3. ODDĚLOVÁNÍ

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Příklady T_i-prostorů, které nejsou T_j

1. Zdvojením bodu (např. 0 v $[0, 1]$) v Hausdorffově prostoru se získá T_1-prostor, který není Hausdorffův. Zdvojením bodu x_0 v T_2-prostoru X se míní prostor $Y = X \cup \{x_0'\}$, kde X je otevřený podprostor v Y a okolí bodu $\{x_0'\}$ jsou množiny $\{x_0'\} \cup (U \setminus \{x_0\})$, U jsou okolí x_0 v X (popište toto zdvojení pomocí kvocientu součtu dvou kopií X).
2. Zjemněním topologie na $[0, 1]$ lze setrojit prostor, který není regulární (samozřejmě bude Hausdorffův). Např. z původních okolí bodu 0 uberte posloupnost konvergující k 0.
3. Existuje T_3-prostor, který není úplně regulární.
[*Návod*: X je podmnožina roviny $\{(x, y); x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$ spolu s $+\infty$. Každý bod (x, y) s $y > 0$ je izolovaný, bod $+\infty$ má bázi okolí $\{+\infty\} \cup \{(x, y); x > k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Bod $(x, 0)$ má bázi okolí $\{(x, 0)\} \cup \{(x, y) \in X, y \notin F\} \cup \{(x + t, t); t \in (0, 2] \setminus F\}$, kde F je konečná množina. Je-li f spojitá reálná funkce na X, která má hodnotu 0 pro $[0, 1] \times \{0\}$, pak i $f(+\infty) = 0$. X tedy není úplně regulární, zřejmě je regulární.]
4. Existuje $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální.
[*Návod*: Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je součinová a dědičná, takže uvedené příklady nenormálních prostorů jsou $T_{3\frac{1}{2}}$.
5. Prostory s jedním hromadným bodem jsou normální (viz cvičení). Lze proto sestrojit jednoduché normální prostory, které nejsou ani metrizovatelné ani uspořádatelné. Popište některé.

Příklady T_i-prostorů, které nejsou T_j

1. Zdvojením bodu (např. 0 v $[0,1]$) v Hausdorffově prostoru se získá T_1-prostor, který není Hausdorffův. Zdvojením bodu x_0 v T_2-prostoru X se míní prostor $Y = X \cup \{x_0'\}$, kde X je otevřený podprostor v Y a okolí bodu $\{x_0'\}$ jsou množiny $\{x_0'\} \cup (U \setminus \{x_0\})$, U jsou okolí x_0 v X (popište toto zdvojení pomocí kvocientu součtu dvou kopií X).
2. Zjemněním topologie na $[0,1]$ lze setrojit prostor, který není regulární (samozřejmě bude Hausdorffův). Např. z původních okolí bodu 0 uberte posloupnost konvergující k 0.
3. Existuje T_3-prostor, který není úplně regulární.
[*Návod*: X je podmnožina roviny $\{(x,y); x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$ spolu s $+\infty$. Každý bod (x,y) s $y > 0$ je izolovaný, bod $+\infty$ má bázi okolí $\{+\infty\} \cup \{(x,y); x > k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Bod $(x,0)$ má bázi okolí $\{(x,0)\} \cup \{(x,y) \in X, y \notin F\} \cup \{(x+t,t); t \in (0,2] \setminus F\}$, kde F je konečná množina. Je-li f spojitá reálná funkce na X, která má hodnotu 0 pro $[0,1] \times \{0\}$, pak i $f(+\infty) = 0$. X tedy není úplně regulární, zřejmě je regulární.]
4. Existuje $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální.
[*Návod*: Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je součinová a dědičná, takže uvedené příklady nenormálních prostorů jsou $T_{3\frac{1}{2}}$.
5. Prostory s jedním hromadným bodem jsou normální (viz cvičení). Lze proto sestrojit jednoduché normální prostory, které nejsou ani metrizovatelné ani uspořádatelné. Popište některé.

