3. ODDĚLOVÁNÍ

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Vlastnosti T_0-prostorů)

1. *Je-li X T_0-prostor a Y je jemnější než X, je i Y T_0-prostor.*
2. *Třída všech T_0-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
3. *Kvocient T_0-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
4. *Třída všech T_0-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_0-modifikací.)*

Důkaz.

Tvrzení 1 je triviální, tvrzení 4 plyne z 2 a z obecného tvrzení o epireflekcích. Pro tvrzení 3 viz příklady. Zbývá tvrzení 2, z něhož je možná netriviální jen součinovost. Je-li $X = \Pi X_a$ a x, y jsou dva různé body X, pak existuje index a tak, že projekce x_a, y_a obou bodů jsou různé. Je-li X_a T_0-prostor, existuje otevřená množina G v X_a obsahující právě jeden z bodů x_a, y_a. Potom $\mathrm{pr}_a^{-1}(G)$ je otevřená množina v X obsahující právě jeden z bodů x, y. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti T_1-prostorů)

1. *Každý T_1-prostor je T_0-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_1-prostor je T_1-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_1-prostory právě když je každý jeho bod uzavřený.*
4. *Třída všech T_1-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_1-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_1-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_1-modifikací.)*

Důkaz.

Je možné odkázat na předchozí důkaz s malou triviální modifikací důkazu součinovosti. □

TVRZENÍ (Vlastnosti T_2-prostoru)

1. *Každý T_2-prostor je T_1-prostor.*
2. *Každý prostor jemnější než T_2-prostor je T_2-prostor.*
3. *Topologický prostor je T_2-prostor právě když každý jeho usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.*
4. *Třída všech T_2-prostorů je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
5. *Kvocient T_2-prostoru nemusí být T_0-prostor.*
6. *Třída všech T_2-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_2-modifikací.)*

Důkaz.

Je možné odkázat na důkaz podobné věty pro T_0-prostory s malou triviální modifikací důkazu součinovosti. Důkaz implikace $\Rightarrow$ v tvrzení 3 je stejný jako důkaz jednoznačnosti limity pro limity posloupností v matematické analýze. Pokud X není T_2-prostor, existují dva body $x, y \in X$ takové, že pro každé jejich okolí U, V existuje $x_{U,V} \in U \cap V$. Pak usměrněný soubor $\{x_{U,V}; U$ okolí x, V okolí $\}$ konverguje k oběma bodům x, y. $\square$

TVRZENÍ (Zobrazení do T_2-prostoru)

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y. Pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X.

Důkaz.

Nechť máme $x \in X$ s vlastností $f(x) \neq g(x)$. Protože Y je T_2-prostor, existují dvě disjunktní okolí U, V bodů $f(x), g(x)$ v Y. Protože f, g jsou spojitá, existuje okolí W bodu x v X tak, že $f(W) \subset U, g(W) \subset V$. Tedy pro každý bod $z \in W$ je $f(z) \neq g(z)$. □

DŮSLEDEK

Nechť f, g jsou spojitá zobrazení topologického prostoru X do T_2-prostoru Y, která se shodují na husté podmnožině X. Pak se shodují na X.
Je-li $X \subset Y$ retraktem prostoru Y a $r : Y \to X$ je příslušná retrakce, je $X = \{x \in Y; r(x) = 1_Y(x)$, což je podle předchozí věty uzavřená množina, pokud je Y T_2-prostor.

Důkaz.

Podle předchozí věty je množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená v X a podle předpokladu obsahuje hustou část X. Tedy se musí rovnat X. □

TVRZENÍ (Vlastnosti T_3-prostorů)

1. *Každý regulární prostor je symetrický, každý T_3-prostor je T_2-prostor.*
2. *Prostor X je regulární právě když má každý bod bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech regulárních (nebo T_3-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient T_3-prostoru nemusí být regulární prostor, jemnější topologie než T_3-prostor nemusí být regulární.*
5. *Třída všech regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho regulární modifikací).*
6. *Třída všech T_3-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho T_3-modifikací).*

Důkaz.

