# Geometrie v $\mathbb{R}^3$, 4. semestr
# šk. rok 2009/2010

Vladimír Souček

28. března 2012

## 0.1 Úvod

Hlavním tématem této přednášky je klasická geometrie křivek a ploch v $\mathbb{R}^3$. Hlavní zdroje, ze kterých vyrůstala diferenciální geometrie, jsou klasická mechanika (pohyb hmotného bodu, jeho rychlost a zrychlení) a geodézie (zeměměřictví, mapy). Počátky sahají zpět do 17. a 18. století (Huyghens, Leibniz, Newton, Euler, Monge). Klíčové postavy té části diferenciální geometrie, o které budeme mluvit, byli v 19. století Gauss, Riemann, Bolyai, Lobačevskij. Nejde tedy o moderní, současnou matematiku, ale o klasické základy, na kterých moderní matematika staví. Moderní zobecnění této části klasické matematiky se týká analogií a zobecnění do vyšších dimenzí. Nejvýznamnější čeští geometři 20. století byli Eduard Čech (geometr a topolog) a Václav Hlavatý (jeho jméno nese knihovna v Karlíně).

Jednou z hlavních větví moderní diferenciální geometrie je tzv. Riemannova geometrie, která Einsteinovy poskytla model a matematický nástroj pro jeho obecnou teorii relativity. Interakce elementárních částic jsou v současné době popisovány výhradně pomocí teorie kalibračních polí. Kalibrační pole je název, který se používá v teoretické fyzice pro analogii parciálních derivací vektor-hodnotových funkcí, zadaných na plochách. Matematici těmto derivacím říkají kovariantní derivace, nebo také konexe. Většinu těchto matematických teorií lze najít pod názvy diferenciální geometrie, globální analýza nebo analýza na varietách.

Většinu přednášky budeme studovat lokální geometrické vlastnosti křivek a ploch v trojrozměrném prostoru. Bude nás zajímat křivost a torze křivek, různé druhy křivosti ploch. Probereme základní modely neeukleidovské geometrie (sférická a hyperbolická geometrie). Budeme zkoumat geodetiky na plochách, které v křivých geometriích nahrazují přímky. Mnohem zajímavější (a také podstatně těžší) jsou globální výsledky v diferenciální geometrii (např. Gauss-Bonnetova věta pro plochy). Tyto výsledky ukazují vztahy mezi lokálními a globálními vlastnostmi křivek, či ploch, vztahy mezi topologií a geometrií.

Jsou to prototypy obecných výsledků ve vyšších dimenzích, které patří mezi jedny z velkých témat matematiky 20. století. Typickým příkladem je slavná Atiyah-Singerova věta o indexu pro eliptické diferenciální operátory (nebo jejich komplexy), které jsou definovány na vícedimenzionálních plochách. K této moderní části diferenciální geometrie a analýzy na varietách se v této přednášce nedostaneme.

Přednáška je velmi blízká k duchu knihy

H. Wilson: Curved spaces. From classical geometry to elementary differential geometry, Cambridge University Press, 2008.

Základem dobrého pochopení teorie je pro každého propočet mnoha konkrétních příkladů, kterým budou věnována cvičení k přednášce. Nejvíc ovšem pomůže, pokud si je čtenář dokáže spočítat sám. Řadu řešených příkladů je možné najít ve skriptech

J. Bureš, K. Hrubčík: Diferenciální geometrie křivek a ploch, Karolinum,

Další příklady jsou obsaženy ve skriptech

L. Boček: Příklady z diferenciální geometrie.

Hodně zajímavostí z historie vývoje geometrie za poslední století a o nedávném vyřešení jednoho z nejznámějších matematických problémů je možné najít v populární knížce D. O'Shea: Poincarého doměnka, Academia, 2009, která určitě stojí za přečtení.

# Kapitola 1

# Prolog: Eukleidovská geometrie.

## 1.1 Eukleidovský prostor $\mathbb{R}^3$.

Geometrie v Eukleidovském prostoru (délky, úhly) je obsažena ve standardní definici skalárního součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Vzdálenost dvou bodu je pak definována pomocí Eukleidovské normy $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ vzorcem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

## 1.2 Shodnosti.

**Definice 1.2.1** *Shodnost (isometrie) v* $\mathbb{R}^3$ *je zobrazení* $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, které zachovává vzdálenost:*

$$|S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Shodnosti je možné (relativně) snadno klasifikovat.

**Věta 1.2.2** *Libovolná shodnost je affinní zobrazení, tj.* $S(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$*, kde* $A$ *je* $n \times n$ *reálná matice,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$*. Affinní zobrazení je shodností, právě když* $A$ *je ortogonální matice. Shodnost se nazývá přímou shodností, pokud je* $\det A > 0$*, v opačném případě se nazývá nepřímou shodností.*

Návod jak toto tvrzení odůvodnit se bude probírat na cvičení.

**Příklad.**

Typické nepřímé shodnosti jsou reflexe. Je-li $H \in \mathbb{R}^3$ (afinní) nadrovina definovaná rovnicí

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | (\mathbf{u}, \mathbf{x}) = c\},\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{u}| = 1, c \in \mathbb{R},$$

pak definujeme reflexi $R_H$ vzhledem rovině $H$ vztahem

$$R_H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - c)\,\mathbf{u}.$$

Je ihned vidět, že zobrazení $R_H$ je identita na $H$ a převádí body tvaru $\mathbf{a} + t\mathbf{u}, \mathbf{a} \in H$ na $\mathbf{a} - t\mathbf{u}$. Ale každý bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ lze napsat (jednoznačně) ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}, \mathbf{a} \in H, t \in \mathbb{R}$; bod $\mathbf{a}$ je pak pata kolmice vedená bodem $\mathbf{x}$ na nadrovinu $H$. Zobrazení $R_H$ je tedy opravdu reflexe v nadrovině $H$. Tedy $R_H$ zachovává vzdálenosti, je to shodnost.

**Věta 1.2.3** *Množina všech shodností tvoří grupu (operace je skládání zobrazení).*

*Pro každé dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ existuje reflexe $R$ s vlastností $R(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.*

*Každá shodnost se dá vyjádřit jako složení nejvýše 4 reflexí.*

První tvrzení je zřejmý důsledek Věty 1.2.2. Druhé je okamžitě jasné z geometrického názoru (a snadno se napíše explicitní formule popisující příslušnou nadrovinu). Poslední tvrzení je zajímavější, stručný návod k důkazu je v Apendixu.

Grupa shodností $G$ je tedy speciálním případem grupy transformací (tj. grupy, jejíž prvky jsou vzájemně jednoznačné zobrazení dané množiny $M$ na sebe). Totéž se někdy vyjadřuje tvrzením, že grupa $G$ má zadanou akci na množině $M$.

## 1.3 Grupa rotací.

Grupa $O(3) = O(3, \mathbb{R})$ se skládá ze všech shodností, které zachovávají počátek v $\mathbb{R}^3$. Je to grupa, jejíž prvky jsou lineární zobrazení, které můžeme popsat $3 \times 3$ maticemi. Matice $A$ patří do $O(3)$, pokud $A\,A^t = Id$. Z toho ihned plyne, že $(\det A)^2 = 1$, tedy $\det A = \pm 1$. Podgrupa SO(3) je tvořena všemi prvky do $O(3)$, které mají determinant roven jedné.

**Příklady.**

(1) Matice rotace o úhel $\theta$ kolem osy $z$ má tvar

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Jak vypadá matice nepřímé shodnosti, kterou dostaneme složením rotace kolem osy $z$ a reflexí vzhledem k rovině souřadnic $x, y$?

(3) Jaká je plná grupa symetrií rovnostranného čtyřstěnu (je to zřejmě konečná podgrupa v $O(3)$)?

## 1.4 Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$.

Základní vlastností vektorového součinu (která může být zároveň jeho definicí) je následující vlastnost.

**Lemma 1.4.1** *Pro každé tři vektory* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *platí*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}].$$

V tomto lemmatu se jedná o determinant matice, jejíž řádky (nebo ekvivalentně sloupce) tvoří vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Z vlastností determinantu plyne, že pořadí vektorů v matici lze cyklicky permutovat, aniž se determinant změní. Důkaz tvrzení plyne ihned z definice obou součinů a z rozvoje determinantu podle posledního řádku. Výraz na levé straně se často nazývá smíšený součin tří vektorů.

**Tvrzení 1.4.2** *Pro každé tři vektory v* $\mathbb{R}^3$ *platí*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Návod, jak tuto formuli ověřit, je v Apendixu.

# Kapitola 2

# Křivky

Budeme křivky studovat v $\mathbb{R}^3$. Nedá mnoho námahy přenést většinu pojmů a výsledků do $\mathbb{R}^n$. Je ale jednodušší pro zájemce formulovat a rozmyslit si toto zobecnění, než se nutit představovat si obecné pojmy v jejich přirozené geometrické představě v $\mathbb{R}^3$. První věcí bude si připomenout základní informace o Eukleidovské geometrii.

Prvním tématem, které budeme probírat, budou vlastnosti křivek v $\mathbb{R}^3$. Je otázka, co se vlastně myslí pod pojmem křivka. Nejběžnější definice je zobrazení $\mathbf{c} : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^3$ (tzv. parametrická křivka). Abychom vyloučili patologické případy (např. Peanovu křivku, jejíž obraz vyplní čtverec), budeme požadovat hladkost zobrazení $\mathbf{c}$. Bylo by možné požadovat pouze existenci prvních (ev. druhých či třetích) spojitých derivací místo hladkosti, ale budeme dávat přednost jednoduchosti před takovýmto nepříliš významným zobecněním.

Intuitivně si pod pojmem křivka představujeme spíš obraz zobrazení $\mathbf{c}$, množinu v $\mathbb{R}^3$ (kružnice, přímka, elipsa, hyperbola, parabola, atd.) Příslušná množina bodů je ale obrazem (oborem hodnot) mnoha parametrických křivek. Zavedeme si proto pojem změny parametrizace křivky a budeme studovat vlastnosti, které jsou na volbě parametrizace nezávislé.

## 2.1 Parametrizované křivky.

**Definice 2.1.1** *Parametrizovaná křivka v* $\mathbb{R}^3$ *je hladké zobrazení* $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$. *Hladkost znamená existenci (spojitých) derivací všech řádů (jednostranné derivace v evtl. krajních bodech).*

*Vektor* $\mathbf{c}'(t) \equiv \frac{d\mathbf{c}}{dt}(t) \in \mathbb{R}^3$ *se nazývá tečný vektor k parametrické křivce* $\mathbf{c}$ *v bodě* $\mathbf{c}(t)$.

*Řekneme, že parametrizovaná křivka* $\mathbf{c}$ *je regulární v bodě* $t_0 \in I$, *pokud* $\mathbf{c}'(t_0) \neq 0$.

*Řekneme, že parametrizovaná křivka* $\mathbf{c}$ *je regulární, pokud je regulární v každém bodě* $I$.

