1. TOPOLOGIE A SPOJITOST

Důkazy

Miroslav Hušek, Pavel Pyrih

KMA MFF UK

2008

TVRZENÍ (Vlastnosti báze)

Soustava $\mathcal{B}$ podmnožin X je otevřenou bází nějaké topologie na X právě když má následující vlastnosti

1. *Je-li $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2$, pak existuje $B \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*
2. $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Důkaz.

Podmínky jsou zřejmě nutné. Dokážeme, že jsou postačující.
Nechť $\mathcal{B}$ má uvedené vlastnosti a definujme $\mathcal{G}$ jako soustavu sjednocení všech možných podsoustav $\mathcal{B}$. Pak $\mathcal{G}$ zřejmě obsahuje $\emptyset$ a X a je uzavřená na libovolná sjednocení. Pro dokončení důkazu stačí ukázat, že $\mathcal{G}$ je uzavřená na konečné průniky (pak tvoří topologii a $\mathcal{B}$ je její báze).
Nechť $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ a $x \in G_1 \cap G_2$. Protože G_1 i G_2 jsou sjednocením množin z $\mathcal{B}$, existují $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ obsahující x. Podle první vlastnosti soustavy $\mathcal{B}$ existuje $B \in \mathcal{B}$ tak, že $x \in B \subset B_1 \cap B_2$. Tedy je $x \in B \subset G_1 \cap G_2$ a tento průnik je tedy sjednocením množin z $\mathcal{B}$. □

TVRZENÍ (Charakterizace subbáze)

1. *Každá soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je subbáze nějaké (jediné) topologie $\mathcal{G}$ na X.*
2. *Konečné průniky množin z $\mathcal{S}$ tvoří otevřenou bázi topologie $\mathcal{G}$.*

Důkaz.

Je zřejmé, že konečné průniky množin z jakékoli soustavy podmnožin množiny X má vlastnosti potřebné pro otevřenou bázi. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti soustav okolí)

Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{U}_x$ značí soustavu všech okolí v bodě $x \in X$. Pak platí:

1. *$\mathcal{U}_x$ je filtr v X obsahující x ve svém průniku;*
2. *Pro každé $U \in \mathcal{U}_x$ existuje $V \in \mathcal{U}_x$ takové, že $U \in \mathcal{U}_y$ pro každé $y \in V$.*

Důkaz.

První uvedená vlastnost soustavy okolí plyne hned z vlastností otevřených množin. Dokážeme druhou vlastnost. Nechť U je okolí bodu x. Pak existuje otevřená množina G taková, že $x \in G \subset U$. Podle definice okolí je U okolím každého bodu z G a, zřejmě, G je okolím každého svého bodu. $\square$

TVRZENÍ (Topologie pomocí okolí)

Nechť je pro každé $x \in X$ dána soustava množin $\mathcal{U}_x$ splňující obě vlastnosti z předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie pro kterou jsou $\mathcal{U}_x$ soustavami všech okolí v bodě x.

Důkaz.

Řekneme, že množina $G \subset X$ náleží do $\mathcal{G}$, jestliže $G \in \mathcal{U}_x$ pro každé $x \in G$. Je zřejmé, že soustava $\mathcal{G}$ je uzavřená na libovolná sjednocení a obsahuje set i X. Nechť $G, H \in \mathcal{G}$ a $x \in G \cap H$. Protože $G, H \in \mathcal{U}_x$, je i $G \cap H \in \mathcal{U}_x$, takže $\mathcal{G}$ je uzavřená i na konečné průniky a je to topologie. Zbývá ukázat, že $\mathcal{U}_x$ je soustava všech okolí x při této topologii.

