1. TOPOLOGIE A SPOJITOST

Poznámky

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

Metrický prostor

Metrika na množině X je zobrazení $d : X \times X \to [0, \infty)$ mající následující vlastnosti pro libovolná $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Poslední vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost. Pokud d splňuje v první podmínce jen implikaci $d(x, x) = 0$, nazývá se d pseudometrika.
Dvojice (X, d) se pak nazývá metrický prostor (nebo pseudometrický prostor, resp.).

Pro pseudometrický prostor (X, d), $a \in X$, $A, B \subset X$, se definuje:

- $d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}$, vzdálenost a od B;
- $d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$, vzdálenost A od B;
- $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$, průměr množiny $A \subset X$.

Množina A v (X, d) se nazývá omezená, má-li omezený průměr.
Je-li (X, d) pseudometrický prostor, indukuje d na množině X ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$. Na kvocientu $\widetilde{X}$ podle této ekvivalence je funkce $\widetilde{d}([x], [y]) = d(x, y)$ metrikou ($[x]$ značí množinu všech prvků ekvivalentních bodu x). Říkáme, že metrický prostor $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ je vytvořen pseudometrickým prostorem (X, d).

Metrický prostor

Metrika na množině X je zobrazení $d : X \times X \to [0, \infty)$ mající následující vlastnosti pro libovolná $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Poslední vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost. Pokud d splňuje v první podmínce jen implikaci $d(x, x) = 0$, nazývá se d pseudometrika.
Dvojice (X, d) se pak nazývá metrický prostor (nebo pseudometrický prostor, resp.).

Pro pseudometrický prostor (X, d), $a \in X$, $A, B \subset X$, se definuje:

- $d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}$, vzdálenost a od B;
- $d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$, vzdálenost A od B;
- $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$, průměr množiny $A \subset X$.

Množina A v (X, d) se nazývá omezená, má-li omezený průměr.
Je-li (X, d) pseudometrický prostor, indukuje d na množině X ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$. Na kvocientu $\widetilde{X}$ podle této ekvivalence je funkce $\widetilde{d}([x], [y]) = d(x, y)$ metrikou ($[x]$ značí množinu všech prvků ekvivalentních bodu x). Říkáme, že metrický prostor $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ je vytvořen pseudometrickým prostorem (X, d).

Metrický prostor

Metrika na množině X je zobrazení $d : X \times X \to [0, \infty)$ mající následující vlastnosti pro libovolná $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Poslední vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost. Pokud d splňuje v první podmínce jen implikaci $d(x, x) = 0$, nazývá se d pseudometrika.
Dvojice (X, d) se pak nazývá metrický prostor (nebo pseudometrický prostor, resp.).

Pro pseudometrický prostor (X, d), $a \in X$, $A, B \subset X$, se definuje:

- $d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}$, vzdálenost a od B;
- $d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$, vzdálenost A od B;
- $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$, průměr množiny $A \subset X$.

Množina A v (X, d) se nazývá omezená, má-li omezený průměr.
Je-li (X, d) pseudometrický prostor, indukuje d na množině X ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$. Na kvocientu $\widetilde{X}$ podle této ekvivalence je funkce $\widetilde{d}([x], [y]) = d(x, y)$ metrikou ($[x]$ značí množinu všech prvků ekvivalentních bodu x). Říkáme, že metrický prostor $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ je vytvořen pseudometrickým prostorem (X, d).

Metrický prostor

Metrika na množině X je zobrazení $d : X \times X \to [0, \infty)$ mající následující vlastnosti pro libovolná $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Poslední vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost. Pokud d splňuje v první podmínce jen implikaci $d(x, x) = 0$, nazývá se d pseudometrika.
Dvojice (X, d) se pak nazývá metrický prostor (nebo pseudometrický prostor, resp.).

Pro pseudometrický prostor (X, d), $a \in X$, $A, B \subset X$, se definuje:

- $d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}$, vzdálenost a od B;
- $d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$, vzdálenost A od B;
- $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$, průměr množiny $A \subset X$.

Množina A v (X, d) se nazývá omezená, má-li omezený průměr.
Je-li (X, d) pseudometrický prostor, indukuje d na množině X ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$. Na kvocientu $\widetilde{X}$ podle této ekvivalence je funkce $\widetilde{d}([x], [y]) = d(x, y)$ metrikou ($[x]$ značí množinu všech prvků ekvivalentních bodu x). Říkáme, že metrický prostor $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ je vytvořen pseudometrickým prostorem (X, d).

Metrický prostor

Metrika na množině X je zobrazení $d : X \times X \to [0, \infty)$ mající následující vlastnosti pro libovolná $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) = 0$ právě když $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Poslední vlastnost se nazývá trojúhelníková nerovnost. Pokud d splňuje v první podmínce jen implikaci $d(x, x) = 0$, nazývá se d pseudometrika.
Dvojice (X, d) se pak nazývá metrický prostor (nebo pseudometrický prostor, resp.).

Pro pseudometrický prostor (X, d), $a \in X$, $A, B \subset X$, se definuje:

- $d(a, B) = \inf\{d(a, b); b \in B\}$, vzdálenost a od B;
- $d(A, B) = \inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\}$, vzdálenost A od B;
- $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, b); a, b \in A\}$, průměr množiny $A \subset X$.

Množina A v (X, d) se nazývá omezená, má-li omezený průměr.
Je-li (X, d) pseudometrický prostor, indukuje d na množině X ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$. Na kvocientu $\widetilde{X}$ podle této ekvivalence je funkce $\widetilde{d}([x], [y]) = d(x, y)$ metrikou ($[x]$ značí množinu všech prvků ekvivalentních bodu x). Říkáme, že metrický prostor $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ je vytvořen pseudometrickým prostorem (X, d).

Uspořádaná množina

Uspořádaná množina je dvojice $(X, <)$, kde X je množina a $<$ je relace na X (tj. podmnožina $X \times X$) mající vlastnosti:

1. je tranzitivní, tj. je-li $x < y, y < z$, je $x < z$;
2. je-li $x \neq y$ pro $x, y \in X$, není současně $x < y, y < x$.

Relace $<$ se pak nazývá uspořádání.

Má-li uspořádání $<$ navíc vlastnost:
pro každé dva body $x, y \in X$ nastane některá z možností $x = y, x < y, y < x$, nazývá se relace lineární uspořádání (někdy se říká i *monotónní uspořádání*) a dvojice$(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina.

Symbolem $x \leq y$ se pak značí situace, že buď $x = y$ nebo $x < y$. Vztah $x < y$ však nevylučuje možnost $x = y$ (např. se často definuje pro podmnožiny $A, B \subset Y$ relace $A < B$ jestliže $A \subset B$). Symbol $x < y$ je ekvivalentní se symbolem $y > x$. Symbol $x \lneqq y$ značí $x < y$ a $x \neq y$.
Prvek h uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá horní mez podmnožiny $A \subset X$, jestliže $a \leq h$ pro každé $a \in A$. Zřejmým způsobem se definuje dolní mez množiny. Množina A se nazývá shora (nebo zdola) omezená, má-li horní mez (nebo dolní mez, resp.). Má-li A horní i dolní mez, nazývá se omezená.
Nejmenší horní mez množiny A, pokud existuje, se nazývá supremum množiny A a značí se sup A. Infimum (inf A) je největší dolní mez množiny A.

$\Rightarrow$

Uspořádaná množina

Uspořádaná množina je dvojice $(X, <)$, kde X je množina a $<$ je relace na X (tj. podmnožina $X \times X$) mající vlastnosti:

1. je tranzitivní, tj. je-li $x < y, y < z$, je $x < z$;
2. je-li $x \neq y$ pro $x, y \in X$, není současně $x < y, y < x$.

Relace $<$ se pak nazývá uspořádání.
Má-li uspořádání $<$ navíc vlastnost:
pro každé dva body $x, y \in X$ nastane některá z možností $x = y, x < y, y < x$, nazývá se relace lineární uspořádání (někdy se říká i *monotónní uspořádání*) a dvojice$(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina.

Symbolem $x \leq y$ se pak značí situace, že buď $x = y$ nebo $x < y$. Vztah $x < y$ však nevylučuje možnost $x = y$ (např. se často definuje pro podmnožiny $A, B \subset Y$ relace $A < B$ jestliže $A \subset B$). Symbol $x < y$ je ekvivalentní se symbolem $y > x$. Symbol $x \lneqq y$ značí $x < y$ a $x \neq y$.
Prvek h uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá horní mez podmnožiny $A \subset X$, jestliže $a \leq h$ pro každé $a \in A$. Zřejmým způsobem se definuje dolní mez množiny. Množina A se nazývá shora (nebo zdola) omezená, má-li horní mez (nebo dolní mez, resp.). Má-li A horní i dolní mez, nazývá se omezená.
Nejmenší horní mez množiny A, pokud existuje, se nazývá supremum množiny A a značí se sup A. Infimum (inf A) je největší dolní mez množiny A.