*Množina hodnot* $\mathbf{c}(I) = <\mathbf{c}>$ *se nazývá obraz parametrizované křivky.*

**Poznámka 2.1.2** *Vektor-hodnotová zobrazení jsou určena svými složkami. Například křivka* $\mathbf{c}$ *je určena třemi reálnými funkcemi:*

$$\mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t), c_3(t)).$$

*Vektor derivací je určen třemi funkcemi:*

$$\mathbf{c}'(t) = (c_1'(t), c_2'(t), c_3'(t))$$

*a má geometrický význam tečného vektoru ke křivce* $\mathbf{c}$.

**Definice 2.1.3** *Je-li* $\mathbf{c}$ *parametrická křivka na* $I \subset \mathbb{R}$ *a je-li* $\phi : \tilde{I} \to I$ *difeomorfismus, pak se parametrická křivka* $\tilde{\mathbf{c}}(t') := \mathbf{c}(\varphi(t'))$ *na* $\tilde{I}$ *nazývá reparametrizací parametrické křivky* $\mathbf{c}$. *Takovéto dvě křivky mají zřejmě tentýž obraz.*

*Reparametrizace určují relaci ekvivalence na množině všech parametrických křivek. Křivkou budeme nazývat třídu ekvivalence parametrizovaných křivek vůči této relaci.*

*Řekneme, že reparametrizace zachovává orientaci parametrické křivky, pokud je derivace reparametrizace* $\phi'$ *stále kladná funkce. Také reparametrizace, které zachovávají orientaci parametrické křivky, tvoří relaci ekvivalence. Tyto třídy ekvivalence budeme nazývat orientované křivky.*

Všimněte si, že každá reparametrizace regulární parametrické křivky je zřejmě opět regulární parametrická křivka, protože pro křivku a její reparamerizaci platí

$$\left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t(s))\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|,$$

a derivace $\frac{dt}{ds}$ je všude nenulová. Můžeme tedy mluvit o regulárních křivkách, resp. regulárních orientovaných křivkách. V dalším budeme vyšetřovat vlastnosti křivek (resp. orientovaných křivek), tj. ty vlastnosti parametrizovaných křivek, které nezávisí na parametrizaci.

Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ je parametrizovaná křivka na $I$ a zvolme bod $t_0$ v intervalu $I$. Pak definujeme funkci $s(t)$ vztahem

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{c}'(u)| du.$$

Hodnota $s(t)$ je právě délka křivky $\mathbf{c}$ na intervalu $(t_0, t)$. Pokud změníme počáteční hodnotu parametru $t_0$, pak se funkce $s(t)$ změní o konstantu.

Je-li $\mathbf{c}$ regulární parametrizovaná křivka, je funkce $s = s(t)$ zřejmě hladká a rostoucí (protože $s'(t) = |\mathbf{c}'(t)| > 0$ v každém bodě) a je to tudíž difeomorfimus definičního intervalu $I$ na jiný interval $\tilde{I}$. Označme $t = t(s)$ odpovídající inverzní funkci.

Pro novou parametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(t(s)), s \in \tilde{I}$ platí

$$\left|\frac{d\tilde{\mathbf{c}}}{ds}(s)\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)\right| \frac{1}{|\frac{ds}{dt}(t)|} = 1.$$

Tím jsme dostali jakousi význačnou parametrizaci (její parametr je právě délka křivky od počátečního bodu), která existuje pro každou regulární křivku. Bylo by výhodné další vztahy počítat v této význačné parametrizaci. Uvidíme však, že explicitní výpočet příslušného integrálu je možný jen ve výjimečných případech, a tak bude třeba umět používat i vzorce pro libovolnou parametrizaci.

To vede k následující definici.

**Definice 2.1.4** *Nechť* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná křivka na* $I$. *Řekneme, že* $\mathbf{c}$ *je parametrizovaná obloukem, pokud platí*

$$\left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}(t)\right| = 1$$

*pro všechna* $t \in I$.

**Tvrzení 2.1.5**
*(1) Parametrizace* $\mathbf{c}(t), t \in I$ *je regulární, právě když ji lze parametrizovat obloukem, tj., pokud existuje její reparametrizace* $\tilde{\mathbf{c}}$ *na* $\tilde{I}$, *pro kterou platí*

$$|\tilde{\mathbf{c}}'(s)| = 1$$

*pro všechna* $s \in \tilde{I}$.
*(2) Je-li* $\mathbf{c}(s)$ *jedna parametrizace obloukem, pak každá jiná parametrizace obloukem se získá pomocí změny parametrizace tvaru*

$$\tilde{s} = \pm s + c,$$

*kde* $c$ *je vhodná konstanta.*

*Důkaz.*
(1) Pokud je $\mathbf{c}$ regulární, pak jsme si již ukázali, že existuje její parametrizace obloukem. Naopak, pokud pro křivku $\mathbf{c}$ na $I$ existuje reparametrizace obloukem, je norma její derivace v každém bodě rovna 1, a tedy je křivka regulární.
(2) Jsou-li $s = s(t), u = u(t)$ dvě reparametrizace, které obě vedou na parametrizaci obloukem, pak z předchozího bodu plyne

$$\frac{du}{dt} = \pm\left|\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right| = \pm\frac{ds}{dt}.$$

Z toho požadované tvrzení ihned plyne.

$\square$

Viděli jsme, že pro každou křivku $\mathbf{c}$ na $I$ a každou volbu bodu $t_0 \in I$ dostáváme parametrizaci obloukem $\tilde{\mathbf{c}}(s)$ s vlastností, že bodu $t_0$ odpovídá parametr $s = 0$. Zde platí, že parametr $s$, odpovídající bodu $\mathbf{c}(t)$, je délka křivky (velikost oblouku) mezi bodem $\mathbf{c}(t_0)$ a bodem $\mathbf{c}(t)$. Tyto parametrizace obloukem křivky $\mathbf{c}$ jsou charakterizovány vlastností, že 0 patří do definičního oboru $\tilde{I}$.

I když teoreticky je parametrizace obloukem definovaná pro každou regulární křivku, je zpravidla nemožné ji explicitně spočítat.

**Příklad 2.1.6**

*(1) Najděte parametrickou křivku, jejíž obraz je kružnice o středu v bodě $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ a poloměru $R > 0$ a spočítejte parametrizaci obloukem této křivky.*

*Jedna z možných odpovědí je*

$$\mathbf{c}(t) = (a_1 + R\cos t, a_2 + R\sin t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

$$\tilde{\mathbf{c}}(s) = \left(a_1 + R\cos\frac{s}{R}, a_2 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

*(2) Spočítejte parametrizaci obloukem pro tzv. logaritmickou spirálu*

$$\mathbf{c}(t) = \left(e^t\cos t, e^t\sin t\right), t \in \mathbb{R}.$$

*Nakreslete si její graf!*

Je ihned vidět (spočítejte si!), že jsou-li $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ dvě parametrické křivky, pak pro derivaci jejich skalárního, resp. vektorového součinu platí

$$(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2)' = \mathbf{c}_1' \cdot \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2',$$

$$(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)' = \mathbf{c}_1' \times \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2'.$$

Podobně pro tři křivky $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ platí

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]' = \det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2', \mathbf{a}_3] + \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3'].$$

## 2.2 Křivost křivky.

Teď bychom chtěli vhodným způsobem charakterizovat, jak je křivka v kterém bodě 'křivá'. Tato vlastnost (jako všechny, které zkoumáme) nesmí záviset na volbě parametrizace. Navíc bychom zřejmě chtěli, aby křivost přímky byla nula a aby kružnice s větším poloměrem měly křivost menší než kružnice s menším poloměrem.

Víme již, že křivka je částí přímky, pokud $\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2} = 0$ pro všechna $t \in I$. Nabízí se tedy definovat křivost křivky v bodě $t \in I$ jako velikost $|\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2}|$. Bohužel, tato veličina závisí (a to velmi komplikovaným způsobem) na volbě parametrizace. Je možné tuto libovůli při volbě parametrizace odstranit požadavkem, aby křivka byla parametrizovaná obloukem. Pak již víme, že zbyde jen malá možnost reparametrizace, která veličinu $|\frac{d^2\mathbf{c}}{dt^2}|$ zřejmě nemění:

$$u = \pm s + c, \frac{d\mathbf{c}}{ds} = \frac{d\mathbf{c}}{du}\frac{du}{ds} = \pm\frac{d\mathbf{c}}{du},$$

$$\frac{d^2\mathbf{c}}{ds^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right)\frac{du}{ds} = \pm\frac{d}{du}\left(\pm\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right) = \frac{d^2\mathbf{c}}{du^2}.$$

To vede k následující definici.

**Definice 2.2.1** *Je-li* $\mathbf{c}$ *křivka parametrizovaná obloukem, pak její křivost v bodě* $\mathbf{c}(s)$ *je rovna* $|\mathbf{c}''(s)|$.

**Příklad 2.2.2**

*Spočítejme křivost kružnice o poloměru* $R$*, parametrizované obloukem:*

$$\mathbf{c}(s) = \left(a_1 + R\cos\frac{s}{R}, a_2 + R\sin\frac{s}{R}\right).$$

*Dostaneme*

$$\mathbf{c}'(s) = \left(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R}\right)$$

$$\mathbf{c}''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R}\right)$$

$$|\mathbf{c}''(s)| = \frac{1}{R}.$$

Výše uvedená definice křivosti je těžko použitelná pro praktický výpočet křivosti křivky. Jen ve velmi málo případech dokážeme explicitně parametrizaci obloukem spočítat. Je tedy potřeba umět spočítat křivost křivky z jakékoliv její parametrizace.

K tomu slouží následující věta.

**Věta 2.2.3** *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}(t)$ *je regulární křivka v* $\mathbb{R}^3$. *Pak pro její křivost* $\kappa$ *platí*

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|}{|\dot{\mathbf{c}}|^3},$$

*kde tečka značí derivaci* $\frac{d}{dt}$.

*Důkaz.*

Základem důkazu je přechod od obecné parametrizace křivky k parametrizaci obloukem. Předpokládejme, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ je křivka v obecné parametrizace (na nějakém intervalu $I$). Zvolme si nějakou parametrizaci $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ této křivky obloukem (víme, že je to vždy možné) a označme $s$ příslušný parametr. Tedy $s = s(t), t \in I$ a $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(s(t)), t \in I$.

