2. KONSTRUKCE

Příklady

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Koule a sféra

Nejjednodušší vytváření nových topologických prostorů ze starých nám zajistí topologická suma. Ta funguje tak, že původní prostory pouze položíme vedle sebe. Pokud konstruujeme sumu κ kopií jednoho prostoru X, může být někdy vhodné dívat se na ni jako na součin daného prostoru X a diskrétního prostoru mohutnosti κ.

Jakým způsobem je možné schematicky si představovat součin?

Pro dva prostory můžeme uvažovat jakýsi zobecněný obdélník, ale pro více prostorů je již vhodnější dívat se na prvky součinu jako na zobrazení indexové množiny do příslušných prostorů. Bázové otevřené množiny vypadají pak jako tunely, které jsou na konečně mnoha souřadnicích zúženy nějakou otevřenou množinou v daném prostoru.

Koule a sféra

Nejjednodušší vytváření nových topologických prostorů ze starých nám zajistí topologická suma. Ta funguje tak, že původní prostory pouze položíme vedle sebe. Pokud konstruujeme sumu κ kopií jednoho prostoru X, může být někdy vhodné dívat se na ni jako na součin daného prostoru X a diskrétního prostoru mohutnosti κ.

Jakým způsobem je možné schematicky si představovat součin?

Pro dva prostory můžeme uvažovat jakýsi zobecněný obdélník, ale pro více prostorů je již vhodnější dívat se na prvky součinu jako na zobrazení indexové množiny do příslušných prostorů. Bázové otevřené množiny vypadají pak jako tunely, které jsou na konečně mnoha souřadnicích zúženy nějakou otevřenou množinou v daném prostoru.

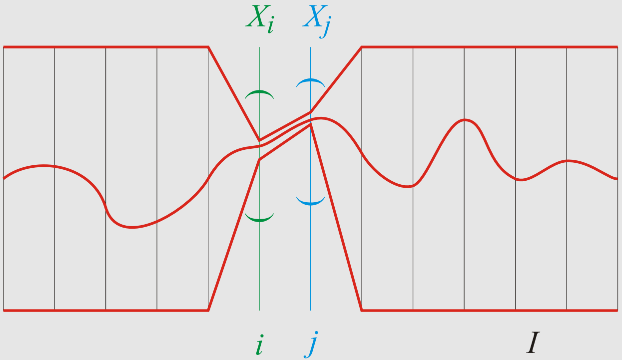
Koule a sféra

Nejjednodušší vytváření nových topologických prostorů ze starých nám zajistí topologická suma. Ta funguje tak, že původní prostory pouze položíme vedle sebe. Pokud konstruujeme sumu κ kopií jednoho prostoru X, může být někdy vhodné dívat se na ni jako na součin daného prostoru X a diskrétního prostoru mohutnosti κ.

Jakým způsobem je možné schematicky si představovat součin?

Pro dva prostory můžeme uvažovat jakýsi zobecněný obdélník, ale pro více prostorů je již vhodnější dívat se na prvky součinu jako na zobrazení indexové množiny do příslušných prostorů. Bázové otevřené množiny vypadají pak jako tunely, které jsou na konečně mnoha souřadnicích zúženy nějakou otevřenou množinou v daném prostoru.

Znázornění součinu $\prod_{i \in I} X_i$ a otevřených množin - “tunelů”.



Se sumou a součinem prostorů je možné provádět různé záměny. Například platí, že $(X \oplus Y)^2$ je homeomorfní s prostorem $X^2 \oplus 2 \times X \times Y \oplus Y^2$. Číslo 2 zde značí dvoubodový diskrétní prostor.

Jak lze zjednodušit například spočetnou mocninu prostoru $X \oplus X^\omega$? Postupujeme následovně:

$$(X \oplus X^\omega)^\omega = X^\omega \times (1 \oplus X^\omega)^\omega = (X^\omega \times (1 \oplus X^\omega))^\omega = (X^\omega \oplus X^\omega)^\omega = (2 \times X)^\omega = 2^\omega \times X^\omega.$$

Při úpravách jsme použili to, že $(X^\omega)^\omega = X^\omega$ a $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$.