$\Rightarrow$

Uspořádaná množina

Uspořádaná množina je dvojice $(X, <)$, kde X je množina a $<$ je relace na X (tj. podmnožina $X \times X$) mající vlastnosti:

1. je tranzitivní, tj. je-li $x < y, y < z$, je $x < z$;
2. je-li $x \neq y$ pro $x, y \in X$, není současně $x < y, y < x$.

Relace $<$ se pak nazývá uspořádání.
Má-li uspořádání $<$ navíc vlastnost:
pro každé dva body $x, y \in X$ nastane některá z možností $x = y, x < y, y < x$, nazývá se relace lineární uspořádání (někdy se říká i *monotónní uspořádání*) a dvojice$(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina.

Symbolem $x \leq y$ se pak značí situace, že buď $x = y$ nebo $x < y$. Vztah $x < y$ však nevylučuje možnost $x = y$ (např. se často definuje pro podmnožiny $A, B \subset Y$ relace $A < B$ jestliže $A \subset B$). Symbol $x < y$ je ekvivalentní se symbolem $y > x$. Symbol $x \lneqq y$ značí $x < y$ a $x \neq y$.

Prvek h uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá horní mez podmnožiny $A \subset X$, jestliže $a \leq h$ pro každé $a \in A$. Zřejmým způsobem se definuje dolní mez množiny. Množina A se nazývá shora (nebo zdola) omezená, má-li horní mez (nebo dolní mez, resp.). Má-li A horní i dolní mez, nazývá se omezená.
Nejmenší horní mez množiny A, pokud existuje, se nazývá supremum množiny A a značí se $\sup A$. Infimum ($\inf A$) je největší dolní mez množiny A.

$\Rightarrow$

Uspořádaná množina

Uspořádaná množina je dvojice $(X, <)$, kde X je množina a $<$ je relace na X (tj. podmnožina $X \times X$) mající vlastnosti:

1. je tranzitivní, tj. je-li $x < y, y < z$, je $x < z$;
2. je-li $x \neq y$ pro $x, y \in X$, není současně $x < y, y < x$.

Relace $<$ se pak nazývá uspořádání.
Má-li uspořádání $<$ navíc vlastnost:
pro každé dva body $x, y \in X$ nastane některá z možností $x = y, x < y, y < x$, nazývá se relace lineární uspořádání (někdy se říká i *monotónní uspořádání*) a dvojice$(X, <)$ je lineárně uspořádaná množina.

Symbolem $x \leq y$ se pak značí situace, že buď $x = y$ nebo $x < y$. Vztah $x < y$ však nevylučuje možnost $x = y$ (např. se často definuje pro podmnožiny $A, B \subset Y$ relace $A < B$ jestliže $A \subset B$). Symbol $x < y$ je ekvivalentní se symbolem $y > x$. Symbol $x \lneqq y$ značí $x < y$ a $x \neq y$.
Prvek h uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá horní mez podmnožiny $A \subset X$, jestliže $a \leq h$ pro každé $a \in A$. Zřejmým způsobem se definuje dolní mez množiny. Množina A se nazývá shora (nebo zdola) omezená, má-li horní mez (nebo dolní mez, resp.). Má-li A horní i dolní mez, nazývá se omezená.
Nejmenší horní mez množiny A, pokud existuje, se nazývá supremum množiny A a značí se $\sup A$. Infimum $(\inf A)$ je největší dolní mez množiny A.

$\Rightarrow$

Podmnožina A lineární uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá konvexní, jestliže platí vztah $a < b < c,\ a, c \in A \Rightarrow b \in A$.

Pro $a, b \in X$ se následující konvexní množiny nazývají intervaly. V některých lineárně uspořádaných množinách existují konvexní množiny, které nemají žádný z následujících tvarů. Na $\mathbb{R}$ jsou však konvexní množiny a intervaly totéž.

Vlastní intervaly pro $a, b \in X, a \leq b$

uzavřené:	$[a, b] = \{c; a \leq c \leq b\}$
otevřené:	$(a, b) = \{c; a \leq c \leq b\}$
polootevřené, polouzavřené:	$[a, b) = \{c; a \leq c \lneqq b\}$
	$(a, b] = \{c; a \lneqq c \leq b\}$

Nevlastní intervaly pro $a, b \in X, a \leq b$

uzavřené:	$[a, \rightarrow) = [a, \rightarrow] = \{c; a \leq c\}, (\leftarrow, b] = [\leftarrow, b] = \{c; c \leq b\}$
otevřené:	$(a, \rightarrow) = (a, \rightarrow] = \{c; a \lneqq c\}, (\leftarrow, b) = [\leftarrow, b) = \{c; c \lneqq b\}$

Uvědomte si, že nevlastní intervaly nemusí být neomezené, např. interval $[a, \rightarrow)$ je neomezený právě když X nemá největší prvek. Má-li X největší prvek p, je pro $a \lneqq p$ $(a, \rightarrow)$ otevřeným intervalem obsahujícím p. Všechny vlastní intervaly jsou omezené.
Na $\mathbb{R}$ splývají omezené intervaly s vlastními a neomezené s nevlastními.

$\Rightarrow$

Podmnožina A lineární uspořádané množiny $(X,<)$ se nazývá konvexní, jestliže platí vztah $a<b<c,\ a,c\in A \Rightarrow b\in A$.

Pro $a,b\in X$ se následující konvexní množiny nazývají intervaly. V některých lineárně uspořádaných množinách existují konvexní množiny, které nemají žádný z následujících tvarů. Na $\mathbb{R}$ jsou však konvexní množiny a intervaly totéž.

Vlastní intervaly pro $a,b\in X$, $a\le b$

uzavřené:	$[a,b]=\{c;\ a\le c\le b\}$
otevřené:	$(a,b)=\{c;\ a\le c\le b\}$
poloootevřené, polouzavřené:	$[a,b)=\{c;\ a\le c\lneqq b\}$
	$(a,b]=\{c;\ a\lneqq c\le b\}$

Nevlastní intervaly pro $a,b\in X$, $a\le b$

uzavřené:	$[a,\to)=[a,\to]=\{c;\ a\le c\}$, $(\leftarrow,b]=[\leftarrow,b]=\{c;\ c\le b\}$
otevřené:	$(a,\to)=(a,\to]=\{c;\ a\lneqq c\}$, $(\leftarrow,b)=[\leftarrow,b)=\{c;\ c\lneqq b\}$

Uvědomte si, že nevlastní intervaly nemusí být neomezené, např. interval $[a,\to)$ je neomezený právě když X nemá největší prvek. Má-li X největší prvek p, je pro $a\lneqq p$ $(a,\to)$ otevřeným intervalem obsahujícím p. Všechny vlastní intervaly jsou omezené.
Na $\mathbb{R}$ splývají omezené intervaly s vlastními a neomezené s nevlastními.

$\Rightarrow$

Podmnožina A lineární uspořádané množiny $(X,<)$ se nazývá konvexní, jestliže platí vztah $a<b<c,\ a,c\in A \Rightarrow b\in A$.

Pro $a,b\in X$ se následující konvexní množiny nazývají intervaly. V některých lineárně uspořádaných množinách existují konvexní množiny, které nemají žádný z následujících tvarů. Na $\mathbb{R}$ jsou však konvexní množiny a intervaly totéž.

Vlastní intervaly pro $a,b\in X$, $a\le b$

uzavřené: $[a,b]=\{c;\, a\le c\le b\}$

otevřené: $(a,b)=\{c;\, a\le c\le b\}$

poloótevřené, polouzavřené: $\left\{\begin{array}{l} [a,b)=\{c;\, a\le c\lneqq b\} \\ (a,b]=\{c;\, a\lneqq c\le b\} \end{array}\right.$

Nevlastní intervaly pro $a,b\in X$, $a\le b$

uzavřené: $[a,\rightarrow)=[a,\rightarrow]=\{c;\, a\le c\}$, $(\leftarrow,b]=[\leftarrow,b]=\{c;\, c\le b\}$

otevřené: $(a,\rightarrow)=(a,\rightarrow]=\{c;\, a\lneqq c\}$, $(\leftarrow,b)=[\leftarrow,b)=\{c;\, c\lneqq b\}$

Uvědomte si, že nevlastní intervaly nemusí být neomezené, např. interval $[a,\rightarrow)$ je neomezený právě když X nemá největší prvek. Má-li X největší prvek p, je pro $a\lneqq p$ $(a,\rightarrow)$ otevřeným intervalem obsahujícím p. Všechny vlastní intervaly jsou omezené.
Na $\mathbb{R}$ splývají omezené intervaly s vlastními a neomezené s nevlastními.

