# Obsah

# XVII Ještě k metrickým prostorům

## XVII.1 Užitečná věta o lepení spojitých zobrazení

**1.1** VĚTA: *Buďte $X_1, \dots, X_n$ uzavřené v $X$, buď $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$. Platí-li pro zobrazení $f : X \to Y$, že každé $f_j = f|X_j$ je spojité, je i $f$ spojité.*

**Důkaz:** Buď $M$ uzavřená v $Y$. Snadno ověříme, že

$$f^{-1}(M) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j^{-1}(M).$$

Jelikož každé $f_j$ je spojité, $f_j^{-1}(M)$ jsou uzavřené v $X_j$ (XII.2.2) a jelikož $X_j$ je uzavřená v $X$, je i $f_j^{-1}(M)$ uzavřená v $X$. A sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina. Užijte znovu XII.2.2. $\square$

**1.2** POZOROVÁNÍ:

1 *Tvrzení se obvykle užívá v konstrukcích v takovéto podobě: Jsou dána spojitá $f_j : X_j \to Y$, o kterých se zjistí (nebo předem ví), že pro $x \in X_j \cap X_k$ je vždy $f_j(x) = f_k(x)$. Potom se definuje zobrazení $f$ předpisem $f(x) = f_j(x)$ pro $x \in X_j$.*

2 *Oba předpoklady věty (uzavřenost množin $X$, konečnost rozkladu) jsou podstatné. Rozdělíme-li třeba $\langle 0, 1\rangle$ na $\langle 0, \frac{1}{2}$ a $\langle \frac{1}{2}, 1\rangle$, jistě není pravda, že zobrazení spojité na obou těchto intervalech by bylo spojité i na $\langle 0, 1\rangle$. Na druhé straně, jednobodové množiny jsou uzavřené a každé zobrazení je spojité na každém jednobodovém podprostoru.*

3 *Obdobná věta o otevřených množinách platí bez omezení počtu. Dokažte! Stačí jen projít důkaz věty* (1.1) *a podívat se, kde jsme konečnost použili.*

## XVII.2 Rozšiřování zobrazení (Tietzeovy věty)

**2.1** LEMMA: *Buď $(X, \rho)$ metrický prostor, $A$ libovolná podmnožina $X$. Potom definujeme $f(x) = \rho(x, A)$ spojité zobrazení $f : X \to \mathbb{R}$.*

**Důkaz:** Dokážeme, že dokonce platí

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \le \rho(x, y).$$

Skutečně zvolme $\varepsilon > 0$ a $a \in A$ tak, aby $\rho(x, a) \le f(x) + \varepsilon$. Potom

$$f(y) \le \rho(y, a) \le \rho(y, x) + \rho(x, a) < \rho(y, x) + f(x) + \varepsilon.$$

A tedy $f(y) - f(x) < \rho(x, y) + \varepsilon$. Záměnou $x$ a $y$ vidíme, že též $f(x) - f(y) < \rho(x, y) + \varepsilon$ a jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolně malé, dostáváme nerovnost $(*)$. $\square$

**2.2** VĚTA: *Buďte $A$, $B$ uzavřené disjunktní podmnožiny metrického prostoru $X$, buďte $\alpha$, $\beta$ reálná čísla. Potom existuje spojité $\varphi : X \to \mathbb{R}$ takové, že*

$$f[A] \subseteq \{\alpha\},\ f[B] \subseteq \{\beta\} \quad a \quad f[X] \subseteq \langle \min(\alpha,\beta), \max(\alpha,\beta)\rangle.$$

**Důkaz:** Položme

$$\varphi(x) = \alpha + (\beta-\alpha)\frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)}.$$

Jelikož $\rho(x,A)+\rho(x,B) \neq 0$ pro všechna $x$ (kdyby nastala rovnost, bylo by $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$; jenomže $A$ a $B$ jsou uzavřené a disjunktní) je $\varphi$ podle 2.1 (a II.6.3)) spojité. Že má požadované vlastnosti, se jednoduše ověří. □

**2.3** VĚTA: *(Tietzova věta o kompaktním intervalu) Buď $J$ kompaktní interval, $X$ metrický prostor, $A \subseteq X$ uzavřený podprostor. Každé spojité zobrazení $f : A \to J$ se dá rozšířit na $X$, t.j. existuje k němu spojité $g : X \to J$ takové, že $g|A = f$.*

**Důkaz:** Je-li $J$ jednobodový, je tvrzení triviální. Ostatní kompaktní intervaly jsou všechny navzájem homeomorfní (proč?) a stačí to tedy dokázat pro jeden z nich: Vezměme homeomorfismus $h : J \to J'$, nechť věta platí pro $J'$ a nechť $f : A \to J$ je spojité. Vezmeme $f' = h \circ f$, rozšíříme je na $g' : X \to J'$ a konečně položíme $g = h^{-1}g'$.

Bude se nám pohodlně pracovat s $J = \langle -1, 1\rangle$. Položme $A_1 = f^{-1}\left(\langle -1, -\frac{1}{3}\rangle\right)$, $B_1 = f^{-1}\left(\langle \frac{1}{3}, 1\rangle\right)$. Podle XII.2.2 jsou to uzavřené podmnožiny $A$ a jelikož $A$ je uzavřená v $X$, jsou $A_1$, $B_1$ uzavřené i v $X$. Podle 2.2 zvolme $\varphi_1 : X \to \mathbb{R}$ tak, aby

$$\varphi_1[A_1] = -\frac{1}{3},\ \varphi_1[B_1] = +\frac{1}{3} a \forall\, x \in X, |\varphi_1(x)| \leq \frac{1}{3}.$$

Vzhledem k volbě množin $A_1$, $B_1$ navíc zřejmě

$$x \in A \Rightarrow |f(x) - \varphi_1(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

Položme $f_1(x) = f(x) - \varphi_1(x)$.

Nechť jsou nalezena spojitá zobrazení $\varphi_k : X \to \langle -1, 1\rangle$, $k = 1, \dots, n$, a spojitá zobrazení $f = f_0, f_1, \dots, f_{n-1} : A \to \langle -1, 1\rangle$ taková, že

$$(*) \qquad \begin{array}{ll} |\varphi_k(x)| \leq \dfrac{1}{3^k}, & |f_{k-1}(x) - \varphi_k(x)| \leq \dfrac{2}{3^k}, \\ f_k(x) = & f_{k-1}(x) - \varphi_k(x). \end{array}$$

Položme

$$A_{n+1} = f_n^{-1}\left(\left\langle -\frac{1}{3^n}, -\frac{1}{3^{n+1}}\right\rangle\right),\ B_{n+1} = f_n^{-1}\left(\left\langle \frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right\rangle\right),$$

a podle 2.2 zvolme $\varphi_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ tak, aby

$$\varphi_{n+1}[A_{n+1}] \subseteq \left\{-\frac{1}{3^{n+1}}\right\},\ \varphi_{n+1}[B_{n+1}] \subseteq \left\{\frac{1}{3^{n+1}}\right\},$$

$$\text{a} \ \ \forall x \in X, |\varphi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Potom $|f_n(x) - \varphi_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{3^{n+1}}$.

Definujeme $f_{n+1} : A \to \langle -1, 1\rangle$ předpisem $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \varphi_{n+1}(x)$. Tak indukcí dostáváme

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots \quad a \quad f = f_0, f_1, \dots, f_k, \dots$$

splňující (∗) pro všechna $k$. Položme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x).$$

Podle XI.3.8 tato řada stejnoměrně konverguje, a tedy je (viz XI.3.3) $g$ spojitá funkce. Jelikož

$$|g(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot \frac{1}{3^k} = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 1,$$

můžeme se na ni dívat jako na zobrazení $g : X \to \langle -1, 1 \rangle$. Pro $x \in A$ máme

$$f(x) = \varphi_1(x) + f_1(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + f_2(x) = \cdots$$

$$\cdots = \varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) + f_n.$$

Jelikož $\lim_n f_n(x) = 0$, máme tedy pro $x \in A$, $f(x) = g(x)$. □

**2.4** VĚTA: *(Tietzova věta o reálné přímce) Buď $X$ metrický prostor, $A$ jeho uzavřený podprostor. Každé spojité zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$ se dá rozšířit na $X$.*

**Důkaz:** Stejně jako v předchozím důkazu můžeme $\mathbb{R}$ nahradit homeomorfním prostorem. Vezmeme za tím účelem otevřený interval $(-1, 1)$. Spojité zobrazení $f : A \to (-1, 1)$ můžeme na okamžik považovat za zobrazení do $\langle -1, 1 \rangle$ a to se podle předchozí věty dá rozšířit na $\overline{g} : X \to \langle -1, 1 \rangle$. Potíž je v tom, že toto $\overline{g}$ může nabývat hodnot $-1$ resp. 1, a tedy nemusí být takovým rozšířením, jaké jsme chtěli mít. To nyní spravíme. Položíme $B = \overline{g}^{-1}(\{-1, 1\})$. To je uzavřená množina (viz XII.2.2) a zřejmě je disjunktní s $A$ (na které se $\overline{g}$) shoduje s $f$. Tedy podle 2.2 existuje $\varphi : X \to \mathbb{R}$ taková, že $\varphi[A] \subseteq \{1\}$, $\varphi[B] \subseteq \{0\}$ a vždy $\varphi(x) \in \langle 0, 1 \rangle$. Položíme

$$g(x) = \overline{g}(x) \cdot \varphi(x).$$

Potom je $|g(x)| \leq 1$, pro $x \in A$ je $g(x) = \overline{g}(x) = f(x)$ a konečně $|g(x)| \neq 1$. Kdyby totiž $|g(x)| = 1$, muselo by být zároveň $|\overline{g}(x)| = 1$ a $\varphi(x) = 1$. Je-li však $|\overline{g}(x)| = 1$, je $\varphi(x) = 0$. □

## XVII.3 Separabilita

**3.1** Řekněme, že podmnožina $M$ metrického prostoru $X$ je *hustá*, jestliže $\overline{M} = X$. Prostor $X$ se nazývá *separabilní*, obsahuje-li (nejvýše) spočetnou hustou podmnožinu.

**Příklady:**

1 $\mathbb{R}$ je separabilní: množina racionálních čísel je v něm hustá.

2 Obecněji, $\mathbb{E}_n$ je separabilní: uvažte množinu všech $(x_1, \ldots, x_n)$, kde $x_j$ jsou racionální.

3 Buď $X$ nespočetná množina, definujeme $\rho(x, y) = 1$ pro $x \neq y$. Potom $(X, \rho)$ není separabilní.

**3.2** Z definice uzávěru snadno dostáváme

POZOROVÁNÍ: *$M$ je hustá v $X$ právě když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U$ platí $U \cap M \neq \emptyset$.*

**3.3 Ještě trochu terminologie:**

1 Soustava $\mathcal{B}$ otevřených množin prostoru $X senazývájehobází$, jestliže se každá otevřená podmnožina $U \subseteq X$ dá napsat jako sjednocení některých prvků $\mathcal{B}$. (PŘÍKLAD: Soustava všech $\Omega(x, \varepsilon)$, nebo již všech $\Omega(x, \frac{1}{n})$ je báze. Zamyslete se nad tím, proč.)

2 Soustava $\mathcal{U}$ (otevřených) množin prostoru $X$ se nazývá *(otevřené) pokrytí*, jestliže $\bigcup\{U \mid U \in \mathcal{U}\} = X$. Je-li $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ také pokrytí, hovoříme o něm jako o *podpokrytí* pokrytí $\mathcal{U}$, nebo o *pokrytí vybraném* z $\mathcal{U}$.

**3.4** VĚTA: *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) $X$ je separabilní*

*(ii) $X$ má spočetnou bázi.*

*(iii) Z každého pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí (t.z.v. Lindelöfova vlastnost).*

**Důkaz:** $(i) \Rightarrow (ii)$: Buď $M$ spočetná hustá podmnožina $X$. Položme $\mathcal{B} = \{\Omega(x, r) \mid x \in M, r \text{racionální}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{B}$ je báze. K tomu stačí ukázat, že *ke každé otevřené $U$ a každému $x \in U$ existuje $V = V(x, U) \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in V \subseteq U$.* (Potom je totiž $U = \bigcup\{V(x, U) \mid x \in U\}$.) Buď $U$ otevřené, $x \in U, \varepsilon > 0$ takové, že $\Omega(x, U) \subseteq U$. Zvolme racionální $r$ takové, že

$$\frac{1}{3}\varepsilon < r < \frac{2}{3}\varepsilon$$

a $y \in M \cap \Omega\left(x, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$. Potom zřejmě $x \in \Omega(y, r)$ a je-li $z \in \Omega(y, r)$, je $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \frac{1}{3}\varepsilon + r < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Buď $\mathcal{B}$ spočetná báze, $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí. Označme $\mathcal{B}_1$ množinu všech prvků z $\mathcal{B}$, které se objeví ve vyjádření kteréhokoli prvku z $\mathcal{U}$ jako sčítanec. Potom je $\bigcup \mathcal{B}_1 = \bigcup \mathcal{U} = X$. Ke každému $B \in \mathcal{B}_1$ zvolme $U_B \in \mathcal{U}$, $U_B \supseteq B$. Potom je $\mathcal{V} = \{U_B \mid B \in \mathcal{B}_1\}$ spočetné podpokrytí $\mathcal{U}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Pro každé $n$ je $\left\{\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in X\right\}$ pokrytí. Vyberme z něj vždy spočetné podpokrytí $\left\{\Omega\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid x \in M_n\right\}$. Položme $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. To je spočetná množina a zřejmě je, pro každé $y \in X$, $\rho(y, M) = 0$. $\square$

**3.5** VĚTA: *Podprostor separabilního prostoru je separabilní.*

**Důkaz:** Plyne snadno z 3.4.(ii): Buď $Y$ podprostor $X$, $\mathcal{B}$ báze prostoru $X$. Potom je podle XII.3.3.(1) systém $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ báze prostoru $Y$. $\square$

**Poznámka:** Přímo z definice je důkaz trochu obtížnější. Zkuste to jako cvičení!

## XVII.4 Další fakta o kompaktních prostorech

**4.1** Řekneme, že metrický prostor $(X, \rho)$ je *totálně omezený*, existuje-li pro každé $\varepsilon > 0$ konečná $M \subseteq X$ taková, že $X = \bigcup\{\Omega(x, \varepsilon) \mid x \in M\}$ (jinak řečeno, že pro každý $x \in X$ je $\rho(x, M) < \varepsilon$).

**Poznámka:** Zřejmě je každý totálně omezený prostor *omezený* v tom smyslu, že $\rho(x, y) \leq K$ pro nějaké pevné $K$ a libovolné $x$, $y$. Na druhé straně omezený prostor totálně omezený být nemusí: viz Příklad 3.1.3.

**4.2** VĚTA: *Buď $(X,\rho)$ totálně omezený, $f$ stejnoměrně spojité zobrazení $(X,\rho)$ na $(X,\sigma)$. Potom je $(Y,\sigma)$ totálně omezený. Následkem toho stejnoměrné homeomorfizmy a speciálně náhrada metriky metrikou stejnoměrně ekvivalentní totální omezenost zachovávají.*

**Důkaz:** K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ tak, aby $\rho(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Buď $M \subseteq X$ konečná taková, že $\bigcup_{x\in M}\Omega(x,\delta) = X$. Potom je $\bigcup_{x\in M}\Omega(f(x),\varepsilon) = Y$. □

**Poznámka:** Obecné homeomorfizmy nezachovávají ani omezenost.

**4.3** VĚTA: *Podprostor totálně omezeného prostoru je totálně omezený.*

**Důkaz:** Buď $X$ totálně omezený, $Y \subseteq X$, $\varepsilon > 0$. Zvolme $M \subseteq X$ tak, aby $\bigcup_{x\in M}\Omega\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) = X$. Pro $x \in M$ zvolme $\overline{x} \in \Omega(x,\frac{\varepsilon}{2}) \cap Y$, pokud je tato množina neprázdná, jinak nic. Označme $N$ množinu takto vybraných $\overline{x}$. Zřejmě je $\bigcup_{y\in N}\Omega_Y(y,\varepsilon) = Y$. □

**4.4** VĚTA: *Podprostor $\mathbb{E}_n$ je omezený právě když je totálně omezený.*

**Důkaz:** Vzhledem k 4.3 stačí dokázat, že součiny omezených intervalů jsou totálně omezené. V omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$ najdeme snadno požadovanou množinu k danému $\varepsilon > 0$, třeba $\left\{a + \frac{k}{n}(b-a) \mid k = 0,1,\dots,n\right\}$ pro dost velké $n$. V součinu užijeme kartézské součiny těchto množin a odkážeme se na 4.2 a metriku $\sigma$ z XII.2.6. □

**4.5** VĚTA: *Každý totálně omezený prostor je separabilní.*

**Důkaz:** Ke každému $n$ zvolme konečnou $M_n$ tak, aby $\rho(x,M_n) < \frac{1}{n}$ pro každé $x$. Potom je zřejmě $M\bigcup M_n$ spočetně hustá. □

**4.6** VĚTA: *Metrický prostor je totálně omezený, právě když je z každé posloupnosti možno vybrat podposloupnost cauchyovskou.*

**Důkaz:** Nechť $X$ je totálně omezený, zvolme konečné $M_k$ takové, že $\bigcup\left\{x,\frac{1}{k} \mid x \in M_k\right\} = X$. Buď $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ libovolná posloupnost v $X$. Popíšeme proceduru, pomocí níž je možno vybrat cauchyovskou podposloupnost. Jelikož $M_1$ je konečná, je pro některé $y \in M_1$ v nekonečně mnoha případech $x_n \in \Omega(x, M_1)$. Buď $n = k_1$ první index, pro nějž to nastane.