Pokud $X \times Z$ je homeomorfní s prostorem $Y \times Z$, musí být již prostory X a Y homeomorfní? Zcela jistě ne. Zkuste třeba položit $X = [0,1]$ a $Y = Z = [0,1)$. Proč jsou součiny $X \times Z$ a $Y \times Z$ homeomorfní? Zkuste vymyslet několik dalších protipříkladů.

Se sumou a součinem prostorů je možné provádět různé záměny. Například platí, že $(X \oplus Y)^2$ je homeomorfní s prostorem $X^2 \oplus 2 \times X \times Y \oplus Y^2$. Číslo 2 zde značí dvoubodový diskrétní prostor.

Jak lze zjednodušit například spočetnou mocninu prostoru $X \oplus X^\omega$? Postupujeme následovně:

$$(X \oplus X^\omega)^\omega = X^\omega \times (1 \oplus X^\omega)^\omega = (X^\omega \times (1 \oplus X^\omega))^\omega = (X^\omega \oplus X^\omega)^\omega = (2 \times X)^\omega = 2^\omega \times X^\omega.$$

Při úpravách jsme použili to, že $(X^\omega)^\omega = X^\omega$ a $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$.

Pokud $X \times Z$ je homeomorfní s prostorem $Y \times Z$, musí být již prostory X a Y homeomorfní? Zcela jistě ne. Zkuste třeba položit $X = [0, 1]$ a $Y = Z = [0, 1)$. Proč jsou součiny $X \times Z$ a $Y \times Z$ homeomorfní? Zkuste vymyslet několik dalších protipříkladů.

Se sumou a součinem prostorů je možné provádět různé záměny. Například platí, že $(X \oplus Y)^2$ je homeomorfní s prostorem $X^2 \oplus 2 \times X \times Y \oplus Y^2$. Číslo 2 zde značí dvoubodový diskrétní prostor.

Jak lze zjednodušit například spočetnou mocninu prostoru $X \oplus X^\omega$? Postupujeme následovně:

$$(X \oplus X^\omega)^\omega = X^\omega \times (1 \oplus X^\omega)^\omega = (X^\omega \times (1 \oplus X^\omega))^\omega = (X^\omega \oplus X^\omega)^\omega = (2 \times X)^\omega = 2^\omega \times X^\omega.$$

Při úpravách jsme použili to, že $(X^\omega)^\omega = X^\omega$ a $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$.

Pokud $X \times Z$ je homeomorfní s prostorem $Y \times Z$, musí být již prostory X a Y homeomorfní? Zcela jistě ne. Zkuste třeba položit $X = [0, 1]$ a $Y = Z = [0, 1)$. Proč jsou součiny $X \times Z$ a $Y \times Z$ homeomorfní? Zkuste vymyslet několik dalších protipříkladů.

Se sumou a součinem prostorů je možné provádět různé záměny. Například platí, že $(X \oplus Y)^2$ je homeomorfní s prostorem $X^2 \oplus 2 \times X \times Y \oplus Y^2$. Číslo 2 zde značí dvoubodový diskrétní prostor.

Jak lze zjednodušit například spočetnou mocninu prostoru $X \oplus X^\omega$? Postupujeme následovně:

$$(X \oplus X^\omega)^\omega = X^\omega \times (1 \oplus X^\omega)^\omega = (X^\omega \times (1 \oplus X^\omega))^\omega = (X^\omega \oplus X^\omega)^\omega = (2 \times X)^\omega = 2^\omega \times X^\omega.$$

Při úpravách jsme použili to, že $(X^\omega)^\omega = X^\omega$ a $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$.

Pokud $X \times Z$ je homeomorfní s prostorem $Y \times Z$, musí být již prostory X a Y homeomorfní? Zcela jistě ne. Zkuste třeba položit $X = [0, 1]$ a $Y = Z = [0, 1)$. Proč jsou součiny $X \times Z$ a $Y \times Z$ homeomorfní? Zkuste vymyslet několik dalších protipříkladů.