Nechť W je okolí x v $(X, \mathcal{G})$. Pak existuje $G \in \mathcal{G}$ tak, že $x \in G \subset W$. Protože $G \in \mathcal{U}_x$, je i $W \in \mathcal{U}_x$ podle vlastnosti filtru. Nechť nyní $U \in \mathcal{U}_x$. Musíme ukázat, že U je okolím x v $(X, \mathcal{G})$. Vezměme množinu $G = \{y \in X; U \in \mathcal{U}_y\}$. Dokážeme, že $G \in \mathcal{G}$. Protože $x \in G$, bude důkaz hotov. Musíme ukázat, že pro každé $y \in G$ je $G \in \mathcal{U}_y$. Zvolme tedy nějaké $y \in G$, tedy $U \in \mathcal{U}_y$. Podle druhé vlastnosti soustav okolí existuje $V \in \mathcal{U}_y$ tak, že $U \in \mathcal{U}_z$ pro každé $z \in V$. To znamená, že $V \subset G$ a tedy $G \in \mathcal{U}_y$. Důkaz je hotov. $\square$

TVRZENÍ (Popis uzávěru a vnitřku pomocí okolí)

Nechť X je topologický prostor a $A \subset X$. Pak

$$A^\circ = \{x \in X;\ \textit{existuje okolí } U \textit{ bodu } x \textit{ takové, že } U \subset A\},$$
$$\overline{A} = \{x \in X;\ \textit{pro každé okolí } U \textit{ bodu } x \textit{ je } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Důkaz.

Dokažme tvrzení pro uzávěr. Pro vnitřek platí $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$ ukažte to) a odtud snadno plyne i výše uvedená rovnost pro vnitřek.
Jestliže $x \notin \overline{A}$, pak $X \setminus \overline{A}$ je otevřená množina obsahující x, a tedy okolí x disjunktní s A. Nechť bod x má okolí U disjunktní s A. Můžeme předpokládat, že U je otevřené. Pak $X \setminus U$ je uzavřená množina obsahující A a tedy i $\overline{A}$. Bod x tedy nepatří do $\overline{A}$. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti uzávěru)

Nechť X je topologický prostor a A, B jsou libovolné podmnožiny X. Pak

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $A \subset \overline{A}$;
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Důkaz.

První dvě vlastnosti jsou triviálně splněny. Z definice uzávěru ihned plyne, že uzávěr je monotónní operátor, tj. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Odtud plyne inkluze $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. Nechť $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$. Pak existují uzavřené množiny F_A, F_B obsahující A, B, resp., a neobsahující x. Sjednocení $F_A \cup F_B$ je tedy uzavřená množina obsahující $A \cup B$ a neobsahující x. Tudíž $x \notin \overline{A \cup B}$ a zbývající inkluze je dokázána.

Pro důkaz poslední vlastnosti předpokládejme, že $x \notin \overline{A}$. Pak existuje uzavřená množina $F \supset A$ neobsahující x. Ale $F \supset \overline{A}$ podle definice uzávěru a tedy $x \notin \overline{(\overline{A})}$. Opačná inkluze plyne z druhé vlastnosti. $\square$

TVRZENÍ (Topologie pomocí uzávěru)

Nechť pro každou podmnožinu A množiny X je dána množina $\overline{A} \subset X$ splňující 4 podmínky předchozího tvrzení. Pak existuje jediná topologie na X taková, že $\overline{A}$ je uzávěr množiny A v této topologii pro každou $A \subset X$.

Důkaz.

Pro daný operátor $A \rightsquigarrow \overline{A}$ definujme $\mathcal{F} = \{F \subset X; F = \overline{F}\}$. Zřejmě $\mathcal{F}$ obsahuje $\emptyset$ i X (podle prvních dvou vlastností) a je to soustava uzavřená na konečná sjednocení (podle třetí vlastnosti). Dokážeme, že $\mathcal{F}$ je uzavřená na libovolné průniky. Nechť $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ a $A = \bigcap \mathcal{F}'$. Pak pro každé $F \in \mathcal{F}'$ je $A \subset F$ a tedy $\overline{A} \subset F$ podle třetí a čtvrté vlastnosti. Takže $\overline{A} \subset \bigcap \mathcal{F}' = A$, což znamená, že $A = \overline{A}$.
Protože jednoznačnost je zřejmá, zbývá ukázat, že uzávěr uA každé množiny A v topologickém prostoru vytvořeném soustavou $\mathcal{F}$ je totožný s $\overline{A}$. Jelikož $\overline{A} \in \mathcal{F}$, je $uA \subset \overline{A}$. Dále víme, že $A \subset uA$ a tedy $\overline{A} \subset \overline{uA}$. Ale $uA \in \mathcal{F}$ a tedy $\overline{uA} = uA$. Důkaz je hotov. $\square$