Příklady T_i-prostorů, které nejsou T_j

1. Zdvojením bodu (např. 0 v $[0,1]$) v Hausdorffově prostoru se získá T_1-prostor, který není Hausdorffův. Zdvojením bodu x_0 v T_2-prostoru X se míní prostor $Y = X \cup \{x'_0\}$, kde X je otevřený podprostor v Y a okolí bodu $\{x'_0\}$ jsou množiny $\{x'_0\} \cup (U \setminus \{x_0\})$, U jsou okolí x_0 v X (popište toto zdvojení pomocí kvocientu součtu dvou kopií X).
2. Zjemněním topologie na $[0,1]$ lze setrojit prostor, který není regulární (samozřejmě bude Hausdorffův). Např. z původních okolí bodu 0 uberte posloupnost konvergující k 0.
3. Existuje T_3-prostor, který není úplně regulární.
[*Návod*: X je podmnožina roviny $\{(x,y); x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$ spolu s $+\infty$. Každý bod (x,y) s $y > 0$ je izolovaný, bod $+\infty$ má bázi okolí $\{+\infty\} \cup \{(x,y); x > k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Bod $(x,0)$ má bázi okolí $\{(x,0)\} \cup \{(x,y) \in X, y \notin F\} \cup \{(x+t,t); t \in (0,2] \setminus F\}$, kde F je konečná množina. Je-li f spojitá reálná funkce na X, která má hodnotu 0 pro $[0,1] \times \{0\}$, pak i $f(+\infty) = 0$. X tedy není úplně regulární, zřejmě je regulární.]
4. Existuje $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální.
[*Návod*: Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je součinová a dědičná, takže uvedené příklady nenormálních prostorů jsou $T_{3\frac{1}{2}}$.
5. Prostory s jedním hromadným bodem jsou normální (viz cvičení). Lze proto sestrojit jednoduché normální prostory, které nejsou ani metrizovatelné ani uspořádatelné. Popište některé.

Příklady T_i-prostorů, které nejsou T_j

1. Zdvojením bodu (např. 0 v $[0,1]$) v Hausdorffově prostoru se získá T_1-prostor, který není Hausdorffův. Zdvojením bodu x_0 v T_2-prostoru X se míní prostor $Y = X \cup \{x_0'\}$, kde X je otevřený podprostor v Y a okolí bodu $\{x_0'\}$ jsou množiny $\{x_0'\} \cup (U \setminus \{x_0\})$, U jsou okolí x_0 v X (popište toto zdvojení pomocí kvocientu součtu dvou kopií X).
2. Zjemněním topologie na $[0,1]$ lze setrojit prostor, který není regulární (samozřejmě bude Hausdorffův). Např. z původních okolí bodu 0 uberte posloupnost konvergující k 0.
3. Existuje T_3-prostor, který není úplně regulární.
[*Návod*: X je podmnožina roviny $\{(x,y); x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$ spolu s $+\infty$. Každý bod (x,y) s $y > 0$ je izolovaný, bod $+\infty$ má bázi okolí $\{+\infty\} \cup \{(x,y); x > k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Bod $(x,0)$ má bázi okolí $\{(x,0)\} \cup \{(x,y) \in X, y \notin F\} \cup \{(x+t,t); t \in (0,2] \setminus F\}$, kde F je konečná množina. Je-li f spojitá reálná funkce na X, která má hodnotu 0 pro $[0,1] \times \{0\}$, pak i $f(+\infty) = 0$. X tedy není úplně regulární, zřejmě je regulární.]
4. Existuje $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální.
[*Návod*: Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je součinová a dědičná, takže uvedené příklady nenormálních prostorů jsou $T_{3\frac{1}{2}}$.
5. Prostory s jedním hromadným bodem jsou normální (viz cvičení). Lze proto sestrojit jednoduché normální prostory, které nejsou ani metrizovatelné ani uspořádatelné. Popište některé.