Mějme již nalezeny indexy $k_1 < \dots < k_n$ a $y_r \in M_r$ $(r1,\dots,n)$ tak, že vždy pro nějakou nekonečnou množinu $K_r$ indexů platí

$$\{x_{k_r}, x_{k_{r+1}}, \dots, x_{k_n}\} \cup \{x_k \mid k \in K_r\} \subseteq \Omega\left(y_r, \frac{1}{r}\right).$$

Jelikož $M_{n+1}$ je konečná, existuje $y_{n+1} \in M_{n+1}$ tak, že $K_{n+1} = \{k \in K_n \mid x_k \in \Omega\left(y_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)\}$ je zase nekonečná. Vyberme $k_{n+1}$ jako první z $K_{n+1}$, které je za $k_n$. Touto procedurou dostáváme podposloupnost

$$x_{k_1}, \dots, x_{k_n}, \dots\ ,$$

která má tu vlastnost, že pro $m,n \geq n_0$ je $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) \leq \frac{1}{n_0}$ a tedy je cauchyovská. Nechť $X$ není totálně omezený. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $M \subseteq X$ je $X \setminus \bigcup_{x\in M}\Omega(x,\varepsilon) \neq 0$. Zvolme $x_1$ libovolně a máme-li již $x_1, \dots, x_n$ nalezeny tak, aby $\rho(x_j,x_k) \geq \varepsilon$ pro $j \neq k$ zvolme dále $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n}\Omega(x_k,\varepsilon)$. V takto získané $x_1,\dots,x_n,\dots$ platí obecně $\rho(x_j,x_k) \geq \varepsilon$ pro $j \neq k$ a tedy tam žádná cauchyovská podposloupnost není. □

**4.7** VĚTA: *Metrický prostor je kompaktní právě když je úplný a totálně omezený.*

**Důkaz:** Je-li kompaktní, je úplný podle XII.6.2 (a XII.6.3), a podle 4.6 je totálně omezený (můžeme vybrat dokonce konvergentní podposloupnost). Je-li totálně omezený a úplný, můžeme z dané posloupnosti podle 4.6 vybrat podposloupnost cauchyovskou, a ta vzhledem k úplnosti konverguje. □

**4.8** VĚTA: *(Heine—Borelova) Metrický prostor je kompaktní právě když se z každého pokrytí dá vybrat konečné podpokrytí.*

**Důkaz:** I Nechť v $X$ platí tvrzení o pokrytích. Nechť posloupnost $(x_n)_n$ nemá konvergentní podposloupnost. Tedy žádný bod $y \in X$ není limitou podposloupnosti naší $(x_n)_n$ a tedy pro každé $y$ existuje $\varepsilon(y) > 0$ takové,že $\Omega(y, \varepsilon(y))$ obsahuje $x_n$ jen pro konečný počet indexů $n$. Z pokrytí $\{\Omega(y, \varepsilon(y)) \mid y \in X\}$ vybereme konečné $\{\Omega(y_j, \varepsilon(y_j)) \mid j = 1, \dots, k\}$. Každý z $x_n$ musí být v některé $\Omega(y_j, \varepsilon(y_j))$, ty však dohromady obsahují $x_n$ jen s konečně mnoha indexy—spor.

II Nechť $X$ je kompaktní. Podle 4.6 a 4.5 je separabilní a podle 3.4 je tedy možno z každého pokrytí vybrat spočetné. Stačí tedy dokázat, že z každého spočetného pokrytí lze vybrat konečné. Nechť tomu tak není, buď

$$U_1, \dots, U_n, \dots$$

pokrytí, z něhož konečné vybrat nelze. Vybírejme z něho podle následující procedury: $V_1$ je první $U_k$, které je neprázdné. Jsou-li již $V_1, \dots, V_n$ nalezeny, bude $V_{n+1}$ první $U_k$, které není celé obsaženo v $\bigcup_{j=1}^{n} V_j$. Nová posloupnost

$$V_1, \dots, V_n, \dots$$

nadále pokrývá celý prostor (vynechávali jsme jen ty z $U_k$, které již stejně byli předchozími pokryty) a nyní je již $V_n \setminus \bigcup_k^{n-1} V_k$ vždy neprázdná. Vyberme tam vždy bod $x_n$. Z posloupnosti $(x_n)_n$ vyberme konvergentní podposloupnost s limitou $x$. Tato limita $x$ musí ležet v některém $V_n$. A je to spor, protože $V_n$ je okolí bodu $x$, které zaručeně neobsahuje žádné $x_k$ pro $k \geq n$. □

## XVII.5 Ještě dvě věci k úplným prostorům

**5.1** Připomeňme si definici prostoru $F(X)$ z XII.1.2.4 a $C(X)$ z XII.2.9. Uvědomme si též, že vzhledem k XII.5.9, *v případě kompaktního $X$ je $C(X)$ prostor všech spojitých funkcí na $X$* (všechny jsou totiž omezené).

VĚTA: *$F(X)$ i $C(X)$ jsou úplné prostory.*

**Důkaz:** Vzhledem k XII.6.5 a XII.2.9 stačí tvrzení dokázat pro $F(X)$. Buď $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ cauchyovská posloupnost v $F(X)$. Tedy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tak, že pro } m, n \geq n_0 \text{ je } \sup_x |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

a následkem toho pro každé $x$ platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \text{ tak, že pro } m, n \geq n_0 \text{ je } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

tedy každá $(f_n(x))_n$ je cauchyovská a jelikož $\mathbb{R}$ je úplný, má nějakou limitu $f(x)$. Tak dostáváme novou reálnou funkci $f$ na $X$. Ukážeme, že je limitou původní posloupnosti v $F(X)$.

Vezměme $\varepsilon > 0$, zvolme k němu $n_0$ podle $(*)$ a vezměme $n \geq n_0$. Vezměme $x \in X$ libovolné ale pevné. Pro $m \geq n_0$ máme

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

a tedy v limitě
$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$
Jelikož $x$ bylo libovolné, znamená to, že $\rho(f_n, f) \le \varepsilon$ $\square$

**5.2** Důsledek: *Buďte $a$, $b$ reálná čísla. Podprostor*
$$Y = \{\, f \mid f \in C(X), \forall\, x\ a \le f(x) \le b \,\} \subseteq C(X)$$
*je úplný.*

**Důkaz:** Je totiž zřejmě uzavřený v $C(X)$. Užijte opět XII.6.5. $\square$

**5.3** Věta: *(Banachova věta o pevném bodě) Buď $(X, \rho)$ úplný, buď $0 \le \lambda < 1$, buď $f : (X, \rho) \to (X, \rho)$ zobrazení takové, že*
$$\forall\, x, y\ \rho\,(f(x), f(y)) \le \lambda \cdot \rho(x, y).$$
*Potom existuje právě jedno řešení rovnice $f(x) = x$.*

**Důkaz:** Zvolme libovolný bod $x_0$ a definujme $x_n$ indukcí předpisem $x_{n+1} = f(x_n)$. Máme
$$\rho(x_{n+1}, x_n) \le \lambda\rho(x_n, x_{n-1}) \le \lambda^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \le \cdots$$
a tedy $\rho(x_{n+1}, x_n) \le \lambda^n\rho(x_1, x_0)$. Označme $\rho(x_1, x_0) = K$. Je tedy $\rho(x_{n+1}, x_n) \le K\lambda^n$ a dále
$$\begin{aligned}\rho(x_{n+r}, x_n) &\le \rho(x_{n+r}, x_{n+r-1}) + \rho(x_{n+r-1}, x_{n+r-2}) + \cdots + \rho(x_{n+1}, x_n) \le \\ &\le K(\lambda^{n+r-1} + \lambda^{n+r-2} + \cdots + \lambda^n + 1 + \lambda^n) = \\ &= K\lambda^n(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{r-1}) \le \frac{K}{1-\lambda} \cdot \lambda^n.\end{aligned}$$
Posloupnost $(x_n)_n$ je tedy cauchyovská a má tedy nějakou limitu $x$. Máme
$$f(x) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x.$$
Je-li $f(x) = x$ a $f(y) = y$, je $\rho(x, y) \le \lambda\rho(x, y)$ a to je možné jen když $\rho(x, y) = 0$, t.j. $x = y$. $\square$

# XVII.6 Souvislost

**6.1** Jde o to, zachytit intuitivní představu toho, zda prostor „drží“ pohromadě, nebo ne. To bude učiněno v pojmech *souvislosti* (zachytíme představu „nerozpadání se na dvě nebo více oddělených částí“) a silnějším pojmu *obloukové souvislosti* (zachycujícím představu možnosti přechodu beze skoků mezi kterýmikoli dvěma body).

**6.2** Definice: Říkáme, že podmnožina $M$ prostoru $X$ je obojetná, je-li zároveň otevřená i uzavřená. V každém prostoru $X$ existují obojetné množiny, totiž $\emptyset$ a $X$. Říkáme, že neprázdný prostor $X$ je *souvislý*, jsou-li v něm právě dvě obojetné množiny ($\emptyset$ a $X$, a už žádné další). Jinak mluvíme o prostoru *nesouvislém*

**Poznámky:**

1 Všimněte si, že prázdný prostor nepovažujeme za souvislý. To má dobré důvody. Nejde jen o to, že tam je obojetná množina jen jedna, nikoli dvě, jak je v definici požadováno. S méně formálním důvodem se setkáme v 6.8.

2 Připomeňte si XII.1.8. Definici souvislosti můžeme přeformulovat takto. Neprázdný prostor je souvislý právě když jej nelze napsat jako sjednocení $A \cup B$ dvou disjunktních otevřených množin. (V této formulaci můžeme samozřejmě nahradit slovo „otevřených“ slovem „uzavřených“.)

**6.3** Připomeňte si úmluvu XII.3.5. V jejím smyslu budeme mluvit o *souvislých nebo nesouvislých podmnožinách* nějakého prostoru. Řekneme, že podmnožiny $A$, $B$ prostoru $X$ jsou *oddělené*, platí-li

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$

VĚTA: *Neprázdná podmnožina metrického prostoru je souvislá právě když se nedá napsat jako sjednocení dvou neprázdných oddělených množin.*

**Důkaz:** I Nechť $Y \subseteq X$ je souvislá, nechť $Y = A \cup B$, kde $A$, $B$ jsou oddělené. Položme $U = X \setminus \overline{B}$, $V = X \setminus \overline{A}$. Tedy je zřejmě $A = Y \cap U$, $B = Y \cap V$; $A$, $B$ jsou tedy otevřené v $Y$, zřejmě disjunktní. Tedy je jedna z nich prázdná.

II Nechť $Y \subseteq X$ je nesouvislá, nechť $Y = A \cup B$, kde $A$, $B$ jsou neprázdné, disjunktní a otevřené v $Y$. Buďte $U$, $V$ otevřené v $X$ takové, že $A = Y \cap U$, $B = Y \cap V$. Tedy je $A \subseteq X \setminus V$ a jelikož $X \setminus V$ je uzavřená, $\overline{A} \subseteq X \setminus V$. Tedy $\overline{A} \cap V = \emptyset$ a tím spíš $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Podobně $A \cap \overline{B} = \emptyset$. □

**6.4** VĚTA: *Podprostor přímky* $\mathbb{R}$ ($\equiv \mathbb{E}_1$) *je souvislý právě když je to neprázdný interval.*

**Důkaz:** I Nechť $X \subseteq \mathbb{E}_1$ není interval. Existují tedy $a < b < c$ takové, že $a, c \in X$ a $b \notin X$. Potom je

$$X = (X \cap (-\infty, b)) \cup (X \cap (b, +\infty))$$

a oba sčítance jsou neprázdné otevřené.

II Buď $X \subseteq \mathbb{E}_1$ interval, nechť $X = A \cup B$, kde $A$, $B$ jsou disjunktní uzavřené (v $X$). Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat existenci bodů $a \in A$, $b \in B$ takových, že $a < b$ (jinak přeznačíme). Položme

$$s = \sup\{\, x \mid x \in A, a \leq x < b \,\}.$$

Zřejmě je $a \leq s \leq b$ a tedy $s \in X$. Z definice suprema vidíme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ je $(s - \varepsilon, s\rangle \cap A \neq \emptyset$, z čehož okamžitě plyne, že $s \in \overline{A}$. Ale zřejmě je též pro libovolné $\varepsilon > 0$ $\langle s, s + \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ (body z $A$ již za $s$ až do $b$ neleží, někde však ležet musí, v $X$ jsou). Tedy též $s \in \overline{B}$. Ale $s$, který je v $X$, leží buď v $A$ nebo v $B$ a tedy v $A \cap \overline{B}$ nebo v $B \cap \overline{A}$. $A$ a $B$ tedy nejsou oddělené—spor. □

**6.5** VĚTA: *Buď* $f : X \to Y$ *spojité zobrazení,* $M$ *souvislá podmnožina* $X$*. Potom* $f[M]$ *je souvislá.*

**Důkaz:** Po přechodu k podprostorům stačí dokázat, že je-li $f : X \to Y$ spojité na a je-li $X$ souvislý, je souvislý i $Y$. A skutečně: Kdyby bylo možno $Y$ napsat jako $A \cup B$, $A$, $B$ disjunktní neprázdné otevřené, měli bychom $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ s disjunktními neprázdnými otevřenými (XII.2.2) sčítanci. (Kontrolní otázka: Kde jsme užili toho, že $f$ je na?) □

**6.6** VĚTA: *Uzávěr souvislé podmnožiny je souvislý.*

**Důkaz:** Buď $M \subseteq X$ souvislá. Po přechodu k podprostorům stačí dokázat, že je-li $\overline{M} = X$, je $X$ souvislý. Nechť $X = A \cup B$, $A$, $B$ otevřené disjunktní. Tedy $M = (M \cap A) \cup (M \cap B)$ s (v $M$) otevřenými disjunktními sčítanci. Je tedy dejme tomu $B \cap M = \emptyset$, tedy $M \subseteq A$, ale jelikož $A$ je uzavřená, je též $X = \overline{M} \subseteq A$. □

**6.7** VĚTA: *Nechť* $X = \bigcup\{\, M_i \mid i \in J\,\}$ *a nechť* $M_i$ *jsou souvislé podmnožiny* $X$ *takové, že ke každým dvěma* $M_i$, $M_j$ *existují* $i_1, \dots, i_n \in J$ *takové, že*

$$i_1 = 1, i_n = j \quad a\ M_{i_k} \cap M_{i_{k+1}} \neq \emptyset \quad pro\ k = 1 \dots, n-1.$$

*Potom* $X$ *je souvislý.*

**Důkaz:** Buď $X = A \cup B$, $A$, $B$ disjunktní otevřené. Jelikož $M_i$ je souvislá a rovna $(A \cap M_i) \cup (B \cap M_i)$, musí být buď $M_i \subseteq A$ nebo $M_i \subseteq B$. Nechť je dejme tomu nějaké pevné $M_i \subseteq A$. Pro libovolné $j$ nalezněme $i_1, \dots, i_n$ podle předpokladu věty. Je-li $M_{i_k} \subseteq A$, je i $M_{i_{k+1}} \subseteq A$, protože má s $A$ neprázdný průnik. Jelikož je ale $M_{i_1} = M_i \subseteq A$, jsou $\subseteq A$ všechny, a tedy i $M_{i_n} = M_j$. Máme tedy $X = \bigcup M_j \subseteq A$ a $B = \emptyset$. $\square$

**6.8** VĚTA: *Součin* $X_1 \times \dots \times X_n$ *metrických prostorů je souvislý prostor právě když jsou všechny* $X_j$ *souvislé.*

**Důkaz:** I Nechť $X_j$ jsou souvislé. Tvrzení samozřejmě (proč?) stačí dokázat pro $n = 2$. Máme

$$X_1 \times X_2 = \bigcup\{\, X_1 \times \{x\} \mid x \in X_2\,\} \cup \{\{x_0\} \times X_2\}.$$

Užijte 6.7.

II Je-li $X = X_1 \times \dots \times X_n$ souvislý, vezměme projekce $p_j : X \to X_j$. Jsou-li $X_k$ neprázdné, jsou $p_j$ zobrazení na a tedy jsou souvislé podle 6.5. $\square$

DEFINICE: Řekněme, že neprázdný prostor $X$ je *obloukově souvislý* (někdy se též říká *křivkově souvislý*), existuje-li ke každým dvěma bodům $x, y \in X$ spojité zobrazení

$$\varphi : I = \langle 0, 1\rangle \to X$$

takové, že $\varphi(0) = x$ a $\varphi(1) = y$. (O zobrazení $\varphi$ někdy mluvíme jako o *křivce* nebo o *cestě* spojující body $x$ a $y$).

**6.9** VĚTA: *Obloukově souvislý prostor je souvislý.*

**Důkaz:** Zvolme pevně $x_0 \in X$ a ke každému $x \in X$ křivku $\varphi_x$ takovou, že $\varphi_x(0) = x_0$ a $\varphi_x(1) = x$. Položme $M_x = \varphi_x[I]$. Podle 6.5 a 6.4 je každá $M_x$ souvislá. Zřejmě $M_x \cap M_y \ni x$ a $\bigcup M_x = X$. Tedy je $X$ souvislý podle 6.7. $\square$

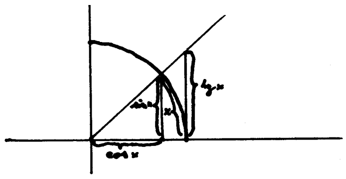
**6.10** VĚTA: *Buď* $f : X \to Y$ *spojité, buď* $M \subseteq X$ *obloukově souvislá podmnožina* $X$. *Potom je i* $f[M]$ *obloukově souvislá.*

**Důkaz:** Buďte $x', y' \in f[M]$, $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, $x, y \in M$. Nechť $\varphi : I \to M$ spojuje $x$ a $y$. Potom $f \circ \varphi$ spojuje $x'$ a $y'$. $\square$

**6.11** Souvislá množina obloukově souvislá být nemusí. Vezměme třeba $X = J \cup S$, podmnožinu $\mathbb{E}_2$, kde $S$ je graf funkce $\sin \frac{1}{x}$ pro $x > 0$ a $J = \{\, (0, x) \mid -1 \leq x \leq 1\,\}$ (viz obrázek XVII.1). Zřejmě $S$ je souvislá (viz 6.5 a 6.4) a tedy $X = \overline{S}$ je podle 6.6 souvislý též. Zkuste však spojit bod na $J$ s bodem na $S$ křivkou (ujasněte si, proč to nejde udělat!). Platí však

VĚTA: *Souvislý otevřený prostor v* $\mathbb{E}_n$ *je obloukově souvislý.*

**Důkaz:** Buď $X \subseteq \mathbb{E}_n$ otevřená souvislá. Pro $x \in X$ označme $A(x)$ podmnožinu $X$ sestávající z těch bodů, které lze v $X$ spojit s $x$ křivkou. Pozorujeme:



Obr. XVII.1:

(a) Je-li $x$ možno spojit křivkou s $y$ a $y$ se $z$, je možno spojit $x$ se $z$. (Nechť $\varphi_1 : I \to X$, $\varphi_2 : I \to X$ jsou spojité takové, že $\varphi_1(0) = x$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0) = y$ a $\varphi_2(1) = z$. Definujeme $\varphi : I \to X$ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t) & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi_2(2t-1) & \text{pro } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .)$$

(b) $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ nebo $A(x) = A(y)$ (užijte $(a)$).