TVRZENÍ (Vlastnosti konvergence)

Nechť X je topologický prostor. pak platí:

1. *Konstantní usměrněný soubor konverguje ke své hodnotě.*
2. *Jestliže usměrněný soubor v X konverguje k bodu x, konverguje k témuž bodu i každý usměrněný podsoubor.*
3. *Jestliže každý usměrněný podsoubor usměrněného souboru S má usměrněný podsoubor konvergující k x, pak S konverguje k x.*
4. *Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru S, pak existuje usměrněný podsoubor souboru S, který k x konverguje.*

Důkaz.

Dokážeme třetí a čtvrtou vlastnost. Nechť usměrněný soubor $S = \{x_a\}_A$ nekonverguje k x. Pak existuje okolí U bodu x takové, že pro prvky b nějaké konfinální podmnožiny $B \subset A$ je $x_b \notin U$. Zřejmě je $T = \{x_b\}_B$ usměrněný podsoubor souboru S a žádný podsoubor souboru T nekonverguje k x (dokonce žádný usměrněný soubor mající hodnoty v množině $\{x_b; b \in B\}$ nekonverguje k x).
Nechť $S = \{x_a\}_A$. Pro každé okolí U bodu x z nějaké báze okolí $\mathcal{U}_x$ je množina $B_U = \{b; x_b \in U\}$ konfinální v A. Nechť $B = \{(U, b); b \in B_U, U \in \mathcal{U}_x\}$ je uspořádaná vztahem $(U, b) < (V, c) \Leftrightarrow U \supset V, b > c$. Položme $y_{(U,b)} = x_b$. Pak usměrněný soubor $\{y_{(U,b)}\}_B$ je hledaný podsoubor souboru S konvergující k x. □

TVRZENÍ (Uzávěr pomocí konvergence)

V topologickém prostoru X pro libovolné $A \subset X$ je

$$\overline{A} = \{x;\ \textit{existuje usměrněný soubor } S \textit{ v } A,\ \textit{který konverguje k } x\}\,.$$

Důkaz.

Pokud je x limitou souboru ležícího v množině A, je $x \in \overline{A}$, protože každé okolí bodu x obsahuje prvky souboru a tedy prvky z A (podle popisu uzávěru pomocí okolí).
Nechť je nyní $x \in \overline{A}$. Pro každé okolí $U \in \mathcal{U}_x$ bodu x zvolíme nějaký bod $x_U \in A \cap U$ (opět podle popisu uzávěru pomocí okolí). Usměrněný soubor $\{x_U;\ U \in \mathcal{U}_x\}$ leží v A a konverguje k x – ověřte. □

TVRZENÍ (Charakterizace spojitosti)

Nechť f je zobrazení topologického prostoru X do topologického prostoru Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní

1. *f je spojité;*
2. *vzor množiny uzavřené v Y je množina uzavřená v X;*
3. *pro každé $x \in X$ a každé okolí V bodu $f(x)$ v Y existuje okolí U bodu x v X tak, že $f(U) \subset V$;*
4. *jestliže soubor $\{x_i\}$ konverguje k x v prostoru X, pak soubor $\{f(x_i)\}$ konverguje k $f(x)$ v prostoru Y;*
5. *pro každou podmnožinu $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;*
6. *pro každou podmnožinu $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Důkaz.

