, že zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je prosté (injekce) právě když platí ($fg = fh \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Duálně: zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je zobrazení na Q (surjekce) právě když platí ($gf = hf \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Totéž platí pro spojitá zobrazení mezi topologickými prostory. Protože v jiných případech ne vždy dají uvedené vlastnosti injekce nebo surjekce, nazývají se zobrazení, která splňují uvedené implikace, monomorfizmy, resp. epimorfizmy.

Takže, např. spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi regulárními prostory se nazývá epimorfizmus ve třídě všech regulárních topologických prostorů, jestliže pro libovolná spojitá zobrazení $g, h : Y \to Z$ do regulárního prostoru Z platí $gf = hf \Rightarrow g = h$.

Monomorfizmy v mnoha třídách topologických prostorů jsou právě prostá spojitá zobrazení. Stačí, aby zkoumaná třída obsahovala jednobodový prostor nebo dostatek konstantních zobrazení do prostorů z třídy.

Lze snadno ukázat, že zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je prosté (injekce) právě když platí ($fg = fh \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Duálně: zobrazení $f : P \to Q$ mezi množinami je zobrazení na Q (surjekce) právě když platí ($gf = hf \Rightarrow g = h$), kde g, h jsou libovolná zobrazení.

Totéž platí pro spojitá zobrazení mezi topologickými prostory. Protože v jiných případech ne vždy dají uvedené vlastnosti injekce nebo surjekce, nazývají se zobrazení, která splňují uvedené implikace, monomorfizmy, resp. epimorfizmy.

Takže, např. spojité zobrazení $f : X \to Y$ mezi regulárními prostory se nazývá epimorfizmus ve třídě všech regulárních topologických prostorů, jestliže pro libovolná spojitá zobrazení $g, h : Y \to Z$ do regulárního prostoru Z platí $gf = hf \Rightarrow g = h$.

Monomorfizmy v mnoha třídách topologických prostorů jsou právě prostá spojitá zobrazení. Stačí, aby zkoumaná třída obsahovala jednobodový prostor nebo dostatek konstantních zobrazení do prostorů z třídy.

V této kapitole se setkáváme s třídami prostorů, které jsou součinové a dědičné, ale neobsahují všechny indiskrétní prostory. Takové třídy tedy nemohou být bireflektivní.

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní (vše se vztahuje ke třídě Top všech topologických prostorů):

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní v Top, tj. pro každý topologický prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*
3. *Třída $\mathcal{C}$ je uzavřená na slabé vytváření soubory, která oddělují body.*

V důkazu ekvivalencí různých popisů bireflektivní třídy byly indiskrétní prostory potřeba pro bijekci prostoru do součinu a pro to, aby příslušné zobrazení prostoru na jeho reflekci (modifikaci), bylo prosté. Nicméně to, že toto zobrazení je na celou modifikaci, zůstává. V abstraktní teorii různých struktur jsou surjekce nazývány epimorfizmy a odtud název epireflekce v následujícím tvrzení. Význam epimorfizmů je však širší, např. v Hausdorffových prostorech jim odpovídají spojitá zobrazení na hustou část – viz cvičení.

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní (vše se vztahuje ke třídě $\mathtt{Top}$ všech topologických prostorů):

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní v $\mathtt{Top}$, tj. pro každý topologický prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*
3. *Třída $\mathcal{C}$ je uzavřená na slabé vytváření soubory, která oddělují body.*

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní (vše se vztahuje ke třídě $\mathtt{Top}$ všech topologických prostorů):

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní v $\mathtt{Top}$, tj. pro každý topologický prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*
3. *Třída $\mathcal{C}$ je uzavřená na slabé vytváření soubory, která oddělují body.*

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní (vše se vztahuje ke třídě $\mathtt{Top}$ všech topologických prostorů):

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní v $\mathtt{Top}$, tj. pro každý topologický prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*
3. *Třída $\mathcal{C}$ je uzavřená na slabé vytváření soubory, která oddělují body.*

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní (vše se vztahuje ke třídě $\mathcal{T}op$ všech topologických prostorů):

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní v $\mathcal{T}op$, tj. pro každý topologický prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*
3. *Třída $\mathcal{C}$ je uzavřená na slabé vytváření soubory, která oddělují body.*

Proveďte důkaz stejným postupem, jako byl důkaz pro bireflektivní třídy. Uvědomte si, že součinová třída je vždy neprázdná (součin prázdného souboru). Různé vlastnosti a vztahy epireflektivních tříd topologických prostorů najdete ve Cvičení.