(c) Každá $A(x)$ je otevřená. Skutečně, buď $y \in A(x)$. Pro dost malé $\varepsilon > 0$ je $K = \Omega(y, \varepsilon) \subseteq X$ (tady užíváme toho, že $X$ je otevřená). Každý prvek $z \in K$ je možno spojit s $y$, totiž křivkou

$$\varphi(t) = y + t(z - y)$$

a tedy, opět podle $(a)$, $K \subseteq A(x)$. Vezměme nyní libovolné $x \in X$. Máme

$$X = A(x) \cup \bigcup \{A(y) \mid A(y) \cap A(x) = \emptyset\} .$$

To je sjednocení dvou disjunktních otevřených množin, jelikož je ale $A(x) \neq \emptyset$ a $X$ souvislý, je druhý sčítanec prázdný, a tedy $X = A(x)$. $\square$

# XVIII Soustavy (obyčejných) diferenciálních rovnic

## XVIII.1 Úloha

**1.1** Soustavou obyčejných diferenciálních rovnic rozumíme úlohu najít funkce $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ takové, že platí

$$y_k' = f_k(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{XVIII.1}$$

Slovem „obyčejné“ se dává najevo, že v úloze se vyskytují jen derivace funkcí jedné proměnné, nikoli derivace parciální.

Užitím vektorové symboliky můžeme samozřejmě úlohu zapsat jednodušeji jako

$$\vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)).$$

**1.2** Obecněji se můžeme setkat se soustavami, v nichž jde o derivace vyšších řádů. Třeba:

$$\begin{aligned} y_1^{(4)} &= f_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'', y_1''', y_2'''), \\ y_1''' &= f_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2', y_1'', y_2'', y_1'''). \end{aligned} \tag{XVIII.2}$$

Ty je ale možno na úlohy typu (XVIII.1) snadno převést. Například tuto konkrétní úlohu takto:

Zavedeme označení

$$z_1 = y_1, z_2 = y_2, z_3 = y_1', z_4 = y_2', z_5 = y_1'', z_6 = y_2'', z_7 = y_1''',$$

a místo (XVIII.2) řešíme úlohu

$$z_1' = z_3, z_2' = z_4, z_3' = z_5, z_4' = z_6, z_5' = z_7,$$

$$z_6' = f_2(x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7),$$

$$z_7' = f_1(x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, f_2(x, z_1, \ldots, z_7)),$$

která již typu (XVIII.1) je. Ujasněte si, že obdobně je možno postupovat ve značně obecné třídě úloh.

**1.3** Zejména do této třídy spadá případ jedné diferenciální rovnice $n-$tého řádu

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Ta se především pomocí věty o implicitních funkcích převádí (lokálně, a tam, kde to podmínky věty dovolí) na

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)});$$

Nyní můžeme položit

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)},$$

a máme soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

**1.4** Překlady z 1.2 a 1.3 slouží především teoretickým účelům (jako je otázka existence a jednoznačnosti řešení). K nalezení konkrétních řešení se obvykle užívá příjemnějších metod.

**1.5 Poznámka k symbolice:** Rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$ se běžně zapisuje tak, jak jsme to již v 1.2 – 1.3 dělali, ve tvaru $y' = f(x, y)$ a $y$ zde vystupuje ve dvou rolích: jako označení proměnné ve funkci $f(x, y)$ dvou proměnných, a jako funkce $y(x)$. Tato nedůslednost jistě nikoho nemate a zápis se značně zjednodušuje.

**1.6** Diferenciální rovnice a jejich soustavy hrají zásadní roli v řadě aplikací. Zde není místo na to, abychom o tom podrobně pojednávali. Zmíníme se ale o zřejmé geometrické interpretaci:

Vezměme třeba rovnici $y' = f(x, y)$. Funkce $f(x, y)$ určuje v každém bodě svého definičního oboru směr; grafy hledaných funkcí jsou křivky, které v každém bodě sledují takto předepsané směry. Viz obrázek:

## XVIII.2 Převedení diferenciální soustavy na soustavu integrální.

**2.1** VĚTA: *Buďte $\eta_1, \dots, \eta_n$ reálná čísla. Funkce $y_1, \dots, y_2$ řeší na intervalu $(a, b)$ obsahující bod $x_0$ soustavu*

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \qquad j = 1, \dots, n$$

*a splňují při tom podmínky $y_j(x_0) = \eta_j$ právě když vyhovují rovnicím*

$$y_j(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t), \dots, y_n(t))\, dt + \eta_j$$

**Důkaz:** Nechť funkce vyhovují první úloze. Potom podle je

$$y_j(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t), \dots, y_n(t))\, dt + c_j,$$

kde $c_j$ jsou nějaké konstanty. Dosazením $x = x_0$ se anuluje integrál napravo a dostáváme $\eta_j = y_j(x_0) = c_j$. Na druhé straně, splňují-li funkce druhou úlohu, dostáváme derivací integrálu podle horní meze

$$y_j'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$$

a dosazením $x_0$ za $x$ zjistíme, že $y_j(x_0) = \eta_j$. $\square$

**2.2** V podstatě triviální obrat z 2.1 má dalekosáhlé důsledky. Ilustrujme si to na případě jedné rovnice

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Označme $D$ operátor derivace, $F$ operátor přiřazující funkci $y(x)$ funkci $F(y)(x) = f(x, y(x))$. Jde tedy o nalezení funkce $y$ takové, že

$$D(y) = F(y).$$

Tedy, chceme-li, funkce v níž operátor $D - F$ nabývá hodnoty $o$ (konstantní nulové funkce). Při běžné metrice v prostoru funkcí (viz. XII.2.9) je ale $D$ nespojité zobrazení (pro funkce libovolně blízké se mohou derivace velice lišit – viz obrázek)

a taková nespojitost neslibuje pro řešení rovnic v metrických prostorech nic dobrého. Na druhé straně, definujeme operátor $J$ předpisem

$$J(y)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt + \eta.$$

Je-li $f$ jen trochu rozumná, jsou při malých změnách argumentu $y$ i změny hodnost $J(y)$ malé. Nadto je nová úloha, hledání $y$ takového, že $y = J(y)$, úloha nalezení pevného bodu, o níž již něco víme (viz XVII.5.3).

## XVIII.3 Lipschitzova vlastnost a řešení integrální úlohy.

**3.1** Buď $f(x, y_1, \dots, y_n)$ funkce $n+1$ proměnných. Řekneme, že $f$ je *Lipschitzovská* v proměnných $y_1, \dots, y_n$, existuje-li číslo $M$ takové, že platí

$$|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)| \le M \cdot \max |y_i - z_i|.$$

Existuje-li ke každému bodu okolí $U$ takové, že $f|U$ je Lipschitzovská, říkáme, že je $f$ *lokálně Lipschitzovská.*

**3.2** Uvědomme si, že má-li $f$ spojité parciální derivace podle proměnných $y_1, \dots, y_n$, je v těchto proměnných lokálně Lipschitzovská:

Skutečně vezměme číslo $M$ takové, že v nějakém okolí daného bodu platí

$$\left| \frac{\partial f(f(x, y_1, \dots, y_n))}{\partial y_j} \right| \le \frac{M}{n}.$$

Potom tam máme (viz XIII.3.4)

$$|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, z_1, \dots, z_n)| = \left| \sum_j \frac{\partial f(\dots)}{\partial y_j}(y_j - z_j) \right| \le$$

$$\leq \sum \left| \frac{\partial f(\ldots)}{\partial y_j} \right| \cdot |y_j - z_j| \leq n \cdot \frac{M}{n} \cdot \max |y_j - z_j|.$$

**3.3** VĚTA: *Buďte $f_j(x, y_1, \ldots, y_n), j = 1, \ldots, n$ spojité funkce ve všech proměnných a Lipschitzovské v proměnných $y_1, \ldots, y_n$ v nějakém okolí bodu $(x_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$. Potom existuje a takové, že v intervalu $(x_0 - a, x_0 + a)$ má soustava*

$$\varphi_j(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, \vec{\varphi}(t))\, dt + \eta_j, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{XVIII.3}$$

*právě jedno řešení $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.*

**Důkaz:** Nechť pro

$$|x_0 - x| \leq \alpha, |\eta_j - y_j| \leq \beta, |\eta_j - z_j| \leq \beta$$

máme

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, \ldots, z_n)| \leq M \cdot \max_j |y_i - z_i|.$$

Ze spojitosti dále plyne existence čísla $A$ takového, že pro $x$ a $y_j$ splňující naše podmínky je

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leq A.$$

Vezměme nyní $a, 0 < a \leq \alpha$ takové, aby

(1) $a \leq \frac{B}{A}$

a aby

(2) pro nějaké $q < 1$ bylo $a \leq \frac{q}{M}$.

Smysl prvního opatření bude patrný téměř hned, smysl druhého o něco později.

Označme

$$Y_j$$

podprostor prostoru $C((x_0 - a, x_0 + a))$ (XII.2.9) tvořený všemi $\varphi$ takovými, že $\eta_j - \beta \leq \varphi(x) \leq \eta_j + \beta$. Podle XVII.5.2 jsou $Y_j$ úplné metrické prostory, podle XII.6.6 je $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ úplný.

Pro $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in Y$ definujeme

$$J(\vec{\varphi}) = (J_1(\vec{\varphi}), \ldots, J_n(\vec{\varphi}))$$

předpisem

$$J_k(\vec{\varphi})(x) = \int_{x_0}^{x} f_k(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt + \eta_k$$

Máme

$$|J_k(\vec{\varphi})(x) - \eta_k| = \left| \int_{x_0}^{x} f_k(t, \varphi_1(t), \ldots)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, \varphi_1(t), \ldots) \right| dt \leq |x_0 - x| \cdot A \leq a \cdot A \leq \beta$$

takže $J(\vec{\varphi})$ je zase v $Y$. To byl důvod opatření (1). Máme tedy zobrazení

$$J : Y \to Y$$

při čemž v úloze (XVIII.3) jde o nalezení pevného bodu $\vec{\varphi}$. Mějme $\vec{\varphi}, \vec{\psi} \in Y$. Platí (v Y užijeme pohodlné metriky $\sigma$ z XII.4.2)

$$\sigma(J(\vec{\varphi}), J(\vec{\psi})) = \max_k \sup_x \left| J_k(\vec{\varphi})(x) - J_k(\vec{\psi})(x) \right| =$$

$$= \max_k \sup_x \left| \int_{x_0}^x f_k(t, \varphi_1(t), \dots)\, dt - \int_{x_0}^x f_k(t, \psi_1(t), \dots)\, dt \right| =$$
$$= \max_k \sup_x \left| \int_{x_0}^x (f_k(t, \varphi_1(t), \dots) - f_k(t, \psi_1(t), \dots))\, dt \right| \leq$$
$$= \max_k \sup_x \int_{x_0}^x |f_k(t, \varphi_1(t), \dots) - f_k(t, \psi_1(t), \dots)|\, dt = c.$$

Máme $|f_k(t, \varphi_1(t), \dots) - f_k(t, \psi_1(t), \dots)| \leq M \cdot \max_j |\varphi_j(t) - \psi_j(t)| \leq M \cdot \max_j \sup_x |\varphi_j(x) - \psi_j(x)| = M \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$, takže dále dostáváme

$$c \leq \max_k \sup_x |x - x_0| \cdot M \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \leq a \cdot M \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi}) \leq q \cdot \sigma(\vec{\varphi}, \vec{\psi})$$

(tady jsme užili opatření (2)).

Zobrazení $J$ tedy splňuje podmínky věty XVII.5.3 a má tedy právě jeden pevný bod. □

## XVIII.4 Věta o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy (obyčejných) diferenciálních rovnic

**4.1** Z věty 3.3 a 2.1 okamžitě dostáváme

DŮSLEDEK: *Buďte $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ funkce spojité ve všech proměnných a Lipschitzovské v proměnných $y_1, \dots, y_n$ v nějakém okolí bodu $(x_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Potom pro dost malé $a > 0$ má soustava*

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \qquad j = 1, \dots, n \tag{XVIII.4}$$

*právě jedno řešení $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ takové, že $\varphi_j(x_0) = \eta_j$ pro všechna $j$.*

**4.2** Jednoznačnost řešení je tedy podmíněna splněním požadavků $\varphi_j(x_0) = \eta_j$ pro všechna $j$. Říká se jim *počáteční podmínky*.

**4.3** Tvrzení z věty 4.1 mluví o tom, jak vypadá řešení soustavy (XVIII.4) v malém okolí nějakého bodu. Nyní budeme směřovat ke globálním řešením.

*Lokálním řešením* soustavy (XVIII.4) rozumějme dvojici $(\vec{\varphi}, J)$, kde $J$ je nějaký otevřený interval a $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ je definován na $J$ a splňuje tam (XVIII.4).

LEMMA: *Nechť $J, K$ jsou otevřené intervaly, $x_0 \in J \cap K$ a $(\vec{\varphi}, J), (\vec{\psi}, K)$ lokální řešení takové, že $\varphi(\vec{x_0}) = \vec{\psi}(x_0)$. Je-li $f$ spojitá a v proměnných $y_j$ lokálně Lipschitzovská v oboru, v němž soustavu (XVIII.4) řešíme, je pak $\vec{\varphi}|J \cap K = \vec{\psi}|J \cap K$.*

**Důkaz:** Podle 4.1, shodují-li se $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ v nějakém bodě, shodují se i na nějakém okolí. Obor $U$ v němž se $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ shodují je tedy neprázdná otevřená podmnožina $J \cap K$. Nechť se $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ shodují v $x_1, x_2, \dots$ a nechť $\lim x_n = x \in J \cap K$. Ze spojitosti okamžitě plyne, že je pak i $\vec{\varphi}(x) = \vec{\psi}(x)$. $U$ je tedy též uzavřená. Jelikož $J \cap K$ je interval a tedy souvislý prostor, musí být $U = J \cap K$ (viz [XVII-6]). □

**4.4** Sjednoťme všechny intervaly $J$ obsahující $x_0$ takové, že na nich existují řešení $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ splňující počáteční podmínky $\varphi_j(x_0) = \eta_j$. Podle 4.3 na takto získaném intervalu opět existují řešení. Máme tedy největší řešení soustavy (XVIII.4) splňující $\varphi_j(x_0) = \eta_j$, přesněji, řešení s největším možným souvislým definičním oborem. Takováto maximální řešení se nazývají *charakteristiky* dané soustavy.

**4.5** V této terminologii můžeme dosavadní výsledky shrnout takto:

VĚTA: *Buď $M$ otevřená podmnožina $E_{n+1}$, $f_j(x, y_1, \dots, y_n) : M \to \mathbb{R}$ spojité funkce lokálně Lipschitzovské v proměnných $y_1, \dots, y_n$. Potom každým bodem množiny $M$ prochází právě jedna charakteristika soustavy (XVIII.4).*

**4.6** Vraťme se nyní k překladu diferenciální rovnice $n-$tého řádu z 1.3. Rovnice

$$y^n = f(x, y, y', \dots, y^{(n+1)})$$

byla přepsána na soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Z věty 4.5 dostáváme

DŮSLEDEK: *Buď $M$ otevřená podmnožina $E_{n+1}$, $f(x, y_1, \dots, y_n) : M \to \mathbb{R}$ spojitá funkce lokálně Lipschitzovská v proměnných $y_1, \dots, y_n$. Potom ke každému bodu $(x_0, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in M$ existuje právě jedno řešení $y$, s maximálním souvislým definičním oborem, rovnice*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

*takové, že $y(x_0) = \eta_0, y'(x_0) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$.*

**4.7** Splněním Lipschitzovy podmínky je pro jednoznačnost řešení podstatné. Vezměme následující příklad: Funkce $y(x) = (x + c)^3$ vyhovující rovnici

$$y' = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

Funkce $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ je Lipschitzovská všude kromě bodu $(x, 0)$. A v těchto podezřelých bodech skutečně jednoznačnost neplatí. Máme totiž také řešení

$$y(x) = \begin{cases} (x-a)^3 & \text{pro } x \le a \\ 0 & \text{pro } a \le x \le b \\ (x-b)^3 & \text{pro } x \ge b \end{cases} .$$

## XVIII.5 Několik konkrétních případů

**5.1** Především si uvědomme, že vzhledem k tomu, že máme větu o existenci a zejména jednoznačnosti, nemusíme si u metod řešení dělat velkou starost s korektností použitých metod („rozpojování“ $\frac{dy}{dx}$, otázka zda se nevyskytne nula ve jmenovateli a pod.). Dá-li nám nějaký postup funkci, která rovnici splňuje, musí to být ono jediné řešení, které hledáme.

**5.2** S jednou diferenciální rovnicí jsme se setkali již dávno (v kapitoleVI), totiž s rovnicí typu

$$y' = f(x).$$

Jejím řešení je primitivní funkce k funkci $f$. Ani tu často nebývá snadné najít. Je ale zvykem považovat diferenciální rovnici za „vyřešenou“ je-li převedena na úlohu nalezení nalezení primitivních funkcí. (Je zde dost hluboká analogie s řešením algebraických rovnic v odmocninách.)

**5.3 Metoda separace proměnných:** Rovnici tvaru

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

můžeme řešit takto: Přepíšeme na

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) = f(x)$$

a najdeme primitivní funkce obou stran, které se kvůli rovnosti smí lišit pouze o konstantu. Tedy máme

$$\left(\int \frac{1}{g}\right)(y(x)) = \left(\int f\right)(x) + C.$$

To je asi trochu nepřehledný zápis toho, co děláme. Snadněji si to zapamatujeme takto: Vezměme naši rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

přepíšeme na

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

a zintegrujeme na

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

PŘÍKLADY:

1. $y' = y \cdot \sin x$.

   Dostáváme
   $$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x + C,$$
   tedy
   $$\lg |y| = -cosx + C$$
   a z toho
   $$|y| = e^{-\cos x + C}$$
   což lépe napíšeme jako $y = D \cdot e^{-\cos x}$.

2. $y' = 1 + y^2$.

   Dostaneme
   $$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx + C,$$
   tedy $\operatorname{arctg} y = x + C$ a konečně $y = \operatorname{tg}(x + C)$.

3. $y' = -\frac{x}{y}$.

   Dostáváme
   $$\int y\,dy = -\int x\,dx + C,$$
   tedy $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$ a konečně $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R = \sqrt{2C}$. To je velmi názorný příklad. Uvědomme si: Co je to za křivky, které jsou v každém bodě $[x, y]$ kolmé k polohovému vektoru $(x, y)$?