Někdy bývá v matematice zvykem označovat příslušné funkce rozdílnými symboly, tj. označit parametrizaci obloukem např. písmenem $\mathbf{d} = \mathbf{d}(s)$, označit reparametrizaci symbolem $s = f(t)$ a psát $\mathbf{c}(t) = \mathbf{d}(f(t)), s = f(t)$. Je to přesnější, ale málo přehledné. Budeme používat výše uvedené intuitivní označení, čtenář si snadno rozmyslí, v kterém významu se příslušný symbol používá. Pro lepší odlišení ale budeme používat různé symboly pro derivace podle proměnné $t$, resp. $s$: derivaci $\frac{d}{dt}$ budeme označovat tečkou, derivaci $\frac{d}{ds}$ budeme označovat čárkou. Platí tedy:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(s(t));\ \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'(s(t))\,\dot{s}(t)$$

a (již bez proměnných):

$$\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}''\,(\dot{s})^2 + \mathbf{c}'\,\ddot{s}.$$

Z definice oblouku dostaneme ihned $\dot{s} = |\dot{\mathbf{c}}|$ a

$$(\dot{s})^2 = \dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}\ \Rightarrow \dot{s}\ddot{s} = \dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}}.$$

Podle definice křivosti dostaneme

$$\kappa = \left|\mathbf{c}''\right| = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}} - \dot{\mathbf{c}}\frac{1}{\dot{s}}\,\ddot{s}\right|}{(\dot{s})^2} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{s})^2 - \dot{\mathbf{c}}\,\dot{s}\,\ddot{s}\right|}{(\dot{s})^4} = \frac{\left|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})\right|}{|\dot{\mathbf{c}}|^4}.$$

Nyní již stačí použít identitu pro trojitý vektorový součin (viz předchozí tvrzení):

$$|\ddot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}}) - \dot{\mathbf{c}}\,(\dot{\mathbf{c}} \cdot \ddot{\mathbf{c}})| = |\dot{\mathbf{c}} \times (\ddot{\mathbf{c}} \times \dot{\mathbf{c}})| = |\dot{\mathbf{c}}|\ |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}|\,.$$

□

(1) Vypočítejte křivost šroubovice, která je zadaná parametrickým popisem $\mathbf{c}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Výsledek: $\kappa = \frac{|a|}{a^2+b^2}$.

(2) Přesvědčte se, že pro $b = 0$ (kružnice o poloměru $a$) a $a = 0$ (přímka) vychází očekávané hodnoty křivosti.

Pro křivky v prostoru již nestačí samotná křivost k charakterizaci křivky. Je např. z předchozích příkladů jasné, že kružnice a šroubovice v prostoru mohou mít stejnou křivost, i když zřejmě není možné převést jednu na druhou pomocí shodnosti v prostoru. Budeme si nyní definovat další geometrickou charakteristiku prostorové křivky – tzv. torzi křivky. K tomu nám pomůže studium vlastností ortogonálních bazí, svázané s každým bodem křivky.

V rovině určoval jednotkový tečný vektor v daném bodě jednoznačně kladně orientovanou ortonormální bazi. Změna této baze podél křivky byla vyjádřena pomocí derivací baze podle parametru křivky. Tyto derivace bylo možné rozložit v každém bodě do této baze. Koeficient v tomto vyjádření byla znaménková křivost křivky. Zkusíme si nyní podobnou proceduru provést i pro prostorové křivky. V každém bodě (netriviální) křivky si určíme význačnou bazi svázanou s chováním křivky, tzv. Frenetovou bazi.

### 2.2.1 Frenetova baze.

Každá regulární křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ má automaticky v každém bodě jeden význačný směr, tečný směr. Pro regulární křivku je možné v každém bodě definovat jednotkový tečný vektor $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$.

Druhá derivace $\ddot{\mathbf{c}}$ je důležitá informace o křivce. Pokud jsou vektory $\ddot{\mathbf{c}}$ a $\dot{\mathbf{c}}$ nezávislé, pak určují význačnou rovinu (tzv. oskulační rovinu křivky v daném bodě). Vektory $\ddot{\mathbf{c}}$ a $\dot{\mathbf{c}}$ jsou závislé právě když křivost křivky v daném bodě je rovna nule. Pro definici Frenetovy baze tedy budeme muset předpokládat, že křivost křivky je nenulová.

Uvažujme nyní křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovanou obloukem. Tedy $|\mathbf{c}'| = 1$ a $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ je jednotkový tečný vektor. Derivací vztahu $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, dostaneme $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = 0$. Pokud je křivost $\kappa$ nenulová, je také $\mathbf{t}' \neq 0$. To umožňuje následující definici.

**Definice 2.2.4** *Předpokládejme, že* $\mathbf{c}(s)$ *je regulární křivka parametrizovaná obloukem, která má v bodě* $\mathbf{c}(s_0)$ *nenulovou křivost. Pak v tomto bodě definujeme význačnou ortonormální bazi, tzv. Frenetovu bazi* $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, *následujícím způsobem.*

$$\mathbf{t} = \mathbf{c}'; \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}; \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

*Rovina, generovaná vektory* $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ *se nazývá oskulační rovina křivky; rovina generovaná vektory* $\mathbf{n}, \mathbf{b}$ *se nazývá normálová rovina křivky a rovina generovaná vektory* $\mathbf{b}, \mathbf{t}$ *se nazývá rektifikační rovina křivky.*

V každém bodě regulární parametrické křivky s nenulovou torzí máme definovánu význačnou ortonormální (Frenetovu) bazi. Chování křivky se odráží ve změně této baze. Infinitezimální změna je popsána derivacemi prvků Frenetovy baze v daném bodě. Přirozený způsob, jak zachytit informaci o těchto derivacích, je spočítat koeficienty v rozkladu těchto derivací vzhledem k Frenetově bazi v daném bodě. Co víme o těchto derivacích?

Nechť $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak víme, že $\mathbf{t}' = \kappa\,\mathbf{n}$.

Protože $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, dostaneme

$$\mathbf{b}' = \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' = \mathbf{t} \times \mathbf{n}',$$

Tedy $\mathbf{b}'$ je kolmé na $\mathbf{t}$. Navíc, z $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 1$ plyne $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} = 0$, tedy $\mathbf{b}'$ je kolmé také na $\mathbf{b}$. Vektory $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{n}$ jsou tedy závislé. To umožňuje následující definici.

**Definice 2.2.5** *Je-li $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ regulární křivka parametrizovaná obloukem $s$ nenulovou křivostí, pak definujeme torzi $\tau$ této křivky vztahem*

$$\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}.$$

Znaménko v definici $\tau$ je jen konvence. Nyní chybí již jen spočítat $\mathbf{n}'$. Všechny derivace jsou shrnuty v následujícím klíčovém tvrzení.

**Věta 2.2.6 (Frenetova věta)** *Předpokládejme, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ je regulární křivka, parametrizovaná obloukem, která má nenulovou křivost. Pak*

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{n}\\ \mathbf{b}\end{pmatrix}.$$

*Důkaz.*

Připomeňme, že $\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$, a tedy $\mathbf{t} = \mathbf{n}\times\mathbf{b}$ a $\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\mathbf{t}$. Pak

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{b}\times\mathbf{t})' = \mathbf{b}'\times\mathbf{t} + \mathbf{b}\times\mathbf{t}' = -\tau\,\mathbf{n}\times\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}\times\mathbf{n} = \tau\,\mathbf{b} - \kappa\,\mathbf{t}.$$

□

Zatím ještě nevíme, jestli torze křivky nezávisí na volbě parametrizace, jestli je to geometrická vlastnost křivky. V definici jsme předpokládali paramatrizaci křivky obloukem, ale ta je určena až na změnu parametrizace tvaru $s \mapsto \pm s + c$, kde $c$ je konstanta. Je užitečné si rozmyslet, jak se mění prvky Frenetovy baze a jejich derivace při takovéto změně parametrizace. Dostaneme

$$\mathbf{t} \mapsto \pm\mathbf{t},\ \mathbf{t}' \mapsto \mathbf{t}';\ \ \mathbf{n} \mapsto \mathbf{n},\ \mathbf{n}' \mapsto \pm\mathbf{n}';\ \mathbf{b} \mapsto \pm\mathbf{b},\ \mathbf{b}' \mapsto \mathbf{b}'.$$

Takže křivost ani torze znaménko nemění.

Jako pro případ křivosti, ukážeme si nyní, jak se vypočítá torze křivky z obecné parametrizace křivky. To je podstatná praktická informace, protože explicitní výrazy pro parametrizaci obloukem nejsou obvykle k dispozici. Zároveň znovu dokážeme nezávislost torze na volbě parametrizace.

**Věta 2.2.7** *Je-li křivost regulární křivky $\mathbf{c}$ nenulová a je-li $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ její libovolná parametrizace, pak pro její torzi platí*

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{c}}\times\ddot{\mathbf{c}})\cdot\,\dddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}}\times\ddot{\mathbf{c}}|^2} = \frac{\det[\,\dot{\mathbf{c}},\ddot{\mathbf{c}},\dddot{\mathbf{c}}]}{|\dot{\mathbf{c}}\times\ddot{\mathbf{c}}|^2}.$$

*Důkaz.*
(1) Nejdříve ověříme vzorec pro torzi v parametrizaci obloukem $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$. Pak $|\mathbf{c}'| = 1$, $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$, $\mathbf{c}'' = \mathbf{t}' = \kappa\,\mathbf{n}$. Z definice torze $\mathbf{b}' = -\tau\,\mathbf{n}$ plyne

$$\tau = -(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}) = -(\mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{t} \times \mathbf{n}') \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}'.$$

Do tohoto vzorce nyní stačí dosadit vyjádření jednotlivých vektorů pomocí derivací křivky $\mathbf{c}$. Víme, že $\mathbf{t} = \mathbf{c}'$ a $\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{c}''$. Tedy

$$\tau = \left(\mathbf{c}' \times \frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) = \left(\mathbf{c}' \times \frac{\mathbf{c}''}{\kappa}\right) \cdot \left[\frac{\mathbf{c}'''}{\kappa} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \mathbf{c}''\right] = \frac{1}{\kappa^2}[(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''].$$

Protože vektory $\mathbf{c}'$ a $\mathbf{c}''$ jsou na sebe kolmé, platí $|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|^2 = |\mathbf{c}'|\,|\mathbf{c}''|^2 = \kappa^2$.
(2) Nyní ukážeme, že vzorec pro torzi nezávisí na volbě parametrizace. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{c} = \mathbf{c}(u), \mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ jsou dvě libovolné parametrizace křivky $\mathbf{c}$, které spolu souvisí pomocí reparametrizace $u = u(t)$, tj. $\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(u(t))$. Pro stručnost označíme $\frac{d}{dt}$ tečkou a $\frac{d}{du}$ čárkou. Pak dostaneme

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'\,\dot{u}; \quad \ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}''\,(\dot{u})^2 + \mathbf{c}'\,\ddot{u}; \quad \dddot{\mathbf{c}} = \mathbf{c}'''\,(\dot{u})^3 + 3\,\mathbf{c}''\dot{u}\ddot{u} + \dddot{u}\,\mathbf{c}'.$$

Z toho ihned plyne

$$\det[\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}] = (\dot{u})^6 \det[\mathbf{c}', \mathbf{c}''\mathbf{c}''']; \;\; |\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}| = (\dot{u})^3 |\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''|.$$

□

**Příklad 2.2.8** *Ukažte, že torze šroubovice*

$$\mathbf{c} = (a\cos t, a\sin t, b\,t)$$

*je rovna* $\tau = \frac{b}{a^2+b^2}$.

Přidejme ještě komentář o tom, jak spočítat tvar Frenetovy baze $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ pomocí obecné parametrizace křivky $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$. Nejdříve je třeba spočítat derivace do třetího řádu: $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ .

Tečný vektor je dán vztahem $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$. Dvojice $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ a $\{\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}\}$ generují tutéž rovinu a jsou souhlasně orientované. Vektor $\mathbf{n}$ se tedy dostane pomocí obecné Gramm-Schmidtovy ortogonalizace. Výsledek je

$$\mathbf{n} = \ddot{\mathbf{c}} - (\ddot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{c}}|^2}[(\dot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}})\ddot{\mathbf{c}} - (\ddot{\mathbf{c}} \cdot \dot{\mathbf{c}})\dot{\mathbf{c}}].$$

Poslední vektor ortonormální baze, vektor binormály $\mathbf{b}$, je pak vektorový součin $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$.

