2. KONSTRUKCE

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Úplný svaz topologií)

Množina všech topologií na dané množině tvoří úplný svaz.

Důkaz.

Množina $\mathcal{T}(X)$ má nejmenší a největší prvek (diskrétní a indiskrétní topologii). Zbývá ukázat existenci např. suprema pro neprázdný soubor $\{\mathcal{G}_a\}_A$ topologií na množině X. Je však lehké ukázat, že $\bigcap_A \mathcal{G}_a$ je topologie na X a tedy je to hledané supremum. $\square$

TVRZENÍ (Spojitost a suprema, infima)

Je-li f spojité zobrazení $(X, \mathcal{G}_a) \to (Y, \mathcal{H}_a)$ pro každé $a \in A$, pak je f spojité i jako zobrazení $(X, \sup_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \sup_A \mathcal{H}_a)$ a $(X, \inf_A \mathcal{G}_a) \to (Y, \inf_A \mathcal{H}_a)$..

Důkaz.

Víme, že $f^{-1}(\mathcal{H}_a) \subset \mathcal{G}_a$ pro každé $a \in A$. Pro supremum použijeme jeho popis z předchozího důkazu. Má se tedy dokázat,že $f^{-1}(\bigcap_A \mathcal{H}_a) \subset \bigcap_A \mathcal{G}_a$, což je zřejmé. Infimum topologií je popsáno ve cvičeních. Protože pro ověření spojitosti stačí uvažovat vzory z otevřené subbáze stačí pro náš důkaz ukázat, že $f^{-1}(\bigcup_A \mathcal{H}_a) \subset \bigcup_A \mathcal{G}_a$, což je opět zřejmé. $\square$

TVRZENÍ (Slabá topologie)

Nechť X je množina, $\{Y_a\}_A$ je soubor topologických prostorů a pro každé $a \in A$ je dáno zobrazení $f_a : X \to Y_a$. Pak existuje nejhrubší topologie $\mathcal{G}$ na X taková, že všechna zobrazení $f_a : (X, \mathcal{G}) \to Y_a$ jsou spojitá.

Důkaz.

Nechť $\mathbb{G}$ je množina všech topologií na X, pro která jsou všechna zobrazení f_a spojitá. Podle předchozí věty je pro každé $a \in A$ i zobrazení $f_a : \sup \mathbb{G} \to Y_a$ spojité. Tedy je $\sup \mathbb{G}$ největším prvkem množiny $\mathbb{G}$ a je hledanou topologií $\mathcal{G}$. □

TVRZENÍ (Bezbodová charakterizace slabé topologie)

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní pro soubor $f_a : X \to Y_a, a \in A$, mezi topologickými prostory:

1. *Topologický prostor X je slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$.*
2. *Je-li Z topologický prostor a $g : Z \to X$, pak zobrazení g je spojité právě když každé složení $f_a\, g, a \in A$, je spojité.*

Důkaz.

Nechť je X slabě vytvořen souborem $f_a : X \to Y_a, a \in A$ a pro $g : Z \to X$ jsou všechna složení $f_a\, g$ spojitá. Zobrazení je spojité, pokud vzory z otevřené subbáze $\{f_a^{-1}(G); G \in \mathcal{G}_a, a \in A\}$ topologie na X jsou otevřené v Z. Ale $g^{-1}(f_a^{-1}(G)) = (f_a\, g)^{-1}(G)$ a posledně uvedená množina je otevřená.
Nechť má nyní topologie na X druhou uvedenou vlastnost. Zvolíme nejdříve $Z = X, g = 1_X$. Pak g je spojité a tedy i všechna zobrazení $f_a\, g = f_a$ jsou spojitá. Zbývá ukázat, že X má nejhrubší topologii, při níž jsou všechna f_a spojitá. Pro to stačí zvolit za Z množinu X s topologií takovou, že všechna zobrazení $f_a : Z \to Y_a$ jsou spojitá. Podle naší vlastnosti je zobrazení $1_X : Z \to X$ spojité a tedy je Z jemnější než X. $\square$

TVRZENÍ (Vnoření do součinu)

Prostor X lze vnořit do součinu $\prod_A Y_a$ topologických prostorů právě když platí

1. *Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje spojité zobrazení $f : X \to Y_a$ pro nějaké $a \in A$ tak, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
2. *Pro každou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje konečně mnoho spojitých zobrazení $f_i : X \to Y_{a_i}, i \leq n$, a otevřené množiny G_i v $Y_{a_i}, i \leq n$, takové, že $f_i(x) \in G_i, i \leq n$ a $F \cap \bigcap_{i \leq n} f_i^{-1}(G_i) = \emptyset$.*

Důkaz.