Podmnožina A lineární uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá konvexní, jestliže platí vztah $a < b < c,\ a, c \in A \Rightarrow b \in A$.

Pro $a, b \in X$ se následující konvexní množiny nazývají intervaly. V některých lineárně uspořádaných množinách existují konvexní množiny, které nemají žádný z následujících tvarů. Na $\mathbb{R}$ jsou však konvexní množiny a intervaly totéž.

Vlastní intervaly pro $a, b \in X$, $a \leq b$

uzavřené: $[a, b] = \{c;\ a \leq c \leq b\}$

otevřené: $(a, b) = \{c;\ a \leq c \leq b\}$

poloótevřené, polouzavřené: $[a, b) = \{c;\ a \leq c \lneq b\}$, $(a, b] = \{c;\ a \lneq c \leq b\}$

Nevlastní intervaly pro $a, b \in X$, $a \leq b$

uzavřené: $[a, \rightarrow) = [a, \rightarrow] = \{c;\ a \leq c\}$, $(\leftarrow, b] = [\leftarrow, b] = \{c;\ c \leq b\}$

otevřené: $(a, \rightarrow) = (a, \rightarrow] = \{c;\ a \lneq c\}$, $(\leftarrow, b) = [\leftarrow, b) = \{c;\ c \lneq b\}$

Uvědomte si, že nevlastní intervaly nemusí být neomezené, např. interval $[a, \rightarrow)$ je neomezený právě když X nemá největší prvek. Má-li X největší prvek p, je pro $a \lneq p$ $(a, \rightarrow)$ otevřeným intervalem obsahujícím p. Všechny vlastní intervaly jsou omezené.
Na $\mathbb{R}$ splývají omezené intervaly s vlastními a neomezené s nevlastními.

Podmnožina A lineární uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá konvexní, jestliže platí vztah
$a < b < c,\ a, c \in A \Rightarrow b \in A.$
Pro $a, b \in X$ se následující konvexní množiny nazývají intervaly. V některých lineárně uspořádaných množinách existují konvexní množiny, které nemají žádný z následujících tvarů. Na $\mathbb{R}$ jsou však konvexní množiny a intervaly totéž.

Vlastní intervaly pro $a, b \in X, a \leq b$

uzavřené: $[a, b] = \{c; a \leq c \leq b\}$
otevřené: $(a, b) = \{c; a \leq c \leq b\}$
polootevřené, polouzavřené: $\begin{cases} [a, b) = \{c; a \leq c \lneqq b\} \\ (a, b] = \{c; a \lneqq c \leq b\} \end{cases}$

Nevlastní intervaly pro $a, b \in X, a \leq b$

uzavřené: $[a, \to) = [a, \to] = \{c; a \leq c\}$, $(\leftarrow, b] = [\leftarrow, b] = \{c; c \leq b\}$
otevřené: $(a, \to) = (a, \to] = \{c; a \lneqq c\}$, $(\leftarrow, b) = [\leftarrow, b) = \{c; c \lneqq b\}$

Uvědomte si, že nevlastní intervaly nemusí být neomezené, např. interval $[a, \to)$ je neomezený právě když X nemá největší prvek. Má-li X největší prvek p, je pro $a \lneqq p$ $(a, \to)$ otevřeným intervalem obsahujícím p. Všechny vlastní intervaly jsou omezené.
Na $\mathbb{R}$ splývají omezené intervaly s vlastními a neomezené s nevlastními.

Pro definici konvergence jsou potřebné následující pojmy.

DEFINICE (Definice usměrněného souboru)

Uspořádaná množina $(A, <)$ se nazývá **usměrněná**, jestliže každé dva prvky A mají horní mez.

Usměrněný soubor v množině X je zobrazení nějaké usměrněné množiny do X. Většinou se takový usměrněný soubor značí jako $\{x_a\}_A$, kde A je ona usměrněná množina a příslušné zobrazení je dáno rovnostmi $f(a) = x_a$ pro $a \in A$.

Usměrněný podsoubor usměrněného souboru $\{x_a\}_A$ je usměrněný soubor $\{x_b\}_B$ spolu se zobrazením $\varphi : B \to A$ zachovávajícím uspořádání, které zobrazuje B na konfinální část v A.

Přesněji se výše zavedený pojem usměrněnosti nazývá *nahoru usměrněná množina*. Pokud by se vyžadovala dolní mez, šlo by o *dolu usměrněnou množinu* (někdy též doprava, doleva usměrněná množina).

$\Longrightarrow$

DEFINICE (Definice usměrněného souboru)

Uspořádaná množina $(A, <)$ se nazývá usměrněná, jestliže každé dva prvky A mají horní mez.

Usměrněný soubor v množině X je zobrazení nějaké usměrněné množiny do X. Většinou se takový usměrněný soubor značí jako $\{x_a\}_A$, kde A je ona usměrněná množina a příslušné zobrazení je dáno rovnostmi $f(a) = x_a$ pro $a \in A$.

Usměrněný podsoubor usměrněného souboru $\{x_a\}_A$ je usměrněný soubor $\{x_b\}_B$ spolu se zobrazením $\varphi : B \to A$ zachovávajícím uspořádání, které zobrazuje B na konfinální část v A.

Přesněji se výše zavedený pojem usměrněnosti nazývá *nahoru usměrněná množina*. Pokud by se vyžadovala dolní mez, šlo by o *dolu usměrněnou množinu* (někdy též doprava, doleva usměrněná množina).

$\Rightarrow$

DEFINICE (Definice usměrněného souboru)

Uspořádaná množina $(A, <)$ se nazývá usměrněná, jestliže každé dva prvky A mají horní mez.

Usměrněný soubor v množině X je zobrazení nějaké usměrněné množiny do X. Většinou se takový usměrněný soubor značí jako $\{x_a\}_A$, kde A je ona usměrněná množina a příslušné zobrazení je dáno rovnostmi $f(a) = x_a$ pro $a \in A$.

Usměrněný podsoubor usměrněného souboru $\{x_a\}_A$ je usměrněný soubor $\{x_b\}_B$ spolu se zobrazením $\varphi : B \to A$ zachovávajícím uspořádání, které zobrazuje B na konfinální část v A.

Přesněji se výše zavedený pojem usměrněnosti nazývá *nahoru usměrněná množina*. Pokud by se vyžadovala dolní mez, šlo by o *dolu usměrněnou množinu* (někdy též doprava, doleva usměrněná množina).

$\Rightarrow$

DEFINICE (Definice usměrněného souboru)

Uspořádaná množina $(A, <)$ se nazývá usměrněná, jestliže každé dva prvky A mají horní mez.

Usměrněný soubor v množině X je zobrazení nějaké usměrněné množiny do X. Většinou se takový usměrněný soubor značí jako $\{x_a\}_A$, kde A je ona usměrněná množina a příslušné zobrazení je dáno rovnostmi $f(a) = x_a$ pro $a \in A$.

Usměrněný podsoubor usměrněného souboru $\{x_a\}_A$ je usměrněný soubor $\{x_b\}_B$ spolu se zobrazením $\varphi : B \to A$ zachovávajícím uspořádání, které zobrazuje B na konfinální část v A.

Přesněji se výše zavedený pojem usměrněnosti nazývá *nahoru usměrněná množina*. Pokud by se vyžadovala dolní mez, šlo by o *dolu usměrněnou množinu* (někdy též doprava, doleva usměrněná množina).

DEFINICE (Definice usměrněného souboru)

Uspořádaná množina $(A, <)$ se nazývá usměrněná, jestliže každé dva prvky A mají horní mez.

Usměrněný soubor v množině X je zobrazení nějaké usměrněné množiny do X. Většinou se takový usměrněný soubor značí jako $\{x_a\}_A$, kde A je ona usměrněná množina a příslušné zobrazení je dáno rovnostmi $f(a) = x_a$ pro $a \in A$.

Usměrněný podsoubor usměrněného souboru $\{x_a\}_A$ je usměrněný soubor $\{x_b\}_B$ spolu se zobrazením $\varphi : B \to A$ zachovávajícím uspořádání, které zobrazuje B na konfinální část v A.