Příklady T_i-prostorů, které nejsou T_j

1. Zdvojením bodu (např. 0 v $[0,1]$) v Hausdorffově prostoru se získá T_1-prostor, který není Hausdorffův. Zdvojením bodu x_0 v T_2-prostoru X se míní prostor $Y = X \cup \{x_0'\}$, kde X je otevřený podprostor v Y a okolí bodu $\{x_0'\}$ jsou množiny $\{x_0'\} \cup (U \setminus \{x_0\})$, U jsou okolí x_0 v X (popište toto zdvojení pomocí kvocientu součtu dvou kopií X).
2. Zjemněním topologie na $[0,1]$ lze setrojit prostor, který není regulární (samozřejmě bude Hausdorffův). Např. z původních okolí bodu 0 uberte posloupnost konvergující k 0.
3. Existuje T_3-prostor, který není úplně regulární.
   [*Návod*: X je podmnožina roviny $\{(x,y); x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\}$ spolu s $+\infty$. Každý bod (x,y) s $y > 0$ je izolovaný, bod $+\infty$ má bázi okolí $\{+\infty\} \cup \{(x,y); x > k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Bod $(x,0)$ má bázi okolí $\{(x,0)\} \cup \{(x,y) \in X, y \notin F\} \cup \{(x+t,t); t \in (0,2] \setminus F\}$, kde F je konečná množina. Je-li f spojitá reálná funkce na X, která má hodnotu 0 pro $[0,1] \times \{0\}$, pak i $f(+\infty) = 0$. X tedy není úplně regulární, zřejmě je regulární.]
4. Existuje $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální.
   [*Návod*: Třída $T_{3\frac{1}{2}}$-prostorů je součinová a dědičná, takže uvedené příklady nenormálních prostorů jsou $T_{3\frac{1}{2}}$.
5. Prostory s jedním hromadným bodem jsou normální (viz cvičení). Lze proto sestrojit jednoduché normální prostory, které nejsou ani metrizovatelné ani uspořádatelné. Popište některé.

Příklady kvocientů

1. Dvoubodový indiskrétní prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení je otevřené a není uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na aspoň dvoubodový indiskrétní prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který není T_0.
2. Sierpińského prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení lze nalézt otevřené ale nikoli uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na Sierpińského prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_0 a není T_1.
3. Existuje kvocientové zobrazení $\mathbb{R}$ i $[0,1]$ na spočetný hrubý T_1-prostor. $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_1 a není T_2.
   [*Návod*: $[0,1]$ se rozdělí na spočetně mnoho uzavřených množin (pak bude příslušný kvocient T_1). Např. $F_0 = \{0\}, F_1 = \{1\}, F_2 = [1/3, 2/3], F_3 = [1/9, 2/9] \cup [7/9, 8/9], F_4 = [1/27, 2/27] \cup [7/27, 8/27] \cup [19/27, 20/27] \cup [25/27, 26/27], \dots$ (je snad zřejmé, jak se bude pokračovat dále).]
4. Výsledek o kvocientech normálních prostorů a metoda jeho důkazu dává následující příklady (při použití předchozích příkladů):
   Kvocient metrizovatelného prostoru může být T_2-prostor, který není regulární (nebo T_3-prostor, který není úplně regulární, nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální).