Pro bireflekci a epireflekci viz odkazy v tvrzení, pro tvrzení 4 viz příklady na kvocienty a příklady na jemnější topologie. Ze zbývajících tvrzení dokážeme opět jen součinovost. Je-li $X = \Pi X_a$ součin regulárních prostorů a $U = \Pi U_a$ bázové okolí bodu $x = \{x_a\}$ v X, existuje pro každé a okolí V bodu x_a v X_a tak, že $\overline{V_a} \subset U_a$ (podle tvrzení 2 této věty), přičemž $V_a = X_a$ pokud $U_a = X_a$. Potom $V = \Pi V_a$ je okolí x v X a $\overline{V} \subset U$. Podle tvrzení 2 je X regulární. □

TVRZENÍ (Rozšíření zobrazení do regulárního prostoru)

Nechť A je hustá část prostoru X a f je zobrazení X do regulárního prostoru, které je spojité na každém podprostoru $A \cup \{x\}, x \in X$. Pak je f spojité na X.

Důkaz.

Nechť $f : X \to Y$ má vlastnost popsanou ve větě a Y je regulární prostor. Zvolme $x \in X$ a V okolí $f(x)$ v Y. Máme najít okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$. Existuje okolí W bodu $f(x)$ v Y tak, že $\overline{W} \subset V$. Dále existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(z) \in W$ jakmile $z \in U \cap A$. Nechť $u \in U \setminus A$. Zřejmě je $u \in \overline{U \cap A}$. Protože f je spojitá na $A \cup \{u\}$, je $f(u) \in \overline{f(U \cap A)} \subset \overline{W} \subset V$. Důkaz je hotov. □

TVRZENÍ (Vlastnosti T_4-prostorů)

1. *Každý T_4-prostor je T_3-prostor.*
2. *Prostor X je normální právě když má každá jeho uzavřená množina bázi okolí složenou z uzavřených množin.*
3. *Třída všech normálních (nebo T_4-prostorů) je uzavřená na uzavřené podprostory a součty.*
4. *Součin dvou T_4-prostorů nemusí být normální, kvocient T_4-prostoru nemusí být normální, podprostor T_4-prostoru nemusí být normální.*

Důkaz.

Pro tvrzení 4 viz příklady na kvocienty, příklady na součiny a příklady na podprostory normálních prostorů. Ostatní tvrzení mají přímé jednoduché důkazy. □

TVRZENÍ (Vlastnosti $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru)

1. *Prostor X je úplně regulární právě když pro každý jeho bod x a uzavřenou množinu F, která x neobsahuje, existuje spojitá funkce $f : X \to [0,1]$ taková, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro každé $y \in Y$.*
2. *Každý T_4-prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, každý $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor je T_3-prostor, každý úplně regulární prostor je regulární, každý normální symetrický prostor je úplně regulární.*
3. *Třída všech úplně regulárních (nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů) je uzavřená na součiny, podprostory a součty.*
4. *Kvocient $T_{3\frac{1}{2}}$-prostoru nemusí být úplně regulární prostor, jemnější topologie než $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor nemusí být úplně regulární.*
5. *Třída všech úplně regulárních prostorů je bireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho úplně regulární modifikací).*
6. *Třída všech $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je epireflektivní v kategorii topologických prostorů. (Příslušná reflekce prostoru se nazývá jeho $T_{3\frac{1}{2}}$-modifikací).*

Důkaz.