Přesněji se výše zavedený pojem usměrněnosti nazývá *nahoru usměrněná množina*. Pokud by se vyžadovala dolní mez, šlo by o *dolu usměrněnou množinu* (někdy též doprava, doleva usměrněná množina).

$\Rightarrow$

Na závěr části o uspořádaných prostorech uvedeme několik základních vlastností dobře uspořádané množiny ω_1 spočetných ordinálních čísel.

Množina ω_1

1. Množina ω_1 je nespočetná, každá její spočetná podmnožina má v ω_1 supremum.
2. Supremum limitních ordinálů je vždy limitní ordinál.
3. Platí tzv. Fodorovovo lemma: *Je-li $f : \omega_1 \to \omega_1$ zobrazení s vlastností $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in \omega_1$, pak existuje nějaké $\beta < \omega_1$ takové, že $f^{-1}(\beta)$ je neomezená v ω_1.*
4. V předchozím lemmatu stačí, aby f bylo definováno jen na limitních ordinálech (dokonce stačí ještě méně).

Množina ω_1

1. Množina ω_1 je nespočetná, každá její spočetná podmnožina má v ω_1 supremum.
2. Supremum limitních ordinálů je vždy limitní ordinál.
3. Platí tzv. Fodorovovo lemma: *Je-li $f : \omega_1 \to \omega_1$ zobrazení s vlastností $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in \omega_1$, pak existuje nějaké $\beta < \omega_1$ takové, že $f^{-1}(\beta)$ je neomezená v ω_1.*
4. V předchozím lemmatu stačí, aby f bylo definováno jen na limitních ordinálech (dokonce stačí ještě méně).

Množina ω_1

1. Množina ω_1 je nespočetná, každá její spočetná podmnožina má v ω_1 supremum.
2. Supremum limitních ordinálů je vždy limitní ordinál.
3. Platí tzv. Fodorovovo lemma: *Je-li $f : \omega_1 \to \omega_1$ zobrazení s vlastností $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in \omega_1$, pak existuje nějaké $\beta < \omega_1$ takové, že $f^{-1}(\beta)$ je neomezená v ω_1.*
4. V předchozím lemmatu stačí, aby f bylo definováno jen na limitních ordinálech (dokonce stačí ještě méně).

Množina ω_1

1. Množina ω_1 je nespočetná, každá její spočetná podmnožina má v ω_1 supremum.
2. Supremum limitních ordinálů je vždy limitní ordinál.
3. Platí tzv. Fodorovovo lemma: *Je-li $f : \omega_1 \to \omega_1$ zobrazení s vlastností $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in \omega_1$, pak existuje nějaké $\beta < \omega_1$ takové, že $f^{-1}(\beta)$ je neomezená v ω_1.*
4. V předchozím lemmatu stačí, aby f bylo definováno jen na limitních ordinálech (dokonce stačí ještě méně).

Množina ω_1

1. Množina ω_1 je nespočetná, každá její spočetná podmnožina má v ω_1 supremum.
2. Supremum limitních ordinálů je vždy limitní ordinál.
3. Platí tzv. Fodorovovo lemma: *Je-li $f : \omega_1 \to \omega_1$ zobrazení s vlastností $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in \omega_1$, pak existuje nějaké $\beta < \omega_1$ takové, že $f^{-1}(\beta)$ je neomezená v ω_1.*
4. V předchozím lemmatu stačí, aby f bylo definováno jen na limitních ordinálech (dokonce stačí ještě méně).

Množina ω_1

1. Množina ω_1 je nespočetná, každá její spočetná podmnožina má v ω_1 supremum.
2. Supremum limitních ordinálů je vždy limitní ordinál.
3. Platí tzv. Fodorovovo lemma: *Je-li $f : \omega_1 \to \omega_1$ zobrazení s vlastností $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $\alpha \in \omega_1$, pak existuje nějaké $\beta < \omega_1$ takové, že $f^{-1}(\beta)$ je neomezená v ω_1.*
4. V předchozím lemmatu stačí, aby f bylo definováno jen na limitních ordinálech (dokonce stačí ještě méně).

Fodorovovo lemma se v angličtině často nazývá Pressing Down Lemma.

Uspořádanou množinu $[0, \rightarrow)$ reálných čísel získáme „vyplněním” mezer mezi přirozenými čísly intervaly. Přesněji, vezmeme součin $\mathbb{N} \times [0, 1]$ s lexikografickým uspořádáním (lexikografické uspořádání na součinu $X \times Y$ dvou lineárně uspořádaných množin je dáno vztahem $(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow$ buď $x \lneqq u$ nebo $x = u, y < v$.

Podobně lze získat tzv. dlouhou polopřímku:

DEFINICE (Dlouhá polopřímka)

Lexikografický součin $\omega_1 \times [0, 1]$ se nazývá dlouhá polopřímka.

Občas se místo „dlouhá polopřímka” říká „dlouhá přímka”. Někdy se však dlouhou přímkou myslí spojení dlouhé polopřímky s její duální množinou (s obráceným uspořádáním), tj. lexikografický součin $(\omega_1^* + \omega_1) \times [0, 1]$.

Uspořádanou množinu $[0, \rightarrow)$ reálných čísel získáme „vyplněním" mezer mezi přirozenými čísly intervaly. Přesněji, vezmeme součin $\mathbb{N} \times [0, 1]$ s lexikografickým uspořádáním (lexikografické uspořádání na součinu $X \times Y$ dvou lineárně uspořádaných množin je dáno vztahem $(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow$ buď $x \lneqq u$ nebo $x = u, y < v$.

Podobně lze získat tzv. dlouhou polopřímku:

DEFINICE (Dlouhá polopřímka)

Lexikografický součin $\omega_1 \times [0, 1]$ se nazývá dlouhá polopřímka.

Občas se místo „dlouhá polopřímka" říká „dlouhá přímka". Někdy se však dlouhou přímkou myslí spojení dlouhé polopřímky s její duální množinou (s obráceným uspořádáním), tj. lexikografický součin $(\omega_1^* + \omega_1) \times [0, 1]$.

Uspořádanou množinu $[0, \rightarrow)$ reálných čísel získáme „vyplněním” mezer mezi přirozenými čísly intervaly. Přesněji, vezmeme součin $\mathbb{N} \times [0, 1]$ s lexikografickým uspořádáním (lexikografické uspořádání na součinu $X \times Y$ dvou lineárně uspořádaných množin je dáno vztahem $(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow$ buď $x \lneqq u$ nebo $x = u, y < v$.

Podobně lze získat tzv. dlouhou polopřímku:

DEFINICE (Dlouhá polopřímka)

Lexikografický součin $\omega_1 \times [0, 1]$ se nazývá dlouhá polopřímka.

Občas se místo „dlouhá polopřímka” říká „dlouhá přímka”. Někdy se však dlouhou přímkou myslí spojení dlouhé polopřímky s její duální množinou (s obráceným uspořádáním), tj. lexikografický součin $(\omega_1^* + \omega_1) \times [0, 1]$.

Uspořádanou množinu $[0, \to)$ reálných čísel získáme „vyplněním" mezer mezi přirozenými čísly intervaly. Přesněji, vezmeme součin $\mathbb{N} \times [0, 1]$ s lexikografickým uspořádáním (lexikografické uspořádání na součinu $X \times Y$ dvou lineárně uspořádaných množin je dáno vztahem $(x, y) < (u, v) \Leftrightarrow$ buď $x \lneqq u$ nebo $x = u, y < v$.

Podobně lze získat tzv. dlouhou polopřímku:

DEFINICE (Dlouhá polopřímka)

Lexikografický součin $\omega_1 \times [0, 1]$ se nazývá dlouhá polopřímka.

Občas se místo „dlouhá polopřímka" říká „dlouhá přímka". Někdy se však dlouhou přímkou myslí spojení dlouhé polopřímky s její duální množinou (s obráceným uspořádáním), tj. lexikografický součin $(\omega_1^* + \omega_1) \times [0, 1]$.

DEFINICE (Filtr)

Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin množiny X se nazývá filtr na množině X, jestliže

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Je-li $A \subset B \subset X$ a $A \in \mathcal{F}$, je i $B \in \mathcal{F}$;
3. $\mathcal{F}$ je uzavřená na konečné průniky;

Filtr se nazývá volný, jestliže má prázdný průnik.

Uvědomte si, že z poslední vlastnosti vyplývá vztah $X \in \mathcal{F}$. Tento vztah (nebo neprázdnost soustavy $\mathcal{F}$) je nutné přidat, pokud se poslední vlastnost přeformuluje na $(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$.