**5.4** Abychom vyřešili rovnici

$$y' = f(ax + by)$$

zavedeme substituci

$$z(x) = ax + by(x).$$

Potom máme

$$z' = by' + a = b \cdot f(z) + a,$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, jako v 5.3. Je zvlášť jednoduché, pravá strana na proměnné $x$ ani nezávisí.

**5.5** Abychom vyřešili rovnici

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

(t.j., rovnici $y' = F(x, y)$, kde $F$ je taková, že pro libovolné $t$ je $F(x, y) = F(tx, ty)$), zavedeme substituci $z = \frac{y}{x}$. Potom máme

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y' - z}{x} = (f(z) - z) \cdot \frac{1}{x}$$

a máme rovnici se separovanými proměnnými.

**5.6** Rovnice

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

je v případě $\gamma = c$ rovnice typu 5.5. Není-li tomu tak, pokusíme se toho dosáhnout. Buď $x_0, y_0$ řešení soustavy (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned} ax + bx + c &= 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma &= 0. \end{aligned} \tag{XVIII.5}$$

Potom

$$\frac{ax + bx + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} = \frac{a(x - x_0) + b(y - y_0)}{\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)}.$$

Zavedeme-li tedy substituci

$$\xi = x - x_0, \ z = y - y_0,$$

máme $z(\xi) = y(x - x_0) - y_0$ a $\frac{dx}{d\xi} = 1$, takže

$$\frac{dz}{d\xi} = y'(\xi) = f\left(\frac{a\xi + bz}{\alpha\xi + \beta z}\right).$$

Lineární soustavu XVIII.5 však třeba nešlo řešit, mohlo totiž být $(a, b) = K \cdot (\alpha, \beta)$ nebo $(\alpha, \beta) = K \cdot (a, b)$. V takovém případě naše rovnice

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

je již bez úprav tvaru $y' = F(Ax + By)$ (viz. 5.4).

**5.7 Lineární rovnice $y' = a(x) \cdot y + b(x)$. První setkání s metodou variace konstant.** Vyřešíme nejprve rovnici $y' = a(x) \cdot y$. To je příklad se separovanými proměnnými a způsobem uvedeným v 5.3 dostaneme řešení

$$\varphi_c(x) = C \cdot e^{\int a(x)\, dx}. \tag{XVIII.6}$$

Zkusíme najít řešení původní rovnice $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ ve tvaru

$$y(x) = c(x) \cdot \varphi_1(x) = c(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}.$$

(Proto, že konstantu $C$ z XVIII.6 nahrazujeme funkcí závislou na $x$ se hovoří o *metodě variace konstant.* V obecnější podobě se s touto metodou setkáme v příští kapitole.) Má tedy být

$$y' = c' \cdot \varphi_1 + c \cdot \varphi_1'$$

a jelikož $\varphi_1' = a \cdot \varphi_1$ máme dále

$$y' = c' \cdot \varphi_1 + c \cdot a \cdot \varphi_1 = c'\varphi_1 + a \cdot y.$$

Jde tedy o to najít $c(x)$ tak, aby

$$b(x) = c'(x)\varphi_1(x).$$

Tomu vyhovuje

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + K.$$

**5.8 Aspoň jedna rovnice druhého řádu:** Ve fyzice se setkáváme s variantami úlohy

$$y'' = f(y).$$

Tuto rovnici je možno řešit takto: Po vynásobení obou stran derivací $y'$ dostaneme

$$y' \cdot y'' = f(y) \cdot y',$$

tedy

$$\left(\frac{1}{2}y'^2\right)' = \left(\left(\int f\right) \circ y\right)'$$

a tedy

$$\frac{1}{2}y'^2 = \left(\int f\right) \circ y + C$$

a konečně

$$y' = \sqrt{2\left(\int f\right) \circ y + C},$$

což již můžeme řešit separací proměnných.

# XIX Lineární diferenciální rovnice a jejich soustavy.

## XIX.1 Lineární úlohy

**1.1 Soustavou lineárních diferenciálních rovnic** rozumíme následující speciální případ úlohy z předchozí kapitoly:

$$(L) \qquad y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j(x) + b_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

*Lineární rovnice* $n-$*tého řádu* je

$$(\tilde{L}) \qquad y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) = b(x).$$

Podle XVIII.1.2 je $(\tilde{L})$ snadné převést na úlohu typu $(L)$; teoretické úvahy tedy stačí provádět pro soustavy. V praktických postupech řešení se ale budeme úlohám typu $(\tilde{L})$ věnovat zvlášť.

Jsou-li všechny funkce $b_i(x)$ v $(L)$ nulové (resp. je-li $b(x)$ v $(\tilde{L})$ nulové), mluvíme o úloze homogenní.

**1.2** LEMMA: *Nechť je $f$ funkce spojitá a omezená na intervalu $\langle a, b)$. Potom existuje $\int_a^b f(t)\,dt$ (hodnotu v $b$ můžeme samozřejmě dodefinovat libovolně – viz XV.3.5) a platí*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^b f(t)\,dt.$$

**Důkaz:** Buď $|f(t)| \le C$. Zvolme $z > 0$. Integrály $\int_a^x f(t)\,dt$ existují podle XV.4.1 a můžeme tedy zvolit podrozdělení $D(x)$ tak, že

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \le s\left(f|\langle a, x\rangle, D(x)\right) \le S\left(f|\langle a, x\rangle, D(x)\right) \le \int_a^x f + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad \text{(XIX.1)}$$

Nechť $x > b - \frac{\varepsilon}{2C}$. Definujeme rozdělení $D'(x)$ intervalu $\langle a, b\rangle$ přidáním intervalu $\langle x, b\rangle$ k $D(x)$. Potom máme

$$s(f|\langle a, x\rangle, D(x)) - \frac{\varepsilon}{2} \le s(f|\langle a, x\rangle, D(x)) - (b - x) \cdot C \le$$

$$s(f, D'(x)) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le S(f, D'(x)) \qquad \text{(XIX.2)}$$

$$\le S(f|\langle a, x\rangle, D(x)) + (b - x) \cdot C \le S(f|\langle a, x\rangle, D(x)) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z (XIX.1) a (XIX.2) dostaneme

$$\int_a^x f - \varepsilon \leq \underline{\int}_a^b \leq \overline{\int}_a^b f \leq \int_a^x + \varepsilon,$$

tedy

$$\left| \int_a^x f - \underline{\int}_a^b f \right| \leq \varepsilon \qquad \text{i} \qquad \left| \int_a^x f - \overline{\int}_a^b f \right| \leq \varepsilon$$

takže vidíme, že

$$\underline{\int}_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f = \overline{\int}_a^b f.$$

□

**1.3** VĚTA: *Buďte* $a_{ij}(x), b_i(x)$ *spojité na intervalu* $J$*, buď* $x_0 \in J$*, buďte* $\eta_j, j = 1, \ldots, n$ *reálná čísla. Potom má soustava*

$$y_i'(x) = \sum a_{ij} y_j(x) + b_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

*(právě jedno) řešení* $y_1, \ldots, y_n$ *takové, že* $y_i(x_0) = \eta_i$ *definované na celém intervalu* $J$*.*

**Důkaz:** Jednoznačnost plyne z věty XVIII.4.5. Z téže věty plyne, že existuje řešení na nějakém okolí bodu $x_0$. Ukážeme, že řešení je možno prodloužit na celý interval $J$. Konkrétně provedeme důkaz, že je možno prodloužit na část od $x_0$ napravo, prodloužení nalevo je zcela obdobné.

Připomeňme si oddíl XVIII.2. Označme $M$ množinu všech $z \in J, z \geq x_0$ takových že existuje řešení úlohy

$$y_i(x) = \int_{x_0}^x \left( \sum a_{ij}(t) y_j(t) + b_i(t) \right) dt + \eta_i$$

na $\langle x_0, z \rangle$. Označme $s = \sup M$. Pokud by $M$ nebylo celé $J \cap \langle x_0, +\infty)$, muselo by být

(1) $s$ konečné a

(2) $s \in J \setminus M$.

( (1) je zřejmé; co se týče (2), buď je $s < \sup J$ a potom, kdyby řešení bylo definováno ještě v $s$, je podle XVIII.3.3 definováno ještě v nějakém okolí bodu $s$, nebo je $s = \sup J$ a potom $s$ nesmí být v $M$ ale musí být v $J$, protože je to jediný bod, v němž se ještě může $J \cap \langle x_0, +\infty)$ od $M$ lišit.)

Jelikož $a_{ij}, b_i$ jsou definovány a spojité na $\langle x_0, s \rangle$, jsou tam omezené, dejme tomu

$$|a_{ij}(x)| \leq A, \qquad |b_i(x)| \leq B.$$

Zvolme čísla $C, \alpha$ dostatečně velká taková, aby

$$\alpha > 2nA \qquad \text{a} \qquad B(s - x_0) + \max \eta_i < \frac{C}{2} e^{\alpha x_0}.$$

Definujme $\tilde{M}$ jako podmnožinu $M$ tvořenou těmi body, v nichž pro řešení naší úlohy platí

$$|y_i(x)| < C \cdot e^{\alpha x}.$$

$\tilde{M}$ je zřejmě otevřené v $M$. Případným zvětšením konstanty $C$ dosáhneme toho, že je i neprázdné. Ukážeme, že je i uzavřená, čímž bude, vzhledem k tomu, že $M$

je souvislá (připomeňme si XVII.6) dokázáno, že je rovna $M$. Stačí ovšem ukázat, že je uzavřená na limity rostoucích posloupností (proč?). Nechť tedy $(x_n)_n$ roste, $x_n \in \tilde{M}$ a $\xi = \lim x_n$. Všimněte si, že nepředpokládáme, že by $\xi$ bylo v $M$; to z následujícího vyjde samo a bude ještě dále použito.

Ze spojitosti máme hned $|y_i(x)| \leq Ce^{\alpha x}$ na $\langle x_0, \xi \rangle$ a tedy podle 1.2 existuje integrál,

$$\int_{x_0}^{\xi} \left( \sum a_{ij}(t) y_j(t) + b_i(t) \right) dt$$

a je roven $\lim_{x \to \xi-} \int_{x_0}^{x} (...) = \lim_{x \to \xi-} y_i(x_n)$. Dodefinujeme-li případně $y_i(\xi)$ touto hodnotou (bylo-li již $y_i(x)$ definováno, nic se vzhledem ke spojitosti nezmění), máme řešení soustavy prodlouženo do $\xi$ včetně (a tedy $\xi \in M$). Máme ale

$$\left| \int_{x_0}^{\xi} \left( \sum a_{ij}(t) y_j(t) + b_i(t) \right) dt + \eta_i \right| \leq \int_{x_0}^{\xi} \left( nA \cdot Ce^{\alpha t} + B \right) dt + |\eta_i| \leq$$

$$\leq \frac{nAC}{\alpha} e^{\alpha \xi} + B(\xi - x_0) + |\eta_i| < Ce^{\alpha \xi},$$

takže nejen, že $\xi$ je v $M$, ale je také ještě v $\tilde{M}$. Je tedy $M = \tilde{M}$. Teď ale přijde ke cti to, že jsme o $\xi$ předem nepředpokládali, že je v $M$: Bod $s$ můžeme také napsat jako limitu rostoucí posloupnosti prvků z $M$ (a tedy z $\tilde{M}$) a je tedy v $M$ ve sporu s předpokladem $s \in J \setminus M$ (což, připomínám, bylo důsledkem předpokladu $M \neq J \cap \langle x_0, +\infty))$. Tedy máme $M = J \cap \langle x_0, +\infty)$. $\square$

**1.4** DŮSLEDEK: *Buďte $a_i(x), (i = 1, \ldots, n-1), b(x)$ spojité na intervalu $J$, buď $x_0 \in J$, buďte $\eta_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ reálná čísla. Potom má rovnice*

$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x) y^{(j)}(x) = b(x)$$

*(právě jedno) řešení na intervalu $J$, splňující požadavky $y^{(j)}(x_0) = \eta_j$.*

**1.5** POZNÁMKA: *Na předchozích tvrzeních je podstatné to, že se řešení dají prodloužit na celý interval, na kterém jsou definovány funkce $a_{ij}, b_j$ (resp. $a_i, b$). Lokální existence a jednoznačnost je dána již větou XVIII.4.5.*

*Všimněte si, jak je linearita podstatná: Řešení rovnice*

$$y' = 1 + y^2$$

*(viz XVIII.5.3.2) jsou funkce* $\mathrm{tg}(x + c)$*, všechny definovány jen na omezených intervalech.*

## XIX.2 Prostory řešení lineární soustavy.

**2.1** V tomto odstavci jsou $a_{ij}(x), b_i(x), a_i(x), b(x)$ definovány a spojité na intervalu $J$. $C(J)$ označuje vektorový prostor všech spojitých funkcí na $J$, $C^n(J)$ je vektorový prostor

$$\underbrace{C(J) \times \cdots \times C(J)}_{n}.$$

**2.2** VĚTA: *Systém všech řešení soustavy $(L)$ tvoří lineární množinu $\vec{y_0} + W$ v $C^n(J)$, systém všech řešení soustavy $(\tilde{L})$ tvoří lineární množinu $y_0 + W$ v $C(J)$. Přitom jsou vektorové podprostory $W$ soustavy všech řešení příslušných homogenních úloh.*

**Důkaz:** Provedeme třeba pro $(L)$. Zřejmě, řeší-li $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n), \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ příslušnou homogenní úlohu $(L-\text{hom})$, řeší ji i $\alpha\vec{y} + \beta\vec{z}$; vektor složený konstantních nulových funkcí $(L-\text{hom})$ samozřejmě řeší a tedy je systém všech řešení úlohy $(L-\text{hom})$ vektorový podprostor $W$ prostoru $C^n(J)$. Nechť nyní $\vec{y_0} = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$ řeší $(L)$. Je tedy

$$y_{0i}' = \sum a_{ij} y_{0j} + b_i.$$

Řeší-li $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ úlohu $(L-\text{hom})$, je $y_i' = \sum a_{ij} y_j$ a tedy $(y_{0i}+y_i)' = y_{0i}'+y_i' = \sum a_{ij}(y_{0j}+y_j)+b_i$, takže $\vec{y_0}+\vec{y}$ řeší úlohu $(L)$. Naopak je-li $\vec{z}$ libovolné řešení úlohy $(L)$, je

$$(z_i - y_{0i})' = \sum a_{ij}(z_j - y_{0j}),$$

takže $\vec{z} - \vec{y_0} \in W$ a konečně $\vec{z} = \vec{y_0} + (\vec{z} - \vec{y_0}) \in \vec{y_0} + W$. $\Box$

POZNÁMKA: *Všimněte si nápadné podobnosti s tvarem řešení lineární algebraické soustavy rovnic (VIII.3.3). Jde samozřejmě o stejný princip.*

**2.3** VĚTA: *V obou případech z předchozí věty mají lineární množiny dimenzi právě $n$.*

**Důkaz:** Provedeme pro systém $(L)$. Buďte $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_p}$ řešení $(L-\text{hom})$, buď $p > n$. Potom má lineární algebraická soustava rovnic

$$\begin{aligned} y_{11}(x_0)\cdot\alpha_1 + y_{21}(x_0)\cdot\alpha_2 + \cdots + y_{p1}(x_0)\cdot\alpha_p &= 0 \\ &\vdots \\ y_{1n}(x_0)\cdot\alpha_1 + y_{2n}(x_0)\cdot\alpha_2 + \cdots + y_{pn}(x_0)\cdot\alpha_p &= 0 \end{aligned}$$

v neznámých $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ netriviální řešení (má totiž celý prostor dimenze $p-n$ řešení). Jedno takové vezměme a položme

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{y_i}.$$

Speciálně máme $\vec{y}(x_0) = (0, \ldots, 0)$. Jedno takové řešení soustavy $(L-\text{hom})$ ale známe, totiž $\vec{o} = (const_0, \ldots, const_0)$. Z věty o jednoznačnosti tedy plyne, že $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{y_i} = \vec{o}$ a vidíme, že soustava $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_p}$ je závislá. Na druhé straně, $n$ nezávislých řešení jistě existuje: vezměme $\vec{y_i} = (y_{i1}, \ldots, y_{in})$ takové řešení, že platí $y_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$, tedy $\vec{y_i}(x_0) = \vec{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 na $i-$tém místě). Je-li $\sum \alpha_i \vec{y_i} = o$, je po dosazení $x_0$ speciálně $\sum \alpha_i \vec{e_i} = (0, \ldots, 0)$ a tedy $\alpha_i = 0$ pro všechna $i$. $\Box$

**2.4 Wronského determinanty** Jsou-li $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}$ řešení soustavy $(L-\text{hom})$, položíme

$$W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x), & \ldots, & y_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x), & \ldots, & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Pro řešení $y_1, \ldots, y_n$ rovnice $(\tilde{L}-\text{hom})$ se zavádí

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_n(x) \\ y_1'(x), & \ldots, & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Funkce $W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})$ resp. $W(y_1, \ldots, y_n)$ se nazývají Wronského determinanty (nebo Wronskiány) příslušných soustav.

POZNÁMKA: *Uvědomte si, že druhý případ je vlastně speciálním případem prvního, získaným při standardním překladu z XVIII.2.*

**2.5** VĚTA: *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(1)* $\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n}$ *jsou nezávislá řešení,*

*(2)* $W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x_0) \neq 0$ *ve všech bodech intervalu* $J$,

*(3)* $W(\vec{y_1}, \ldots, \vec{y_n})(x_0) \neq 0$ *v nějakém bodě intervalu* $J$.

*Obdobně pro Wronskiány úlohy* $(\tilde{L})$.

**Důkaz:** Provedeme pro změnu pro $(\tilde{L})$:

(1)⇒(2): Nechť (2) neplatí, nechť

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0), & \ldots, & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0), & \ldots, & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0), & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Potom existuje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ netriviální řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} y_1(x_0)\alpha_1 + \cdots + y_n(x_0)\alpha_n &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)\alpha_1 + \cdots + y_n^{(n-1)}(x_0)\alpha_n &= 0. \end{aligned}$$

Položíme-li $y = \sum \alpha_i y_i$, máme speciálně $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Takové řešení úlohy $(\tilde{L}-\mathrm{hom})$ ale již známe, totiž $const_0$. Z jednoznačnosti tedy dostáváme $\sum \alpha_i y_i = const_0$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou tedy závislé.

(2)⇒(3) je triviální a (3)⇒(1) (totiž, non(3) ⇒ non(2)) také.