Se sumou a součinem prostorů je možné provádět různé záměny. Například platí, že $(X \oplus Y)^2$ je homeomorfní s prostorem $X^2 \oplus 2 \times X \times Y \oplus Y^2$. Číslo 2 zde značí dvoubodový diskrétní prostor.

Jak lze zjednodušit například spočetnou mocninu prostoru $X \oplus X^\omega$? Postupujeme následovně:

$$(X \oplus X^\omega)^\omega = X^\omega \times (1 \oplus X^\omega)^\omega = (X^\omega \times (1 \oplus X^\omega))^\omega = (X^\omega \oplus X^\omega)^\omega = (2 \times X)^\omega = 2^\omega \times X^\omega.$$

Při úpravách jsme použili to, že $(X^\omega)^\omega = X^\omega$ a $X^\omega \times X^\omega = X^\omega$.

Pokud $X \times Z$ je homeomorfní s prostorem $Y \times Z$, musí být již prostory X a Y homeomorfní? Zcela jistě ne. Zkuste třeba položit $X = [0, 1]$ a $Y = Z = [0, 1)$. Proč jsou součiny $X \times Z$ a $Y \times Z$ homeomorfní? Zkuste vymyslet několik dalších protipříkladů.

Jeden z nejdůležitějších topologických prostorů – reálná přímka – má následující vlastnost (říká se jí souvislost). Kdykoliv máme $\mathbb{R}$ vyjádřeno jako topologickou sumu dvou prostorů, pak jeden z nich je prázdná množina. Zkuste si to sami dokázat. Použijte při tom fakt, že každá neprázdná omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Reálná přímka $\mathbb{R}$ splňuje i duální tvrzení. Kdykoliv je $\mathbb{R}$ homeomorfní součinu dvou prostorů, pak jeden z nich je jednobodový. Tohle je možné dokázat pomocí toho, že přímka je souvislý prostor, ale vynecháním libovolného bodu přestane být souvislá. Součin $X \times Y$, kde X a Y jsou souvislé a alespoň dvoubodové, má však tu vlastnost, že po odebrání libovolného bodu zůstane souvislý. Takže můžeme s trochou nadsázky říci, že topologický prostor $\mathbb{R}$ je prvočíslo.

Jeden z nejdůležitějších topologických prostorů – reálná přímka – má následující vlastnost (říká se jí souvislost). Kdykoliv máme $\mathbb{R}$ vyjádřeno jako topologickou sumu dvou prostorů, pak jeden z nich je prázdná množina. Zkuste si to sami dokázat. Použijte při tom fakt, že každá neprázdná omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Reálná přímka $\mathbb{R}$ splňuje i duální tvrzení. Kdykoliv je $\mathbb{R}$ homeomorfní součinu dvou prostorů, pak jeden z nich je jednobodový. Tohle je možné dokázat pomocí toho, že přímka je souvislý prostor, ale vynecháním libovolného bodu přestane být souvislá. Součin $X \times Y$, kde X a Y jsou souvislé a alespoň dvoubodové, má však tu vlastnost, že po odebrání libovolného bodu zůstane souvislý. Takže můžeme s trochou nadsázky říci, že topologický prostor $\mathbb{R}$ je prvočíslo.

Pomocí součinů se dají vytvořit z elementárních prostorů velice zajímavé příklady prostorů. Spočetná mocnina $\mathbb{N}$ je homeomorfní s iracionálními čísly, která přirozeně chápeme jako podprostor přímky s euklidovskou topologií. To je možné dokázat například pomocí řetězových zlomků, ale není to úplně jednoduché.

Nekonečné mocniny prostorů, které mají alespoň dva body, mají tu vlastnost, že žádný jejich bod není izolovaný.

Spočetný součin metrizovatelných prostorů je opět metrizovatelný prostor. Na druhou stranu nespočetný součin alespoň dvoubodového prostoru není nikdy metrizovatelný. Buď není totiž Hausdorffův nebo obsahuje body, které nemají spočetnou lokální bázi.