Tyto poznámky také naznačují, jak vypadá zobecnění Frenetovy baze pro případ křivek ve vyšší dimenzi. Systém je dobře vidět z případu křivek v $\mathbb{R}^4$.

Pro konstrukci Frenetovy baze musíme předpokládat, že jsou vektory $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ nezávislé. V tomto případě bychom postupovali následujícím způsobem.

Pro křivku $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ v obecné parametrizaci nejprve spočítáme derivace až do čtvrtého řádu. První vektor $\mathbf{e}_1$ Frenetovy baze má tvar $\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{c}}/|\dot{\mathbf{c}}|$. Pokud jsou vektory $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ nezávislé, pak je vektor $\mathbf{e}_2$ jednoznačně určen požadavkem, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}$ generují tutéž rovinu a jsou souhlasně orientovány.

Další vektor $\mathbf{e}_3$ je jednoznačně určen požadavkem, že vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ a $\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \dddot{\mathbf{c}}$ generují tentýž trojrozměrný podprostor v $\mathbb{R}^4$ jsou souhlasně orientovány. Vektor $\mathbf{e}_4$ je pak určen jednoznačně požadavkem, že $\{\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_4\}$ je ortonormální baze v $\mathbb{R}^4$.

Frenetova věta pak říká, že

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \kappa_1 & 0 & 0\\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0\\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3\\ 0 & 0 & -\kappa_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}_4\end{pmatrix}.$$

Koeficienty $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ se nazývají zobecněné křivosti. První dvě funkce jsou kladné, třetí může nabývat libovolné znaménko.

Obecně, v libovolné dimenzi, platí, že zobecněné křivosti určují jednoznačně (až na shodnost) danou křivku a že mohou být zvoleny libovolně s tím omezením, že zobecněné křivosti, až na poslední z nich, jsou kladné a všechny funkce jsou hladké. Toto tvrzení si nyní dokážeme v $\mathbb{R}^3$.

**Věta 2.2.9**
*(1) Jsou-li $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ a $\mathbf{d} = \mathbf{d}(s)$ dvě křivky v $\mathbb{R}^3$ v parametrizaci obloukem na intervalu $(\alpha, \beta)$, které mají tutéž křivost a torzi, pak existuje (přímá) shodnost $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taková, že $\mathbf{d}(s) = S(\mathbf{c}(s))$.*
*(2) Jsou-li $k > 0, t$ dvě dané hladké funkce na $(\alpha, \beta)$, pak existuje křivka $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ v parametrizaci obloukem, jejíž křivost je $k$ a její torze je rovna $t$.*

*Důkaz.*
(1) Jsou-li $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, resp. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$, Frenetovy baze pro křivky $\mathbf{c}$, resp. $\mathbf{d}$ a zvolíme-li libovolně bod $s_0 \in (\alpha, \beta)$, pak existuje jednoznačně určené otočení $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, pro které platí $\mathbf{f}_i(s_0) = R(\mathbf{e}_i(s_0))$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ takový, že $\mathbf{d}(s_0) = \mathbf{c}(s_0) + \mathbf{b}$. Chceme ukázat, že hledaná shodnost má tvar $S(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$.

Nejdříve ukážeme, že rovnost $\mathbf{f}_i(s) = R(\mathbf{e}_i(s))$ platí ve všech bodech křivky. To dostaneme ihned z Frenetových rovnic. Označme $\omega_{ij}$ koeficienty ve Frenetových rovnicích. Podle předpokladu jsou stejné pro $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{f}_i$. Tedy

$$\mathbf{f}_i' = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\mathbf{f}_j; \quad [R(\mathbf{e}_i)]' = R(\mathbf{e}_i') = R\left(\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} R(\mathbf{e}_j).$$

Tvrzení tedy plyne z věty o jednoznačnosti pro řešení soustavy obyčejných lineárních rovnic.

Pro derivace křivek $\mathbf{d}$ a $S(\mathbf{c})$ pak platí

$$\frac{d\mathbf{d}}{ds} = \mathbf{f}_1 = R(\mathbf{e}_1) = R\left(\frac{d\mathbf{c}}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(R(\mathbf{c})) = \frac{d}{ds}(S(\mathbf{c})).$$

Spolu s počátečními podmínkami to ukazuje, že se křivky rovnají.
(2) Předpokládejme, že jsou na intervalu $(\alpha, \beta)$ zadány hladké funkce $\kappa > 0$ a $\tau$. Zvolme $s_0 \in (\alpha, \beta)$ libovolně. Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ je libovolná ortonormální baze. Z vět o existenci řešení soustav lineárních obyčejných diferenciálních rovnic plyne existence řešení $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ Frenetových rovnic

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & t\\ 0 & -t & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}.$$

na $(\alpha, \beta)$ s počátečními podmínkami $\mathbf{e}_i(s_0) = \mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$. Pak stačí definovat $\mathbf{c}(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{e}_1(u)du$.

Výsledná křivka je zřejmě parametrizovaná obloukem, její tečný vektor v každém bodě je $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1$, a $\ddot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{e}_1} = k\,\mathbf{e}_2$. Tedy křivost $\kappa = |\ddot{\mathbf{c}}|$ je rovna $k$. Navíc, vektor $\mathbf{e}_2$ je vektor normály, takže $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je Frenetova baze křivky $\mathbf{c}$. Z toho plyne, že také torze $\tau$ je rovna funkci $t$. □

# Kapitola 3

# Sférická geometrie.

## 3.1 Přímky na sféře

**Definice 3.1.1** *Ve sférické geometrii zvolíme jako množinu všech bodů sféru $S^2$ (s poloměrem 1). Přímka na sféře je definována jako průsečík sféry s libovolnou rovinou, která prochází počátkem (hlavní kružnice). Úsečka spojující dva body $A, B$ je kratší část oblouku hlavní kružnice ohraničená těmito dvěma body, pokud body $A, B$ nejsou protilehlé. Pro protilehlé body je to libovolná polokružnice, která je spojuje. Vzdálenost $\rho(A, B)$ dvou bodů na sféře je délka úsečky, která je spojuje.*

*Sférický trojúhelník je definován třemi body na sféře, jeho hrany jsou tvořeny úsečkami, spojujícími příslušné tři body. Budeme uvažovat jen trojúhelníky, jejichž hrany mají délku menší než $\pi$. (To je ekvivalentní s tím, že celý trojúhelník se vejde do nějaké polosféry ohraničené nějakou velkou kružnicí).*

**Poznámka.**

(1)

Všimněte si, že vlastnosti přímek ve sférické geometrii jsou podobné jako v Eukleidovské geometrii. Liší se např. tím, že neexistují žádné rovnoběžky, každé dvě přímky se protínají. Také existují dvojice bodů (protilehlé body na sféře), pro které existuje nekonečně mnoho přímek, které jimi procházejí.

(2) Dá se ukázat (zkuste si!), že úsečka mezi dvěma body na sféře má nekratší délku mezi všemi křivkami na sféře, které tyto dva body spojují. V praktickém životě je to vidět například z toho, jak létají letadla do Ameriky či do Asie. Jeji pohyb nakreslený na obrazovce pro cestující vypadá zbytečně dlouhý, což je důsledkem toho, že (všechny) mapy zkreslují vzdálenosti. Ve skutečnosti letí letadlo nejkratší možnou cestou.

## 3.2 Kosinová a sinová věta v Eukleidovské geometrii.

Pro trojúhelník v Eukleidovské rovině s úhly $\alpha, \beta, \gamma$ označme $a, b, c$ délky příslušných protilehlých stran. Pak platí

1. $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

2. $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kosinová věta je zobecnění Pythagorovy věty, na kterou se redukuje, pokud je úhel $\gamma$ pravý úhel.

Teď si ukážeme, jak vypadá analogie těchto vět ve sférické geometrii.

## 3.3 Plocha sférického trojúhelníka.

**Věta 3.3.1** *Předpokládejme, že části tří hlavních kružnic na sféře ohraničují sférický trojúhelník $ABC$. Úhly u vrcholů $A, B, C$ postupně označíme $\alpha, \beta, \gamma$. Pak se velikost $|ABC|$ plochy trojúhelníka $ABC$ vypočte ze vztahu*

$$|ABC| = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Všimněte si, že součet úhlů ve sférickém trojúhelníku není $\pi$, ale musí být větší než $\pi$! To je zřejmé, protože velikost plochy trojúhelníka musí být kladná. Všimněte si také, že velikost plochy sférického trojúhelníka se vypočte jen pomocí úhlů, ve vzorci nejsou žádné délky stran! Velikost plochy je zřejmě menší než $2\pi$, rozmyslete si, že najdeme trojúhelníky s velikostí plochy libovolně blízko u $2\pi$.

*Důkaz.*

Označme $A', B', C'$ body protilehlé bodům $A, B, C$ (nakreslete si!). Dvě hlavní kružnice, které svírají úhel $al$ ohraničují dva protilehlé 'stroužky' na sféře. Velikost plochy každého z nich jsou stejné a závisí na úhlu $\alpha$. Pokud se $\alpha$ blíží k nule, tato plocha se blíží k nule a pokud se $al$ blíží k $\pi$, blíží se tento povrch k povrchu polosféry, tj. k $2\pi$. Zřejmé tento povrch závisí lineárně na $\lambda$, tedy se rovná $2\alpha$. (Později spočítáme velikost této plochy přímo způsobem, kterým ji počítal již Archimedes.)