□

## XIX.3 Metoda variace konstant

Jde o metodu, která umožňuje nalézt řešení soustavy $(L)$ resp. $(\tilde{L})$, máme-li již nalezenou bázi řešení soustavy $(L-\mathrm{hom})$ resp. rovnice $(\tilde{L}-\mathrm{hom})$. Třebaže druhá je speciální případ první úlohy, předvedeme postup raději pro oba případy.

**3.1 Soustava $(L)$:** Mějme $\vec{y_1} = (y_{11}, \ldots, y_{1n}), \vec{y_2}, \ldots, \vec{y_n}$ bázi řešení soustavy $(L)$. Pokusíme se najít řešení ve tvaru

$$\vec{y_0}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\vec{y_i}(x)$$

(připomeňte si XVIII.5.7!). Máme

$$y_{ij}' = \sum_k a_{jk} y_{ik}$$

a tedy

$$y_{0j}' = \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_i c_i y_{ij}' = \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_{i,k} c_i a_{jk} y_{ik} =$$

$$= \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_k a_{jk} \sum_i c_i y_{ik} = \sum_i c_i' y_{ij} + \sum_k a_{jk} y_{0k}$$

a tedy jde o to, můžeme-li najít funkce $c_i(x)$ takové, aby bylo

$$\sum c_i'(x) y_{ij}(x) = b_i(x).$$

A to možné je. Vzpomeňte si na Cramerovo pravidlo: Označíme-li $W_i(x)$ funkci získanou nahrazením $i-$tého sloupce ve Wronskiánu sloupcem

$$\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

máme

$$c_i'(x) = \frac{W_i(x)}{W(\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n})(x)}$$

a jmenovatel je podle 2.5 stále nenulový. Tedy stačí položit

$$c_i = \int \frac{W_i}{W(\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n})}.$$

**3.2 Rovnice** $(\tilde{L})$**:** Vezměme bázi $y_1(x), \dots, y_n(x)$. Pokoušíme se najít řešení tvaru

$$y(x) = \sum c_i(x) \cdot y_i(x).$$

Platí $y_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_i y_i^{(j)} = 0$. Požadujeme-li tedy, aby

$$\sum c_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0 \tag{1}$$

pro $k = 0, \dots, n-2$, budeme dostávat

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum c_i(x) y_i'(x), \\ &\vdots \\ y^{(k-1)}(x) &= \sum c_i(x) y_i^{(k-1)}(x). \end{aligned}$$

Přidejme požadavek

$$\sum c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = b(x). \tag{2}$$

Potom bude

$$y^{(n)}(x) = \sum c_i(x) y_i^{(n)}(x) + b(x)$$

a máme

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}(x) = b(x).$$

Podmínky (1) a (2), které jsme na $c_i'$ položili vedou opět k řešitelné algebraické soustavě, neboť determinant levé strany je příslušný, stále nenulový, Wronskián.

## XIX.4 Lineární rovnice s konstantními koeficienty.

**4.1** V tomto odstavci se budeme zabývat tím případem úloh $(L)$ a $(\tilde{L})$, kde funkce $a_{ij}$ resp. $a_i$ jsou konstanty, a popíšeme postup jak získat úplný systém řešení. Vzhledem k tomu, co již víme z předchozího, bude stačit zabývat se úlohami $(L-\text{hom})$ a $(\tilde{L}-\text{hom})$. Jedno potřebné řešení rovnic s pravou stranou, je-li tato nenulová, získáme třeba metodou variace konstant. V některých konkrétních případech je ostatně možno užít jednoduššího postupu, o čemž si na závěr také něco řekneme.

Podrobněji se budeme zabývat případem $(\tilde{L})$ — jednou lineární rovnicí $n-$tého řádu. S tím se student asi bude v praxi setkávat častěji. Případ $n$ rovnic prvního řádu je analogický, i když technicky náročnější. V tom půjdeme tak daleko, aby již bylo z analogie patrno, jak se dokončí detaily.

**4.2 Charakteristický polynom:** Mějme dánu úlohu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

kde $a_j$ jsou konstanty.

Víme, že k tomu, abychom měli úplný systém řešení, je potřeba najít $n$ lineárně nezávislých řešení. Zkusíme je najít ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Pro tuto funkci platí

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k \cdot e^{\lambda x}$$

a tedy dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) = 0.$$

Jelikož $e^{\lambda x}$ je vždy nenulové, rovnosti dosáhneme právě když

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Polynom $p$ se nazývá *charakteristický polynom* úlohy (1).

Vidíme, že *je-li $\lambda$ kořenem charakteristického polynomu, $y(x) = e^{\lambda x}$ řeší úlohu* (1).

**4.3** V případě, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou různá čísla, $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ tvoří nezávislý systém. Dokažte to jako cvičení (vypočtěte Wronského determinant a vzpomeňte si na Vandermondův determinant z X.2.9). Jelikož s tímto ale vždy nevystačíme, dokážeme si trochu silnější

LEMMA: *Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ různá komplexní čísla, $p_1(x), \dots, p_k(x)$ polynomy. Je-li*

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x) \cdot e^{\lambda_j x}$$

*identicky nulová funkce, jsou všechny polynomy $p_j$ nulové.*

**Důkaz:** Nechť tomu tak není. Potom existuje protipříklad. Mezi protipříklady vybereme takový, že

(a) maximální ze stupňů $p_j(x)$ je nejmenší možný, a

(b) počet polynomů $p_j(x)$ s tímto maximální stupněm je nejmenší možný.

(Přitom chápeme jako stupeň konstantního nenulového polynomu jako 0, u konstantního nulového polynomu $-1$. Máme-li tedy polynom nezáporný stupeň, derivováním se tento stupeň sníží o 1.)

Máme identicky

$$\sum_{j=1}^{n} p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0 \tag{1}$$

Zderivováním této rovnice dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} p'_j(x)e^{\lambda_j x} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j(x)e^{\lambda_j x} = 0. \tag{2}$$

Dejme tomu, že $p_1(x)$ má maximální stupeň. Odečteme rovnici (1) vynásobenou $\lambda_1$ od rovnice (2). Dostaneme

$$p'_1(x)e^{\lambda_1 x} + \sum_{j=2}^{n}((\lambda_j - \lambda_1)p_j(x) + p'_j(x))e^{\lambda_j x} = 0 \tag{3}$$

Stupeň polynomu u $e^{\lambda_1 x}$ se snížil, stupeň polynomů u ostatních $e^{\lambda_j x}$ se nezvýšily. Podle volby našeho protipříkladu (podmínky $(a)$ a $(b)$) a vzhledem k tomu, že jsme u $e^{\lambda_1 x}$ předpokládali maximální stupeň, (3) již protipříkladem být nesmí a musí tedy být

$$p'_1(x) = 0 \quad a$$
$$(\lambda_j - \lambda_1)p_j(x) + p'_j(x) = 0 \qquad \text{pro } j > 1.$$

Jelikož $\lambda_j \neq \lambda_1$, plyne z druhé rovnice okamžitě, že $p_j = 0$ pro $j > 1$. O $p_1$ z první rovnice víme jen to, že je konstantní, ale $C \cdot e^{\lambda_1 x} = 0$ jen když $C = 0$. □

**4.4** DŮSLEDEK: *Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ různá čísla. Potom systém*

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{s_2}e^{\lambda_2 x}, \dots$$
$$\dots \quad \dots, e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, \dots, x^{s_k}e^{\lambda_k x}$$

*je při libovolné volbě nezáporných celých čísel $s_1, \dots, s_k$ nezávislý.*

**4.5 Nejjednodušší případ:** Nechť charakteristický polynom má $n$ různých reálných kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Potom podle 4.2 a 4.4 máme bázi úplné soustavy řešení

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}.$$

Problém je tedy v tom, co máme dělat s komplexními kořeny a jak se vyrovnáme s případnou netriviální násobností některých kořenů.

**4.6 Komplexní kořeny:** Jelikož se zabýváme diferenciálními rovnicemi v reálném oboru, charakteristický polynom má reálné koeficienty a tedy ke každému kořenu je též číslo komplexně sdružené kořenem. Jelikož tedy kořen

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$$

není reálný, máme pro nějaké $k \neq j$

$$\lambda_k = \alpha_j - i\beta_j.$$

(Komplexní) funkce $e^{\lambda_j x}$ a $e^{\lambda_k x}$ v naší bázi nahradíme (reálnými) funkcemi

$$e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x \qquad \text{a} \qquad e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

(Kde se to vzalo bude patrno v kapitole o komplexní analýze. Souvisí to s tím, že $e^{ix}$ i $e^{-ix}$ se dají napsat jako lineární kombinace funkcí $\sin x$ a $\cos x$, a že naopak $\sin x$ a $\cos x$ se dají napsat jako lineární kombinace funkcí $e^{ix}$ a $e^{-ix}$.)

**4.7 Násobné kořeny:** Označme

$$\mathcal{L}(y) = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}.$$

Budeme nyní $\mathcal{L}$ aplikovat na funkce $y(x,\lambda)$, které kromě proměnné $x$ ještě závisí na parametru $\lambda$. Potom máme

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} y + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial x^j} y.$$

Podle XIII.4.2 máme

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L}(y) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial^n}{\partial x^n} y + \cdots = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial \lambda} y + \cdots = \mathcal{L}\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)$$

a obecněji

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} y\right).$$

Speciálně pro $y(x,\lambda) = e^{\lambda x}$ máme (viz 4.2)

$$\mathcal{L}(y) = e^{\lambda x} \cdot p(\lambda).$$

Tedy

$$\mathcal{L}(x^k e^{\lambda x}) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} y\right) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda x} \cdot p(\lambda)).$$

Indukcí snadno zjistíme, že

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda x} \cdot p(\lambda)) = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} p^{(j)}(\lambda) \cdot x^{k-j} e^{\lambda x}.$$

Je-li $\lambda$ $k$-násobný kořen polynomu $p$, je též

$$p'(\lambda) = \cdots = p^{(k-1)}(\lambda) = 0$$

a tedy rovnici $\mathcal{L}(y) = 0$ splňuje kromě $e^{\lambda x}$ též

$$xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

Tedy za $k$-násobný kořen dostaneme $k$ funkcí; podle 4.4 je takto získaný systém nezávislý a jelikož sestává z $n$ funkcí, je to base, kterou jsme potřebovali.

Za sdruženou dvojici komplexních kořenů $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ stupně $k$ bereme ovšem

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots \quad, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\\ &e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots \quad, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x. \end{aligned}$$

**4.8 Systém $n$ rovnic:** Uvažujme úlohu

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

s konstantními $a_{ij}$. Zkoumejme, zda má řešení tvaru

$$y_i = c_i \cdot e^{\lambda x}. \tag{1}$$

Pro takové řešení by muselo být

$$\lambda c_i \cdot e^{\lambda x} = \sum a_{ij} c_j e^{\lambda x}$$

a po vydělení (nenulovým) $e^{\lambda x}$ dostáváme podmínku

$$\lambda c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

jejíž splnění zřejmě stačí k tomu, aby (1) bylo řešením.

Trochu terminologie: číslo $\lambda$ takové, že existuje nenulový vektor $(c_1, \ldots, c_n)$ splňující (2) se nazývá *vlastní číslo* matice $(a_{ij})$, ty netriviální vektory $(c_1, \ldots, c_n)$ se pak nazývají *vlastní vektory*. Jde tedy o to najít vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = (a_{ij})$. Označíme-li $E$ jednotkovou matici, jde nám o netriviální $\vec{c}$ takové, že

$$\lambda E \vec{c}^{\,T} = A \vec{c}^{\,T},$$

což můžeme přepsat na

$$(A - \lambda E)\vec{c}^{\,T} = \vec{o}^{\,T}.$$

Kdy má takováto soustava rovnic netriviální řešení? Právě když její matice není regulární, t.j. když

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Snadno vidíme, že jsme podobně jako v 4.2 dostali polynom $n-$tého řádu a že řešení mají co dělat s jeho kořeny. Tentokrát je situace komplikovanější. Nejen proto, že vůbec sestavení našeho polynomu dá víc práce. Máme-li kořen nalezen, úloha zdaleka neskončila. Musíme ještě hledat vektor nebo vektory s ním spojené. To ovšem není těžké, řešit algebraické lineární rovnice umíme. Komplikace je však ještě v něčem dalším: násobnost kořenů se může projevit dvěma způsoby. Hodnost matice $A - \lambda E$ může klesnou až o její násobnost. Potom máme dostatečně mnoho nezávislých vlastních vektorů s tímto $\lambda$ spojených a tyto vlastní vektory nám dají dostatečně mnoho řešení typu (1). Hodnost ale může klesnou o méně a potom přichází na řadu řešení podobné řešením ze 4.7. Nepůjdeme do podrobností; raději si budeme situaci ilustrovat na třech příkladech:

$$(A) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned} \qquad (B) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned} \qquad (C) \quad \begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned} \quad .$$

Ve všech třech případech máme trojnásobný kořen 1. V případě $(A)$ klesne hodnost ze 3 na 0 a situace je jednoduchá: máme tři nezávislé vlastní vektory, třeba $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ a to nám dá nezávislá řešení

$$(e^x, 0, 0), (0, e^x, 0), (0, 0, e^x).$$

Naopak v případě $(B)$ klesne hodnost jen o 1 a přímo dostaneme jen řešení $(0, 0, e^x)$. Další řešení pak jsou, v jakési analogii s 4.7, třeba $(0, e^x, xe^x)$ a $(2e^x, 2xe^x, x^2e^x)$.

Případ $(C)$ je smíšeného charakteru. Hodnost klesne o 2 a „základní“ řešení dostaneme dvě. Třeba $(e^x, 0, 0)$ a $(0, 0, e^x)$. Ta potom doplníme (např.) řešením $(0, e^x, xe^x)$.

Zatím co se otázka násobnosti jak vidíme proti případu jedné rovnice $n-$tého řádu zkomplikovala, s komplexními kořeny se můžeme vypořádat zcela analogicky jako dříve: $e^{-i\beta x}$ a $e^{i\beta x}$ nahradíme $\sin \beta x$ a $\cos \beta x$.

**4.9 Speciální pravé strany:** Zase se vrátíme k jedné rovnici $n-$tého řádu. Jsou-li pravé strany polynomy, nebo $e^{\alpha x}, \sin \alpha x$ nebo $\cos \alpha x$, je možno řešení najít mezi funkcemi stejného charakteru. Za předpokladu, že taková pravá strana není sama řešením příslušné homogenní rovnice, je možno hledat řešení

- v prvním případě mezi polynomy stejného stupně,
- v druhém případě ve tvaru $C \cdot e^{\alpha x}$ (snadno zjistíme, že dostaneme $C = \frac{1}{p(\alpha)}$, kde $p$ je charakteristický polynom),
- ve třetím a čtvrtém případě jako kombinaci $C \sin \alpha x + D \cos \alpha x$.

Je-li pravá strana řešením homogenní rovnice spojené s kořenem násobnosti $k$, hledejte řešení mezi uvedenými funkcemi, ale vynásobenými ještě $x^k$ (jako bychom v metodě z 4.7 postoupili ještě o jeden krok).

Není asi nutné dodávat, že je možné takováto řešení kombinovat. Máme-li řešení $y_i$ rovnice $\mathcal{L}(y) = b_i(x)$, řeší $\gamma_1 y_1(x) + \gamma_2 y_2(x)$ rovnici

$$\mathcal{L}(y) = \gamma_1 b_1(x) + \gamma_2 b_2(x).$$

Možná, že stojí za to ujasnit si rozdíl mezi případem pravé strany, která je či není řešením příslušné homogenní rovnice na následujícím případě, který má dost jasnou fysikální interpretaci. Rovnice

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

popisuje kmity nějakého systému, kterému není nic vnucováno zvenčí. Tomu odpovídají řešení $a \cos \omega x + b \sin \omega x$. Dejme tomu, že začneme zvenčí vnucovat kmity jiné frekvence $\alpha$, což vyjadřujeme pravou stranou $\sin \alpha x$. Pro rovnici $y'' + \omega^2 y = \sin \alpha x$ zkusme řešení $A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$. Po zderivování dostaneme

$$-A\alpha^2 \sin \alpha x - B\alpha^2 \cos \alpha x + A\omega^2 \sin \alpha x + B\omega^2 \cos \alpha x = \sin \alpha x$$

čemuž vyhovíme, bude-li $A(\omega^2 - \alpha^2) = 1$ a $B(\omega^2 - \alpha^2) = 0$, tedy

$$B = 0 \qquad \text{a} \qquad A = \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Kmity systému se tedy ustálí na

$$\frac{1}{\omega^2 - \alpha^2} \sin \alpha x + a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

Vidíme, že čím je frekvence vnuceného kmitání bližší, tím bude větší amplituda vynuceného kmitání (aniž bychom přímo amplitudu zvyšovali zvenčí). Budeme-li ale vnucovat kmity v přirozené amplitudě soustavy, dojde k resonanci, což se projeví v řešení typu $x \sin \omega x$, kde amplituda neomezeně poroste.

# XX Vícerozměrný integrál

Cílem této kapitoly je dosti jednoduché rozšíření Riemannova integrálu z kapitoly XV na funkce více proměnných. Zatím půjde jen o speciální případ funkcí definovaných na vícerozměrných intervalech (kvádrech). Nebudeme tedy ještě umět integrovat ani přes tak jednoduché obory, jako je třeba kruh v dvojrozměrném případě. To se napraví v další kapitole, kde se dovíme o integrování „libovolných rozumných“ funkcí přes „libovolné rozumné“ obory.

## XX.1 Riemannův integrál na vícerozměrném intervalu.

**1.1** (Kompaktním) *intervalem* v $n$-rozměrném euklidovském prostoru $E_n$ rozumíme součin

$$J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle,$$

kde $\langle a_i, b_i\rangle$ jsou kompaktní intervaly v $\mathbb{R}$.

Rozdělením $D$ takového intervalu $J$ rozumíme $n-$tici $D_1, \ldots, D_n$, kde $D_i$ je rozdělení intervalu $\langle a_i, b_i\rangle$ ve smyslu z XV.2.1. Rozdělení $D = (D_1, \ldots, D_n)$ je *zjemnění* rozdělení $D' = (D'_1, \ldots, D'_n)$ jestliže $D_i$ zjemňuje $D'_i$ opět ve smyslu z XV.2.1, a stejně jako tam máme

POZOROVÁNÍ: *Každá dvě rozdělení mají společní zjemnění.*

Abychom trochu zkrátili zápisy, zavedeme ještě pojem *členu* rozdělení $D = (D_1, \ldots, D_n)$. Je to kterýkoli interval $K = \langle t_{1i_1}, t_{1i_1+1}\rangle \times \ldots \times \langle t_{ni_n}, t_{ni_n+1}\rangle$, kde $D_k : t_{k0} < \cdots < t_{k,r(k)}, \quad 0 \leq i_j \leq r(j)$. Množina všech členů podrozdělení $D$ bude označována $|D|$.