Na Hilbertově krychli $[0,1]^\omega$ si můžeme ukázat, jak podivně (vlastně překvapivě hezky) se nekonečné součiny chovají. U konečných mocnin $[0,1]^n$ je platí, že body na okraji (tj. body jejichž alespoň jedna složka je nula nebo jedna) mají vzhledem k celému prostoru jiné postavení než body uvnitř. V Hilbertově krychli však mají z topologického pohledu všechny body stejné postavení. Přesně řečeno to znamená, že pro libovolné dva body $x, y \in [0,1]^\omega$ existuje homeomorfismus Hilbertovy krychle na sebe, který převádí bod x na y.

Pomocí součinů se dají vytvořit z elementárních prostorů velice zajímavé příklady prostorů. Spočetná mocnina $\mathbb{N}$ je homeomorfní s iracionálními čísly, která přirozeně chápeme jako podprostor přímky s euklidovskou topologií. To je možné dokázat například pomocí řetězových zlomků, ale není to úplně jednoduché.

Nekonečné mocniny prostorů, které mají alespoň dva body, mají tu vlastnost, že žádný jejich bod není izolovaný.

Spočetný součin metrizovatelných prostorů je opět metrizovatelný prostor. Na druhou stranu nespočetný součin alespoň dvoubodového prostoru není nikdy metrizovatelný. Buď není totiž Hausdorffův nebo obsahuje body, které nemají spočetnou lokální bázi.

Na Hilbertově krychli $[0,1]^\omega$ si můžeme ukázat, jak podivně (vlastně překvapivě hezky) se nekonečné součiny chovají. U konečných mocnin $[0,1]^n$ je platí, že body na okraji (tj. body jejichž alespoň jedna složka je nula nebo jedna) mají vzhledem k celému prostoru jiné postavení než body uvnitř. V Hilbertově krychli však mají z topologického pohledu všechny body stejné postavení. Přesně řečeno to znamená, že pro libovolné dva body $x, y \in [0,1]^\omega$ existuje homeomorfismus Hilbertovy krychle na sebe, který převádí bod x na y.

Pomocí součinů se dají vytvořit z elementárních prostorů velice zajímavé příklady prostorů. Spočetná mocnina $\mathbb{N}$ je homeomorfní s iracionálními čísly, která přirozeně chápeme jako podprostor přímky s euklidovskou topologií. To je možné dokázat například pomocí řetězových zlomků, ale není to úplně jednoduché.

Nekonečné mocniny prostorů, které mají alespoň dva body, mají tu vlastnost, že žádný jejich bod není izolovaný.

Spočetný součin metrizovatelných prostorů je opět metrizovatelný prostor. Na druhou stranu nespočetný součin alespoň dvoubodového prostoru není nikdy metrizovatelný. Buď není totiž Hausdorffův nebo obsahuje body, které nemají spočetnou lokální bázi.

Na Hilbertově krychli $[0,1]^\omega$ si můžeme ukázat, jak podivně (vlastně překvapivě hezky) se nekonečné součiny chovají. U konečných mocnin $[0,1]^n$ je platí, že body na okraji (tj. body jejichž alespoň jedna složka je nula nebo jedna) mají vzhledem k celému prostoru jiné postavení než body uvnitř. V Hilbertově krychli však mají z topologického pohledu všechny body stejné postavení. Přesně řečeno to znamená, že pro libovolné dva body $x, y \in [0,1]^\omega$ existuje homeomorfismus Hilbertovy krychle na sebe, který převádí bod x na y.

Pomocí součinů se dají vytvořit z elementárních prostorů velice zajímavé příklady prostorů. Spočetná mocnina $\mathbb{N}$ je homeomorfní s iracionálními čísly, která přirozeně chápeme jako podprostor přímky s euklidovskou topologií. To je možné dokázat například pomocí řetězových zlomků, ale není to úplně jednoduché.

Nekonečné mocniny prostorů, které mají alespoň dva body, mají tu vlastnost, že žádný jejich bod není izolovaný.

Spočetný součin metrizovatelných prostorů je opět metrizovatelný prostor. Na druhou stranu nespočetný součin alespoň dvoubodového prostoru není nikdy metrizovatelný. Buď není totiž Hausdorffův nebo obsahuje body, které nemají spočetnou lokální bázi.