$\Rightarrow$

T_1, T_2 a T_3-modifikace jsou komplikovanější. Není možné napsat přímo ekvivalence, které tyto modifikaci popisují. Oproti T_0-modifikaci nemají kvocientová zobrazení na modifikace tolik hezkých vlastností.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

Existuje i transfinitní postup. Vezme se ekvivalence určená relací $x \sim y$, jestliže $x \in \overline{y}$, a kvocientový prostor podle této ekvivalence. Pokud nedostaneme T_1-prostor, postup se opakuje. Pro limitní ordinály je třeba vzít tzv. přímou limitu zkonstruovaných kvocientových zobrazení. Tento proces se musí na určitém kroku zastavit (proč?) a výsledkem bude T_1-modifikace. Dokažte to.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

T_3 a $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikace se liší od předchozích T_i-modifikací tím, že příslušné třídy prostorů nejsou uzavřené na jemnější topologie a tedy epireflektivní zobrazení na modifikace nemusejí být kvocienty.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

Protože T_0-modifikace regulárního prostoru je T_3-prostor, stačí sestrojit regulární modifikaci prostoru X – T_3-modifikace je pak T_0-modifikace sestrojené regulární modifikace (maximální indiskrétní podprostory se stáhnou do bodů). Podobně je tomu u úplně regulárních prostorů.

T_1-modifikace

Protože každý T_1-prostor je slabě vytvořen spojitými zobrazeními do hrubé T_1-topologie na téže nosné množině, lze T_1-modifikaci prostoru X popsat obecným postupem: označme $\widetilde{X}$ množinu X s hrubou T_1-topologií a vezměme diagonální součin e_1 mno6iny zobrazení $C(X, \widetilde{X})$ do mocniny $\widetilde{X}^{C(X,\widetilde{X})}$; pak $e_1 : X \to e_1(X)$ je T_1-modifikace prostoru X.

T_2-modifikace

Pro Hausdorffovy prostory je transfinitní konstrukce obdobná předchozí konstrukci pro T_1-modifikaci (za příslušné relace se berou dvojice bodů, které nelze oddělit disjunktními okolími). Proveďte konstrukci.
Na rozdíl od T_1-prostorů však pro Hausdorffovy prostory neexistuje hezká menší třída, která všechny Hausdorffovy prostory slabě vytváří. Proto je nutné v popisu T_2-modifikace pomocí diagonálního zobrazení do součinu použít místo $\widetilde{X}$ všechny Hausdorffovy prostory mohutnosti $|X|$.

Stejně jako u Hausdorffových prostorů neexistuje ani u regulárních prostorů hezká malá třída, která slabě vytváří všechny regulární prostory. Transfinitní konstrukce regulární modifikace prostoru X také není jednoduchá. Jako první krok lze vzít pro každé $x \in X$ uzávěry okolí v X. Vzniklé filtry ale nemusejí být soustavami okolí v nějaké topologii (která vlastnost nemusí být splněna?). Je nutné vzít nejjemnější topologii hrubší než vzniklá tzv. pretopologie a pokračovat transfinitně dále.

Na minulé stránce bylo zdůrazněno, že se jedná o zkoumání modifikací ve třídě všech topologických prostorů. V této třídě jsou epimorfizmy totožné se spojitými surjekcemi. Co když budeme zkoumat modifikace jen Hausdorffových prostorů? Pro ně jsou epimorfizmy totožné se spojitými zobrazeními na hustou část oboru hodnot. Tím dochází ke změně v dědičnosti, protože není nutné, aby každý podprostor prostoru z $\mathcal{C}$ náležel do $\mathcal{C}$, stačí jen uzavřená dědičnost.

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy v T_2)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických T_2-prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní:

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní ve třídě Top_2 Hausdorffových prostorů, tj. pro každý Hausdorffův prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na hustou část cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*

Postup důkazu je opět stejný jako pro bireflektivní třídy a předchozí epireflektivní třídy v *Top*

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy v T_2)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických T_2-prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní:

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní ve třídě $\mathcal{T}op_2$ Hausdorffových prostorů, tj. pro každý Hausdorffův prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na hustou část cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*

Postup důkazu je opět stejný jako pro bireflektivní třídy a předchozí epireflektivní třídy v *Top*

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy v T_2)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických T_2-prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní:

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní ve třídě $\mathtt{Top}_2$ Hausdorffových prostorů, tj. pro každý Hausdorffův prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na hustou část cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*

Postup důkazu je opět stejný jako pro bireflektivní třídy a předchozí epireflektivní třídy v *Top*

TVRZENÍ (Epireflektivní třídy v T_2)