*Objem* intervalu $J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle$ je číslo

$$\operatorname{vol} J = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

**1.2** Buď $f$ omezená funkce na intervalu $J$, buď $D$ rozdělení $J$. *Dolní* (resp. *horní*) *sumou* funkce $f$ v rozdělení $D$ rozumíme číslo

$$s(f, D) = \sum_{K \in |D|} m_K \cdot \operatorname{vol} K \qquad \text{resp.} \qquad S(f, D) = \sum_{K \in |D|} M_K \cdot \operatorname{vol} K,$$

kde $m_K$ je infimum a $M_K$ maximum funkce $f$ na intervalu $K$.

Uvědomte si, že v dimenzi 1 se jedná přesně o totéž jako v XV.2.2 a že geometrická interpretace jako dolní a horní aproximace objemu útvaru pod grafem funkce $f$ je zcela obdobné tomu, co bylo diskutováno v XV.1.

Zcela obdobně jako v XV.2.4 dostaneme

TVRZENÍ: *Pro libovolná dvě rozdělení $D$ a $D'$ platí $s(f, D) \leq S(f, D')$*

a definujeme dolní a horní Riemannův integrál

$$\underline{\int}_J f = \sup_D s(f, D), \qquad \overline{\int}_J f = \inf_D S(f, D)$$

a při rovnosti těchto hodnot mluvíme o Riemannově integrálu a píšeme prostě

$$\int_J f$$

nebo, podobně jako v kapitole XV,

$$\int_J f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots x_n, \qquad \int_J f(\vec{x})\, d\vec{x}.$$

**1.3** Prakticky doslovným opakováním důkazu z XV.3.1 se opět získá

VĚTA: *Jsou-li $f, g$ Riemannovsky integrovatelné na $J$ a $\alpha, \beta$ reálná čísla, je $\alpha f + \beta g$ Riemannovsky integrovatelná a platí*

$$\int_J (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_J f + \beta \int_J g.$$

## XX.2 Existence integrálu ze spojité funkce.

**2.1** Rovněž pro následující tvrzení nepotřebujeme na úvahách z XV.2.6 nic měnit.

VĚTA: *Funkce $f$ je Riemannovsky integrovatelná právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje rozdělení $D$ takové, že*

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

**2.2** VĚTA: *Spojitá funkce na intervalu $J$ je Riemannovsky integrovatelná.*

**Důkaz:** Ani zde není nic nového proti příslušnému důkazu z kapitoly XV. Důkaz ale provedeme, abychom si zvykli na pozměněnou situaci.

Podle XII.5.10 (a ovšem XII.5.6) je $f$ stejnoměrně spojitá. Pro $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta$ tak, aby

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta = |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}.$$

Zvolme rozdělení $D$ tak jemné, aby

$$\forall K \in |D|, \vec{x}, \vec{y} \in K \Rightarrow \varrho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta$$

(že to jde je zřejmé; zvlášť snadno je to vidět, pracujeme-li v $E_n$ s metrikou $\varrho((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i |x_i - y_i|$). Tedy pro $M_K$ a $m_K$ z 1.2 máme $M_K - m_K < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}$ a jelikož zřejmě

$$\sum_{K \in |D|} \operatorname{vol} K = \operatorname{vol} J,$$

máme

$$S(f, D) - s(f, D) = \sum_{K \in |D|} (M_K - m_K) \operatorname{vol} K \leq \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J} \cdot \sum_{K \in |D|} \operatorname{vol} K = \varepsilon.$$

□

**2.3** Zcela bezprostřední je

VĚTA:

1. $\left|\int_J f\right| \le \int_J |f|$ *(existují-li příslušné integrály).*
2. *Buďte* $f, g$ *Riemannovsky integrovatelné funkce na* $J$*, buď* $f \le g$*. Potom* $\int_J f \le \int_J g$.
3. *Speciálně, je-li* $f(\vec{x}) \le C$ *pro nějakou konstantu* $C$*, platí*

$$\int_J f \le C \cdot \operatorname{vol} J.$$

# XX.3 Fubiniova věta.

Teprve v tomto odstavci se dostáváme opravdu k něčemu opravdu novému.

**3.1** VĚTA: *Buďte* $J' \subseteq E_n, J'' \subseteq E_m$ *intervaly,* $J = J' \times J''$*, buď* $f$ *spojitá funkce definovaná na* $J$*. Potom*

$$\int_J f(\vec{x},\vec{y})\, d\vec{x}\vec{y} = \int_{J'} \left( \int_{J''} f(\vec{x},\vec{y})\, d\vec{y} \right) d\vec{x} = \int_{J''} \left( \int_{J'} f(\vec{x},\vec{y})\, d\vec{x} \right) d\vec{y}.$$

**Důkaz:** Dokážeme třeba první rovnost, druhá je zcela obdobná. Označme $F(\vec{x}) = \int_{J''} f(\vec{x},\vec{y})\, d\vec{y}$. Máme dokázat, že

$$\int_J f = \int_{J'} F.$$

Zvolme rozdělení $D$ intervalu $J$ takové, aby již bylo

$$\int f - \varepsilon \le s(f,D) \le S(f,D) \le \int f - \varepsilon.$$

Rozdělení $D$ intervalu $J = J' \times J''$ je sestaveno z nějakých rozdělení $D'$ intervalu $J'$ a $D''$ intervalu $J''$. Při tom je

$$|D| = \{K' \times K'' | K' \in |D'|, K'' \in |D''|\}$$

a každý člen $D$ se objeví ve tvaru $K' \times K''$ právě jednou. Máme

$$F(\vec{x}) \le \sum_{K'' \in |D''|} \max_{\vec{y} \in K''} f(\vec{x},\vec{y}) \cdot \operatorname{vol} K''$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(F,D') &\le \sum_{K' \in |D'|} \max_{\vec{x} \in K''} \left( \sum_{K'' \in |D''|} \max_{\vec{y} \in K''} f(\vec{x},\vec{y}) \cdot \operatorname{vol} K'' \right) \cdot \operatorname{vol} K' \le \\ &\le \sum_{K' \in |D'|} \sum_{K'' \in |D''|} \max_{(\vec{x},\vec{y}) \in K' \times K''} f(\vec{x},\vec{y}) \cdot \operatorname{vol} K'' \cdot \operatorname{vol} K' = \\ &= \sum_{K' \times K'' \in |D|} \max_{\vec{z} \in K' \times K''} f(\vec{z}) \cdot \operatorname{vol}(K' \times K'') = S(f,D) \end{aligned}$$

a obdobně

$$s(f,D) \le s(F,D').$$

Máme tedy

$$\int_J f - \varepsilon \le s(F,D') \le \underline{\int}_{J'} F \le \overline{\int}_{J'} F \le S(F,D) \le \int_J f + \varepsilon$$

a tedy $\int_{J'} F$ existuje a je roven $\int_J f$. $\square$

POZNÁMKA: *Jde ovšem o tu rovnost. Existence integrálu* $F$ *plyne z toho, že* $F$ *je spojitá, což se snadno ukáže na základě stejnoměrné spojitosti funkce* $f$ *a 2.3.3.*

## XX.4 Diniho věta a její důsledek.

**4.1** VĚTA: *Nechť $f_n$ jsou spojité na intervalu $J$, nechť $f_n$ stejnoměrně konvergují k funkci $f$. Potom platí*

$$\int_J f = \lim_{n\to\infty} \int_J f_n$$

**Důkaz:** Bude zcela obdobný důkazu XV.7.1, vlastně snazší, ale provedeme ho.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu $n_0$ takové, aby pro $n \geq n_0$ bylo

$$|f_n(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}.$$

Označme $m_K, M_K$ jako v 1.2, pro $f_n$ označme příslušné hodnoty $m_K^n, M_K^n$. Je tedy

$$|m_K - m_K^n|, |M_K - M_K^n| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol} J}$$

a odtud

$$|s(f,D) - s(f_n,D)| \leq \sum_{K\in|D|} |m_K - m_K^n| \cdot \operatorname{vol} K < \varepsilon$$

(opět užíváme toho, že $\sum_{K\in|D|} \operatorname{vol} K = \operatorname{vol} J$) a obdobně

$$|S(f,D) - S(f_n,D)| < \varepsilon.$$

Zvolme nyní rozdělení $D$ tak jemné, aby

$$\int_J f - \varepsilon \leq s(f,D) \leq S(f,D) \leq \int_J f + \varepsilon.$$

Potom

$$\int_J f - 2\varepsilon \leq s(f,D) - \varepsilon \leq s(f_n,D) \leq \int_J f_n \leq$$

$$\leq S(f_n,D) \leq S(f,D) + \varepsilon \leq \int_J f + 2\varepsilon.$$

Tedy $\lim \int_J f_n = \int f_n$. $\square$

**4.2** OZNAČENÍ: *Nechť $f_n$ jsou reálné funkce na nějaké množině $X$. Budeme psát $f_n \nearrow f$ resp. $f_n \searrow f$ jestliže pro všechna $x$ je $(f_n(x))_n$ neklesající resp. nerostoucí posloupnost a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

**4.3** VĚTA: *(Diniho věta) Nechť $f_n$ jsou spojité reálné funkce na kompaktním prostoru $X$. Nechť $f_n \searrow 0$. Potom $f_n$ konvergují stejnoměrně.*

**Důkaz:** Jelikož se jedná o spojité funkce na kompaktním prostoru, každá z nich nabývá maxima, dejme tomu $f_n$ v bodě $x_n$. Zřejmě stačí dokázat, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

Nechť existuje protipříklad. Potom existuje i protipříklad takový, že

1. $\forall n, f_n(x_n) \geq \varepsilon_0$ pro nějaké pevné $\varepsilon_0 > 0$, a
2. $x_n$ konvergují k nějakému bodu $x \in X$.

(Z prvního daného protipříkladu — takového, že není $\lim f_n(x_n) = 0$ — můžeme vybrat menší systém $f_n$ aby (1) již platilo. Potom znovu použijeme kompaktnosti: vybereme podposloupnost posloupnosti $x_n$, která konverguje, a přebytečné funkce $f_n$ opět vyškrtáme.) Nyní ale pro $k \geq n$ máme

$$f_n(x_k) \geq f_k(x_k) \geq \varepsilon_0$$

a tedy $f_n(x) = f_n(\lim_k x_k) = \lim_k f_n(x_k) \geq \varepsilon_0$, což je spor, neboť $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. $\square$

**4.4** Z vět 4.1 a 4.3 dostáváme okamžitě

DŮSLEDEK: *Nechť* $f_n$ *jsou spojité funkce na intervalu* $J$*, nechť* $f_n \searrow 0$*. Potom* $\lim_{n\to\infty} \int f_n = 0$.

# XXI Lebesgueův integrál

## XXI.1 Limita za integračním znamením.

**1.1** V této kapitole si proti předchozím značně rozšíříme možnosti integrování. Nadto získáme integrál, se kterým se mnohem bezstarostněji počítá než s integrálem Riemannovým: Podmínky, za kterých bude možno provádět úpravy budou velmi přehledné a snadno ověřitelné.

**1.2** Klíčovým momentem bude otázka přechodu s limitou za integrační znamení, t.j. otázka, zda a kdy platí

$$(*) \qquad \int_J \lim_n f_n = \lim_n \int_J f_n.$$

To má dalekosáhlý význam. Nejde jen o formuli $(*)$ jako kalkulační pravidlo. Kromě toho (a možná především) $\lim_n f_n$ může být funkce složitější než funkce $f_n$ a zjistíme-li, že rovnost $(*)$ platí (nebo je vůbec přípustné — co tím myslím bude patrno z následujícího), můžeme počítat (nebo dokonce, nebude-li dosavadními prostředky definován, dodefinovat) integrál z té složitější funkce jako limitu příslušné posloupnosti čísel.

**1.3** Příklady:

1. *Dirichletova funkce:* Riemannův integrál z funkce $f$ nabývající hodnoty 1 v racionálních bodech a 0 v iracionálních bodech samozřejmě neexistuje. Seřaďme racionální body do posloupnosti

   $$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

   definujme množiny

   $$M_{kn} = \left( \bigcup_{j=1}^{n} \left\langle r_j - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2^j}, r_j + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2^j} \right\rangle \right) \cap \langle 0, 1 \rangle$$

   a položme

   $$f_{kn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x \in M_{kn} \\ 0 \text{ jinak.} \end{cases}$$

   Zřejmě Riemannův integrál $\int_0^1 f_{kn}$ existuje a platí

   $$\int_0^1 f_{kn} < \frac{2}{k} \qquad \text{pro všechna } n.$$

   Představme si, že bychom mohli volně užívat $(*)$. Položme $f_k = \lim f_{kn}$. Dostáváme

   $$\int_0^1 f_k \leq \frac{2}{k}$$

a jelikož zřejmě platí $0 \le f \le f_k$, zjistíme novým limitním přechodem podle $k$, že $\int_0^1 f = 0$, což celkem odpovídá intuici: $f$ je nenulové v nepodstatně mnoha bodech.

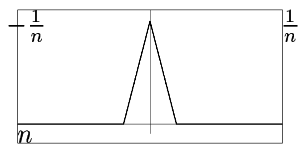
2. *Obecnější obor, přes něj by bylo možno integrovat vícerozměrným integrálem:* Buď $A$ libovolná omezená uzavřená podmnožina v $E_n$, $f$ spojitá funkce definována na $A$. Tu obecně zatím neumíme Riemannovsky integrovat. Položme $B_n = \{x \mid \varrho(x, A) \ge \frac{1}{n}\}$. Podle XVII.2.3 můžeme $f$ rozšířit na spojitou funkci $f_n$ dodefinovanou na $A$ jako $f$ a na $B_n$ hodnotami 0. Tu ovšem není problém přes dost velký kvádr integrovat. Přitom $\lim f_n$ je funkce definovaná stejně jako na $A$ a nulová jinde, takže její integrál by byl dobrá definice integrálu z $f$ přes $A$.

**1.4** Rovnost $(*)$ již známe za předpokladu stejnosměrné spojitosti. To může být užitečné v některých výpočtech (a i v teorii se nám to bude hodit), ale pro účely o kterých jsme převážně mluvili, nám to moc nepomůže. Stejnosměrná limita zachovává spojitost. To je většinou výhoda, ale teď zrovna ne: My se spíš potřebujeme dostat z mezí spojitosti.

**1.5 Obecně $(*)$ určitě nemůže platit:** Na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ definujme funkce $f_n$ takto:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \le -\frac{1}{n} \\ n + n^2 x \text{ pro } -\frac{1}{n} \le x \le 0 \\ n - n^2 x \text{ pro } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 \text{ pro } x \ge \frac{1}{n} \end{cases}$$

(viz obrázek)




Zřejmě je $\int_{-1}^1 f_n = 1$ pro každé $n$. Dále definujme $g_n(x) = 0$ pro $x \ne 0$, $g_n(0) = n$. Nyní máme $\int_{-1}^1 g_n = 0$ pro každé $n$. Jenomže $\lim f_n = \lim g_n$ a tak $(*)$ nemůže platit.

Tento příklad mohl přinést jakési zklamání. Časem ale uvidíme, co se stalo. Z kritérií v §5 bude posloupnost $f_n$ na první pohled podezřelá, o funkcích $g_n$ však zjistíme, že konvergují vhodným způsobem. Ta kritéria nás totiž ujistí, že jakmile $f_n$ konvergují monotónně, nebo jsou rozumně omezené, $(*)$ platí. U naší posloupnosti $f_n$ není splněno ani jedno ani druhé, $g_n$ konvergují monotónně.

**1.6** Integrál, který v této kapitole získáme je ekvivalentní s integrálem Lebesgueovým. Místo původního Lebesgueova přístupu se ale budeme držet konstrukce pocházející od P.L.Daniella.

## XXI.2 První opatrné rozšíření Riemannova integrálu

**2.1** Úmluvy: V této kapitole budeme slovem *funkce* mínit vždy funkci na $E_n$ nabývající hodnot v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

*Spojitá funkce s kompaktním nosičem* je spojitá reálná funkce taková, že $f(x) = 0$ až na nějakou omezenou množinu. Množinu těchto funkcí budeme označovat

$$Z$$

(bude-li později potřeba objasnit o které $E_n$ se jedná, uděláme to; zatím to potřeba není).

Pro funkce $f \in Z$ je zřejmým způsobem možno definovat integrál (vezmeme-li libovolný interval obsahující nosič, bude příslušný Riemannův integrál stejný). Jeho hodnotu označíme

$$\mathcal{I}f.$$

Pro funkce $f, g$ definujeme zřejmým způsobem $\max(f,g), \min(f,g)$. Definujeme dále *kladnou* a *zápornou* část funkce $f$, totiž

$$f^+ = \max(f,0), \quad f^- = -\min(f,0).$$

POZOROVÁNÍ:

*1.* $f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-$.

*2.* $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \quad \min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$.

**2.2 Základní vlastnosti:** Pro obor $Z$ platí

(A) $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f,g \in Z \Rightarrow \alpha f + \beta g \in Z$,

(B) $f \in Z \Rightarrow |f| \in Z$.

Pro zobrazení $\mathcal{I} : Z \to \mathbb{R}$ platí

(I) $f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{I}f \geq 0$,

(II) $\mathcal{I}$ je lineární zobrazení,

(III) $Z_n \in Z, f_n \searrow 0 \Rightarrow \mathcal{I}f_n \to 0$ (připomeňte si XX.4.4).

**2.3** POZNÁMKY:

1. Pro funkce na množinách funkcí se často užívá termín *funkcionál.* O cestě, kterou budeme postupovat se často mluví jako o *metodě rozšiřování funkcionálu.*

2. Metoda má mnohem obecnější platnost. Proto budeme dbát na to, abychom v této kapitole kromě (A), (B), (I), (II) a (III) již žádných dalších specifických vlastností spojitých funkcí s kompaktním nosičem ani Riemannova integrálu nepoužívali.