Víme tedy, že

$$2\alpha = |ABC| + |A'BC|;\ 2\beta = |ABC| + |AB'C|;\ 2\gamma = |ABC| + |ABC'|.$$

Trojúhelníky $A'BC'$ a $AB'C$ se na sebe zobrazují při symetrii podle počátku, mají tedy stejný povrch. Velikost povrchu polosféry, ohraničená kružnicí

$ACA'C'$, je rovna zřejmě $2\pi$. Tedy

$$2\pi = |ABC| + |ABC'| + |A'BC'| + |A'BC| = |ABC| + |ABC'| + |AB'C| + |A'BC|$$

Pokud odečteme tři předchozí rovnosti od tohoto posledního vztahu, dostaneme tvrzení věty. □

## 3.4 Kosinová a sinová věta ve sférické geometrii.

**Věta 3.4.1** *Předpokládejme, že trojúhelník $ABC$ leží v jedné polosféře. Úhly při vrcholech $A, B, C$ označíme postupně $\alpha, \beta, \gamma$ a délky stran protilehlých úhlům $\alpha, \beta, \gamma$ označíme postupně $a, b, c$. Pak platí*

*1.*
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

*2.*
$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

**Věta 3.4.2** *(Pythagorova věta). Jako důsledek pro pravoúhlý troúhelník ($\gamma = \pi/2$) dostaneme*
$$\cos c = \cos a \cos b.$$

*Důkaz.*

Nejdříve dokážeme kosinovou větu. Body $A, B, C$ jsou body v $\mathbb{R}^3$, ale budeme je chápat jako vektory spojující počátek $O$ s příslušným bodem. Označme $N_1, N_2, N_3$ jednotkové normály k rovinám $OBC, OAC, OAB$. Orientaci normál vybereme tak, aby směřovaly ven z tělesa $OABC$ (nakreslete si!!). Pak
$$N_a = \frac{C \times B}{\sin a},\ N_b = \frac{A \times C}{\sin b},\ N_c = \frac{B \times A}{\sin c}.$$
(pokud jsme orientovali pořadí vrcholů trohúhelníka proti směru hodinových ručiček). Úhel při vrcholu sférického trojúhelníka je zřejmě roven úhlu rovin definujících příslušné strany trojúhelníka. Platí také

$$N_a \cdot N_b = -\cos \gamma,\ N_b \cdot N_c = -\cos \alpha,\ N_c \cdot N_a = -\cos \beta.$$

Víme, že platí identita

$$(C \times B) \cdot (A \times C) = (A \cdot C)(B \cdot C) - (C \cdot C)(B \cdot A).$$

Protože vektory $A, B, C$ jsou jednotkové, pravá strana se zjednoduší. Celkem dostaneme

$$-\sin a \sin b \cos \gamma \quad = \quad \sin a \sin b (N_1 \cdot N_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= (C \times B) \cdot (A \times C) = \\
&= (A \cdot C)(B \cdot C) - (B \cdot A) = \\
&= \cos b \cos a - \cos c.
\end{aligned}$$

Sinová věta se odvodí takto. Pokud dosadíme do identity

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

postupně vektory $\mathbf{a} = A \times C, \mathbf{b} = C, \mathbf{c} = B$, dostaneme identitu

$$(A \times C) \times (C \times B) = ((A \times C) \cdot B)C = ((B \times A) \cdot C)C$$

V našem případě dostaneme nalevo $-(N_1 \times N_2) \sin a \sin b$. Součin $N_a \times N_b$ je zřejmě násobek $C$ a dá se snadno ověřit, že $N_a \times N_b = C \sin \gamma$. Porovnáním násobků $C$ dostaneme

$$C \cdot (A \times B) = \sin a \sin b \sin \gamma.$$

Vzhledem k tomu, že je součin $C \cdot (B \times A)$ (tj. determinant!) invariantní při cyklických záměnách, dostaneme

$$\sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta.$$

Relaci pak stačí vydělit $\sin a \sin b \sin c$. □

# Kapitola 4

# Plochy v $\mathbb{R}^3$.

Nejdříve se musíme dohodnout, co myslíme pod pojmem plocha. Nejjednoduší je užít parametrický popis plochy, tj. (hladké) zobrazení z otevřené množiny v $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$. Aby obraz tohoto zobrazení byl opravdu dvojdimenzionální, je třeba předpokládat, že zobrazení je regulární.

## 4.1 Základní definice.

### 4.1.1 Regulární parametrická plocha, hladká plocha.

**Definice 4.1.1** *Parametrická regulární plocha v $\mathbb{R}^3$ definovaná na $\mathcal{O}$ je hladké zobrazení $\mathbf{p}$ otevřené množiny $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ takové, že $\mathbf{p}$ je regulární na $\mathcal{O}$, tj. hodnost Jacobiho matice $\mathbf{p}$ je ve všech bodech rovna 2. Ekvivalentně, vektory parciálních derivací*

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u} \equiv \mathbf{p}_u, \ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial v} \equiv \mathbf{p}_v$$

*musí být v každém bodě lineárně nezávislé.*

*Je-li $\phi : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ difeomeorfismus (tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, které je spolu se svým inverzním zobrazením nekonečně diferencovatelné) otevřených podmnožin $\mathbb{R}^2$, pak definujeme $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi$ a $\phi$ nazýváme reparametrizací.*

*Regulární parametrickou plochu $\mathbf{p}$ nazveme mapou, pokud je $\mathbf{p}$ navíc homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Množinu $U = \mathbf{p}(\mathcal{O}) \subset S$ nazveme obrazem mapy, někdy ji budeme značit $< \mathbf{p} >$ . Pro přesnost budeme obvykle pod mapou na $S$ rozumět dvojici $(U, \mathbf{p})$, kde $U = \mathbf{p}(\mathcal{O})$.*

**Věta 4.1.2** *(1) Je-li $\mathbf{p}$ regulární parametrická plocha a $\phi$ difeomorfismus, pak je také $\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi$ regulární parametrická plocha.*
*(2) Jsou-li $\mathbf{p}$ a $\mathbf{p}'$ dvě mapy a $< \mathbf{p} > = < \mathbf{p}' >$, pak existuje reparametrizace $\phi$ taková, že*

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \circ \phi.$$

*Důkaz.*
(1) Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{p}'$ je součin Jacobiho matice zobrazení $\mathbf{p}$ a Jacobiho matice zobrazení $\phi$. Je-li $\phi$ difeomorfismus, pak složení $\phi$ a $\phi^{-1}$ je identita a součin příslušných Jacobiho matic je jednotková matice. Determinant Jacobiho matice $\phi$ je tedy nenulový. Z toho plyne, že $\mathbf{p}'$ je regulární, právě když je regulární $\mathbf{p}$.
(2) Zobrazení $\phi$ budeme definovat předpisem $\phi = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{p}'$. Toto zobrazení je podle předpokladu homeomorfismus na svém definičním oboru. Je ale třeba dokázat, že je hladké. Zvolme bod $a' \in \mathcal{O}'$, pak $\phi(a') = a \in \mathcal{O}$. Jeden ze tří minorů řádu 2 Jacobiho matice zobrazení $\phi$ v bodě $a$ je nenulový. Můžeme předpokládat, že je to determinant

$$\det \frac{\partial(p_2, p_3)}{\partial(u, v)}.$$

Označme $\pi$ projekci $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^2$, danou průmětem na poslední dvě souřadnice. Pak má zobrazení $\pi \circ \mathbf{p}$ v bodě $a$ nenulový Jakobián a podle věty o inverzním zobrazení existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^2$ bodu $a$ takové, že $\pi \circ \mathbf{p}$ je difeomorfismus $U$ na $\pi \circ \mathbf{p}(U)$.

Zobrazení $\phi$ můžeme v otevřené množině $\phi^{-1}(U) \subset \mathcal{O}'$ napsat ve tvaru

$$\phi = (\pi \circ \mathbf{p})^{-1} \circ (\pi \circ \mathbf{p}'),$$

je to tedy složení dvou hladkých zobrazení. □

Pojem regulární parametrické plochy, resp. mapy, stačí pro lokální problémy. Pro globální výsledky je třeba definici plochy zobecnit. Typickým příkladem plochy, která není obrazem regulární parametrické plochy, je sféra. Sféra se nedá pokrýt jednou mapou (homeomorfismus nemůže zobrazit otevřenou množinu na kompaktní množinu). Není pochyb o tom, že sféra je pro nás typickým příkladem plochy a že by naše definice tuto plochu měla zahrnovat. Rozšíříme si tedy pojem plochy následujícím způsobem.

**Definice 4.1.3** *Řekneme, že množina $S \subset \mathbb{R}^3$ je (hladká) plocha, pokud pro každý bod $s \in S$ existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^3$ a mapa $\mathbf{p} : \mathcal{O} \to S$ tak, že $U \cap S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$. Soubor map, které pokrývají plochu $S$, se nazývá atlas plochy $S$.*

*Jsou-li $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ dvě mapy (s neprázdným průnikem svých obrazů) na $S$, pak budeme zobrazení $\phi = (\mathbf{p}')^{-1} \circ \mathbf{p}$ nazývat (tam kde je definované) přechodové zobrazení mezi těmito dvěma mapami.*

**Poznámka.** Pokud pro množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ dokážeme najít atlas, je $S$ (hladká) plocha. Atlas pro danou plochu $S$ není určen jednoznačně. Jak uvidíme na příkladech, je takových možností vždy mnoho. Pro popis plochy je vhodné si zvolit atlas, který má pokud možno co nejméně map. Na volbě atlasu nezáleží, ze dvou atlasů můžeme např. jejich sjednocením vyrobit větší atlas, který oba předchozí atlasy obsahuje. Sjednocení všech atlasů je maximální možný atlas, který má ovšem přiliš mnoho map (nekonečně mnoho), s každou mapou tam při nejmenším leží všechny její restrikce na otevřené podmnožiny jejího definičního oboru. z Věty 4.1.2 (2) plyne, že přechodové zobrazení libovolných dvou map je reparametrizací.

Budeme obvykle používat pro plochu jeden vybraný atlas, ale kdykoliv k němu můžeme přidat jakoukoliv další mapu, bude-li třeba.

**Příklad 4.1.4**
*(1) Rovina.*

*Je-li $R$ rovina v $\mathbb{R}^3$ a zvolíme-li její tři body $A, B, C \in R$ v obecné poloze, pak jeden její parametrický popis má tvar*

$$\mathbf{p}(u, v) = A + u(B - A) + v(C - A)$$

*Toto zobrazení je mapa (ověřte!) a $< \mathbf{p} >= R$.*

*Rovina je tedy plocha ve smyslu předchozí definice. Její atlas se skládá z jediné mapy.*

*(2) Sféra.*

*Sféra $S_2$ je dána rovnicí*

$$S_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

*Standardní mapa na sféře má tvar*

$$\mathbf{p}(\varphi, \theta) = (\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi); \ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \ \theta \in (0, 2\pi).$$

*Najděte další tři mapy natočením této mapy, aby tvořily atlas pro sféru.*

*Jiný atlas, který má jen dvě mapy, se získá pomocí stereografické projekce ze severního a jižního pólu sféry. Je-li $S$ severní pól a je-li $R$ rovina $x_3 = 0$, pak úsečka $SA, A \in S_2 - \{S\}$ spojující severní pól s bodem $A$ sféry protíná rovinu $R$ v jediném bodě $X(A)$. Zobrazení $A \mapsto X(A)$ je stereografická projekce sféry bez bodu $S$ na rovinu $R$. Rovina zabalí sféru celou, kromě jediného bodu. Příslušné inverzní zobrazení je pak mapa. Napište vzorce pro tuto mapu, pro mapu odpovídající projekci z jižního pólu a pro příslušné přechodové zobrazení! Ověřte, že jsou to opravdu mapy!*

*(3) Jako cvičení si napište definici toru (pneumatiky) pomocí jedné rovnice v $\mathbb{R}^3$ a atlas pro torus.*

*(4) Standardní kužel $K = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ má vrchol v počátku. Je lehké najít mapu, která pokrývá kužel bez jedné přímky:*

$$\mathbf{p}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), r \neq 0, \theta \in (0, 2\pi)$$

*a druhou (otočenou) mapu, které pak tvoří atlas pro kužel bez vrcholu. Ale neexistuje mapa, která by pokrývala okolí vrcholu. To je vidět z toho, že pro libovolně malé okolí $U$ počátku $0$ v $\mathbb{R}^3$ je množina $U \cap K - \{0\}$ nesouvislá,*

*zatímco její vzor v libovolné mapě je nutně množina souvislá. Ty se ovšem na sebe nemohou žádným homeomorfismem zobrazit. Kužel tedy není plocha ve smyslu naší definice, kužel bez vrcholu plochou je.*
*(5) Graf hladké funkce je vždy plocha. Přesněji, je-li $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hladká funkce na otevřené množině $\mathcal{O}$ v $\mathbb{R}^2$, pak její graf $S$ je obraz mapy*

$$\mathbf{p}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2));\ (x_1, x_2) \in \mathcal{O}.$$

*Je zřejmé, že Jacobián tohoto zobrazení má všude hodnost 2 a že je to homeomorfismus $\mathcal{O}$ na $S = \mathbf{p}(\mathcal{O})$ (ověřte!).*
*(6) Klasické příklady ploch jsou tzv. kvadriky, tj. plochy zadané v $\mathbb{R}^3$ kvadratickou rovnicí. Mezi ně patří sféra, kužel, elipsoid, hyperboloidy. Je zajímavé znát klasifikaci kanonických tvarů těchto kvadrik a plochy, které jim odpovídají.*

Plochy v $\mathbb{R}^3$ se nejčastěji zadávají jednou rovnicí

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) | f(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Následující velmi důležitá věta ukazuje postačující podmínku pro funkci $f$, aby tato množina $S$ byla plocha. Podmínka říká, že stačí, aby gradient funkce $f$ byl na ploše $S$ nenulový.