Na Hilbertově krychli $[0,1]^\omega$ si můžeme ukázat, jak podivně (vlastně překvapivě hezky) se nekonečné součiny chovají. U konečných mocnin $[0,1]^n$ je platí, že body na okraji (tj. body jejichž alespoň jedna složka je nula nebo jedna) mají vzhledem k celému prostoru jiné postavení než body uvnitř. V Hilbertově krychli však mají z topologického pohledu všechny body stejné postavení. Přesně řečeno to znamená, že pro libovolné dva body $x, y \in [0,1]^\omega$ existuje homeomorfismus Hilbertovy krychle na sebe, který převádí bod x na y.

Podprostory a kvocienty

Suma je sama o sobě velice jednoduchou konstrukcí. Proto se často používá ve spojení s kvocientem. Nejprve nějaké prostory topologicky sečteme a pak slepíme některé jejich body.

Když vezmeme prostor $\omega \times [0,1]$, který vznikne jako suma spočetně mnoha kopií uzavřených intervalů, a slepíme množinu $\omega \times \{0\}$ do jediného bodu, dostaneme prostor, který již není metrizovatelný. Ten bod, který vznikl slepením levých koncových bodů jednotlivých intervalů totiž nemá spočetnou lokální bázi.

Každý snadno nahlédne, že kružnice S je kvocientem uzavřeného intervalu. Těžší je si uvědomit, že součin $[0,1] \times [0,1]$ je kvocientem intervalu $[0,1]$. Kvocientovým zobrazením je známá Peanova křivka.

Jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, kde slepíme dva body 0 a 1? A jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, když slepíme celý interval $[0,1]$ do jednoho bodu?

Podprostory a kvocienty

Suma je sama o sobě velice jednoduchou konstrukcí. Proto se často používá ve spojení s kvocientem. Nejprve nějaké prostory topologicky sečteme a pak slepíme některé jejich body.

Když vezmeme prostor $\omega \times [0, 1]$, který vznikne jako suma spočetně mnoha kopií uzavřených intervalů, a slepíme množinu $\omega \times \{0\}$ do jediného bodu, dostaneme prostor, který již není metrizovatelný. Ten bod, který vznikl slepením levých koncových bodů jednotlivých intervalů totiž nemá spočetnou lokální bázi.

Každý snadno nahlédne, že kružnice S je kvocientem uzavřeného intervalu. Těžší je si uvědomit, že součin $[0, 1] \times [0, 1]$ je kvocientem intervalu $[0, 1]$. Kvocientovým zobrazením je známá Peanova křivka.

Jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, kde slepíme dva body 0 a 1? A jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, když slepíme celý interval $[0, 1]$ do jednoho bodu?

Podprostory a kvocienty

Suma je sama o sobě velice jednoduchou konstrukcí. Proto se často používá ve spojení s kvocientem. Nejprve nějaké prostory topologicky sečteme a pak slepíme některé jejich body.

Když vezmeme prostor $\omega \times [0,1]$, který vznikne jako suma spočetně mnoha kopií uzavřených intervalů, a slepíme množinu $\omega \times \{0\}$ do jediného bodu, dostaneme prostor, který již není metrizovatelný. Ten bod, který vznikl slepením levých koncových bodů jednotlivých intervalů totiž nemá spočetnou lokální bázi.

Každý snadno nahlédne, že kružnice S je kvocientem uzavřeného intervalu. Těžší je si uvědomit, že součin $[0,1] \times [0,1]$ je kvocientem intervalu $[0,1]$. Kvocientovým zobrazením je známá Peanova křivka.

Jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, kde slepíme dva body 0 a 1? A jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, když slepíme celý interval $[0,1]$ do jednoho bodu?

Podprostory a kvocienty

Suma je sama o sobě velice jednoduchou konstrukcí. Proto se často používá ve spojení s kvocientem. Nejprve nějaké prostory topologicky sečteme a pak slepíme některé jejich body.