**2.4** Z vlastností 2.2 a pozorování v 2.1 okamžitě dostáváme:

$$\begin{aligned} f \leq g \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{I}f \leq \mathcal{I}g, \\ f,g \in Z \quad &\Rightarrow \quad \max(f,g), \min(f,g), f^+, f^- \in Z. \end{aligned}$$

**2.5 Obory $Z^R$ a $Z^K$:** Definujme

$$\begin{aligned} Z^R &= \{f \mid \exists f_n \in Z, f_n \nearrow f\}, \\ Z^K &= \{f \mid \exists f_n \in Z, f_n \searrow f\}, \\ Z^* &= Z^R \cup Z^K. \end{aligned}$$

(Funkce ze $Z^*$ tedy již mohou nabývat nekonečných hodnot.) Všimněte si, že $Z \subseteq Z^R \cap Z^K$, rovnost ale platit nemusí.

**2.6** VĚTA: *Buďte $f, g \in Z^*, f \leq g$, buďte $f_n, g_n \in Z$ funkce, které o tom svědčí. Potom*

$$\lim \mathcal{I} f_n \leq \lim \mathcal{I} g_n.$$

*(Připouštíme nekonečné hodnoty, takže o existenci těchto limit není pochyb.)*

**Důkaz:** (a) Nechť $f_n \nearrow f, g_n \searrow g$. Potom $f_n \leq f \leq g \leq g_n$ a $\mathcal{I} f_n \leq \mathcal{I} g_n$.

(b) $f_n \nearrow f, g_n \nearrow g$. Zvolme pevné $k$ a definujme

$$h_n = \min(g_n, f_k).$$

$h_n$ zřejmě neklesá a máme

$$\lim h_n(x) = \min(g(x), f_k(x)) = f_k(x),$$

takže

$$h_n \overset{n}{\nearrow} f_k \quad \text{a} \quad f_k - h_n \overset{n}{\searrow} 0$$

a tedy podle (III) máme $\mathcal{I} h_n \overset{n}{\to} \mathcal{I} f_k$. Jelikož $g_n \geq h_n$, máme $\mathcal{I} g_n \geq \mathcal{I} h_n$ a tedy

$$\lim_n \mathcal{I} g_n \geq \mathcal{I} f_k$$

pro každé $k$ a tedy též $\lim_n \mathcal{I} g_n \geq \lim_k \mathcal{I} f_k$.

(c) $f_n \searrow f, g_n \searrow g$: použijme (b) na $-f_n, -f, -g, -g_n$.

(d) $f_n \searrow f, g_n \nearrow g$: Potom $f_n - g_n \leq h_n = (f_n - g_n)^+$.
Jelikož $h_n \searrow 0$, máme $\lim \mathcal{I} h_n = 0$ a konečně

$$\lim \mathcal{I} f_n - \lim \mathcal{I} g_n = \lim \mathcal{I}(f_n - g_n) \leq 0.$$

□

**2.7** DŮSLEDEK A DEFINICE: *Pro $f \in Z^*$ můžeme definovat*

$$\mathcal{I} f = \lim_n \mathcal{I} f_n,$$

*kde $f_n$ je libovolná posloupnost funkcí ze $Z$, konvergují monotónně k $f$.*

**2.8 Několik bezprostředních fakt** (pozor na to, kde mluvíme o $Z^*$ a kde o $Z^R$ resp. $Z^K$!):

(a) $f \in Z^R \Leftrightarrow -f \in Z^K$,

(b) $f, g \in Z^R$ resp. $Z^K \Rightarrow f + g \in Z^R$ resp. $Z^K$ a platí $\mathcal{I}(f+g) = \mathcal{I} f + \mathcal{I} g$,

(c) $f \in Z^R, \alpha \geq 0$ (resp. $\alpha \leq 0$) $\Rightarrow \alpha f \in Z^R$ (resp. $\in Z^K$) a platí $\mathcal{I}(\alpha f) = \alpha \mathcal{I} f$,

(d) $f, g \in Z^*, f \leq g \Rightarrow \mathcal{I} f \leq \mathcal{I} g$,

(e) $f, g \in Z^R \Rightarrow \max(f, g), \min(f, g) \in Z^R$.

**2.9** VĚTA: *Buďte $f_n \in Z^R$, buď $f_n \nearrow f$. Potom je $f \in Z^R$ a $\mathcal{I} f_n \to \mathcal{I} f$. Obdobně pro $f_n \in Z^K$ a $f_n \searrow f$.*

**Důkaz:** Zvolme $f_{nk} \in Z$ tak, aby $f_{nk} \overset{k}{\nearrow} f_n$ a položme

$$g_n = \max(f_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

Potom $g_n$ neklesá. Položme $g = \lim g_n$. Jelikož

$$(1) \qquad g_n(x) = f_{ij}(x) \le f_i(x) \quad \text{pro nějaké } i, j \le n,$$

máme

$$(2) \qquad g_n \le f_n \le f$$

Na druhé straně, pro $k \ge n$ je $g_k \ge f_{nk}$ a tedy

$$(3) \qquad g \ge f_n.$$

Z (2) a (3) zjišťujeme, že $g_n \nearrow f$. Z (3) je dále patrno, že $\mathcal{I}f \ge \lim \mathcal{I}f_n$. Na druhé straně podle (2) máme $\mathcal{I}f = \lim \mathcal{I}g_n \le \lim \mathcal{I}f_n$. $\square$

## XXI.3 Definice Lebesgueova integrálu

**3.1** Pro libovolnou funkci $f$ definujme horní a dolní (Lebesgueův) integrál předpisy

$$\overset{\sim}{\int} f = \inf\left\{\mathcal{I}g \mid g \ge f, g \in Z^R\right\}, \qquad \underset{\sim}{\int} f = \sup\left\{\mathcal{I}g \mid g \le f, g \in Z^K\right\}.$$

**3.2** Tvrzení:

*(1)* $\overset{\sim}{\int} f = \inf\{\mathcal{I}g \mid g \ge f, g \in Z^*\}$, $\underset{\sim}{\int} f = \sup\{\mathcal{I}g \mid g \le f, g \in Z^*\}$,

*(2)* $\underset{\sim}{\int} f \le \overset{\sim}{\int} f$,

*(3)* $f \le g \Rightarrow \underset{\sim}{\int} f \le \underset{\sim}{\int} g$, $\overset{\sim}{\int} f \le \overset{\sim}{\int} g$.

**Důkaz:** (1) Dokážeme první rovnost. Kdyby neplatila, existovala by $g \ge f, g \in Z^K$ taková, že $\mathcal{I}g < \overset{\sim}{\int} f$. Buďte $g_n \in Z, g_n \searrow g$. Tedy existuje $k$ tak, že již $\mathcal{I}g_k < \overset{\sim}{\int} f$. To je spor, protože $g_k \in Z \subseteq Z^R$.

(2) plyne z (1) a (3) je triviální.
$\square$

**3.3** Z 3.2.(1) dostáváme

Důsledek: *Pro $f \in Z^*$ je $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f = \mathcal{I}f$.*

**3.4 Definice** Označme $\mathcal{L}$ množiny všech funkcí $f$, pro něž $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f$ a je to konečné číslo. Pro $f \in \mathcal{L}$ definujeme *Lebesgueův integrál*

$$\int f = \underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f.$$

Poznámka: *Požadavek konečnosti je podstatný. Je-li $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f$ nekonečné, může mít funkce $f$ ještě velmi nepříjemné chování. Lebesgueovy integrály s nekonečnými hodnotami uvažovat budeme, ale pro trochu užší systém funkcí.*

**3.5** Následující tvrzení je trochu obdobné větám XV.2.6 a XX.2.1.

VĚTA: *Funkce $f$ je v $\mathcal{L}$ právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existují $g_1 \in Z^K$ a $g_2 \in Z^R$ takové, že $g_1 \le f \le g_2$, $\mathcal{I}g_1$ a $\mathcal{I}g_2$ jsou konečné a $\mathcal{I}g_1 - \mathcal{I}g_2 < \varepsilon$.*

**Důkaz:** Je-li $f \in \mathcal{L}$, druhé tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy platí druhé tvrzení. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $g_1, g_2$ s požadovanými vlastnostmi. Máme

$$\mathcal{I}g_1 \le \underset{\sim}{\int} f \le \overset{\sim}{\int} f \le \mathcal{I}g_2 < \mathcal{I}g_1 + \varepsilon$$

a tedy $\overset{\sim}{\int} f - \underset{\sim}{\int} f < \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon$ bylo libovolné, nastává rovnost. □

**3.6 Úmluva** Funkce z $\mathcal{L}$ nemusí mít všechny hodnoty konečné. Proto se definice součtu $f + g$ funkcí z $\mathcal{L}$ může setkat s potíží: $f(x) + g(x)$ může být neurčitý výraz. Domluvíme se, že

> *je-li $f(x) + g(x)$ neurčitý výraz, nahradíme ho libovolnou hodnotou a symbolu $f + g$ budeme užívat pro takto získanou funkci.*

Výraz $f + g$ tedy může být nejednoznačný; vzápětí však uvidíme, že na těch nejednoznačných hodnotách nezáleží.

**3.7** VĚTA:

(1) *Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}$, je $f + g \in \mathcal{L}$ a platí $\int(f+g) = \int f + \int g$.*

(2) *Je-li $f \in \mathcal{L}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\alpha f \in \mathcal{L}$ a platí $\int \alpha f = \alpha \int f$.*

(3) *Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}$, je $\max(f,g) \in \mathcal{L}$ a $\min(f,g) \in \mathcal{L}$.*

(4) *Jsou-li $f, g \in \mathcal{L}$ a $f \le g$, je $\int f \le \int g$.*

(5) *Je-li $f \in \mathcal{L}$, jsou $f^+$ a $f^-$ v $\mathcal{L}$.*

(6) *Je-li $f \in \mathcal{L}$, je $|f| \in \mathcal{L}$ a platí $|\int f| \le \int |f|$.*

**Důkaz:** (1) Užijme Větu 3.5. Zvolme $\varepsilon > 0$ a funkce $f_1, g_1 \in Z^K, f_2, g_2 \in Z^R$ takové, že $f_1 \le f \le f_2$, $g_1 \le g \le g_2$ a

$$\mathcal{I}f_2 - \mathcal{I}f_1 < \frac{\varepsilon}{2},\ \mathcal{I}g_2 - \mathcal{I}g_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Potom platí

$$f_1 + g_1 \le f + g \le f_2 + g_2$$

(a to i v bodech, kde jsme hodnotu volili libovolně: bylo-li třeba $f(x) = +\infty, g(x) = -\infty$, muselo být $f_2(x) = +\infty$ a $g_1(x) = -\infty$. Jelikož však $f_1$ nemůže být $+\infty$ — je to limita nerostoucí posloupnosti konečných čísel — a podobně $g_2(x) \ne -\infty$, máme $f_1(x) + g_1(x) = -\infty$ a $f_2(x) + g_2(x) = +\infty$. Pro $f(x) + g(x)$ tedy nerovnost nepožaduje nic.) a máme $\mathcal{I}(f_2 + g_2) - \mathcal{I}(f_1 + g_1) < \varepsilon$.

(2) Zcela snadno z 3.5, musíme jen rozlišit, je-li $\alpha$ kladné či záporné.

(3) Vezměme $\varepsilon > 0$ a funkce $f_i, g_i$ jako v (1). Zřejmě máme

$$\max(f_1, g_1) \le \max(f, g) \le \max(f_2, g_2).$$

Nyní si stačí uvědomit, že

$$\max(f_2, g_2) - \max(f_1, g_1) \le (f_2 - f_1) + (g_2 - g_1).$$

(4) je zřejmé.

(5) plyne z (3).

(6) Máme $|f| = f^+ + f^-$ a tedy

$$\left|\int f\right| = \left|\int (f^+ - f^-)\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \le \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

□

**3.8 Lemma:** Jsou-li $f_n \in \mathcal{L}$ a platí-li $f_n \nearrow f$, pak $\lim \int f_n = \overset{\sim}{\int} f$.

**Poznámky:**

1. Toto lemma bude hrát v dalším velmi významnou úlohu.
2. Jelikož $\int f_n \le \underset{\sim}{\int} f$, platí pak ovšem též $\lim \int f_n = \underset{\sim}{\int} f$.

**Důkaz:** $\lim \int f_n \le \overset{\sim}{\int} f$ podle 3.3.(3). Kdyby $\lim \int f_n = +\infty$, rovnost by nastala triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $\lim \int f_n$ je konečná. Podle definice $\int f_n$ existují $g_n \in Z^R$ takové, že

$$\int f_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} > \mathcal{I} g_n.$$

Položme $h_n = \max(g_1, \dots, g_n)$. Potom $h_n \in Z^R$ a posloupnost $h_n$ neklesá. Podle 2.9 je $h = \lim h_n \in Z^R$. Jelikož $h_n \ge g_n \ge f_n$, je $h \ge f$ a tedy $\mathcal{I} h \ge \overset{\sim}{\int} f$.

Důležité pozorování:

$$h_n - f_n \le (g_1 - f_1) + (g_2 - f_2) + \dots + (g_n - f_n).$$

(V každém bodě $x$ je jeden ze sčítanců roven $h_n(x) - f_j(x)$ pro nějaké $j \le n$. Jelikož všechny sčítance jsou nezáporné, je v případě $j = n$ všechno v pořádku; jinak máme součet napravo $\ge h_n(x) - f_j(x) + g_n(x) - f_n(x) = h_n(x) - f_n(x) + g_n(x) - f_j(x) \ge h_n(x) - f_n(x) + g_n(x) - f_n(x) \ge h_n(x) - f_n(x)$.) Tedy máme

$$\mathcal{I} h_n - \int f_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon,$$

takže $\mathcal{I} h_n \le \int f_n + \varepsilon$ a odtud $\overset{\sim}{\int} f \le \mathcal{I} h_n \le \lim \int f_n + \varepsilon$. □

**3.9** Dále definujme

$\mathcal{L}^R = \{f \mid \exists f_n \in \mathcal{L}, f_n \nearrow f\}$,

$\mathcal{L}^K = \{f \mid \exists f_n \in \mathcal{L}, f_n \searrow f\}$,

$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^R \cup \mathcal{L}^K$.

**3.10** Z lemmatu 3.8 okamžitě vidíme, že platí

VĚTA: *Je-li $f \in \mathcal{L}^*$, je $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f$.*

DŮSLEDEK: $\mathcal{L}^R \cap \mathcal{L}^K = \mathcal{L}$.

**3.11 Úmluva:** Pro funkce z $\mathcal{L}^*$ budeme též užívat symbolu $\int f$ pro společnou hodnotu $\underset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} f$.

# XXI.4 Nulové množiny

**4.1** Charakteristickou funkci množiny $M$ budeme označovat $C_M$. Je tedy $C_M(x) = 1$ jakmile $x \in M$, jinak $= 0$.

Tedy máme

1. $M \subseteq N \Leftrightarrow C_M \leq C_N$,
2. $C_{M\cup N} = \max(C_M, C_N)$, $C_{M\cap N} = \min(C_M, C_N)$

a je-li $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$, platí pro $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$

$$C_{M_n} \nearrow C_M.$$

**4.2** Množinu $M$ nazveme *nulovou*, je-li $\widetilde{\int} C_M = 0$. (Potom je samozřejmě též $\underset{\sim}{\int} C_M = 0$ a tedy $C_M \in \mathcal{L}$.)

**4.3** VĚTA:

*(1) Je-li $M \subseteq N$ a $N$ nulové, je $M$ nulová.*

*(2) Jsou-li $M_n$ nulové, je $M = \bigcup^{\infty} M_n$ nulové.*

**Důkaz:** (1) je triviální.

(2) Položme $N_n = M_1 \cup \cdots \cup M_n$. Potom $C_{N_n} \nearrow C_M$ a jelikož zřejmě $C_{N_n} \leq C_{M_1} + \cdots + C_{M_n}$ a $C_{N_n}$ jsou tedy podle 3.7 nulové, dostáváme podle 3.8 $\widetilde{\int} C_M = 0$.

**4.4 Úmluva:** Buď $V(x)$ výrok týkající se prvků toho prostoru, nad nímž uvažujeme naše funkce. Řekneme, že $V$ platí *skoro všude*, je-li množina

$$\{x \mid V(x) \text{ neplatí }\}$$

nulová. Zejména se často setkáváme s výrazy

$$\lim f_n(x) = f(x) \text{ skoro všude, nebo } f = g \text{skoro všude.}$$

Poslední výrok obvykle zapisujeme $f \sim g$. Uvědomte si, že relace $\sim$ je ekvivalence.
□

**4.5** VĚTA:

*(1) Je-li $f \in \mathcal{L}$ je $M = \{x \mid f(x) = \pm\infty\}$ nulové.*

*(2) Je-li $f \in \mathcal{L}^R$ (resp. $\mathcal{L}^K$), je $f(x) > -\infty$ (resp. $< +\infty$) skoro všude.*

**Důkaz:** (1) Připomeňte si úmluvu 3.6 a větu 3.7.(1). Jelikož za $f + (-f)$ můžeme vzít stejně dobře 0 jako $C_M$, je $\int C_M = \int 0 = 0$.

(2) Buď $f \in \mathcal{L}^R$. Vezměme $f_n \in \mathcal{L}, f_n \nearrow f$. Potom $\{x \mid f(x) = -\infty\} \subseteq \{x \mid f_1(x) = \pm\infty\}$ a druhá množina je podle (1) nulová.
□

**4.6** VĚTA: *Je-li $f \sim g$, je $\widetilde{\int} f = \widetilde{\int} g$ a $\underset{\sim}{\int} f = \underset{\sim}{\int} g$.*

**Důkaz:** Provedeme pro horní integrál. Není-li $\overset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} g = +\infty$, můžeme předpokládat, že $\overset{\sim}{\int} f < +\infty$. Označme $M = \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, $f_n = n \cdot C_M$; pro $f_\infty = \lim f_n$ platí podle 3.8, že $\overset{\sim}{\int} f_\infty = 0$.

Zvolme $h_1, h_2 \in Z_R$ takové, že $h_1 \geq f$ a $\mathcal{I}h_1 < \overset{\sim}{\int} f + \frac{\varepsilon}{2}$ a že $h_2 \geq f_\infty$ a $\mathcal{I}h_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom máme $h_1 + h_2 \in Z^R, h_1 + h_2 \geq g$, a tedy $\overset{\sim}{\int} g \leq \mathcal{I}h_1 + \mathcal{I}h_2 < \overset{\sim}{\int} f + \varepsilon$. Tedy $\overset{\sim}{\int} g \leq \overset{\sim}{\int} f$ a speciálně $\overset{\sim}{\int} g \leq +\infty$, takže můžeme proceduru provést též s vyměněnými $f$ a $g$ a konečně dostaneme $\overset{\sim}{\int} f = \overset{\sim}{\int} g$. $\square$

**4.7 Důsledek:** Je-li $f \in \mathcal{L}$ a $f \sim g$, je $g \in \mathcal{L}$.

**4.8 Důsledek důsledku:** Je-li $f \in \mathcal{L}^R$ resp. $\mathcal{L}^K$ a je-li $f \sim g$, je $g \in \mathcal{L}^R$ resp. $\mathcal{L}^K$.

