UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Fakulta matematicko-fyzikální

Příklady z matematické analýzy

I.

Příklady k teorii Lebesgueova integrálu

Doc. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc.

Státní pedagogické nakladatelství Praha

© Jaroslav Lukeš, 1968

P ř e d m l u v a

Tato skripta vznikla z potřeb posluchačů II.ročníku dálkového studia na MFF KU, u nichž 4.semestr studia je v matematické analýze vyhražen přednášce z teorie Lebesgueova integrálu. Zatímco pro teorii a zavedení Lebesgueova integrálu mají posluchači k dispozici skripta I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I , není pro počítání příkladů v české literatuře vhodná sbírka. Jediným zatím dostupným materiálem je kniha V.Jarník, Integrální počet II, v níž jest ovšem vybudována teorie Lebesgueova integrálu odlišným způsobem než ve skriptech Černý - Mařík. Vzhledem k tomu, že ani posluchači řádného studia nemají ucelenou sbírku příkladů k této látce, rozhodl jsem se do skript zařadit i příklady těžší.

Účelem této sbírky příkladů není - na rozdíl od mnoha jiných sbírek tohoto typu - naučit posluchače spočítat všechny možné typy integrálů. Chtěl bych, aby se pomocí těchto skript podařilo překlenout posluchačům mezeru, která vzniká mezi teorií Lebesgueova integrálu a její aplikací na konkrétní příklady. Byl bych velmi spokojen, kdyby se ukázalo, že tato skripta pomohla pochopit základní myšlenky teorie Lebesgueova integrálu a ukázala posluchačům cestu, jak řešit různé typy příkladů. Domnívám se, že je užitečné dát posluchači příklad - byť s velmi podrobným návodem - a požadovat, aby dále pracoval samostatně (vše s porozuměním provedl). Jinak řečeno, je mnohem lepší spočítat jeden příklad do všech nejmenších detailů, vše dokonale podložit teorií, než počítat podle čistě mechanických pravidel množství příkladů.

Všechny příklady ve skriptech jsou s podrobným návodem (velmi často je udáno dokonce více způsobů řešení) a dají se rozdělit do čtyř skupin. V první skupině jsou většinou příklady na "kalkulus", jedná se o standartní typy příkladů, tyto by měl každý bezpodmínečně umět řešit. Do druhé skupiny jsem zařadil příklady blíže ilustrující teorii, jsou to většinou teoretické příklady a protipříklady na teorii. I příklady z této skupiny by měl mít každý posluchač velmi dobře promyšlené. Do třetí skupiny jsem zařadil příklady těžší, příklady zajímavé, které by měly tvořit jakousi nadstavbu celé teorie - chápané spíše jako příklady výběrové pro lepší studenty. Tím není pochopitelně řečeno, že jejich studium by ostatním uškodilo. Do poslední skupiny jsem zařadil příklady velmi těžké, problémové, určené spíše k řešením v samostatných zájmových kroužcích. I když nelze dělat přesnou hranici mezi jednotlivými skupinami příkladů, rozhodl jsem se přesto pro lepší orientaci jednotlivé skupiny v textu graficky rozlišit, a to takto:

1.skupina - pouhé označení čísla příkladu - např. 7,51 - standartní typy,
2.skupina - označení čísla s kroužkem - např. $7{,}51^{\circ}$ - příklady k teorii,
3.skupina - označení čísla s hvězdičkou - např. $7{,}51^{*}$ - zajímavé a těžší příklady,
4.skupina - označení čísla s dvěma hvězdičkami - např. $7{,}51^{**}$ - problémové příklady.

Ve skriptech je velmi mnoho příkladů; nelze - a ani to nemá smysl - žádat na posluchači, aby všechny spočítal. O vhodnosti výběru jednotlivých příkladů by měl každý konsultovat s přednášejícím a cvičícími.

Větší množství příkladů s sebou nese také nedostatek - je totiž velmi nepravděpodobné, že by všechny příklady byly bez chyb. Příklady nebyly jednak nikým přepočítány, jednak jejich opisováním a tiskem zajisté vznikla řada drobných chyb. Budu proto každému vděčný za upozornění na jakýkoliv nedostatek těchto skript.