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických T_2-prostorů uzavřená na homeomorfní obrazy. Následující vlastnosti třídy $\mathcal{C}$ jsou ekvivalentní:

1. *Třída $\mathcal{C}$ je součinová a uzavřeně dědičná.*
2. *Třída $\mathcal{C}$ je epireflektivní ve třídě $\mathcal{T}op_2$ Hausdorffových prostorů, tj. pro každý Hausdorffův prostor X existuje prostor $cX \in \mathcal{C}$ a spojité zobrazení e z X na hustou část cX takové, že pro libovolné spojité zobrazení f z X do prostoru z $\mathcal{C}$ existuje spojité zobrazení g tak, že $f = ge$.*

Postup důkazu je opět stejný jako pro bireflektivní třídy a předchozí epireflektivní třídy v *Top*

Každý maximální Hausdorffův prostor je uzavřený v libovolném větším Hausdorffově prostoru. Existují však prostory, které jsou uzavřené v libovolném větším Hausdorffově prostoru a nejsou maximální Hausdorffovy prostory (takový prostor nemůže být regulární).
V příští kapitole uvidíme, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je maximální.

Je zřejmé, jak lze definovat obdobné maximální nebo minimální V-prostory, kde V je nějaká topologická vlastnost.

Každý maximální Hausdorffův prostor je uzavřený v libovolném větším Hausdorffově prostoru. Existují však prostory, které jsou uzavřené v libovolném větším Hausdorffově prostoru a nejsou maximální Hausdorffovy prostory (takový prostor nemůže být regulární).
V příští kapitole uvidíme, že každý kompaktní Hausdorffův prostor je maximální.

Je zřejmé, jak lze definovat obdobné maximální nebo minimální V-prostory, kde V je nějaká topologická vlastnost.

Příklady regulárního prostoru, který není úplně regulární, jsou složitější, než byly příklady pro ostatní oddělovací axiómy. Uvedený příklad pochází od Mysiora z r. 1981 a je o dost jednodušší než příklady známé dříve.

Tyto příklady lze použít ke konstrukci regulárních prostorů, na nichž je každá spojitá reálná funkce konstantní. Postup lze zobecnit:

Pro každý T_1-prostor Y existuje regulární prostor X tak, že každé spojité zobrazení $X \to Y$ je konstantní.

Příklady regulárního prostoru, který není úplně regulární, jsou složitější, než byly příklady pro ostatní oddělovací axiómy. Uvedený příklad pochází od Mysiora z r. 1981 a je o dost jednodušší než příklady známé dříve.

Tyto příklady lze použít ke konstrukci regulárních prostorů, na nichž je každá spojitá reálná funkce konstantní. Postup lze zobecnit:

Pro každý T_1-prostor Y existuje regulární prostor X tak, že každé spojité zobrazení $X \to Y$ je konstantní.

Příklady regulárního prostoru, který není úplně regulární, jsou složitější, než byly příklady pro ostatní oddělovací axiómy. Uvedený příklad pochází od Mysiora z r. 1981 a je o dost jednodušší než příklady známé dříve.

Tyto příklady lze použít ke konstrukci regulárních prostorů, na nichž je každá spojitá reálná funkce konstantní. Postup lze zobecnit:

Pro každý T_1-prostor Y existuje regulární prostor X tak, že každé spojité zobrazení $X \to Y$ je konstantní.

Tvrzení, že mocnina $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální, lze zobecnit na tvrzení:

Nechť prostor X není kompaktní a κ je nespočetné kardinální číslo aspoň tak velké, jako mohutnost nějaké otevřené báze v X. Pak X^κ není normální.

Urysonovo lemma se snadno dokáže v metrizovatelných prostorech – oddělující funkce se dá přímo napsat pomocí metriky (zkuste ji najít).

Tvrzení Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí pro metrizovatelné prostory se nazývá Tietzova věta a rozšíření spojité reálné omezené funkce z uzavřeného podprostoru metrického prostoru lze také přímo popsat. Existuje několik vzorců a postupů, jak toto rozšíření popsat. Navíc většina těchto vzorců dává stejnoměrně spojité zobrazení, pokud je i původní zobrazení stejnoměrně spojité (dostane se tak speciální případ Katětovovy věty. o rozšíření stejnoměrně spojitých funkcí).

Tvrzení, že mocnina $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální, lze zobecnit na tvrzení:

Nechť prostor X není kompaktní a κ je nespočetné kardinální číslo aspoň tak velké, jako mohutnost nějaké otevřené báze v X. Pak X^κ není normální.

Urysonovo lemma se snadno dokáže v metrizovatelných prostorech – oddělující funkce se dá přímo napsat pomocí metriky (zkuste ji najít).