Když vezmeme prostor $\omega \times [0,1]$, který vznikne jako suma spočetně mnoha kopií uzavřených intervalů, a slepíme množinu $\omega \times \{0\}$ do jediného bodu, dostaneme prostor, který již není metrizovatelný. Ten bod, který vznikl slepením levých koncových bodů jednotlivých intervalů totiž nemá spočetnou lokální bázi.

Každý snadno nahlédne, že kružnice S je kvocientem uzavřeného intervalu. Těžší je si uvědomit, že součin $[0,1] \times [0,1]$ je kvocientem intervalu $[0,1]$. Kvocientovým zobrazením je známá Peanova křivka.

Jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, kde slepíme dva body 0 a 1? A jak vypadá kvocient $\mathbb{R}$, když slepíme celý interval $[0,1]$ do jednoho bodu?

Izolované body bývají někdy na obtíž, proto si ukážeme způsob, jak se jich zbavit. Pro libovolný topologický prostor X si označme jako X' jeho podprostor, který sestává ze všech bodů prostoru X, které nejsou izolované. (Tato operace se nazývá Cantor-Bendixsonova derivace.) Dostali jsme již prostor, který nemá žádné izolované body? Obecně tomu tak být nemusí. Nic nám ale nebrání v tom, abychom provedli derivaci prostoru X'. Takto můžeme induktivně postupovat nejen přes všechna přirozená čísla, ale dokonce přes všechny ordinály. Na limitních krocích vezmeme samozřejmě průnik předchozího klesajícího řetězce podprostorů X. Tato posloupnost musí být od nějakého ordinálu konstantní. Nejmenší takový ordinál se nazývá Cantor-Bendixsonův rank.

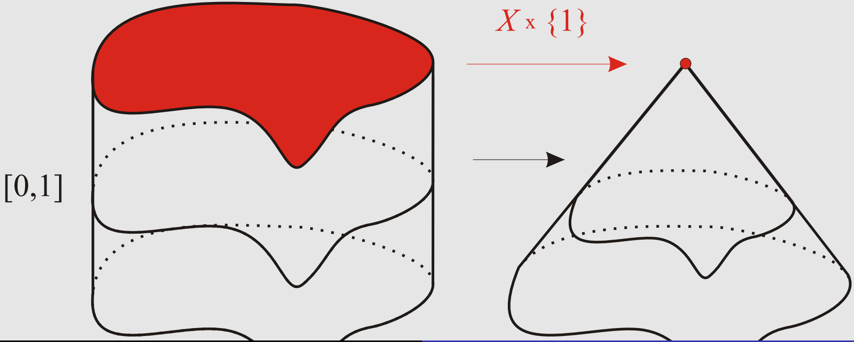
Podívejme se na prostor $X = \omega + 1$, což je vlastně konvergentní posloupnost. Pokusíme se ukázat, že všechny konečné mocniny tohoto prostoru jsou navzájem různé (tím samozřejmě myslíme, že nejsou homeomorfní). Se znalostí předchozího odstavce to již půjde lehce. Stačí totiž ukázat, že Cantor-Bendixsonův rank mocniny X^n je n+1.

Izolované body bývají někdy na obtíž, proto si ukážeme způsob, jak se jich zbavit. Pro libovolný topologický prostor X si označme jako X' jeho podprostor, který sestává ze všech bodů prostoru X, které nejsou izolované. (Tato operace se nazývá Cantor-Bendixsonova derivace.) Dostali jsme již prostor, který nemá žádné izolované body? Obecně tomu tak být nemusí. Nic nám ale nebrání v tom, abychom provedli derivaci prostoru X'. Takto můžeme induktivně postupovat nejen přes všechna přirozená čísla, ale dokonce přes všechny ordinály. Na limitních krocích vezmeme samozřejmě průnik předchozího klesajícího řetězce podprostorů X. Tato posloupnost musí být od nějakého ordinálu konstantní. Nejmenší takový ordinál se nazývá Cantor-Bendixsonův rank.

Podívejme se na prostor $X = \omega + 1$, což je vlastně konvergentní posloupnost. Pokusíme se ukázat, že všechny konečné mocniny tohoto prostoru jsou navzájem různé (tím samozřejmě myslíme, že nejsou homeomorfní). Se znalostí předchozího odstavce to již půjde lehce. Stačí totiž ukázat, že Cantor-Bendixsonův rank mocniny X^n je n+1.