Abych se nemusel neustále odvolávat na jednotlivé věty skript I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I, pokusil jsem se v 1.kapitole vyložit základy teorie a sepsal jsem všechny příslušné věty. Jako dodatek k této kapitole jsem připojil definici a základní vlastnosti zobecněného Newtonova integrálu, které jsou v naší literatuře těžko dostupné. V druhé kapitole bych doporučoval každému posluchači si projít alespoň jeden z příkladů 2,5 - 2,23, na kterém je možno si ilustrovat celou probíranou teorii. Ve 3.-6.kapitole jsou uvedeny příklady vztahující se k Lebesgueovu integrálu z reálných funkcí v E_n . Při výběru těchto příkladů jsem vycházel hlavně z knihy V.Jarník, Integrální počet II, z které kapitolu VII by si měl každý též prostudovat. Příklady v těchto kapitolách jsou vybrány z různých knih a sbírek, není nutné, abych je zde citoval. V sedmé kapitole jsem se snažil ukázat, jakými jinými způsoby by bylo možno zavést Lebesgueův integrál. Konečně v osmé kapitole jsem shrnul a uvedl většinou těžší příklady a problémy, z nichž alespoň některé lze doporučit lepším posluchačům k řešení. Poslední kapitolu - Dodatek - sepsal RNDr Břetislav Novák, CSc, ve formě cvičení. Jedná se o další pokračování a prohloubení teorie Lebesgueova integrálu, které se sice nepřednáší ve 4.semestru, ale s kterým se setkají posluchači matematických specialisací ve vyšších ročnících. Přehled a seznam všech důležitých pojmů a symbolů je uveden na začátku skript.

Do těchto skript nebylo pochopitelně možno zařadit vše. Zcela je vynechána partie o Lebesgue-Stieltjesově integrálu, ve skriptech chybí příklady k procvičení látky na spojitost a derivaci integrálu podle parametru pro vícerozměrné integrály, méně pozornosti je věnováno horním a dolním integrálům, vnitřní míře aj.

Příklady z těchto skript je možno studovat i při jiném způsobu výkladu a zavedení Lebesgueova integrálu (např. podle sedmé kapitoly), pouze část příkladů z 2.kapitoly je zcela specifická.

Ještě bych se chtěl zmínit o stylu psaní těchto skript. Z důvodů, aby se sbírka nestala nepřehlednou a příliš rozvláčnou, jsem zvolil krátké způsoby zápisů obvyklé v matematické literatuře. Vyžaduje to ovšem schopnost posluchačů umět si vše "přepsat do běžného jazyka". Uvedu příklad. Větu

$$" \alpha, a, b \in E_1 ,\quad a < b \Rightarrow \left[\frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \mathscr{L}(a,b) \Leftrightarrow \alpha < 1 \right] "$$

je nutno číst takto:

"Buďte α ,a,b reálná čísla, a $<$ b. Potom funkce $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ má konečný Lebesgueův integrál od a do b , právě když $\alpha < 1$ " .

Závěrem bych chtěl poděkovat RNDr B.Novákovi, CSc, který celý rukopis přečetl a mnoha podnětnými návrhy pomohl ke zlepšení těchto skript, RNDr J.Milotovi, který přečetl sedmou kapitolu a upozornil mne na řadu nedostatků a sekretářce katedry ZMD Heleně Fryčové za skutečně nevšední ochotu a pomoc při technickém zpracování těchto skript.

Praha, listopad 1967. Jaroslav Lukeš

Přehled nejdůležitějších symbolů a pojmů.