Tvrzení Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí pro metrizovatelné prostory se nazývá Tietzova věta a rozšíření spojité reálné omezené funkce z uzavřeného podprostoru metrického prostoru lze také přímo popsat. Existuje několik vzorců a postupů, jak toto rozšíření popsat. Navíc většina těchto vzorců dává stejnoměrně spojité zobrazení, pokud je i původní zobrazení stejnoměrně spojité (dostane se tak speciální případ Katětovovy věty. o rozšíření stejnoměrně spojitých funkcí).

Tvrzení, že mocnina $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální, lze zobecnit na tvrzení:

Nechť prostor X není kompaktní a κ je nespočetné kardinální číslo aspoň tak velké, jako mohutnost nějaké otevřené báze v X. Pak X^κ není normální.

Urysonovo lemma se snadno dokáže v metrizovatelných prostorech – oddělující funkce se dá přímo napsat pomocí metriky (zkuste ji najít).

Tvrzení Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí pro metrizovatelné prostory se nazývá Tietzova věta a rozšíření spojité reálné omezené funkce z uzavřeného podprostoru metrického prostoru lze také přímo popsat. Existuje několik vzorců a postupů, jak toto rozšíření popsat. Navíc většina těchto vzorců dává stejnoměrně spojité zobrazení, pokud je i původní zobrazení stejnoměrně spojité (dostane se tak speciální případ Katětovovy věty. o rozšíření stejnoměrně spojitých funkcí).

Tvrzení, že mocnina $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální, lze zobecnit na tvrzení:

Nechť prostor X není kompaktní a κ je nespočetné kardinální číslo aspoň tak velké, jako mohutnost nějaké otevřené báze v X. Pak X^κ není normální.

Urysonovo lemma se snadno dokáže v metrizovatelných prostorech – oddělující funkce se dá přímo napsat pomocí metriky (zkuste ji najít).

Tvrzení Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí pro metrizovatelné prostory se nazývá Tietzova věta a rozšíření spojité reálné omezené funkce z uzavřeného podprostoru metrického prostoru lze také přímo popsat. Existuje několik vzorců a postupů, jak toto rozšíření popsat. Navíc většina těchto vzorců dává stejnoměrně spojité zobrazení, pokud je i původní zobrazení stejnoměrně spojité (dostane se tak speciální případ Katětovovy věty. o rozšíření stejnoměrně spojitých funkcí).

Klasický důkaz Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí spočívá na Urysonově lemmatu. Náš důkaz pro rozšiřování omezených funkcí Urysonovo lemma nepotřeboval.

V Urysonově lemmatu jsou dány dvě disjunktní uzavřené podmnožiny A, B normálního prostoru X. Položíme $U_0 = A, U_1 = X \setminus B$, takže U_1 je okolí U_0. Protože X je normální, existuje okolí $U_{\frac{1}{2}}$ množiny U_0 jehož uzávěr leží v U_1. Dále existují okolí $U_{\frac{1}{4}}$ množiny U_0 s uzávěrem ležící v $U_{\frac{1}{2}}$ a okolí $U_{\frac{3}{4}}$ množiny $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ ležící s uzávěrem v U_1. Indukcí se sestrojí otevřené množiny U_r, kde r je číslo tvaru $k/2^n, n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq 2^n$, které jsou okolí U_0 a $\overline{U_r} \subset U_s$ jakmile $r < s$.
Nyní stačí položit $f(x) = \inf\{r; x \in U_r\}$ a dokázat, že f je spojitá funkce.

Pro důkaz Urysonovy věty stačí předpokládat, že daná funkce $f : A \to \mathbb{R}$ má hodnoty v $[0, 1]$ (omezené funkce se snadno homeomorfizmem převedou na funkce s hodnotami v libovolném daném omezeném intervalu, pro neomezené funkce se použije postup uvedený v našem důkazu Urysonovy věty.
Urysonovo lemma dává spojitou funkci $g_1 : X \to [0, 1]$, která má nulové hodnoty na $f^{-1}([0, 1/3])$ a hodnoty 1 na $f^{-1}([2/3, 1])$. Potom $|f(x) - g_1(x)| \leq 2/3$. Pro funkci $f - g_1$ se podobným způsobem najde spojitá funkce $g_2 : X \to [0, 1/3]$ tak, že $|(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| \leq (2/3)^2$. Indukcí se sestrojí spojité funkce $g_n : X \to [0, (1/3)^{n_1}]$ tak, že $|f(x) - \sum_{i \leq n} g_i(x)| \leq (2/3)^n$. Nyní stačí za hledané rozšíření vzít $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$.