**Věta 4.1.5** *Předpokládejme, že $f$ je hladká funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a definujme množinu $S$ rovnicí*

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega | f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0}\}.$$

*Pokud platí podmínka*

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \neq 0$$

*na celé množině $S$, pak $S$ je plocha.*

*Důkaz.*

Je-li $\bar{x} \in S$ libovolný bod, pak $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Předpokládejme například, že $\frac{\partial f}{\partial x_3}(\bar{x}) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích pak existuje okolí

$$U = U_1 \times U_2,\ U_1 \subset \mathbb{R}^2, U_2 \subset \mathbb{R}$$

a hladká funkce $g : U_1 \to U_2$ tak, že $S \cap U$ je právě graf funkce $g$. Zobrazení

$$\mathbf{p}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, g(x_1, x_2));\ (x_1, x_2) \in U_1$$

je pak mapa, obsahující bod $\bar{x}$. $\square$

## 4.2 Tečné vektory, tečná rovina plochy.

Z předchozí kapitoly víme, co je to tečný vektor ke křivce. Nyní si budeme definovat tečný vektor k ploše v jejím daném bodě. V další části přednášky budeme studovat vlastnosti plochy $S$, které zavisí jen na $S$ a ne na zvolené mapě. A tak i pro tečný vektor napíšeme nejdříve definici, která nezávisí na volbě mapy a pak ukážeme, jak tečné vektory popisovat pomocí zvolené mapy. Tečný vektor plochy budeme definovat jako tečný vektor křivky, která leží v dané ploše.

**Definice 4.2.1** *Řekneme, že vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je tečný vektor k ploše $S$ v bodě $s \in S$, pokud existuje křivka $\mathbf{c}, <\mathbf{c}> \subset S$ taková, že*

$$\mathbf{c}(t_0) = s;\ \dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{v}.$$

*Množina všech tečných vektorů v bodě $s \in S$ se nazývá tečný prostor k ploše $S$ v bodě $s$ a značí se $T_sS$.*

**Věta 4.2.2** *Nechť $(U, \mathbf{p})$ je mapa na $S$ a $s = \mathbf{p}(u_1, u_2)$ je bod v jejím obraze. Pak*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} = \alpha \mathbf{p}_{u_1} + \beta \mathbf{p}_{u_2};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

*kde $\mathbf{p}_{u_1}$, resp. $\mathbf{p}_{u_2}$ označuje parciální derivace $\mathbf{p}$ podle $u_1$, resp. $u_2$ v bodě $(u_1, u_2)$.*

*Důkaz.*
(1) Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná a $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{p}_{u_1} + \beta \mathbf{p}_{u_2}$, pak definujeme křivku $\mathbf{c}$ předpisem (pro $\varepsilon$ dostatečně malé)

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u_1 + \alpha t, u_2 + \beta t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Křivka $\mathbf{c}$ zřejmě leží v ploše $S$, $\mathbf{c}(0) = s$ a $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(0)$.
(2) Pokud křivka $\mathbf{c}$ leží v ploše $S$, pak existuje křivka $\mathbf{d}$ v definičním oboru $\mathcal{O}$ mapy $\mathbf{p}$ taková, že

$$\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ \mathbf{d}.$$

(Stačí zvolit $\mathbf{d} = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{c}$.) Označme $\mathbf{d}(t) = (u_1(t), u_2(t))$. Je-li $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(t_0)$, pak

$$\mathbf{v} = \dot{u_1} \mathbf{p}_{u_1} + \dot{u_2} \mathbf{p}_{u_2},$$

a stačí položit $\alpha = \dot{u_1}$, $\beta = \dot{u_2}$. □

Ukázali jsme tedy, že volba mapy $(U, \mathbf{p})$ v okolí bodu $s \in S$ zadává bazi $(\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2})$ v tečném prostoru $T_sS$. Navíc derivace $(\dot{u_1}, \dot{u_2})$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v} \in T_sS$ vůči této bazi. Z lineárníalgebry navíc víme, že zobrazení, které vektoru ve vektorovém prostoru přiřadí jeho souřadnice vůči zvolené bazi je isomorfismus.

## 4.3 Normálové vektory.

Každý podprostor v $\mathbb{R}^3$ dimenze 2 je určen jednoznačně jednotkovým vektorem, který je na něj kolmý. Takové jednotkové vektory jsou zřejmě dva. Můžeme tedy tečné prostory charakterizovat pomocí těchto kolmých vektorů, které budeme nazývat jednotkové normály k dané ploše v daném bodě. Jsou zřejmě (až na výběr znaménka) určeny jednoznačně danou plochou.

Všimněte si, že tečný prostor je podprostor v $\mathbb{R}^3$, tj. vektory jsou umístěny v počátku, ale vektory z tečného prostoru $T_sS$ k ploše si kreslím umístěné do bodu $s$. Je možné tento rozdíl formalizovat tím, že podprostor $T_sS$ by byl definován jako koncové body tečných vektorů umístěných do bodu $s$, byl by to afinní podprostor v $\mathbb{R}^3$ (tj. podprostor, posunutý do bodu mimo počátek) a $T_sS$ by bylo jeho zaměření (tj. množina koncových bodů tečných vektorů, umístěných do počátku).

**Definice 4.3.1** *Je-li $T_sS$ tečný prostor v bodě $s$ k ploše $S$, pak existuje jednotkový vektor $\mathbf{N}$ tak, že*

$$T_sS = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} = 0.\}$$

*Vektor $\mathbf{N}$ je určen jednoznačně až na znaménko a nazývá se vektor jednotkové normály k ploše $S$ v bodě $s$.*

*Je-li $\mathbf{p}$ mapa na $S$, pak je normálový vektor $\mathbf{N}$ jednoznačně předpisem*

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|}.$$

*Dvě mapy pro tentýž bod mají stejnou jednotkovou normálu právě když determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě je kladný. V tom případě nazýváme tyto mapy souhlasně orientovanými. Pokud je determinant Jacobiho matice přechodového zobrazení v daném bodě záporný, nazveme mapy opačně orientovanými.*

*Atlas plochy nazveme orientovaným atlasem, pokud jsou všechny jeho mapy po dvou souhlasně orientované. Orientovaná plocha $S$ je plocha s orientovaným atlasem.*

*Orientovatelná plocha je plocha, pro kterou existuje orientovaný atlas.*

Z definice je vidět, že dvě mapy jsou souhlasně orientované právě když jim odpovídající normály splývají. Bylo by tedy možné orientaci zadávat volbou normály v každém bodě. Museli bychom ovšem požadovat aby toto pole jednotkových normál rozumně (aspoň spojitě) záviselo na volbě bodu z plochy. Definice orientace pomocí orientovaného atlasu je tedy jednodušší, tento požadavek je implicitně obsažen v definici atlasu.

Zvolím-li si mapu na orientovatelné ploše, pak mohu vzít maximální orientovaný atlas jako sjednocení všech souhlasně orientovaných map s vybraným atlasem. Podobně lze vzít množinu všech opačně orientovaných map, které opět dohromady tvoří orientovaný atlas (ověřte!).

Na orientovatelné ploše tedy existují dva disjunktní orientované atlasy, které na ploše zadávají dvě různé (opačné) orientace. Na neorientovatelné ploše žádný orientovaný atlas neexistuje.
**Cvičení.**
1) Ukažte, že sféra $S^2$ je orientovatelná plocha. Najděte orientovaný atlas na sféře tak, aby orientace sféry byla dána v každém bodě vnější normálou (tj. normálou směřující ven z koule o poloměru 1).
2) Nechť $S$ je (nekonečný) válec $S = S^1 \times \mathbb{R}$. Najděte jeho orientovaný altas tak, aby orientace byla dána vnější normálou.
3) Möbiův list je plocha, která vznikne z proužku papíru slepením jeho konců, z nichž jeden překroutíme o 180 stupňů. Popište Möbiův list jako plochu $S$ vnořenou v $\mathbb{R}^3$ ukažte, že není orientovatelná.

## 4.4 Hladké zobrazení mezi plochami, tečné zobrazení.

**Definice 4.4.1** *Nechť $S$ a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a $F$ zobrazuje $S$ do $\tilde{S}$. Řekneme, že je zobrazení $F$ hladké v bodě $s \in S$, pokud existuje mapa $(U, \mathbf{p})$ na $S$ obsahující bod $s$ a mapa $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ na $\tilde{S}$, obsahující bod $f(s)$ tak, že zobrazení $(\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ je hladké v bodě $(\mathbf{p})^{-1}(s)$.*

*Zobrazení $F$ je hladké na $S$, pokud je hladké v každém bodě $S$. Zobrazení $F$ je difeomorfismus $S$ na $\tilde{S}$, pokud je $F$ vzájemně jednoznačné a $F$ i $F^{-1}$ jsou hladké na svých definičních oborech.*

**Cvičení.** Rozmyslete si, že definice hladkosti v daném bodě je nezávislá na výběru map ve vzorech a obrazech.

**Definice 4.4.2** *Nechť $S$ a $\tilde{S}$ jsou dvě regulární plochy a $F$ zobrazuje $S$ do $\tilde{S}$. Pak pro každý bod $s \in S$ definujeme* **tečné zobrazení**

$$T_sF : T_sS \to T_{f(s)}\tilde{S}$$

*následujícím předpisem:*

*je-li $\mathbf{c}$ na $(-\varepsilon, \varepsilon)$ regulární křivka, $\mathbf{c}(0) = s$ a $\dot{\mathbf{c}}(0) = \mathbf{v} \in T_sS$, pak definujeme*

$$T_sF(\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(F \circ \mathbf{c})(0) \in T_{f(s)}\tilde{S}.$$

**Lemma 4.4.3** *1) Zobrazení $T_sF$ je dobře definované, tj. jeho hodnota nezávisí na výběry křivky, jejíž tečný vektor je vektor $s \in T_sS$.*
*2) Zobrazení $T_sF$ je lineární.*
*3) Pokud bod $s$ patří do mapy $(U, \mathbf{p})$ a bod $f(s)$ patří do mapy $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$, pak tyto mapy určují souřadnice vektorových prostorů $T_sS$ a $T_{f(s)}\tilde{S}$ a matice tečného zobrazení $T_sF$ vzhledem k těmto bazím je Jakobiho matice zobrazení $\bar{F} = (\tilde{\mathbf{p}})^{-1} \circ F \circ (\mathbf{p})$ v bodě $\mathbf{p}^{-1}(s)$.*

*Důkaz.*

Je-li $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{c}}(0)$, pak souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ vzhledem k bazi $(\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2})$ v tečném prostoru $T_sS$ jsou složky vektoru $(\dot{d}_1, \dot{d}_2)$, kde $d = \mathbf{p}^{-1} \circ \mathbf{c}$, $d = (d_1, d_2)$.