Důležitou konstrukcí je takzvaný kužel nad daným prostorem X. Dostaneme ho jako kvocient součinu $X \times [0,1]$ podle uzavřené podmnožiny $X \times \{1\}$.

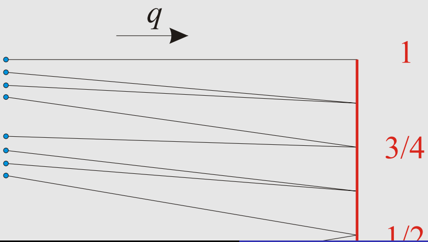
Kužel nad prostorem X: $X \times [0,1] \; / \; X \times \{1\}$



Může se zdát překvapivé, že uzavřený interval se dá získat jako kvocient Cantorova diskontinua $C = 2^\omega$. Kvocintové zobrazení $q\colon 2^\omega \to [0,1]$ definujeme předpisem $q(x_0, x_1, \dots) = \sum \frac{x_i}{2^{i+1}}$. Toto zobrazení tedy slepí vždy tu dvojici bodů Cantorova diskontinua, které odpovídají dvěma různým dyadickým zápisům téhož reálného čísla.

Kvocientové zobrazení q: $2^\omega \to [0,1]$

$$q(x_0, x_1, \dots) = \sum \frac{x_i}{2^{i+1}}$$



Z kvocientového zobrazení $q\colon C \to [0,1]$ se dá získat kvocientové zobrazení Cantorova diskontinuua na Hilbertovu krychli $[0,1]^\omega$. Postupujeme tak, že definujeme $r\colon C^\omega \to [0,1]^\omega$ formulkou $r(a_0, a_1, \dots) = (q(a_0), q(a_1), \dots)$. Tím se dostane kvocientové zobrazení. Zbývá si jen uvědomit, že $C^\omega = (2^\omega)^\omega = 2^\omega$.

Pokud se zabýváme nějakým topologickým prostorem, může být užitečné mít nějaké kriterium, které nám rozdělí jeho podmnožiny na hezké a ošklivé. Co kdybychom za hezké podmnožiny označili otevřené množiny a pak všechny takové, které vzniknou z již definovaných hezkých množin jako doplňky nebo spočetná sjednocení? Takhle bychom dostali takzvaný systém borelovských podmnožin daného prostoru. Je to vlastně nejmenší systém, který obsahuje všechny otevřené množiny a je uzavřený (pozor – slovo uzavřený zde neznamená doplněk otevřené) na spočetná sjednocení a na doplňky.

Existuje vůbec nějaká neborelovská podmnožina přímky? Ano, a je jich dokonce mnohem víc než těch borelovských. Nejprve je třeba si uvědomit, že otevřených podmnožin přímky je kontinuum (protože každá je sjednocením spočetně mnoha otevřených intervalů). Abychom dostali všechny borelovské množiny, musíme udělat ω_1 kroků, přičemž v každém kroku přidáme spočetná sjednocení a doplňky množin z předchozích kroků. V každém kroku máme jenom kontinuum mnoho množin a celkem je všech borelovských také jenom kontinuum.

Přidáme-li k předchozímu pozorování ještě fakt z teorie množin, který říká, že mohutnost $\mathcal{P}(X)$ je ostře větší než mohutnost množiny X, dostaneme, že neborelovských množin je více než borelovských.

Pokud se zabýváme nějakým topologickým prostorem, může být užitečné mít nějaké kriterium, které nám rozdělí jeho podmnožiny na hezké a ošklivé. Co kdybychom za hezké podmnožiny označili otevřené množiny a pak všechny takové, které vzniknou z již definovaných hezkých množin jako doplňky nebo spočetná sjednocení? Takhle bychom dostali takzvaný systém borelovských podmnožin daného prostoru. Je to vlastně nejmenší systém, který obsahuje všechny otevřené množiny a je uzavřený (pozor – slovo uzavřený zde neznamená doplňek otevřené) na spočetná sjednocení a na doplňky.