Příklady kvocientů

1. Dvoubodový indiskrétní prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení je otevřené a není uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na aspoň dvoubodový indiskrétní prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který není T_0.
2. Sierpińského prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení lze nalézt otevřené ale nikoli uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na Sierpińského prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_0 a není T_1.
3. Existuje kvocientové zobrazení $\mathbb{R}$ i $[0,1]$ na spočetný hrubý T_1-prostor. $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_1 a není T_2.
   [*Návod*: $[0,1]$ se rozdělí na spočetně mnoho uzavřených množin (pak bude příslušný kvocient T_1). Např. $F_0 = \{0\}$, $F_1 = \{1\}$, $F_2 = [1/3, 2/3]$, $F_3 = [1/9, 2/9] \cup [7/9, 8/9]$, $F_4 = [1/27, 2/27] \cup [7/27, 8/27] \cup [19/27, 20/27] \cup [25/27, 26/27]$, ... (je snad zřejmé, jak se bude pokračovat dále).]
4. Výsledek o kvocientech normálních prostorů a metoda jeho důkazu dává následující příklady (při použití předchozích příkladů):
   Kvocient metrizovatelného prostoru může být T_2-prostor, který není regulární (nebo T_3-prostor, který není úplně regulární, nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální).

Příklady kvocientů

1. Dvoubodový indiskrétní prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení je otevřené a není uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na aspoň dvoubodový indiskrétní prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který není T_0.
2. Sierpińského prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení lze nalézt otevřené ale nikoli uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na Sierpińského prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_0 a není T_1.
3. Existuje kvocientové zobrazení $\mathbb{R}$ i $[0,1]$ na spočetný hrubý T_1-prostor. $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_1 a není T_2.
   [*Návod*: $[0,1]$ se rozdělí na spočetně mnoho uzavřených množin (pak bude příslušný kvocient T_1). Např. $F_0 = \{0\}, F_1 = \{1\}, F_2 = [1/3, 2/3], F_3 = [1/9, 2/9] \cup [7/9, 8/9], F_4 = [1/27, 2/27] \cup [7/27, 8/27] \cup [19/27, 20/27] \cup [25/27, 26/27], \ldots$ (je snad zřejmé, jak se bude pokračovat dále).]
4. Výsledek o kvocientech normálních prostorů a metoda jeho důkazu dává následující příklady (při použití předchozích příkladů):
   Kvocient metrizovatelného prostoru může být T_2-prostor, který není regulární (nebo T_3-prostor, který není úplně regulární, nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální).

Příklady kvocientů

1. Dvoubodový indiskrétní prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení je otevřené a není uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na aspoň dvoubodový indiskrétní prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který není T_0.
2. Sierpińského prostor je kvocientem $\mathbb{R}$ i $[0,1]$. Kvocientové zobrazení lze nalézt otevřené ale nikoli uzavřené (může být zobrazení T_1-prostoru na Sierpińského prostor uzavřené?). $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_0 a není T_1.
3. Existuje kvocientové zobrazení $\mathbb{R}$ i $[0,1]$ na spočetný hrubý T_1-prostor. $[0,1]$ má tedy kvocient, který je T_1 a není T_2.
   [*Návod*: $[0,1]$ se rozdělí na spočetně mnoho uzavřených množin (pak bude příslušný kvocient T_1). Např. $F_0 = \{0\}, F_1 = \{1\}, F_2 = [1/3, 2/3], F_3 = [1/9, 2/9] \cup [7/9, 8/9], F_4 = [1/27, 2/27] \cup [7/27, 8/27] \cup [19/27, 20/27] \cup [25/27, 26/27], \ldots$ (je snad zřejmé, jak se bude pokračovat dále).]
4. Výsledek o kvocientech normálních prostorů a metoda jeho důkazu dává následující příklady (při použití předchozích příkladů):
   Kvocient metrizovatelného prostoru může být T_2-prostor, který není regulární (nebo T_3-prostor, který není úplně regulární, nebo $T_{3\frac{1}{2}}$-prostor, který není normální).