DEFINICE (Báze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá bází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje nějaký prvek z $\mathcal{B}$.

DEFINICE (Subbáze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá subbází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje průnik konečně mnoha prvků z $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Filtr)

Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin množiny X se nazývá filtr na množině X, jestliže

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Je-li $A \subset B \subset X$ a $A \in \mathcal{F}$, je i $B \in \mathcal{F}$;
3. $\mathcal{F}$ je uzavřená na konečné průniky;

Filtr se nazývá volný, jestliže má prázdný průnik.

Uvědomte si, že z poslední vlastnosti vyplývá vztah $X \in \mathcal{F}$. Tento vztah (nebo neprázdnost soustavy $\mathcal{F}$) je nutné přidat, pokud se poslední vlastnost přeformuluje na ($A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$).

DEFINICE (Báze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá bází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje nějaký prvek z $\mathcal{B}$.

DEFINICE (Subbáze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá subbází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje průnik konečně mnoha prvků z $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Filtr)

Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin množiny X se nazývá filtr na množině X, jestliže

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Je-li $A \subset B \subset X$ a $A \in \mathcal{F}$, je i $B \in \mathcal{F}$;
3. $\mathcal{F}$ je uzavřená na konečné průniky;

Filtr se nazývá volný, jestliže má prázdný průnik.

Uvědomte si, že z poslední vlastnosti vyplývá vztah $X \in \mathcal{F}$. Tento vztah (nebo neprázdnost soustavy $\mathcal{F}$) je nutné přidat, pokud se poslední vlastnost přeformuluje na $(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$.

DEFINICE (Báze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá bází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje nějaký prvek z $\mathcal{B}$.

DEFINICE (Subbáze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá subbází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje průnik konečně mnoha prvků z $\mathcal{B}$.

DEFINICE (Filtr)

Soustava $\mathcal{F}$ podmnožin množiny X se nazývá filtr na množině X, jestliže

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. Je-li $A \subset B \subset X$ a $A \in \mathcal{F}$, je i $B \in \mathcal{F}$;
3. $\mathcal{F}$ je uzavřená na konečné průniky;

Filtr se nazývá volný, jestliže má prázdný průnik.

Uvědomte si, že z poslední vlastnosti vyplývá vztah $X \in \mathcal{F}$. Tento vztah (nebo neprázdnost soustavy $\mathcal{F}$) je nutné přidat, pokud se poslední vlastnost přeformuluje na $(A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F})$.

DEFINICE (Báze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá bází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje nějaký prvek z $\mathcal{B}$.

DEFINICE (Subbáze filtru)

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá subbází filtru $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek $\mathcal{F}$ obsahuje průnik konečně mnoha prvků z $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$

DEFINICE (Ultrafiltr)

Filtr $\mathcal{F}$ na množině X, který je maximálním prvkem v množině všech filtrů na množině X uspořádané inkluzí $\subset$, se nazývá ultrafiltr.

Je jednoduché dokázat, že filtr $\mathcal{F}$ na množině X je ultrafiltrem právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek:

1. Jestliže $A \subset X$ není disjunktní s žádnou množinou z $\mathcal{F}$, pak $A \in \mathcal{F}$.
2. Pro každou $A \subset X$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. Je-li $A \cup B \in \mathcal{F}$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $B \in \mathcal{F}$.

Z Kuratowského–Zornova lemmatu vyplývá, že každý filtr na množině X je obsažen v ultrafiltru na téže množině.
Pro každý bod $a \in X$ je soustava $\{A \subset X; a \in A\}$ ultrafiltrem na X. Jsou to jediné ultrafiltry s neprázdným průnikem.

DEFINICE (Ultrafiltr)

Filtr $\mathcal{F}$ na množině X, který je maximálním prvkem v množině všech filtrů na množině X uspořádané inkluzí $\subset$, se nazývá ultrafiltr.

Je jednoduché dokázat, že filtr $\mathcal{F}$ na množině X je ultrafiltrem právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek:

1. Jestliže $A \subset X$ není disjunktní s žádnou množinou z $\mathcal{F}$, pak $A \in \mathcal{F}$.
2. Pro každou $A \subset X$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. Je-li $A \cup B \in \mathcal{F}$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $B \in \mathcal{F}$.

Z Kuratowského–Zornova lemmatu vyplývá, že každý filtr na množině X je obsažen v ultrafiltru na téže množině.
Pro každý bod $a \in X$ je soustava $\{A \subset X; a \in A\}$ ultrafiltrem na X. Jsou to jediné ultrafiltry s neprázdným průnikem.

DEFINICE (Ultrafiltr)

Filtr $\mathcal{F}$ na množině X, který je maximálním prvkem v množině všech filtrů na množině X uspořádané inkluzí $\subset$, se nazývá ultrafiltr.

Je jednoduché dokázat, že filtr $\mathcal{F}$ na množině X je ultrafiltrem právě když platí jedna z následujících ekvivalentních podmínek:

1. Jestliže $A \subset X$ není disjunktní s žádnou množinou z $\mathcal{F}$, pak $A \in \mathcal{F}$.
2. Pro každou $A \subset X$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. Je-li $A \cup B \in \mathcal{F}$ je buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $B \in \mathcal{F}$.

Z Kuratowského–Zornova lemmatu vyplývá, že každý filtr na množině X je obsažen v ultrafiltru na téže množině.
Pro každý bod $a \in X$ je soustava $\{A \subset X; a \in A\}$ ultrafiltrem na X. Jsou to jediné ultrafiltry s neprázdným průnikem.

DEFINICE (Skoro disjunktní soustava množin)

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin množiny X se nazývá skoro disjunktní, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Ponejvíce budeme používat skoro disjunktní soustavy podmnožin spočetné množiny. Vezmete-li za $\mathcal{S}$ soubor $\{S_x; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, kde S_x je posloupnost racionálních čísel konvergující v $\mathbb{R}$ k x, dostanete skoro disjunktní soubor podmnožin spočetné množiny, který má mohutnost kontinua 2^ω.

Maximální skoro disjunktní soustavy

1. Každá skoro disjunktní soustava podmnožin množiny X je obsažena v maximální skoro disjunktní soustavě (maximální vzhledem k inkluzi $\subset$).
2. Skoro disjunktní soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X je maximální právě když každá nekonečná podmnožina X protíná některou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech.
3. Na spočetné množině existují maximální skoro disjunktní soustavy mohutnosti kontinua 2^ω.

Z angličtiny se pro maximální skoro disjunktní soustavy používá zkratka MAD (maximal almost disjoint).

DEFINICE (Skoro disjunktní soustava množin)

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin množiny X se nazývá skoro disjunktní, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Ponejvíce budeme používat skoro disjunktní soustavy podmnožin spočetné množiny. Vezmete-li za $\mathcal{S}$ soubor $\{S_x; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, kde S_x je posloupnost racionálních čísel konvergující v $\mathbb{R}$ k x, dostanete skoro disjunktní soubor podmnožin spočetné množiny, který má mohutnost kontinua 2^ω.

Maximální skoro disjunktní soustavy

1. Každá skoro disjunktní soustava podmnožin množiny X je obsažena v maximální skoro disjunktní soustavě (maximální vzhledem k inkluzi $\subset$).
2. Skoro disjunktní soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X je maximální právě když každá nekonečná podmnožina X protíná některou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech.
3. Na spočetné množině existují maximální skoro disjunktní soustavy mohutnosti kontinua 2^ω.

Z angličtiny se pro maximální skoro disjunktní soustavy používá zkratka MAD (maximal almost disjoint).

DEFINICE (Skoro disjunktní soustava množin)

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin množiny X se nazývá skoro disjunktní, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Ponejvíce budeme používat skoro disjunktní soustavy podmnožin spočetné množiny. Vezmete-li za $\mathcal{S}$ soubor $\{S_x; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, kde S_x je posloupnost racionálních čísel konvergující v $\mathbb{R}$ k x, dostanete skoro disjunktní soubor podmnožin spočetné množiny, který má mohutnost kontinua 2^ω.

Maximální skoro disjunktní soustavy

1. Každá skoro disjunktní soustava podmnožin množiny X je obsažena v maximální skoro disjunktní soustavě (maximální vzhledem k inkluzi $\subset$).
2. Skoro disjunktní soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X je maximální právě když každá nekonečná podmnožina X protíná některou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech.
3. Na spočetné množině existují maximální skoro disjunktní soustavy mohutnosti kontinua 2^ω.

Z angličtiny se pro maximální skoro disjunktní soustavy používá zkratka MAD (maximal almost disjoint).