První dvě vlastnosti jsou ekvivalentní, protože $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. Implikace $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5$ jsou přímočará použitím příslušných definic a popisu uzávěru pomocí konvergence. Vlastnost 6 se z vlastnosti 5 dokáže dosazením $A = \overline{f^{-1}(B)}$ a použitím inkluzí $P \subset f^{-1}(f(P))$, $f(f^{-1}(Q)) \subset Q$. Zbývá dokázat implikaci $6 \Rightarrow 2$. Je-li $B \subset Y$ uzavřená, je $\overline{B} = B$ a tedy podle vlastnosti 6 je $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$, což znamená, že vzor množiny B je uzavřená množina. □

TVRZENÍ (Vlastnosti topologie konkrétního bodu)

Nechť je prostor X vybaven topologií konkrétního bodu $p \in X$. Pak platí:

1. *V prostoru X neexistují dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny.*
2. *Množina $\{p\}$ je v prostoru X hustá. Tedy X je separabilní.*
3. *Bod p je v prostoru X izolovaný.*
4. *Prostor $X \setminus \{p\}$ je diskrétní.*
5. *Pro každý bod $x \in X$ různý od p je $\{\{x, p\}\}$ bází filtru okolí bodu x.*
6. *Soustava $\mathcal{B} := \{\{x, p\} : x \in X\}$ je nejmenší bází otevřených množin prostoru X.*

Důkaz.

Podle definice každá otevřená množina obsahuje bod p, tedy první bod je jasný. Dále platí, že množina je hustá (podle naší definice), právě když protíná každou otevřenou množinu. Druhé tvrzení je důsledkem.
Bod p je izolovaný, protože $\{p\}$ je otevřená množina podle definice.
Je-li $A \subseteq X \setminus \{p\}$ libovolná podmnožina, pak $A \cup \{p\}$ je otevřená v X podle definice.
Tedy A je otevřená v X $\{p\}$. To dokazuje 4. tvrzení.
Jakákoliv otevřená množina obsahující bod x musí podle definice naší topologie obsahovat i bod p. Pro důkaz 5. bodu si tedy stačí uvědomit, že množina $\{x, p\}$ je otevřená, což je zřejmé z definice.
Fakt, že B je báze ihned plyne z předchozího. Stejně tak je však zřejmé, že jakákoliv báze otevřených množin v X musí obsahovat $\mathcal{B}$. Tím je důkaz hotov.

$\square$

TVRZENÍ

Prostor $C([0,1])$ s topologií bodové konvergence není metrizovatelný.

Důkaz.

Nepřímo ukážeme, že uvažovaný prostor nesplňuje 1. Axiom spočetnosti. Předpokládejme tedy, že máme spočetný systém $\mathcal{U}$ okolí nulové funkce (značíme $\mathbf{0}$). Standardní báze $\mathcal{B}$ otevřených množin v prostoru $(C([0,1]), \tau_p)$ sestává z množin tvaru $\{f \in C([0,1]) : f(x_i) \in U_i, i = 1, \ldots, n\}$, kde x_i jsou body z $[0,1]$ a U_i jsou otevřené množiny v $\mathbb{R}$ (viz součinové topologie v 2. kapitole). Zřejmě můžeme BÚNO předpokládat, že $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, protože $\mathcal{B}$ je báze (stačí každou z množin systému $\mathcal{U}$ nahradit její bázovou podmnožinou obsahující $\mathbf{0}$). Uvažujme nyní množinu „všech fixačních souřadnic" z $\mathcal{U}$, tj. množinu

$$A := \{x \in [0,1] : (\exists U \in \mathcal{U}) \colon \{f(x) : f \in U\} \neq \mathbb{R}\}.$$

Zřejmě A je spočetná, existuje tedy nějaké $x \in [0,1] \setminus A$. Množina $V := \{f \in C([0,1]) : f(x) \in (-1,1)\}$ je otevřená, dokonce $V \in \mathcal{B}$ a samozřejmě $\mathbf{0} \in V$. Žádná množina $U \in \mathcal{U}$ však není podmnožinou V, a tedy $\mathcal{U}$ není báze okolí $\mathbf{0}$. $\square$

Některé další vlastnosti úplných nebo separabilních m.p.