Zachovávání vlastností jemnější topologií

1. Existuje neregulární prostor, který je jemnější než $[0, 1]$ (viz předchozí příklady).
2. Součin dvou Sorgenfreyových přímek je úplně regulární prostor, není normální a je jemnější než $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Na rozdíl od T_1-prostorů neexistuje nejhrubší T_i-prostor pro zbývající i (pro $i = 0$ už na dvoubodovém prostoru, pro ostatní i na spočetném prostoru). Sestrojte příklady.
4. Podprostory $[0, 1]$ a $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ reálných čísel jsou maximální Hausdorffovy prostory ve smyslu, že žádná ostře hrubší topologie na nich není Hausdorffova (viz poznámky pro obecnější tvrzení).

Zachovávání vlastností jemnější topologií

1. Existuje neregulární prostor, který je jemnější než $[0, 1]$ (viz předchozí příklady).
2. Součin dvou Sorgenfreyových přímek je úplně regulární prostor, není normální a je jemnější než $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Na rozdíl od T_1-prostorů neexistuje nejhrubší T_i-prostor pro zbývající i (pro $i = 0$ už na dvoubodovém prostoru, pro ostatní i na spočetném prostoru). Sestrojte příklady.
4. Podprostory $[0, 1]$ a $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ reálných čísel jsou maximální Hausdorffovy prostory ve smyslu, že žádná ostře hrubší topologie na nich není Hausdorffova (viz poznámky pro obecnější tvrzení).

Zachovávání vlastností jemnější topologií

1. Existuje neregulární prostor, který je jemnější než $[0,1]$ (viz předchozí příklady).
2. Součin dvou Sorgenfreyových přímek je úplně regulární prostor, není normální a je jemnější než $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Na rozdíl od T_1-prostorů neexistuje nejhrubší T_i-prostor pro zbývající i (pro $i = 0$ už na dvoubodovém prostoru, pro ostatní i na spočetném prostoru). Sestrojte příklady.
4. Podprostory $[0,1]$ a $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ reálných čísel jsou maximální Hausdorffovy prostory ve smyslu, že žádná ostře hrubší topologie na nich není Hausdorffova (viz poznámky pro obecnější tvrzení).

Zachovávání vlastností jemnější topologií

1. Existuje neregulární prostor, který je jemnější než $[0, 1]$ (viz předchozí příklady).
2. Součin dvou Sorgenfreyových přímek je úplně regulární prostor, není normální a je jemnější než $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Na rozdíl od T_1-prostorů neexistuje nejhrubší T_i-prostor pro zbývající i (pro $i = 0$ už na dvoubodovém prostoru, pro ostatní i na spočetném prostoru). Sestrojte příklady.
4. Podprostory $[0, 1]$ a $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ reálných čísel jsou maximální Hausdorffovy prostory ve smyslu, že žádná ostře hrubší topologie na nich není Hausdorffova (viz poznámky pro obecnější tvrzení).

Příklady normálních a nenormálních prostorů

- Sorgenfreyova přímka S je normální, protože je GO prostorem. Součin $S \times S$ normální není. [*Návod*: $S \times S$ je separabilní prostor a podle tvrzení o určení spojitých funkcí na husté množině je spojitých zobrazení na $S \times S$ nejvýše tolik, kolik je reálných funkcí na spočetné množině, tedy 2^ω. Nechť je $S \times S$ normální prostor. V součinu $S \times S$ je druhá diagonála $D = \{(x, -x); x \in S\}$ diskrétním uzavřeným podprostorem. Podle Urysonovy věty je spojitých reálných funkcí na $S \times S$ aspoň tolik, kolik je reálných funkcí na D, kterých je $|\mathbb{R}^D| = 2^{(2^\omega)}$. To je spor.]
- Prostor $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální. [*Návod*: Nechť $A = \{\{x_\alpha\} \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha; x_\alpha = n\}| \le 1$ pro každé $n \ge 2\}$, $B = \{\{x_\alpha\} \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha; x_\alpha = n\}| \le 1$ pro každé $n \ge 3$ nebo $n = 1\}$. Množiny A, B jsou disjunktní uzavřené a nelze je oddělit.]
- Nechť X, Y jsou nekonečné prostory s jediným hromadným bodem x_0, y_0 resp., jehož okolí jsou doplňky konečných množin. Součin $X \times Y$ je normální (ukažte to). Pokud $|X| < |Y|$, není podprostor $X \times Y \setminus (x_0, y_0)$ normální. [*Návod*: Množiny $\{(x_0, y)\}_y$, $\{(x, y_0)\}_x$ nejdou oddělit.]