DEFINICE (Skoro disjunktní soustava množin)

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin množiny X se nazývá skoro disjunktní, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Ponejvíce budeme používat skoro disjunktní soustavy podmnožin spočetné množiny. Vezmete-li za $\mathcal{S}$ soubor $\{S_x; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, kde S_x je posloupnost racionálních čísel konvergující v $\mathbb{R}$ k x, dostanete skoro disjunktní soubor podmnožin spočetné množiny, který má mohutnost kontinua 2^ω.

Maximální skoro disjunktní soustavy

1. Každá skoro disjunktní soustava podmnožin množiny X je obsažena v maximální skoro disjunktní soustavě (maximální vzhledem k inkluzi $\subset$).
2. Skoro disjunktní soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X je maximální právě když každá nekonečná podmnožina X protíná některou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech.
3. Na spočetné množině existují maximální skoro disjunktní soustavy mohutnosti kontinua 2^ω.

Z angličtiny se pro maximální skoro disjunktní soustavy používá zkratka MAD (maximal almost disjoint).

DEFINICE (Skoro disjunktní soustava množin)

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin množiny X se nazývá skoro disjunktní, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Ponejvíce budeme používat skoro disjunktní soustavy podmnožin spočetné množiny. Vezmete-li za $\mathcal{S}$ soubor $\{S_x; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, kde S_x je posloupnost racionálních čísel konvergující v $\mathbb{R}$ k x, dostanete skoro disjunktní soubor podmnožin spočetné množiny, který má mohutnost kontinua 2^ω.

Maximální skoro disjunktní soustavy

1. Každá skoro disjunktní soustava podmnožin množiny X je obsažena v maximální skoro disjunktní soustavě (maximální vzhledem k inkluzi $\subset$).
2. Skoro disjunktní soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X je maximální právě když každá nekonečná podmnožina X protíná některou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech.
3. Na spočetné množině existují maximální skoro disjunktní soustavy mohutnosti kontinua 2^ω.

Z angličtiny se pro maximální skoro disjunktní soustavy používá zkratka MAD (maximal almost disjoint).

DEFINICE (Skoro disjunktní soustava množin)

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin množiny X se nazývá skoro disjunktní, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Ponejvíce budeme používat skoro disjunktní soustavy podmnožin spočetné množiny. Vezmete-li za $\mathcal{S}$ soubor $\{S_x; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$, kde S_x je posloupnost racionálních čísel konvergující v $\mathbb{R}$ k x, dostanete skoro disjunktní soubor podmnožin spočetné množiny, který má mohutnost kontinua 2^ω.

Maximální skoro disjunktní soustavy

1. Každá skoro disjunktní soustava podmnožin množiny X je obsažena v maximální skoro disjunktní soustavě (maximální vzhledem k inkluzi $\subset$).
2. Skoro disjunktní soustava $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X je maximální právě když každá nekonečná podmnožina X protíná některou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech.
3. Na spočetné množině existují maximální skoro disjunktní soustavy mohutnosti kontinua 2^ω.

Z angličtiny se pro maximální skoro disjunktní soustavy používá zkratka MAD (maximal almost disjoint).

Později se vyskytnou situace, kdy bude výhodnější popsat vlastnost nebo topologii jiným druhem konvergence. Je-li $(A, <)$ uspořádaná množina, je $(A, <)$ usměrněná právě když je soubor $\{[a, \rightarrow); a \in A\}$ bází filtru na množině A. A víme, že báze filtru je usměrněný soubor vzhledem k obrácené inkluzi $\supset$. Dá se tedy očekávat, že konvergenci usměrněných souborů lze nějak přenést i na filtry.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafilter v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafiltr v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafiltr v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafilter v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafiltr v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafilter v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafilter v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

DEFINICE

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F}$ je filtr na X.

- Říkáme, že $\mathcal{F}$ konverguje k bodu $x \in X$, jestliže každé okolí bodu x náleží do $\mathcal{F}$.
- Říkáme, že $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, jestliže každé okolí bodu x protíná každý prvek z $\mathcal{F}$.

Zřejmě je $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ právě když $x \in \bigcap\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Vlastnosti konvergence filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Filtr $\{A \subset X; x \in A\}$ konverguje k x.
2. Jestliže $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x, pak každý větší filtr v X konverguje k x.
3. Průnik dvou filtrů konvergujících v X k bodu x také konverguje k x.

Vlastnosti hromadných bodů filtru

Nechť X je topologický prostor.

1. Každý ultrafilter v X konverguje ke svým hromadným bodům.
2. Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, existuje v X filtr obsahující $\mathcal{F}$, který k x konverguje.

Problém charakterizace topologie pomocí konvergence spočívá v charakterizaci posledního axiómu uzávěrů, totiž, že $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Množina A_1 všech limit usměrněných posloupností ležících v množině A sice je částí $\overline{A}$, ale nemusí to být celý uzávěr. Tuto operaci je nutné opakovat (tj. sestrojit $A_2 = (A_1)_1$, obecně $A_\alpha = (\bigcup\{A_\beta; \beta < \alpha\})_1$ pro ordinál α, a teprve po zastavení této operace (tj. když $A_{\alpha+1} = A_\alpha$) se dostane uzávěr množiny $A = A_\alpha$.

Podívejme se na uvedený příklad obecněji. Mějme zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ mající první tři vlastnosti uzávěru (podstatná pro konstrukci bude jen druhá vlastnost $A \subset u(A)$). Definujme transfinitní indukcí zobrazení $u_\alpha : \exp(X) \to \exp(X)$ pro libovolné ordinální číslo α:

$$u_0 = u\,, \quad u_\alpha(A) = u\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta(A)\Big)\,.$$

Zřejmě pro každé $A \subset X$ platí $u_\beta(A) \subset u_\alpha(A)$ jakmile $\beta \le \alpha$. Proto nejpozději pro $\kappa = |X|$ bude $u_\kappa(A) = u_\alpha(A)$ jakmile $\alpha \ge \kappa$ a $A \subset X$.
Definujme nyní zobrazení $v : \exp(X) \to \exp(X)$ rovností $v = u_\kappa$. Pak $v(v(A)) = v(A)$ pro každé $A \subset X$ a v po u zdědí i první tři vlastnosti uzávěru. Dostáváme následující tvrzení.

TVRZENÍ (Iterace uzávěru)

Jestliže zobrazení $u : exp(X) \to exp(X)$ splňuje první tři vlastnosti uzávěru, je popsaná funkce $v : exp(X) \to exp(X)$ uzávěrem topologie. Ve smyslu bodového uspořádání funkcí je to nejmenší uzávěr větší než zobrazení u.

Jako hezký příklad pro uvedené opakování slouží Baireovy funkce. Za A se vezmou všechny spojité reálné funkce definované na $\mathbb{R}$ nebo na nějakém omezeném intervalu a za konvergenci se vezmou bodové limity posloupností funkcí. Lebesgue dokázal, že pro všechna spočetná ordinální čísla jsou množiny A_α různé (na ω_1 se proces zastaví).

Podívejme se na uvedený příklad obecněji. Mějme zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ mající první tři vlastnosti uzávěru (podstatná pro konstrukci bude jen druhá vlastnost $A \subset u(A)$). Definujme transfinitní indukcí zobrazení $u_\alpha : \exp(X) \to \exp(X)$ pro libovolné ordinální číslo α:

$$u_0 = u\,, \quad u_\alpha(A) = u\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta(A)\Big)\,.$$

Zřejmě pro každé $A \subset X$ platí $u_\beta(A) \subset u_\alpha(A)$ jakmile $\beta \le \alpha$. Proto nejpozději pro $\kappa = |X|$ bude $u_\kappa(A) = u_\alpha(A)$ jakmile $\alpha \ge \kappa$ a $A \subset X$.
Definujme nyní zobrazení $v : \exp(X) \to \exp(X)$ rovností $v = u_\kappa$. Pak $v(v(A)) = v(A)$ pro každé $A \subset X$ a v po u zdědí i první tři vlastnosti uzávěru. Dostáváme následující tvrzení.

TVRZENÍ (Iterace uzávěru)

Jestliže zobrazení $u : exp(X) \to exp(X)$ splňuje první tři vlastnosti uzávěru, je popsaná funkce $v : exp(X) \to exp(X)$ uzávěrem topologie. Ve smyslu bodového uspořádání funkcí je to nejmenší uzávěr větší než zobrazení u.