Nechť X je metrizovatelný prostor.

1. Je-li X úplný a $D \subseteq X$ je dokonalá, pak mohutnost D je nejméně kontinuum. Dokonce D obsahuje podmnožinu homeomorfní Cantorovu diskontinuu.
2. Je-li X separabilní, pak mohutnost příslušné topologie je nejvýše kontinuum. Speciálně mohutnost samotného prostoru je rovněž nejvýše kontinuum, protože každá jednobodová množina je uzavřená (z metrizovatelnosti).
3. Je-li X polský prostor bez izolovaných bodů, pak mohutnost příslušné topologie je přesně kontinuum.
4. Je-li X separabilní a $F \subseteq X$ je uzavřená, potom lze psát $F = D \cup S$, kde D je dokonalá a S spočetná. Pokud prostor X je navíc úplný, je tento rozklad určen jednoznačně. Množinu D můžeme definovat jako množinu všech kondenzačních bodů v F.
5. Buď X separabilní. Nechť $(F_\alpha)_{0 \leq \alpha < \beta}$ je ostře klesající posloupnost uzavřených množin v X. Potom β je spočetný ordinál.
6. Nechť X je polský. Potom topologický podprostor $H \subseteq X$ je polský, právě když H je G_δ podmnožina X (tj. $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n je v X otevřená množina pro každé $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz

Omezme se rovnou na prostor D, který je úplný (jsa uzavřeným podprostorem úplného prostoru) a nemá izolované body. Zvolme libovolné $a \in D$ a $\varepsilon > 0$. Indukcí zkonstruujeme systém uzavřených koulí $\{B_s : s \in \{0,1\}^{<\omega}\}$ (tj. indexovaný všemi konečnými posloupnostmi nul a jedniček) takový, že platí podmínky

(i) $B_\emptyset = B(a, \varepsilon)$,

(ii) pokud $s \neq \emptyset$, pak $\operatorname{diam}(B_s) < \frac{1}{|s|}$, kde $|s|$ značí délku posloupnosti s,

(iii) pro každou posloupnost $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ leží střed koule B_s v množině D,

(iv) pro každou posloupnost $s \in \{0,1\}^{<\omega}$ je $\operatorname{dist}(B_{s\wedge 0}, B_{s\wedge 1}) > 0$,

(v) jestliže posloupnost s je prodloužením posloupnosti r, platí inkluze $B_s \subseteq B_r$,

kde připouštíme prázdnou množinu jako prvek $\{0,1\}^{<\omega}$ délky nula a symbolem $s \wedge 0$ značíme posloupnost s prodlouženou o nulu (analogicky pak pro jedničku). Nultý krok konstrukce jsme již provedli volbou $a \in d$ a $\varepsilon > 0$. Nechť nyní $n \in \omega$ a mějme již zkonstruovány koule B_s pro každou posloupnost $s \in \{0,1\}^{\leq n}$ (tj. pro každou posloupnost s nul a jedniček délky nejvýše n). Je-li nyní $s \in \{0,1\}^n$ libovolná posloupnost (délky n), existují $a_s \in D$ a $\varepsilon_s \in (0, \frac{1}{n})$ tak, že $B_s = B(a_s, \varepsilon_s)$.

$\Rightarrow$

Důkaz.

Protože však množina D nemá izolované body, jistě najdeme dva různé body $a_{s\wedge 0}, a_{s\wedge 1} \in D$ a čísla $\varepsilon_{s\wedge 0}, \varepsilon_{s\wedge 1} \in (0, \frac{1}{n+1})$ taková, že $\operatorname{dist}(B(a_{s\wedge 0}, \varepsilon_{s\wedge 0}), B(a_{s\wedge 1}, \varepsilon_{s\wedge 1})) > 0$ a zároveň $B(a_{s\wedge 0}, \varepsilon_{s\wedge 0}) \cup B(a_{s\wedge 1}, \varepsilon_{s\wedge 1}) \subseteq B_s$.
Pak označíme $B_{s\wedge i} := B(a_{s\wedge i}, \varepsilon_{s\wedge i}), i = 1, 2$.
Tím je konstrukce indukcí hotová.
Nyní uvažujme nějakou nekonečnou posloupnost $z \in \{0,1\}^\omega$. Označme symbolem $z|_k$ restrikci posloupnosti z na prvních k souřadnic. Potom definujeme zobrazení $\varphi : \{0,1\}^\omega \longrightarrow D$ formulí