A/ Nejdůležitější používané symboly: strana

$\underset{\sim}{A}f$	..... dolní abstraktní integrál z funkce f	16
$\mathscr{L}$	..... systém všech funkcí, pro něž $\tilde{A}f = \underset{\sim}{A}f \in E_1$	17
$\mathscr{L}^R, \mathscr{L}^K$	.... systémy funkcí, vzniklé ze systému $\mathscr{L}$ pomocí monotonních limitních přechodů	17
Λ	..... systém všech měřitelných funkcí	17
c_M	..... charakteristická funkce množiny M	17
$f \sim g$	..... ekvivalence dvou funkcí	17
$\mathfrak{M}$	..... systém všech měřitelných množin	18
$\tilde{A}_M f$, $\underset{\sim}{A}_M f$	.. horní a dolní integrál z funkce f přes množinu M ...	19
$A_M f$	..... abstraktní integrál z funkce f přes množinu M	19
$\mathscr{L}_M$	..... systém všech funkcí s konečným abstraktním integrálem přes množinu M	19
$\mathscr{L}_M^*$	..... systém všech funkcí, pro něž existuje abstraktní integrál přes množinu M	19
Λ_M	..... systém všech měřitelných funkcí na množině M	19
μM	..... míra množiny M	18
$\tilde{\mu} M$	..... vnější míra množiny M	18
f^+ , f^-	.... kladná a záporná část funkce f	21
C_r	..... systém všech spojitých funkcí v E_r s kompaktním nosičem	22
$(R)\int_{E_r} f$	.... Riemannův integrál funkce f přes E_r	23
N_f	..... nosič funkce f podle definice v 1.kapitole	23
$N(f)$	..... nosič funkce f podle definice v 7.kapitole	211
μ_r	..... r - rozměrná Lebesgueova míra	23,208
$\mathfrak{M}_r$	..... systém všech lebesgueovský měřitelných množin v E_r ...	23,208
$M^{*,x}$, $M^{x,*}$	řezy množiny M	24
$f^{*,x}$, $f^{x,*}$	....	24
$\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$	tento symbol je definován jako hodnota rozdílu $F(b) - F(a)$	27
sign x	..... symbol je definován takto: sign $x = 1$, je-li $x > 0$, sign $0 = 0$, sign $x = -1$, je-li $x < 0$	47
log	..... funkce logaritmus, je zde vždy míněna při základu e /tzv. přirozený logaritmus/	

B/ <u>Nejdůležitější používané pojmy:</u>

A

B

C

D

S

T

U

V

Z

1. Zavedení abstraktního Lebesgueova integrálu

Ze začátku se pokusíme stručně vyložit, proč se zavádí Lebesgueův integrál, proč nevystačíme ani s Riemannovým ani s Newtonovým integrálem a - co to vůbec integrál je.

Začněme se zodpověděním poslední otázky, co je to vlastně integrál (máme přitom pochopitelně na mysli <u>určitý</u> integrál). Zopakujte si proto, jak se zaváděl Riemannův integrál. Mějme tedy dán libovolný uzavřený interval $\langle a, b\rangle \subset E_1$ a libovolnou reálnou omezenou funkci definovanou na $\langle a, b\rangle$. Každému dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ můžeme přiřadit dvě reálná čísla - tzv. horní a dolní součet funkce f - vezměme nyní všechna možná dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a všechny možné příslušné horní a dolní součty. V případě, že se infimum množiny všech horních součtů rovná supremu množiny všech dolních součtů, nazveme tuto společnou hodnotu Riemannovým integrálem funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$. Víme dobře, že ne pro každou omezenou funkci na intervalu $\langle a,b\rangle$ existuje Riemannův integrál, označme proto symbolem $R(a,b)$ množinu těch omezených reálných funkcí na $\langle a,b\rangle$, pro které existuje Riemannův integrál od a do b. (Zajisté je vám známo, že například každá <u>spojitá</u> funkce v $\langle a,b\rangle$ patří do systému $R(a,b)$). Každé funkci ze systému $R(a,b)$ jsme přiřadili právě jedním způsobem jisté reálné číslo, totiž Riemannův integrál. S takto zavedeným novým pojmem - Riemannovým integrálem - jsme pak dále pracovali a odvodili si řadu jeho vlastností.

Pokusme se nyní podat náznak obecné definice integrálu. Mějme proto dán opět libovolný interval $(a,b) \subset E_1$, tentokrát ne již nutně omezený či uzavřený a na tomto intervalu buď dán nějaký systém reálných funkcí, který si označíme $\Theta(a,b)$. Definovat integrál pro funkce ze systému $\Theta(a,b)$ znamená vlastně udat předpis, podle kterého bychom uměli přiřadit každé funkci z $\Theta(a,b)$ jisté reálné číslo. Toto přiřazení nemůže však být zcela libovolné (nemá například smysl každé funkci přiřadit číslo <u>11</u>), musí mít jisté "rozumné" vlastnosti. Máme-li třeba dvě funkce f,g ze systému $\Theta(a,b)$, které mají integrál, chceme, aby i součet $f + g$ byla funkce ze systému $\Theta(a,b)$ a aby integrál z této funkce byl roven součtu integrálů z funkcí f,g. Jinou takovou vlastností integrálu by mohla být vlastnost, že integrál z nezáporné funkce v intervalu (a,b) je nezáporné číslo anebo například tato vlastnost - má-li funkce f integrál přes interval (a,b) a interval (c,d) je částí intervalu (a,b), má funkce f i integrál přes interval (c,d).