Podívejme se na uvedený příklad obecněji. Mějme zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ mající první tři vlastnosti uzávěru (podstatná pro konstrukci bude jen druhá vlastnost $A \subset u(A)$). Definujme transfinitní indukcí zobrazení $u_\alpha : \exp(X) \to \exp(X)$ pro libovolné ordinální číslo α:

$$u_0 = u\,, \quad u_\alpha(A) = u\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta(A)\Big)\,.$$

Zřejmě pro každé $A \subset X$ platí $u_\beta(A) \subset u_\alpha(A)$ jakmile $\beta \leq \alpha$. Proto nejpozději pro $\kappa = |X|$ bude $u_\kappa(A) = u_\alpha(A)$ jakmile $\alpha \geq \kappa$ a $A \subset X$.

Definujme nyní zobrazení $v : \exp(X) \to \exp(X)$ rovností $v = u_\kappa$. Pak $v(v(A)) = v(A)$ pro každé $A \subset X$ a v po u zdědí i první tři vlastnosti uzávěru. Dostáváme následující tvrzení.

TVRZENÍ (Iterace uzávěru)

Jestliže zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ splňuje první tři vlastnosti uzávěru, je popsaná funkce $v : \exp(X) \to \exp(X)$ uzávěrem topologie. Ve smyslu bodového uspořádání funkcí je to nejmenší uzávěr větší než zobrazení u.

Zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ splňující první tři vlastnosti uzávěru se někdy nazývá Čechovým uzávěrem. Stejně jako v topologických prostorech vytváří tento zobecněný uzávěr charakterizující soustavy okolí bodů a konvergenci (nelze však charakterizovat pomocí systémů množin podobných otevřeným nebo uzavřeným množinám).

Podívejme se na uvedený příklad obecněji. Mějme zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ mající první tři vlastnosti uzávěru (podstatná pro konstrukci bude jen druhá vlastnost $A \subset u(A)$). Definujme transfinitní indukcí zobrazení $u_\alpha : \exp(X) \to \exp(X)$ pro libovolné ordinální číslo α:

$$u_0 = u\,, \quad u_\alpha(A) = u\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta(A)\Big)\,.$$

Zřejmě pro každé $A \subset X$ platí $u_\beta(A) \subset u_\alpha(A)$ jakmile $\beta \leq \alpha$. Proto nejpozději pro $\kappa = |X|$ bude $u_\kappa(A) = u_\alpha(A)$ jakmile $\alpha \geq \kappa$ a $A \subset X$.
Definujme nyní zobrazení $v : \exp(X) \to \exp(X)$ rovností $v = u_\kappa$. Pak $v(v(A)) = v(A)$ pro každé $A \subset X$ a v po u zdědí i první tři vlastnosti uzávěru. Dostáváme následující tvrzení.

TVRZENÍ (Iterace uzávěru)

Jestliže zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ splňuje první tři vlastnosti uzávěru, je popsaná funkce $v : \exp(X) \to \exp(X)$ uzávěrem topologie. Ve smyslu bodového uspořádání funkcí je to nejmenší uzávěr větší než zobrazení u.

Zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ splňující první tři vlastnosti uzávěru se někdy nazývá Čechovým uzávěrem. Stejně jako v topologických prostorech vytváří tento zobecněný uzávěr charakterizující soustavy okolí bodů a konvergenci (nelze však charakterizovat pomocí systémů množin podobných otevřeným nebo uzavřeným množinám).

Podívejme se na uvedený příklad obecněji. Mějme zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ mající první tři vlastnosti uzávěru (podstatná pro konstrukci bude jen druhá vlastnost $A \subset u(A)$). Definujme transfinitní indukcí zobrazení $u_\alpha : \exp(X) \to \exp(X)$ pro libovolné ordinální číslo α:

$$u_0 = u\,, \quad u_\alpha(A) = u\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta(A)\Big)\,.$$

Zřejmě pro každé $A \subset X$ platí $u_\beta(A) \subset u_\alpha(A)$ jakmile $\beta \leq \alpha$. Proto nejpozději pro $\kappa = |X|$ bude $u_\kappa(A) = u_\alpha(A)$ jakmile $\alpha \geq \kappa$ a $A \subset X$.
Definujme nyní zobrazení $v : \exp(X) \to \exp(X)$ rovností $v = u_\kappa$. Pak $v(v(A)) = v(A)$ pro každé $A \subset X$ a v po u zdědí i první tři vlastnosti uzávěru. Dostáváme následující tvrzení.

TVRZENÍ (Iterace uzávěru)

Jestliže zobrazení $u : exp(X) \to exp(X)$ splňuje první tři vlastnosti uzávěru, je popsaná funkce $v : exp(X) \to exp(X)$ uzávěrem topologie. Ve smyslu bodového uspořádání funkcí je to nejmenší uzávěr větší než zobrazení u.

Zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ splňující první tři vlastnosti uzávěru se někdy nazývá Čechovým uzávěrem. Stejně jako v topologických prostorech vytváří tento zobecněný uzávěr charakterizující soustavy okolí bodů a konvergenci (nelze však charakterizovat pomocí systémů množin podobných otevřeným nebo uzavřeným množinám).

Podívejme se na uvedený příklad obecněji. Mějme zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ mající první tři vlastnosti uzávěru (podstatná pro konstrukci bude jen druhá vlastnost $A \subset u(A)$). Definujme transfinitní indukcí zobrazení $u_\alpha : \exp(X) \to \exp(X)$ pro libovolné ordinální číslo α:

$$u_0 = u\,, \quad u_\alpha(A) = u\Big(\bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta(A)\Big)\,.$$

Zřejmě pro každé $A \subset X$ platí $u_\beta(A) \subset u_\alpha(A)$ jakmile $\beta \le \alpha$. Proto nejpozději pro $\kappa = |X|$ bude $u_\kappa(A) = u_\alpha(A)$ jakmile $\alpha \ge \kappa$ a $A \subset X$.
Definujme nyní zobrazení $v : \exp(X) \to \exp(X)$ rovností $v = u_\kappa$. Pak $v(v(A)) = v(A)$ pro každé $A \subset X$ a v po u zdědí i první tři vlastnosti uzávěru. Dostáváme následující tvrzení.

TVRZENÍ (Iterace uzávěru)

Jestliže zobrazení $u : exp(X) \to exp(X)$ splňuje první tři vlastnosti uzávěru, je popsaná funkce $v : exp(X) \to exp(X)$ uzávěrem topologie. Ve smyslu bodového uspořádání funkcí je to nejmenší uzávěr větší než zobrazení u.

Zobrazení $u : \exp(X) \to \exp(X)$ splňující první tři vlastnosti uzávěru se někdy nazývá Čechovým uzávěrem. Stejně jako v topologických prostorech vytváří tento zobecněný uzávěr charakterizující soustavy okolí bodů a konvergenci (nelze však charakterizovat pomocí systémů množin podobných otevřeným nebo uzavřeným množinám).

Spojitost je lokální vlastnost. Stačí dokazovat spojitost zobrazení v jednotlivých bodech nebo na malých množinách. Z reálných funkcí reálné proměnné si pamatujete, že stejnoměrnou spojitost nelze vyšetřovat po bodech nebo lokálně na malých okolích. Protože topologické prostory jsou definovány např. pomocí soustav okolí, které se mohou velmi lišit bod od bodu, nelze v topologických prostorech definovat stejnoměrnou spojitost. To je možné jen ve strukturách definovaných pomocí množin, které jsou v jistém smyslu veliké (viz kapitolu o uniformních prostorech).

Z reálné analýzy znáte situaci, kdy funkce je definovaná např. na $[0,1]$ hodnotou 0 a na zbylých reálných číslech Dirichletovou funkcí (hodnota 0 v iracionálních bodech, 1 v racionálních bodech). Tato funkce, chápaná jako funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá jen na otevřeném intervalu $(0,1)$. Jestliže se ale omezíme na interval $[0,1]$ jako na definiční obor této funkce, bude funkce spojitá na tomto uzavřeném intervalu. Tato situace může nastat i na obecných topologických prostorech a je tedy nutné rozlišovat spojitost na podmnožině definičního oboru a spojitost na zúžení definičního prostoru.

Na rozdíl od reálných funkcí reálné proměnné nemusí být inverzní zobrazení spojitého zobrazení spojité (např. identické zobrazení $(\mathbb{R},\mathcal{G}) \to (\mathbb{R},\mathcal{H})$, kde $\mathcal{G}$ je diskrétní topologie a $\mathcal{H}$ je obvyklá topologie na $\mathbb{R}$. Existují však důležité případy, kdy je u inverzního zobrazení spojitost zachována, např. u kompaktních množin – viz příslušnou kapitolu.