**4.9** VĚTA: *Nechť $f \geq 0$ a $\overset{\sim}{\int} f = 0$. Potom $f \sim 0$.*

**Důkaz:** Položme $M_n = \{x \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Jelikož $0 \leq C_{M_n} \leq n \cdot f$, máme $\overset{\sim}{\int} C_{M_n} = 0$, takže $M_n$ je nulové. Máme $\{c \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Užijme 4.2.(2). $\square$

# XXI.5 Leviho a Lebesgueova věta

**5.1** VĚTA: *(Leviho věta) Buďte $f_n \in \mathcal{L}^R$, nechť $f_n \nearrow f$ skoro všude. Potom $f \in \mathcal{L}^R$ a $\int f = \lim \int f_n$. Podobně pro $f_n \in \mathcal{L}^K$ a $f_n \searrow f$.*

**Důkaz:** Můžeme samozřejmě předpokládat, že $f_n \nearrow f$. Zvolme $f_{nk} \in \mathcal{L}$ tak, aby $f_{nk} \overset{k}{\nearrow} f_n$ a definujme

$$g_n = \max(f_{ij} \mid i, j \leq n).$$

Tedy $g_n \in \mathcal{L}$ a posloupnost $(g_n)$ neklesá. Jelikož zřejmě $g_n \leq f$, je i $\lim g_n \leq f$. Na druhé straně je ale $g_p \geq f_{np}$ pro $p \geq n$ a tedy limitou podle $p$ dostaneme $\lim g_p \geq f_n$. Provedeme-li v této nerovnosti ještě limitu podle $n$, zjistíme, že $\lim g_p \geq f$. Tedy je $\lim g_n = f$ a $f \in \mathcal{L}^R$. Zbývá zjistit hodnotu $\int f$. Pokud $\lim \int f_n = +\infty$, není co dokazovat, protože $\int f \geq \int f_n$. Jinak je ale $f_n \in \mathcal{L}$ a můžeme užít lemmatu 3.8 a dostaneme $\lim \int f_n = \overset{\sim}{\int} f = \int f$. $\square$

**5.2** VĚTA: *(Lebesgueova věta) Nechť $f_n \in \mathcal{L}$, nechť $f_n \to f$ skoro všude a nechť existuje $g \in \mathcal{L}$ takové, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ skoro všude. Potom $f \in \mathcal{L}$ a $\int f = \lim \int f_n$.*

POZNÁMKA: *Pozorný student by měl být v prvním okamžiku nespokojen s nepořádnou formulací podmínky. Myslí se „skoro všude je pro všechna $n$ $|f_n(x)| \leq g(x)$“, nebo „pro každé $n$ je skoro všude $|f_n(x)| \leq g(x)$“? Ujasněte si, z čeho plyne, že to znamená totéž.*

**Důkaz:** Samozřejmě v důkazu zase můžeme zanedbat výrazy „skoro všude“; uvědomte si ale proč.

Položme

$$h_n = \sup\nolimits_{k \geq n} f_k, \ g_n = \inf\nolimits_{k \leq n} f_k.$$

Tedy máme $h_n \in \mathcal{L}^R$ (jelikož $\max(f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+p}) \overset{p}{\nearrow} h_n$) a $g_n \in \mathcal{L}^K$. Jelikož ale

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g,$$

jsou $\int g_n$ a $\int h_n$ konečné a tedy $g_n, h_n \in \mathcal{L}$ — a tedy tím spíš $g_n \in \mathcal{L}^R$ a $h_n \in \mathcal{L}^K$. Snadno vidíme, že $\lim g_n = \lim h_n = f$ a jelikož $g_n$ neklesá a $h_n$ neroste, máme podle Leviho věty $\lim \int g_n = \lim \int h_n = \int f$. Uvážíme-li k tomu ještě to, že $\int g_n \leq \int f_n \leq \int h_n$, vidíme, že $\int f = \lim \int f_n$.

**5.3 Poznámky:**

1. Všimněte si, co se děje: Funkce $g_n$ jsou definovány tak, že jsou zřejmě v $\mathcal{L}^K$. Omezení ale zajistí, že jsou v $\mathcal{L}$, tedy jsou též v $\mathcal{L}^R$ a jako na takové na ně užijeme Leviho věty.
2. Posloupnost $(f_n)$ z příkladu 1.5 se prohřešuje jak proti předpokladům Lebesgueovy věty, tak proti předpokladům Leviho věty.
3. Lebesgueovu větu můžeme použít např. v případě, že $f_n$, definované na omezené množině $M \subseteq E_n$ (jinde ji samozřejmě dodefinujeme nulami), jsou omezeny stejnou konstantou.

$\square$

## XXI.6 Třída $\Lambda$

**6.1** Připomeňme si definice $\mathcal{L}^R$ a $\mathcal{L}^K$ z 3.9. Obecněji definujme

$$\Lambda = \{f \mid \exists f_n \in \mathcal{L}, f_n \to f\}.$$

**6.2** VĚTA: *Je-li $f \sim g$ a $f \in \Lambda$, je $g \in \Lambda$.*

**Důkaz:** Nechť $f_n \to f$, $f_n \in \mathcal{L}$, buď $M = \{x \mid f(x) = g(x)\}$. Položme $g_n(x) = g(x)$ pro $x \in M$, $g_n(x) = f_n(x)$ jinak. Máme $g_n \to g$ a podle 4.7 jsou $g_n \in \mathcal{L}$. $\square$

**6.3** VĚTA: *Buď $g \in \mathcal{L}$. Nechť $f_n \in \mathcal{L}^*$ a nechť $f_n \geq g$ pro všechna $n$. Jestliže $f_n \to f$, je $f_n \in \mathcal{L}^R$.*

**Důkaz:** Jelikož $-\infty \neq \int g \leq \int f_n$, musí být $f_n \in \mathcal{L}^R$. Položme $\varphi = \sup_n f_n$. Jelikož $\max_{k \leq n} f_k \overset{n}{\nearrow} \varphi$, je podle 5.1 $\varphi \in \mathcal{L}^R$ a tedy existují $\varphi_n \in \mathcal{L}$ tak, že $\varphi_n \nearrow \varphi$. Jelikož zřejmě $\varphi \geq f \geq g$, můžeme předpokládat, že $\varphi_n \geq g$ (jinak nahradíme každou $\varphi_n$ funkcí $\max(\varphi_n, g)$). Položme

$$g_{mn} = \min(\varphi_n, f_n).$$

Máme $g \leq g_{mn} \leq \varphi_m$ a tedy je $g_{mn} \in \mathcal{L}$ a nadto můžeme pro limitu $g_{mn}$ podle $n$ užít Lebesgueovy věty a dostáváme

$$\min(\varphi_m, f) = \lim_m g_{mn} \in \mathcal{L}.$$

A nyní: $\min(\varphi_m, f) \overset{m}{\nearrow} f$ a tedy $f \in \mathcal{L}^R$. $\square$

**6.4 Důsledek** Speciálně je-li $f \in \Lambda$ a $f \geq 0$, je $f \in \mathcal{L}^R$. (Místo $f_n$ případně vezmeme $\max(f_n, 0)$.)

**6.5** VĚTA:

*(a) Jsou-li $f, g \in \Lambda$ a má-li $f + g$ smysl skoro všude, je $f + g \in \Lambda$.*

*(b) Je-li $f \in \Lambda$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je $\alpha f \in \Lambda$.*

*(c) Jsou-li $f, g \in \Lambda$ je $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ v $\Lambda$.*

*(d) Je-li $f \in \Lambda$, je $|f| \in \Lambda$.*

**6.6** VĚTA: *Funkce $f$ je v $\Lambda$ právě když $f^+$ i $f^-$ jsou v $\mathcal{L}^R$.*

**Důkaz:** Vezměme $f_n \in \mathcal{L}, f_n \to f$. Potom zřejmě $f_n^+ \to f$ a $f_n^- \to f^-$. Užijte 6.4. Opačná implikace je zřejmá. $\square$

**6.7 Důsledek** Nechť $f \in \Lambda$ a nechť pro nějaké $g \in \mathcal{L}$ platí $|f| \leq g$. Potom $f \in \mathcal{L}$.

**6.8** VĚTA: *Jsou-li $f_n \in \Lambda$ a je-li $f_n \to f$ skoro všude, je i $f \in \Lambda$.*

**Důkaz:** Máme $f_n^+, f_n^- \in \mathcal{L}^R$ a $f_n^+ \to f^+, f_n^- \to f^-$. Tedy podle 3.6 jsou $f^+$ i $f^-$ v $\mathcal{L}^R$. $\square$

**6.9** VĚTA: *$f \in \mathcal{L}^*$ právě když $f^+$ a $f^-$ jsou v $\mathcal{L}^R$ a výraz $\int f^+ - \int f^-$ má smysl. Následkem toho, $f \in \Lambda - \mathcal{L}^*$ právě když $f^+$ a $f^-$ jsou v $\mathcal{L}^R$ a $\int f^+ = \int f^- = +\infty$.*

**Důkaz:** $\Rightarrow$: Nechť dejme tomu $f \in \mathcal{L}^R$. Nechť $f_n \nearrow f, f_n \in \mathcal{L}$. Jelikož $f_1 \leq f = f^+ - f^-$, je $f^- \leq f_1^- \in \mathcal{L}$ a tedy je hodnota $\int f^-$ konečná.

$\Leftarrow$: Má-li $\int f^+ - \int f^-$ smysl, musí být alespoň jedno z čísel $\int^+, \int f^-$ konečné a tedy $f^+$ nebo $f^-$ je v $\mathcal{L}$. Tedy je $f^+ - f^-$ buď v $\mathcal{L}^R$ nebo v $\mathcal{L}^K$.
$\square$

**6.10 Poznámka** Tvrzení 6.4-6.9 jsou možná dost překvapivá. Ukazuje se, že k tomu, aby limita integrovatelných funkcí byla integrovatelná na způsobu konvergence ani tak moc nezáleží. Jediné o co jde je aby kladná i reálná část limity nebyly příliš velké.

Pro hodnotu integrálu limity ale na způsobu konvergence záleží (viz 1.5 a §5).

# XXII (Lebesgueova) míra

Toto bude velmi krátká kapitola. Míra je však tak důležitá záležitost, že stojí za to jí raději kapitolu věnovat, místo aby se ztrácela mezi mnoha odstavci o integrálu.

## XXII.1 Měření objemů

**1.1** Připomeňme si první odstavec XV. kapitoly. Byly tam jmenovány některé základní požadavky na rozumný pojem plochy. Když je modifikUjeme na vícerozměrné objemy, jde zejména o to,

- aby objem byl vždy nezáporné číslo,
- aby objem kvádru o stranách $a_1, \dots, a_m$ byl součin $a_1 \cdot \ldots \cdot a_m$,
- a aby pro disjunktní $A$ a $B$ byl objem $A \cup B$ roven součtu objemu $A$ a objemu $B$.

Ponechávám zatím stranou otázku, čemu je možno objem vůbec přisuzovat. Zakrátko se totiž dozvíme, že je to, zhruba řečeno, možné pro všechny útvary, které jsme schopni konstruktivně popsat.

**1.2** Množinu $A \subseteq \mathbb{E}_m$ nazveme (Lebesgueovsky) měřitelnou, je-li její charakteristická funkce $C_A$ ve třídě $\Lambda$ (připomeňte si XXI.6) — což znamená totéž, jako když požadujeme, aby byla v $L^R$. Číslo

$$\mu(A) = \int C_A,$$

(konečné nebo nekonečné) nazýváme její (Lebesgueovou) mírou.

POZNÁMKA: *Nulové množiny z XXI.4 jsou tedy právě ty $A \subseteq \mathbb{E}_m$, které mají míru nula.*

**1.3** Nejprve ukážeme, že míry kvádrů (intervalů) jsou takové, jak si přejeme. Buď $J = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \langle a_m, b_m \rangle$. Položme $J_m = \langle a_1 - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \rangle \times \cdots \times \langle a_m - \frac{1}{n}, b_m + \frac{1}{n} \rangle$ a definujme

$$f_n(x) = \frac{\varrho(x, \mathbb{E}_m \backslash J_n)}{\varrho(x, \mathbb{E}_m \backslash J_n) + \varrho(x, J)}$$

(připomeňte si XVII.2.2; prostě potřebujeme spojitou funkci takovou, aby na $J$ měla hodnotu 1, mimo $J_m$ hodnotu 0 a na $J_n \backslash J$ byla někde mezi tím). Snadno vidíme, že

- každé $f_n$ je v $Z$, a
- $f_n \searrow C_J$.

Hodnotu $\mathcal{I}f_n$ můžeme počítat jako Riemannův integrál $\int_{J_1} f_n$, pro který zřejmě platí

$$(b_1 - a_1 + \frac{2}{n}) \cdots (b_m - a_m + \frac{2}{n}) \leq \int f_n \leq (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m).$$

Tedy je $\mu(J) = \int C_J = \lim_n \int f_n = (b_1 - a_1) \cdots (b_m - a_m)$.

**1.4** Jsou-li $A, B$ měřitelné a disjunktní, máme $C_A, C_B \in L^R$ a $C_{A \cup B} = C_A + C_B \in L^R$ a dostáváme

$$\mu(A \cup B) = \int (C_A + C_B) = \int C_A + \int C_B = \mu(A) + \mu(B).$$

Obecně pro měřitelné $A$ a $B$ dostáváme, že $A \cup B$ je měřitelné a $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$. Je totiž $C_{A \cup B} = \max(C_A, C_B) \leq C_A + C_B$ a ovšem $\max(C_A, C_B)$ je opět v $L^R$.

**1.5** Dostáváme ale podstatně víc: Lebesgueova míra je aditivní nejen pro konečné, ale též pro spočetné systémy. Buďte $A_n$ měřitelné. Potom

$$C_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \overset{n}{\nearrow} C_{\bigcup^\infty A_n}$$

a tedy $C_{\bigcup A_n}$ je v $L^R$ a $\bigcup^\infty A_n$ je tedy měřitelné. Nadto, *jsou-li* $A_n$ *disjunktní, dostáváme* podle Leviho věty *formuli*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(této vlastnosti se říká $\sigma-$aditivita). Obecně ovšem platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**1.6** $\sigma$-aditivita míry má některé, trochu paradoxní důsledky. Jeden jsme nenápadně použily v XXI.1.3.1. Teď se na něj trochu soustředíme. Seřaďme si racionální čísla (v XXI.1.3.1 jsme si všímali jen intervalu $\langle 0, 1\rangle$, nyní můžeme pracovat na celé přímce) do posloupnosti

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

Vezměme $\varepsilon > 0$ a položme

$$U_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}).$$

Jednotlivé sčítané intervaly mají délky

$$\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \frac{\varepsilon}{2^3}, \ldots$$

takže dostáváme

$$\mu(U_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Ke každému $\varepsilon > 0$ tedy na přímce existuje hustá otevřená množina míry $< \varepsilon$. Podobné husté množiny můžeme samozřejmě zkonstruovat v kterékoli $\mathbb{E}_m$.

## XXII.2 Měřitelné množiny

V tomto odstavci budeme bez dalších odkazů používat fakta o třídě $\Lambda$ z odstavce XXI.6.

**2.1** Zrekapitulujme si pozorování z 1.5. Platí

VĚTA: *Sjednocení libovolného spočetného systému měřitelných množin je měřitelná množina.*

**2.2** Podobně platí

VĚTA: *Průnik libovolného spočetného systému měřitelných množin je měřitelná množina.*

**Důkaz:** $C_{\bigcap A_n} = \lim_{n\to\infty} \min(C_{A_1}, \cdots, C_{A_n})$. $\square$

**2.3** Dále platí

VĚTA: *Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.*

**Důkaz:** $C_{A\setminus B} = \max(C_A - C_B, 0)$. $\square$

**2.4** VĚTA: *Každá otevřená a každá uzavřená podmnožina $\mathbb{E}_m$ je měřitelná.*

**Důkaz:** Stačí dokázat pro otevřené množiny. Potom budeme vědět též, že $\mathbb{E}_m$ je měřitelná a tvrzení o uzavřených množinách dostaneme z 2.3. Dále, tvrzení stačí dokázat pro *omezené* otevřené množiny, neboť každá otevřená množina je sjednocení spočetného systému omezených, třeba jako $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U \cap B_n$ kde $B_n$ je otevřená koule o poloměru $n$.

Buď tedy $U$ omezená otevřená množina. Definujme

$$A_n = \left\{x \mid \varrho(x, \mathbb{E}_m \setminus U) \leq \frac{1}{n}\right\}$$

a položme

$$f_n(x) = \frac{\varrho(x, A_n)}{\varrho(x, \mathbb{E}_m \setminus U) + \varrho(x, A_n)}.$$

Toto je spojitá funkce s kompaktním nosičem, nabývající hodnoty 0 na $\mathbb{E}_m \setminus U$ a 1 na $A_n$. Tedy $f_n \in Z \subseteq L$ a tedy $\lim f_n \in \Lambda$. Zřejmě ale je $\lim f_n = C_U$: jestliže $x \neq U$, platí $f_n(x) = 0$ pro všechna $x$; je-li $x \in U$, je pro dostatečně velké $n_0$ $\Omega(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq U$ a tedy $\varrho(x, \mathbb{E}_m \setminus U) < \frac{1}{n_0}$. Tedy pro $n \geq n_0$ je $x \in A_n$ a $f_n(x) = 1$. $\square$

**2.5** Nejmenší soustava podmnožin euklidovského prostoru $\mathbb{E}_m$ obsahující všechny otevřené množiny (resp. uzavřené množiny, to samozřejmě vyjde na stejno) a uzavřené na spočetné sjednocení, spočetné průniky a rozdíly množin se nazývá soustavou *Borelovských množin.*

Z vět 2.1 – 2.4 dostáváme

DŮSLEDEK: *Všechny Borelovské množiny jsou měřitelné.*

**2.6** Dodejme, že každá množina, získaná rozumnou dostatečně explicitní konstrukcí je Borelovská. S pomocí axiomu výběru se dá poměrně snadno dokázat, že existují neměřitelné množiny; užití axiomu výběru v takových důkazech se ale zdá být podstatné.