Můžeme tedy říci - zhruba - že zadat integrál na nějakém systému funkcí $\Theta(a,b)$ definovaných na intervalu (a,b), znamená udat zobrazení, které každé funkci f ze systému $\Theta(a,b)$ přiřazuje jisté reálné číslo, a přitom takovým způsobem, že toto zobrazení splňuje určité axiomy. Tedy - každé funkci $f \in \Theta(a,b)$ se přiřadí jisté reálné číslo, můžeme proto říci, že integrál je <u>reálná funkce</u>, definovaná na systému funkcí $\Theta(a,b)$ (pod pojmem reálné funkce na libovolné množině M rozumíme zobrazení, které každému prvku množiny M přiřazuje reálné číslo); reálné funkci, definované na systému funkcí, budeme říkat <u>funkcionál</u>.

Kdybychom nyní chtěli podat trochu přesnější definici integrálu, mohla by vypadat následovně.

"Mějme dán nějaký systém funkcí $\Theta(a,b)$ definovaných na intervalu (a,b). Integrálem na systému $\Theta(a,b)$ budeme nazývat libovolný funkcionál I definovaný na $\Theta(a,b)$ (tj. zobrazení I ze systému $\Theta(a,b)$ do E_1), který spolu se systémem $\Theta(a,b)$ splňuje jisté axiomy (uvedeme alespoň nejdůležitější):

1) $f,g \in \Theta(a,b) \Rightarrow f+g \in \Theta(a,b)$ a $I(f+g) = I(f) + I(g)$,

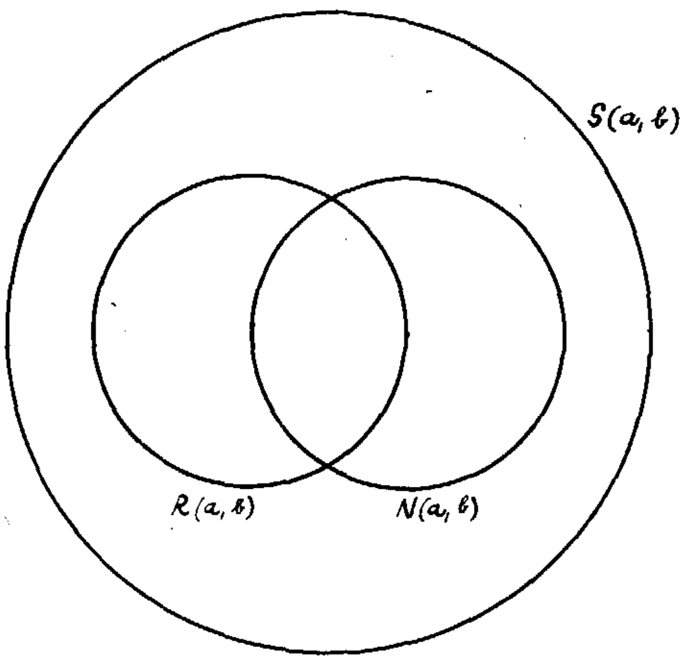
2) $f \in \Theta(a,b)$, $c \in E_1 \Rightarrow cf \in \Theta(a,b)$ a $I(cf) = c\,I(f)$,

3) $f \in \Theta(a,b)$, $f \geqq 0$ na $(a,b) \Rightarrow I(f) \geqq 0$

Vrátíme-li se nazpět k Riemannově integrálu, vidíme, že tento integrál je vlastně funkcionál na systému $R(a,b)$, který všechny naše axiomy splňuje. Pro libovolnou funkci $f \in R(a,b)$ označme tedy $Rf = (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Je-li $(a,b) \subset E_1$ libovolný interval, můžeme pro jistou třídu funkcí definovaných na (a,b) definovat také Newtonův integrál (viz 3,2). Systém všech funkcí na (a,b) pro něž existuje Newtonův integrál značme symbolem $N(a,b)$ a pro libovolnou funkci $f \in N(a,b)$ buď $Nf = (N)\int_a^b f(x)\,dx$. Opět vidíme (věty 68, 69), že funkcionál N splňuje na systému $N(a,b)$ naše axiomy.