Spojitost je lokální vlastnost. Stačí dokazovat spojitost zobrazení v jednotlivých bodech nebo na malých množinách. Z reálných funkcí reálné proměnné si pamatujete, že stejnoměrnou spojitost nelze vyšetřovat po bodech nebo lokálně na malých okolích. Protože topologické prostory jsou definovány např. pomocí soustav okolí, které se mohou velmi lišit bod od bodu, nelze v topologických prostorech definovat stejnoměrnou spojitost. To je možné jen ve strukturách definovaných pomocí množin, které jsou v jistém smyslu veliké (viz kapitolu o uniformních prostorech).

Z reálné analýzy znáte situaci, kdy funkce je definovaná např. na $[0,1]$ hodnotou 0 a na zbylých reálných číslech Dirichletovou funkcí (hodnota 0 v iracionálních bodech, 1 v racionálních bodech). Tato funkce, chápaná jako funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá jen na otevřeném intervalu $(0,1)$. Jestliže se ale omezíme na interval $[0,1]$ jako na definiční obor této funkce, bude funkce spojitá na tomto uzavřeném intervalu. Tato situace může nastat i na obecných topologických prostorech a je tedy nutné rozlišovat spojitost na podmnožině definičního oboru a spojitost na zúžení definičního prostoru.

Na rozdíl od reálných funkcí reálné proměnné nemusí být inverzní zobrazení spojitého zobrazení spojité (např. identické zobrazení $(\mathbb{R},\mathcal{G}) \to (\mathbb{R},\mathcal{H})$, kde $\mathcal{G}$ je diskrétní topologie a $\mathcal{H}$ je obvyklá topologie na $\mathbb{R}$. Existují však důležité případy, kdy je u inverzního zobrazení spojitost zachována, např. u kompaktních množin – viz příslušnou kapitolu.

Spojitost je lokální vlastnost. Stačí dokazovat spojitost zobrazení v jednotlivých bodech nebo na malých množinách. Z reálných funkcí reálné proměnné si pamatujete, že stejnoměrnou spojitost nelze vyšetřovat po bodech nebo lokálně na malých okolích. Protože topologické prostory jsou definovány např. pomocí soustav okolí, které se mohou velmi lišit bod od bodu, nelze v topologických prostorech definovat stejnoměrnou spojitost. To je možné jen ve strukturách definovaných pomocí množin, které jsou v jistém smyslu veliké (viz kapitolu o uniformních prostorech).

Z reálné analýzy znáte situaci, kdy funkce je definovaná např. na $[0,1]$ hodnotou 0 a na zbylých reálných číslech Dirichletovou funkcí (hodnota 0 v iracionálních bodech, 1 v racionálních bodech). Tato funkce, chápaná jako funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá jen na otevřeném intervalu $(0,1)$. Jestliže se ale omezíme na interval $[0,1]$ jako na definiční obor této funkce, bude funkce spojitá na tomto uzavřeném intervalu. Tato situace může nastat i na obecných topologických prostorech a je tedy nutné rozlišovat spojitost na podmnožině definičního oboru a spojitost na zúžení definičního prostoru.

Na rozdíl od reálných funkcí reálné proměnné nemusí být inverzní zobrazení spojitého zobrazení spojité (např. identické zobrazení $(\mathbb{R},\mathcal{G}) \to (\mathbb{R},\mathcal{H})$, kde $\mathcal{G}$ je diskrétní topologie a $\mathcal{H}$ je obvyklá topologie na $\mathbb{R}$. Existují však důležité případy, kdy je u inverzního zobrazení spojitost zachována, např. u kompaktních množin – viz příslušnou kapitolu.

Nehomeomorfnost dvou prostorů se nejčastěji dokazuje tak, že se najde topologická vlastnost, kterou sdílí pouze jeden ze zkoumaných prostorů. Např. jeden prostor má izolovaný bod a druhý prostor nemá žádný izolovaný bod. Nebo jeden prostor je separabilní a druhý není. Někdy je však obtížné zjistit, zda jsou dva dané prostory homeomorfní či nikoli.

$\Rightarrow$

Existuje důležitý pojem, který někdy může homeomorfnost nahradit. Dva prostory X, Y jsou homeomorfní, jestliže existují spojitá zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to X$ tak, že $fg = 1_Y$, $gf = 1_X$. Ono zobecnění vynechává jednu z uvedených rovností:

DEFINICE (Retrakce)

Říkáme, že prostor X je retraktem prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X$ a $s : X \to Y$ tak, že $rs = 1_X$.

Ukažte, že v uvedené definici musí být s vnoření a r kvocientové zobrazení.
Často se chápe retrakt X jako podprostor Y, s je pak identické zobrazení (tj. $s(x) = x$).

Zřejmě je každý bod retraktem prostoru, ve kterém leží. Každý interval na přímce je retraktem celé přímky (a tedy nemusí být homeomorfní s přímkou). Písmeno Y je retraktem roviny (a není s ní homeomorfní).

Snadno si lze představit tzv. deformační retrakty. Např. kvádr je deformován do hrníčku bez ouška, torus (plná pneumatika) je deformován do hrníčku s ouškem. Existují však retrakty, které nevzniknou deformací.

DEFINICE (Retrakce)

Říkáme, že prostor X je retraktem prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X$ a $s : X \to Y$ tak, že $rs = 1_X$.

Ukažte, že v uvedené definici musí být s vnoření a r kvocientové zobrazení.
Často se chápe retrakt X jako podprostor Y, s je pak identické zobrazení (tj. $s(x) = x$).

Zřejmě je každý bod retraktem prostoru, ve kterém leží. Každý interval na přímce je retraktem celé přímky (a tedy nemusí být homeomorfní s přímkou). Písmeno Y je retraktem roviny (a není s ní homeomorfní).

Snadno si lze představit tzv. deformační retrakty. Např. kvádr je deformován do hrníčku bez ouška, torus (plná pneumatika) je deformován do hrníčku s ouškem. Existují však retrakty, které nevzniknou deformací.

DEFINICE (Retrakce)

Říkáme, že prostor X je retraktem prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X$ a $s : X \to Y$ tak, že $rs = 1_X$.

Ukažte, že v uvedené definici musí být s vnoření a r kvocientové zobrazení.
Často se chápe retrakt X jako podprostor Y, s je pak identické zobrazení (tj. $s(x) = x$).

Zřejmě je každý bod retraktem prostoru, ve kterém leží. Každý interval na přímce je retraktem celé přímky (a tedy nemusí být homeomorfní s přímkou). Písmeno Y je retraktem roviny (a není s ní homeomorfní).

Snadno si lze představit tzv. deformační retrakty. Např. kvádr je deformován do hrníčku bez ouška, torus (plná pneumatika) je deformován do hrníčku s ouškem. Existují však retrakty, které nevzniknou deformací.

DEFINICE (Retrakce)

Říkáme, že prostor X je retraktem prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X$ a $s : X \to Y$ tak, že $rs = 1_X$.

Ukažte, že v uvedené definici musí být s vnoření a r kvocientové zobrazení.
Často se chápe retrakt X jako podprostor Y, s je pak identické zobrazení (tj. $s(x) = x$).

Zřejmě je každý bod retraktem prostoru, ve kterém leží. Každý interval na přímce je retraktem celé přímky (a tedy nemusí být homeomorfní s přímkou). Písmeno Y je retraktem roviny (a není s ní homeomorfní).

Snadno si lze představit tzv. deformační retrakty. Např. kvádr je deformován do hrníčku bez ouška, torus (plná pneumatika) je deformován do hrníčku s ouškem. Existují však retrakty, které nevzniknou deformací.

DEFINICE (Retrakce)

Říkáme, že prostor X je retraktem prostoru Y, jestliže existují spojitá zobrazení $r : Y \to X$ a $s : X \to Y$ tak, že $rs = 1_X$.

Ukažte, že v uvedené definici musí být s vnoření a r kvocientové zobrazení.
Často se chápe retrakt X jako podprostor Y, s je pak identické zobrazení (tj. $s(x) = x$).

Zřejmě je každý bod retraktem prostoru, ve kterém leží. Každý interval na přímce je retraktem celé přímky (a tedy nemusí být homeomorfní s přímkou). Písmeno Y je retraktem roviny (a není s ní homeomorfní).

Snadno si lze představit tzv. deformační retrakty. Např. kvádr je deformován do hrníčku bez ouška, torus (plná pneumatika) je deformován do hrníčku s ouškem. Existují však retrakty, které nevzniknou deformací.