$$\varphi(z) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{z|_k}.$$

Protože prostor D je úplný, je každý z průniků v definici φ jednobodová množina díky podmínce (ii). Dále z podmínky (iv) je jasné, že zobrazení φ je prosté. Tedy vidíme, že množina D obsahuje nějakou podmnožinu mohutnosti kontinua.
Nebudeme již dokazovat, že zobrazení φ je homeomorfismus. Pouze poznamenejme, že stačí dokázat jeho spojitost (vzhledem ke kompaktnosti prostoru $\{0,1\}^\omega$ a faktu, že φ je bijekce na svůj obraz). Tímto tedy uzavíráme důkaz prvního bodu tvrzení.

$\Rightarrow$

Důkaz.

Druhý bod tvrzení vyplývá z toho, že separabilní metrický prostor má nějakou (nejvýše) spočentou bázi $\mathcal{B}$ otevřených množin. Pak totiž zobrazení $\psi : \mathcal{P}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{G}$, kde $\mathcal{G}$ je topologie našeho prostoru, definované formulí

$$\psi : \mathcal{A} \longmapsto \bigcup \mathcal{A},$$

je surjektivní. Přitom ale definiční obor ψ má (nejvýše) mohutnost kontinua. Tedy i $\mathcal{G}$ má nejvýše mohutnost kontinua. Protože dále zobrazení $G \longmapsto X \setminus G$ zprostředkovává bijekci mezi otevřenými a uzavřenými množinami, je uzavřených množin přesně stejně jako otevřených, a tedy taky nejvýše kontinuum.
Třetí bod je snadným důsledkem prvních dvou. Pro důkaz čtvrtého tvrzení volme libovolnou uzavřenou množinu $F \subseteq X$ a omezme se pouze na podprostor F. Definujme $D \subseteq F$ jako množinu všech kondenzačních bodů v F a $S := F \setminus D$. Je snadné si rozmyslet, že množina D je uzavřená (ukažte, že limita posloupnosti kondenzačních bodů je zase kondenzační bod). Tedy S je otevřená (pracujeme v prostoru F). Je-li $x \in S$, pak x není kondenzačním bodem F, a tedy existuje jeho okolí $U_x \subseteq S$, které je spočetné. Protože separabilita se v metrických prostorech dědí na podprostory, lze S pokrýt spočetně mnoha takovými okolími (jelikož separabilní m.p. je Lindelöfův), a tedy množina S je spočetná.

Důkaz.

Nakonec volme libovolný bod $d \in D$ a $\varepsilon > 0$. Pak $B(d, \varepsilon)$ je nespočetná, a tedy (vzhledem ke spočetnosti S) je nespočetná i množina $B(d, \varepsilon) \setminus S = B(d, \varepsilon) \cap D$. Tedy d je hromadným bodem množiny D. Celkem dostáváme, že množina D je uzavřená a nemá izolované body, tedy je dokonalá.

Páté tvrzení opět využívá existence spočetné báze $\mathcal{B} = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ otevřených množin prostoru X. Jelikož posloupnost (F_α) je ostře klesající, najdeme ke každému $\alpha < \beta$ přirozené číslo n_α takové, že $B_{n_\alpha} \cap F_\alpha \neq \emptyset$ a zároveň $B_{n_\alpha} \cap F_{\alpha+1} = \emptyset$. Je zřejmé, že zobrazení $\alpha \longmapsto n_\alpha$ je prosté, a tedy ordinál β je spočetný.

Důkaz posledního tvrzení vynecháváme. $\square$