Tedy

$$(F \circ \mathbf{c})(t) = (F \circ \mathbf{p})(d_1(t), d_2(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\left[(F \circ \mathbf{p}) \circ d\right](0) = \dot{d}_1 \frac{\partial}{\partial u_1}(F \circ \mathbf{p}) + \dot{d}_2 \frac{\partial}{\partial u_2}(F \circ \mathbf{p}).$$

Obraz $T_F(\mathbf{v})$ tedy závisí jen na souřadnicích vektoru $\mathbf{v}$, ne na volbě křivky $\mathbf{c}$ a zobrazení $T_F$ je zřejmě lineární.

Souřadnice obrazu $T_F(\mathbf{v})$ v bazi indukované mapou $(\tilde{U}, \tilde{\mathbf{p}})$ spočteme takto. Podle definice musíme vypočítat souřadnice obrazů bazových vektorů v $T_sS$ vůči bazi v $T_{F(s)}\tilde{S}$. První vektor $\mathbf{v} = \mathbf{p}_{u_1}$ je určen křivkou $d(t) = (t, 0)$ a jeho obraz je

$$T_sF(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial u_1}[F \circ \mathbf{p}_1] = \frac{\partial}{\partial u_1}[\tilde{\mathbf{p}} \circ \bar{F}] = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{u}_1}\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{u}_2}\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial u_1}.$$

Stejně se vypočte obraz druhého vektoru baze. □

## 4.5 Délky křivek na ploše, 1. fundamentální forma plochy.

Zkoumání dvourozměrných ploch a jejich zobrazování pomocí map bylo odedávna jednou z nejdůležitějších lidských činností. Snahou bylo zachytit pomocí mapy daný kus zemského povrchu co nejpřesněji. Nejlépe tak, aby se všechny vzdálenosti věrně zachovaly na mapě. Uvidíme časem, že to je úkol příliš těžký. V tuto chvíli se naučíme měřit vzdálenosti na ploše.

Je třeba odlišit vzdálenosti měřené na ploše od vzdáleností bodů v příslušném prostoru, které jsou dány obvyklým vzorcem z Eukleidovské geometrie. Vzdálenost dvou bodů na ploše je, podle definice, infimum délek všech křivek, které leží na ploše a spojují tyto dva body. První, co se tedy musíme naučit, je počítat délky křivek, které leží na ploše.

Abychom mohli počítat délky křivek na ploše, musíme umět počítat délky jejich tečných vektorů a jejich úhly. Tečné vektory ovšem leží v příslušných tečných prostorech, je tedy třeba definovat skalární součin na těchto tečných vektorech. Tradiční způsob, odpovídající naší geometrické intuici, je zúžit skalární součin v Eukleidovském třírozměrném prostoru (ve kterém je plocha vnořena) na příslušný tečný prostor. To vede k následující definici.

**Definice 4.5.1** *Je-li dána plocha $S$ a její bod $s \in S$, pak definujeme skalární součin $I_s = g_s$ na $T_sS$ jako restrikci Eukleidovského skalárního součinu $(.,.)$ v $\mathbb{R}^3$ :*

$$I_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

*Tato restrikce se nazývá* **první fundamentální forma** *plochy $S$ v bodě $s \in S$.*

Chceme-li délku křivky spočítat podle údajů na mapě, tj. pomocí údajů, které definují příslušnou parametrizaci plochy a údajů, které charakterizují zvolenou křivku, pak můžeme postupovat takto.

Předpokládejme, že je dána mapa $(U, \mathbf{p})$, kde $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in \mathcal{O}$. Je-li $d(t) = (u_1(t), u_2(t)), t \in I$ rovinná křivka, jejíž obraz leží v $\mathcal{O}$, pak $\mathbf{c} = \mathbf{p} \circ d$ je křivka na ploše $< \mathbf{p} >$ .

Délka $l$ křivky $\mathbf{c}$ je dána vztahem $l = \int_I |\dot{\mathbf{c}}| d\tau$. Integrand vypočítáme takto:

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{u_1}\mathbf{p}_{u_1} + \dot{u_2}\mathbf{p}_{u_2}; |\dot{\mathbf{c}}|^2 = g_{11}(\dot{u_1})^2 + 2g_{12}\dot{u_1}\dot{u_2} + g_{22}(\dot{u_2})^2,$$

kde jsme funkce $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ proměnných $u_1, u_2$ definovali pomocí vztahů

$$g_{11} = (\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_1});\ g_{12} = g_{21} = (\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2});\ g_{22} = (\mathbf{p}_{u_2}, \mathbf{p}_{u_2}).$$

V klasické literatuře se tradičně používalo označení

$$g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G.$$

To vede k následující základní definici.

**Definice 4.5.2** *Je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa, pak se výraz*

$$\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} du_i\, du_j = E{du_1}^2 + 2F du_1 du_2 + G du_2^2$$

*tradičně nazývá první fundamentální forma plochy $S$ vyjádřená ve zvolených souřadnicích.*

*Matice*

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

*je pak maticí první fundamentální formy vůči bazi tečného prostoru odpovídající zvolené mapě. Pro libovolný vektor $A = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ definujeme hodnotu $I(A)$ první fundamentální formy*

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\alpha_i\alpha_j$$

**Poznámka.**

Předchozí výpočet ukazuje, že pokud počítáme délku křivky ve zvolených souřadnicích, stačí nám znát první fundamentální formu $I$, resp. její koeficienty $E, F, G$ vzhledem ke zvoleným souřadnicím. Množina $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ je tedy model pro plochu a první fundamentální forma $I$ umožnuje v tomto modelu počítat délky (resp. úhly nebo plochy).

**Příklad 4.5.3** *(1) Pokud je* $\mathbf{p} = \mathbf{a} + u\mathbf{b} + v\mathbf{c}$ *parametrizace roviny, pak* $\mathbf{p}_u = \mathbf{b}, \mathbf{p}_v = \mathbf{c}$ *a tedy*

$$E = |\mathbf{b}|^2,\ F = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ G = |\mathbf{c}|^2.$$

*Pokud* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$, *pak* $F = 0$. *Pokud* $|\mathbf{b}| = \mathbf{c}| = 1$, *pak* $E = G = 1$.
*(2) Jsou-li* $\theta, \varphi$ *obvyklé sférické souřadnice na jednotkové sféře, pak* $E = 1, F = 0$ *a* $G = \cos^2\theta$.
*(3) Zvolte si parametrizaci válce a spočítejte si tvar první fundamentální formy pro válec.*
*(4) Parametrický popis standardního kuželu je*

$$\mathbf{p}(v, \varphi) = (v\cos\varphi, v\sin\varphi, v);\ v \in (0, 1),\ \varphi \in (0, 2\pi).$$

*Příslušná první fundamentální forma je rovna* $2dv^2 + v^2 d\varphi^2$.

# Kapitola 5

# Druhá fundamentální forma plochy.

## 5.1 Gaussovo zobrazení, Weingartnerovo zobrazení.

**Definice 5.1.1** *Označme symbolem $S_2$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$. Předpokládejme, že $S$ je plocha a $N : S \to S_2$ je hladké zobrazení, které každému bodu $s \in S$ přiřadí jednotkovou normálu $N(s) \in S_2$. Zobrazení $N$ je tedy (spojité) pole jednotkových normál na ploše $S$.*

*Pak v každém bodě $s \in S$ existuje tečné zobrazení*

$$T_sN : T_s\,S \to T_{N(s)}\,S_2.$$

*Vzhledem k tomu, že oba tečné prostory $T_s\,S$ a $T_{N(s)}\,S_2$ jsou kolmé na normálu $N(s)$, musí platit $T_s\,S = T_{N(s)}\,S_2$. Tedy můžeme zobrazení $T_s\,N$ považovat za zobrazení z $T_s\,S$ do sebe.*

*Lineární zobrazení*

$$W_s := -T_s\,N : \, T_s\,S \to T_s\,S$$

*budeme nazývat Weingartenovo zobrazení.*

**Definice 5.1.2** *Předpokládejme, že $S$ je plocha a $N : S \to S_2$ je hladké zobrazení zadávající jednotkovou normálu v každém bodě $S$.*

*Druhá fundamentální forma $II_s$ plochy $S$ v bodě $s \in S$ je bilineární forma na $T_s\,S$ zadaná předpisem*

$$II_s(X, Y) := I_s(W_s(X), Y); \; X, Y \in T_s\,S.$$

*Pro jednoduchost budeme často index $s$ pro první a druhou fundamentální formu vynechávat a psát jenom $I$ nebo $II$.*

Druhá fundamentální forma je tedy bilineární forma na tečných prostorech. Následující lemma říká, že je to symetrická bilineární forma a jak se vypočítá v lokálních souřadnicích.