Příklady normálních a nenormálních prostorů

- Sorgenfreyova přímka S je normální, protože je GO prostorem. Součin $S \times S$ normální není.
  [*Návod*: $S \times S$ je separabilní prostor a podle tvrzení o určení spojitých funkcí na husté množině je spojitých zobrazení na $S \times S$ nejvýše tolik, kolik je reálných funkcí na spočetné množině, tedy 2^ω. Nechť je $S \times S$ normální prostor. V součinu $S \times S$ je druhá diagonála $D = \{(x, -x); x \in S\}$ diskrétním uzavřeným podprostorem. Podle Urysonovy věty je spojitých reálných funkcí na $S \times S$ aspoň tolik, kolik je reálných funkcí na D, kterých je $|\mathbb{R}^D| = 2^{(2^\omega)}$. To je spor.]
- Prostor $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální.
  [*Návod*: Nechť $A = \{\{x_\alpha\} \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha; x_\alpha = n\}| \leq 1 \text{ pro každé } n \geq 2\}$, $B = \{\{x_\alpha\} \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha; x_\alpha = n\}| \leq 1 \text{ pro každé } n \geq 3 \text{ nebo } n = 1\}$. Množiny A, B jsou disjunktní uzavřené a nelze je oddělit.]
- Nechť X, Y jsou nekonečné prostory s jediným hromadným bodem x_0, y_0 resp., jehož okolí jsou doplňky konečných množin. Součin $X \times Y$ je normální (ukažte to). Pokud $|X| < |Y|$, není podprostor $X \times Y \setminus (x_0, y_0)$ normální.
  [*Návod*: Množiny $\{(x_0, y)\}_y$, $\{(x, y_0)\}_x$ nejdou oddělit.]

Příklady normálních a nenormálních prostorů

- Sorgenfreyova přímka S je normální, protože je GO prostorem. Součin $S \times S$ normální není.
  [*Návod*: $S \times S$ je separabilní prostor a podle tvrzení o určení spojitých funkcí na husté množině je spojitých zobrazení na $S \times S$ nejvýše tolik, kolik je reálných funkcí na spočetné množině, tedy 2^ω. Nechť je $S \times S$ normální prostor. V součinu $S \times S$ je druhá diagonála $D = \{(x, -x); x \in S\}$ diskrétním uzavřeným podprostorem. Podle Urysonovy věty je spojitých reálných funkcí na $S \times S$ aspoň tolik, kolik je reálných funkcí na D, kterých je $|\mathbb{R}^D| = 2^{(2^\omega)}$. To je spor.]
- Prostor $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální.
  [*Návod*: Nechť $A = \{\{x_\alpha\} \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha; x_\alpha = n\}| \leq 1 \text{ pro každé } n \geq 2\}$, $B = \{\{x_\alpha\} \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha; x_\alpha = n\}| \leq 1 \text{ pro každé } n \geq 3 \text{ nebo } n = 1\}$. Množiny A, B jsou disjunktní uzavřené a nelze je oddělit.]
- Nechť X, Y jsou nekonečné prostory s jediným hromadným bodem x_0, y_0 resp., jehož okolí jsou doplňky konečných množin. Součin $X \times Y$ je normální (ukažte to). Pokud $|X| < |Y|$, není podprostor $X \times Y \setminus (x_0, y_0)$ normální.
  [*Návod*: Množiny $\{(x_0, y)\}_y$, $\{(x, y_0)\}_x$ nejdou oddělit.]