Existuje vůbec nějaká neborelovská podmnožina přímky? Ano, a je jich dokonce mnohem víc než těch borelovských. Nejprve je třeba si uvědomit, že otevřených podmnožin přímky je kontinuum (protože každá je sjednocením spočetně mnoha otevřených intervalů). Abychom dostali všechny borelovské množiny, musíme udělat ω_1 kroků, přičemž v každém kroku přidáme spočetná sjednocení a doplňky množin z předchozích kroků. V každém kroku máme jenom kontinuum mnoho množin a celkem je všech borelovských také jenom kontinuum.

Přidáme-li k předchozímu pozorování ještě fakt z teorie množin, který říká, že mohutnost $\mathcal{P}(X)$ je ostře větší než mohutnost množiny X, dostaneme, že neborelovských množin je více než borelovských.

Pokud se zabýváme nějakým topologickým prostorem, může být užitečné mít nějaké kriterium, které nám rozdělí jeho podmnožiny na hezké a ošklivé. Co kdybychom za hezké podmnožiny označili otevřené množiny a pak všechny takové, které vzniknou z již definovaných hezkých množin jako doplňky nebo spočetná sjednocení? Takhle bychom dostali takzvaný systém borelovských podmnožin daného prostoru. Je to vlastně nejmenší systém, který obsahuje všechny otevřené množiny a je uzavřený (pozor – slovo uzavřený zde neznamená doplněk otevřené) na spočetná sjednocení a na doplňky.

Existuje vůbec nějaká neborelovská podmnožina přímky? Ano, a je jich dokonce mnohem víc než těch borelovských. Nejprve je třeba si uvědomit, že otevřených podmnožin přímky je kontinuum (protože každá je sjednocením spočetně mnoha otevřených intervalů). Abychom dostali všechny borelovské množiny, musíme udělat ω_1 kroků, přičemž v každém kroku přidáme spočetná sjednocení a doplňky množin z předchozích kroků. V každém kroku máme jenom kontinuum mnoho množin a celkem je všech borelovských také jenom kontinuum.

Přidáme-li k předchozímu pozorování ještě fakt z teorie množin, který říká, že mohutnost $\mathcal{P}(X)$ je ostře větší než mohutnost množiny X, dostaneme, že neborelovských množin je více než borelovských.

Jiné konstrukce

Dalším možností jak vyrábět nové prostory ze známých je například inverzní limita. Předpokládáme, že máme zadané prostory X_i pro $i \in \omega$ a spojitá zobrazení $f_i : X_{i+1} \to X_i$. Inverzní limitou takového systému pak označujeme ten podprostor součinu $\prod X_i$, který je tvořen posloupnostmi (x_i) splňujícími $f_i(x_{i+1}) = x_i$. Vhodnou volbou výchozího systému lze konstruovat prostory s různými vlastnostmi.

Topologické prostory lze vytvářet i z některých jiných matematických struktur. Například pro libovolné komutativní těleso K a $n \in \omega$ se definuje Zariského topologie na K^n tím způsobem, že uzavřené množiny jsou právě nulové množiny ideálů obsažených v okruhu polynomů $K[x_1, \dots, x_n]$.

Jiné konstrukce

Dalším možností jak vyrábět nové prostory ze známých je například inverzní limita. Předpokládáme, že máme zadané prostory X_i pro $i \in \omega$ a spojitá zobrazení $f_i : X_{i+1} \to X_i$. Inverzní limitou takového systému pak označujeme ten podprostor součinu $\prod X_i$, který je tvořen posloupnostmi (x_i) splňujícími $f_i(x_{i+1}) = x_i$. Vhodnou volbou výchozího systému lze konstruovat prostory s různými vlastnostmi.

Topologické prostory lze vytvářet i z některých jiných matematických struktur. Například pro libovolné komutativní těleso K a $n \in \omega$ se definuje Zariského topologie na K^n tím způsobem, že uzavřené množiny jsou právě nulové množiny ideálů obsažených v okruhu polynomů $K[x_1, \ldots, x_n]$.