Vezměme množinu $\mathcal{F}$ všech spojitých zobrazení z X do prostorů Y_a, $a \in A$. První podmínka je ekvivalentní injektivitě diagonálního zobrazení $\Delta\{$ a druhá podmínka je ekvivalentní tomu, že množina $\mathcal{F}$ slabě vytváří topologii prostoru X. Nyní stačí použít předchozí tvrzení. $\square$

TVRZENÍ (Popis silné topologie)

Jsou-li $\mathcal{G}_a$ topologie prostorů Y_a, pak silná topologie na X vytvořená souborem $f_a : Y_a \to X, a \in A$ je rovna

$$\{G \subset X; f_a^{-1}(G) \in \mathcal{G}_a, \forall a \in A\}.$$

Důkaz.

Stačí ověřit, že uvedený soubor podmnožin v X splňuje axiómy topologie, což je snadné. Je to největší možná podmnožina $\exp(X)$, při níž jsou všechna zobrazení f_a spojitá. $\square$

TVRZENÍ (Speciální kvocienty)

Každá spojitá surjekce, která je otevřená nebo uzavřená, je kvocientová.

Důkaz.

Nechť $f : X \to Y$ je spojitá otevřená surjekce G je podmnožina Y, jejíž vzor v X je otevřený. Máme dokázat, že G je otevřená množina. Protože $f^{-1}(G)$ je otevřená množina, je i její obraz $f(f^{-1}(G)) = G \cap f(X)$ otevřená množina v $f(X)$. Protože $f(X) = Y$, je důkaz hotov. Použitím uzavřených množin se dostane důkaz pro uzavřené surjekce. □

TVRZENÍ (Algebraické vlastnosti $C(X)$)

S uvedenými vlastnostmi jsou $C(X)$ a $C^*(X)$ algebra a svaz.

Důkaz.

Musíme dokázat, že součet, součin, supremum a infimum dvou spojitých funkcí z X do $\mathbb{R}$ je spojitý. Protože tyto operace provedené na omezené funkce opět dají omezenou funkci, bude tím věta dokázána. Označme $*$ některou z uvedených binárních operací na reálných číslech (tedy $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Podle definice této operace na funkcích vznikne $f * g$ složením $*$ se zobrazením $f \times g : X \times X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Protože poslední zobrazení je spojité, stačí si uvědomit, že všechny čtyři možnosti pro $*$ dávají spojité zobrazení $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tvrzení z 1.semestru Matematické analýzy). $\square$

Dědičné a součinové třídy

Nechť $\mathcal{C}$ je třída topologických prostorů uzavřená na homeomorfizmy. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\mathcal{C}$ je dědičná, součinová a obsahuje všechny indiskrétní prostory.
2. $\mathcal{C}$ je uzavřená na slabá vytváření.
3. $\mathcal{C}$ je bireflektivní, což znamená, že pro každý prostor X existuje hrubší prostor $\widetilde{X}$ z $\mathcal{C}$ s vlastností, že každé spojité zobrazení z X do prostoru z $\mathcal{C}$ je spojité i na $\widetilde{X}$.

Důkaz.

Pro ekvivalenci tvrzení 1 a 2 stačí použít poslední vlastnost ve cvičení a tvrzení z hlavního textu (za přidaný indiskrétní prostor se použije prostor s nosnou množinou stejnou jako zkoumaný prostor).
Platí-li pro $\mathcal{C}$ tvrzení 2, stačí pro důkaz 3 vzít za $\widetilde{X}$ prostor slabě vytvořený spojitými zobrazeními z X do prostorů z $\mathcal{C}$.
Platí-li pro $\mathcal{C}$ tvrzení 2 a X je slabě vytvořen zobrazeními do prostorů z $\mathcal{C}$, musí být $X = \widetilde{X}$ vzhledem k definici slabého vytváření. $\square$