Klasický důkaz Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí spočívá na Urysonově lemmatu. Náš důkaz pro rozšiřování omezených funkcí Urysonovo lemma nepotřeboval.

V Urysonově lemmatu jsou dány dvě disjunktní uzavřené podmnožiny A, B normálního prostoru X. Položíme $U_0 = A, U_1 = X \setminus B$, takže U_1 je okolí U_0. Protože X je normální, existuje okolí $U_{\frac{1}{2}}$ množiny U_0 jehož uzávěr leží v U_1. Dále existují okolí $U_{\frac{1}{4}}$ množiny U_0 s uzávěrem ležící v $U_{\frac{1}{2}}$ a okolí $U_{\frac{3}{4}}$ množiny $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ ležící s uzávěrem v U_1. Indukcí se sestrojí otevřené množiny U_r, kde r je číslo tvaru $k/2^n$, $n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq 2^n$, které jsou okolí U_0 a $\overline{U_r} \subset U_s$ jakmile $r < s$.
Nyní stačí položit $f(x) = \inf\{r; x \in U_r\}$ a dokázat, že f je spojitá funkce.

Pro důkaz Urysonovy věty stačí předpokládat, že daná funkce $f : A \to \mathbb{R}$ má hodnoty v $[0, 1]$ (omezené funkce se snadno homeomorfizmem převedou na funkce s hodnotami v libovolném daném omezeném intervalu, pro neomezené funkce se použije postup uvedený v našem důkazu Urysonovy věty.
Urysonovo lemma dává spojitou funkci $g_1 : X \to [0, 1]$, která má nulové hodnoty na $f^{-1}([0, 1/3])$ a hodnoty 1 na $f^{-1}([2/3, 1])$. Potom $|f(x) - g_1(x)| \leq 2/3$. Pro funkci $f - g_1$ se podobným způsobem najde spojitá funkce $g_2 : X \to [0, 1/3]$ tak, že $|(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| \leq (2/3)^2$. Indukcí se sestrojí spojité funkce $g_n : X \to [0, (1/3)^{n_1}]$ tak, že $|f(x) - \sum_{i \leq n} g_i(x)| \leq (2/3)^n$. Nyní stačí za hledané rozšíření vzít $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$.

Klasický důkaz Urysonovy věty o rozšíření spojitých funkcí spočívá na Urysonově lemmatu. Náš důkaz pro rozšiřování omezených funkcí Urysonovo lemma nepotřeboval.

V Urysonově lemmatu jsou dány dvě disjunktní uzavřené podmnožiny A, B normálního prostoru X. Položíme $U_0 = A, U_1 = X \setminus B$, takže U_1 je okolí U_0. Protože X je normální, existuje okolí $U_{\frac{1}{2}}$ množiny U_0 jehož uzávěr leží v U_1. Dále existují okolí $U_{\frac{1}{4}}$ množiny U_0 s uzávěrem ležící v $U_{\frac{1}{2}}$ a okolí $U_{\frac{3}{4}}$ množiny $\overline{U_{\frac{1}{2}}}$ ležící s uzávěrem v U_1. Indukcí se sestrojí otevřené množiny U_r, kde r je číslo tvaru $k/2^n, n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq 2^n$, které jsou okolí U_0 a $\overline{U_r} \subset U_s$ jakmile $r < s$.
Nyní stačí položit $f(x) = \inf\{r; x \in U_r\}$ a dokázat, že f je spojitá funkce.

Pro důkaz Urysonovy věty stačí předpokládat, že daná funkce $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ má hodnoty v $[0, 1]$ (omezené funkce se snadno homeomorfizmem převedou na funkce s hodnotami v libovolném daném omezeném intervalu, pro neomezené funkce se použije postup uvedený v našem důkazu Urysonovy věty.
Urysonovo lemma dává spojitou funkci $g_1 : X \longrightarrow [0, 1]$, která má nulové hodnoty na $f^{-1}([0, 1/3])$ a hodnoty 1 na $f^{-1}([2/3, 1])$. Potom $|f(x) - g_1(x)| \leq 2/3$. Pro funkci $f - g_1$ se podobným způsobem najde spojitá funkce $g_2 : X \longrightarrow [0, 1/3]$ tak, že $|(f(x) - g_1(x)) - g_2(x)| \leq (2/3)^2$. Indukcí se sestrojí spojité funkce $g_n : X \longrightarrow [0, (1/3)^{n_1}]$ tak, že $|f(x) - \sum_{i \leq n} g_i(x)| \leq (2/3)^n$. Nyní stačí za hledané rozšíření vzít $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$.