**Lemma 5.1.3** *Weingartnerovo zobrazení je samoadjungované, tedy druhá fundamentální forma je symmetrická bilineární forma. To znamená, že pro všechny $X, Y \in T_s\, S$ platí*

$$II(X,Y) = I(W(X),Y) = I(X,W(Y)) = II(Y,X).$$

*Je-li $(U, \mathbf{p})$ mapa na $S$ obsahující bod $s \in S$, pak má druhá fundamentální forma v lokálních souřadnicích daných bazí $\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2}$ tvar*

$$II(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\alpha_i\beta_j,$$

*kde*

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u_i \partial u_j}, N\circ\mathbf{p}\right),\ \mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{p}_{u_1} + \alpha_2\mathbf{p}_{u_2},\ \mathbf{v} = \beta_1\mathbf{p}_{u_1} + \beta_2\mathbf{p}_{u_2}.$$

*Důkaz.*

Nejdříve si rozmyslíme, jaký tvar má druhá fundamentální forma v lokálních souřadnicích. Připomeňme si, že tečné zobrazení $T_s\Phi$ k hladkému zobrazení $\Phi : S \to \tilde{S}$ je definováno nasledujícím způsobem. Uvažujme vektor $\mathbf{v}$ v tečném prostoru $T_sS$. Pak existuje křivka $\mathbf{c}$ v ploše $S$ pro kterou $\mathbf{c}(0) = s$ a $\frac{d}{dt}\mathbf{c}(0) = \mathbf{v}$. Obrazem $T_s\Phi(\mathbf{v})$ je pak tečný vektor $\frac{d}{dt}(\Phi\circ\mathbf{c})(0)$. V našem případě chceme najít obraz $T_sN(\mathbf{p}_{u_1})$. Předpkládejme, že $\mathbf{p}(u_1,u_2) = s$. Vektor $\mathbf{p}_{u_1} \in T_s\,S$ je tečný ke křivce $\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u_1+t, u_2)$ v bodě $s$. Obraz $T_sN(\mathbf{p}_{u_1})$ je tedy podle definice tečný ke křivce $N\circ\mathbf{c}(t)$. Tedy

$$T_sN(\mathbf{p}_{u_1}) = \frac{\partial}{\partial u_1}(N\circ\mathbf{p}).$$

Dostaneme tedy

$$W(\mathbf{p}_{u_1}) = -T_sN(\mathbf{p}_{u_1}) = -\frac{\partial}{\partial u_1}(N\circ\mathbf{p});\ W(\mathbf{p}_{u_2}) = -T_sN(\mathbf{p}_{u_2}) = -\frac{\partial}{\partial u_2}(N\circ\mathbf{p}).$$

Derivací vztahu

$$(\mathbf{p}_{u_i}, N\circ\mathbf{p}) = 0$$

který platí ve všech bodech plochy, dostaneme

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_j}(\mathbf{p}_{u_i}, N\circ\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u_i\partial u_j}, N\circ\mathbf{p}\right) - (\mathbf{p}_{u_i}, W(\mathbf{p}_{u_j})).$$

Tedy

$$h_{ij} = \left(\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u_i\partial u_j}, N\circ\mathbf{p}\right)$$

je matice druhé fundamentální formy vzhledem k bazi $\{\mathbf{p}_{u_1}, \mathbf{p}_{u_2}\}$.

Symetrie druhé fundamnetální formy plyne z jejího vyjádření v lokálních souřadnicích a ze záměnnosti druhých parciálních derivací.

□

V lokálních souřadnicích daných mapou $(U, \mathbf{p})$ značíme obvykle matici 1. fundamentální formy symbolem $G = (g_{ij})$, matici 2. fundamentální formy symbolem $H = (h_{ij})$ , a matici Weingartnerova zobrazení symbolem $W = (w_{ij})$. Z definice 2. fundamentální formy pak dostaneme (v daných souřadnicích) vztah

$$H = G \cdot W;\ W = G^{-1} \cdot H.$$

Často se druhá fundamentální forma plochy píše v symbolickém tvaru jako kvadratická forma

$$Ldu_1^2 + 2Mdu_1du_2 + Ndu_2^2;\ L = h_{11}, M = H_{12} = h_{21}, N = h_{22},$$

Diferenciály $du_1, du_2$ jsou formální výrazy, které nemají samostatný význam a označují jen proměnné v příslušné kvadratické formě.

Dá se odvodit, že druhá fundamentální forma na tečném prostoru se nemění při změně parametrizace, která zachovává orientaci (a tedy nemění $\mathbf{N}$). Na rozdíl od první fundamentální formy, která na parametrizaci zřejmě nezávisí, mění druhá fundamentální forma znaménko při parametrizaci, která mění orientaci. Druhá fundamentální forma se také nemění, pokud plochu v prostoru posuneme nebo otočíme. Obě tyto tvrzení lze dokázat přímo výpočtem změny formy $II$ při změně orientace nebo při složení parametrizace se shodností (je to užitečné domácí cvičení!). Až si uvedeme geometrickou interpretaci formy $II$ pomocí křivosti normálových řezů plochy, odvodíme tuto nezávislost na parametrizaci jiným způsobem.

**Příklad 5.1.4** *(1)*

*Ihned z definice plyne, že rovina má druhou fundamentální formu triviální. Je-li $\mathbf{p}(u, v) = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ její parametrizace, je zřejmě $\mathbf{p}_{uu} = \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vv} = 0$.*

*(2) Rotační plocha.*

*Předpokládejme, že je dána regulární parametrická křivka $x = f(s), z = g(s), s \in I$ v polorovině $z > 0$, t.j. předpokládejme, že $g(t) > 0$. Předpokládejme také, že jde o parametrizaci obloukem $(f'^2 + g'^2 = 1)$.*

*Rotační plocha je dána mapou*

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u));\ (u, v) \in I \times (0, 2\pi),$$

*resp. podobnou mapou pro $v \in (\pi, 3\pi)$. Pak*

$$\mathbf{p}_u(u, v) = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)),\ \mathbf{p}_v(u, v) = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),$$

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = (-fg'\cos v, -fg'\sin v, ff'),\ \mathbf{N} = (-g'\cos v, -g'\sin v, f');$$

$$\mathbf{p}_{uu}(u,v) = (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)), \mathbf{p}_{uv}(u,v) = (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0),$$

$$\mathbf{p}_{vv}(u,v) = (-f\cos v, -f\sin v, 0).$$

*Protože $E = f'^2 + g'^2 = 1$, $F = 0$, $G = f^2$ má první fundamentální forma tvar $I(\alpha,\beta) = \alpha^2 + f^2\beta^2$. Dále, $L = -f''g' + g''f'$, $M = 0$, $N = fg'$, tedy*

$$II(\alpha,\beta) = (-f''g' + g''f')\alpha^2 + fg'\beta^2.$$

*(3) Mezi speciální případy rotační plochy patří případy sféry:*

$$f = \cos u, g = \sin u;\ II(\alpha,\beta) = \alpha^2 + \cos^2 u\beta^2;$$

*a válce*

$$f = 1, g = u;\ II(\alpha,\beta) = \beta^2.$$

### 5.1.1 Normálová křivost, normálové řezy.

Zvolme bod $s$ plochy $S$ a jednotkový tečný vektor $\mathbf{v} \in T_P S$, $|\mathbf{v}| = 1$. Jednotková normála $\mathbf{N}$ určuje spolu s vektorem $\mathbf{v}$ rovinu $R$, která protíná plochu $S$ v křivce $\mathbf{c}$. Tuto křivku nazveme normálovým řezem ve směru $\mathbf{v}$.

Předpokládejme, že je $\mathbf{c} = \mathbf{c}(s)$ parametrizovaná obloukem tak, že $\mathbf{c}(0) = P, \mathbf{t} = \mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$. Frenetovu bazi v bodě $P$ ozmačíme $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Pro křivost $\kappa$ křivky $\mathbf{c}$ v bodě $P$ platí

$$\mathbf{c}''(0) = \kappa\mathbf{n},\ \kappa = \mathbf{c}''(0)\cdot\mathbf{n}.$$

Protože křivka $\mathbf{c}$ leží v rovině $R$, je zřejmě $\mathbf{N} = \pm\mathbf{n}$. Zvolme mapu $\mathbf{p}(u,v)$ na $S$, jejíž obraz obsahuje bod $P$ a pro kterou $\mathbf{N} = \mathbf{n}$.

Protože křivka $\mathbf{c}$ leží na ploše $S$, existují funkce $u_1 = u_1(s), u_2 = u_2(s)$ takové, že $\mathbf{c}(s) = \mathbf{p}(u_1(s), u_2(s))$. Pak

$$\mathbf{c}'(s) = \mathbf{p}_{u_1}u_1' + \mathbf{p}_{u_2}u_2';\ \mathbf{c}'' = \mathbf{p}_{u_1u_1}(u_1')^2 + 2\mathbf{p}_{u_1u_2}u_1'u_2' + \mathbf{p}_{u_2u_2}(u_2')^2$$

$$\mathbf{c}''\cdot\mathbf{N} = II(u_1', u_2').$$

To vede k následující definici.

**Definice 5.1.5** *Uvažujme regulární parametrickou plochu $S$, parametrizovanou zobrazením $\mathbf{p}$ a její bod $s$. Normálovou křivost $\kappa_n(\mathbf{v})$ ve směru $v \in T_sS, |\mathbf{v}| = 1$ definujeme vztahem*

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = II(\mathbf{v},\mathbf{v}) = h_{11}\alpha_1^2 + 2h_{12}\alpha_1\alpha_2 + h_{22}\alpha_2^2,$$

*kde $(\alpha_1,\alpha_2)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{v}$, tj. $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{p}_u + \alpha_2\mathbf{p}_v$.*

Z výpočtu před definicí plyne ihned, že normálová křivost $\kappa_n(\mathbf{v})$ je rovna, až na znaménko, křivosti normálového řezu ve směru $\mathbf{v}$. Rovnost platí pokud $\mathbf{N} = \mathbf{n}$; křivosti jsou opačné, pokud $\mathbf{N} = -\mathbf{n}$.

Z této geometrické interpretace druhé fundamentální formy plyne nezávislost této formy na změně parametrizace, která zachovává orientaci. Je také vidět, že druhá fundamentální forma mění znaménko, pokud změna parametrizace mění orientaci. Navíc je zřejmé, že posunutí nebo otočení plochy nemění druhou fundamentální formu.

### 5.1.2 Hlavní křivosti, hlavní směry.

Normálová křivost $\kappa_n(\alpha_1, \alpha_2) = II(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ je spojitá funkce na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$. Nabývá tedy svého maxima i minima. Hodnoty těchto extrémů a směry ve kterých se nabývají, jsou důležité geometrické informace o dané ploše.

**Definice 5.1.6** *Řekneme, že jednotkový tečný vektor* $\mathbf{v}$ *je hlavní směr plochy* $S$ *v bodě* $s \in S$, *pokud je to směr, ve kterém se nabývá extrém normálové křivosti* $\kappa_n$ *v bodě* $s$. *Odpovídající hodnota normálové křivosti se nazývá hlavní křivost.*

**Věta 5.1.7**
*(1) Předpokládejme, že číslo* $\lambda$ *je hlavní křivost plochy v bodě* $s \in S$ *a* $(U, \mathbf{p})$ *je mapa v okolí bodu* $s$. *Pak pro matice* $G$, *resp.* $H$ *první, resp. druhé fundamentální formy v bodě* $s$ *vzhledem k dané mapě platí*

$$\det \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = \det(H - \lambda G) = 0.$$

*Hlavní směry jsou pak řešení rovnice*

$$\begin{pmatrix} h_{11} - \lambda g_{11} & h_{12} - \lambda g_{12} \\ h_{21} - \lambda g_{21} & h_{22} - \lambda g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (H - \lambda G) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0.$$

*(2) Hlavní směry, resp. hlavní křivosti, jsou vlastní vektory, resp. vlastní čísla Weingartenovy matice*

$$W = G^{-1} H.$$

*Důkaz.*
(1) Vázané extrémy funkce $\kappa_n$ najdeme pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Snadno se zjistí, že

$$\nabla I(\alpha_1, \alpha_2) = 2G \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; \ \nabla II(\alpha_1, \alpha_2) = 2H \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Je-li $(\alpha_1, \alpha_2)$ kritický bod $\kappa_n$, pak

$$(H - \lambda G) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Rovnice pro hlavní křivosti je pak

$$\det(H - \lambda G) = 0.$$

(2) Tvrzení plyne z rovnosti

$$H - \lambda G = G \left( W - \lambda \mathbb{I} \right),$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotková matice. $\square$