1. Postačitelnost uvedené podmínky je zřejmá. nechť je tedy X úplně regulární, $x \in X$ a F je uzavřená množina v X neobsahující x (pak $U = X \setminus F$ je okolí x v X. Podle definice existuje konečně mnoho funkcí $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ a otevřené množiny $G_1, ..., G_n$ v $\mathbb{R}$ tak, že $f_i(x) \in G_i$, $i \leq n$ a $\bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) \subset U$. Posunutím funkcí lze dosáhnout toho, že $f_i(x) = 0$ a jejich vynásobením vhodnou konstantou toho, že $G_i \subset (-1, 1)$. Za hledanou funkci nyní stačí vzít $f = \min(1, |f_1|.|f_2|...|f_n|)$.
2. To, že každý úplně regulární prostor je regulární, je zřejmé. Tvrzení o normálním prostoru plyne z pozdějšího Urysonova lemmatu.
3. Opět je méně jednoduchá součinovost. Zvolme $x = \{x_a\} =\in X = \Pi X_a$ a $U = \Pi U_a$ jeho bázové okolí, pro které je $U_a \neq X_a$ pro indexy $a \in K$, K konečná množina. Jsou-li všechny prostory X_a úplně regulární, existuje pro každé $a \in K$ spojitá funkce $f_a : X_a \to [0, 1]$ s hodnotou 0 v x_a a hodnotou 1 mimo U_a (podle tvrzení 1). Pak funkce $f(\{y_a\} = \sum_{a \in K} f_a(y_a)$ je spojitá reálná funkce na X oddělující bod x od doplňku U.
4. Viz příklady na kvocienty a příklady na jemnější topologie.
5. Poslední dvě tvrzení vyplývají z vlastností 3 a z odkazů na epireflekce a bireflekce ve větě.

□

TVRZENÍ (Vložení $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů do mocniny intervalu)

1. *Topologický prostor je úplně regulární právě když je slabě vytvořen reálnými funkcemi.*
2. *Topologický prostor je úplně regulární právě když se dá vnořit do součinu indiskrétního prostoru a mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0,1]$).*
3. *Topologický prostor je $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor právě když se dá vnořit do mocniny $\mathbb{R}$ (nebo mocniny $[0,1]$).*

Důkaz.

Tvrzení 1 vyplývá z definice úplně regulárních prostorů, tvrzení 2 a 3 z věty o vnoření do součinu. □

TVRZENÍ (Urysonova věta o rozšíření)

Nechť X je normální prostor, A je jeho uzavřená podmnožina a $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$, která se na A shoduje s f.

DŮSLEDEK (Urysonovo lemma)

Nechť X je normální prostor a A, B jsou jeho disjunktní uzavřené podmnožiny. Pak existuje spojitá funkce $f : X \to [0, 1]$, která má hodnotu 0 na A a hodnotu 1 na B.

Důkaz.

Můžeme předpokládat, že normální prostor X je T_1 a tedy $T_{3\frac{1}{2}}$. (viz cvičení). Podle charakterizace normality pomocí pokrytí tvoří všechna konečná otevřená pokrytí bázi uniformity $\mathcal{U}$ na X, jejíž zúžení $\mathcal{V}$ na A je uniformita mající za bázi opět všechna konečná otevřená pokrytí (zde se používá uzavřenost množiny A). Funkce $f : (A, \mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ je zřejmě stejnoměrně spojitá. Předpokládejme nyní, že f je omezená, např. $f(A) \subset [a, b]$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$. Podle Katětovovy věty existuje stejnoměrně spojitá funkce $F : (X, \mathcal{U}) \to [a, b]$ rozšiřující f, což je hledaná funkce.
Z dokázaného tvrzení vyplývá ihned Urysonovo lemma ($f : A \cup B :\to [0, 1]$, $f = 0$ na A, $f = 1$ na B.
Nechť je nyní $f : A \to \mathbb{R}$ neomezená. Potom je $g = \operatorname{arctg} \circ f$ spojitá omezená funkce $A \to (-\pi/2, \pi/2)$ a tedy podle první dokázané části existuje její spojité rozšíření $G : X \to [-\pi/2, \pi/2]$. Označme $P = G^{-1}\{-\pi/2, \pi/2\}$. Zřejmě je množina P uzavřená a disjunktní s A. Podle dokázaného Urysonova lemmatu existuje spojitá funkce $h : X \to [0, 1]$, $h = 1$ na A a $h = 0$ na P. Násobek hG je spojitá funkce $X \to (-\pi/2, \pi/2)$, která na A splývá s G. Tedy funkce $\operatorname{tg} \circ (hG)$ je hledané spojité rozšíření funkce f na X. □