Jaký je vztah Newtonova a Riemannova integrálu? Z obecných vět víme, že každá funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ má jak Riemannův, tak Newtonův integrál a oba tyto integrály jsou si rovny. Tedy libovolná spojitá funkce v $\langle a,b \rangle$ leží jak v systému $R(a,b)$, tak v systému $N(a,b)$ a platí pro ni $Rf = Nf$. Je také známo, že existují funkce, které mají Newtonův integrál $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ a nemají Riemannův integrál $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ (viz př. 3,4) a také naopak (viz 3,5). Systémy $R(a,b)$ a $N(a,b)$ nejsou tedy zcela totožné, ani jeden není podsystémem druhého. Kdybychom si symbolem $S(a,b)$ označili systém všech reálných funkcí na intervalu (a,b), mohli bychom si graficky znázornit situaci asi takto:



Obrázek č.1

Víme také, že dokonce existují funkce (a je jich hodně!) které nemají ani Riemannův ani Newtonův integrál (viz př. 3,3). Platí však velmi důležitá věta

$$f \in R(a,b) \cap N(a,b) \Rightarrow Rf = Nf$$

tj. pro funkce (ne nutně spojité v $\langle a,b \rangle$!), které mají jak Riemannův tak Newtonův integrál - oba integrály jsou stejné.

Jak jsme již podotkli, existuje mnoho funkcí, které nemají ani Riemannův ani Newtonův integrál a naší snahou nyní je definovat "nový" integrál (a "nový" systém funkcí na intervalu (a,b)), který by byl zobecněním jak Newtonova tak Riemannova integrálu a který by zahrnoval pokud možno co nejširší okruh funkcí. Ideální by bylo, kdyby se nám podařilo definovat integrál na systému <u>všech</u> funkcí $S(a,b)$, ale toto bohužel netriviálně nelze.

Tedy ještě jednou - naším cílem je definovat systém funkcí $L(a,b)$ a integrál L na $L(a,b)$ (tj. funkcionál L, splňující jisté naše axiomy), tak, aby pokud možno $L(a,b)$ byl co nejširším okruhem funkcí a aby pro funkce, které již mají Riemannův či Newtonův integrál, se nový integrál rovnal Riemannovu či Newtonovu integrálu. Přesněji, hledáme systém funkcí $L(a,b)$ a integrál L na $L(a,b)$ tak, aby platilo

1) $R(a,b) \subset L(a,b)$
2) $f \in R(a,b) \Rightarrow Rf = Lf$,
3) $f \in N(a,b) \cap L(a,b) \Rightarrow Nf = Lf$

Podmínku, aby nový integrál byl i rozšířením Newtonova integrálu (tj. aby platilo $N(a,b) \subset L(a,b)$ si klást nebudeme (viz př. 3,4).

Je nyní mnoho způsobů, jak tento nový integrál zavést. Podle toho dostáváme různé třídy integrovaných funkcí a různé druhy integrálů (například zobecněný Riemannův, Lebesgueův, Perronův, zobecněný Lebesgueův a jiné). My se podržíme metody, kterou vypracoval matematik P.J.Daniell (1889-1946), a protože v podstatě tato metoda vede ke stejnému výsledku, jaký dává metoda matematika Henri Lebesguea (1875-1943), budeme novému integrálu říkat Lebesgueův integrál.

Naznačíme ještě stručně, byť ne zcela přesně, myšlenku celého postupu. Mějme tedy opět dánu - například na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ - <u>libovolnou</u> reálnou funkci f . Vezměme všechny možné spojité funkce g na $\langle a,b \rangle$, které jsou na intervalu $\langle a,b \rangle$ větší anebo rovny naší funkci f , označme symbolem

$$H_f(a,b) = \left\{ g \; ; \quad g \geqq f \quad \text{na} \quad \langle a,b \rangle, \quad g \text{ spojitá} \right\} ;$$

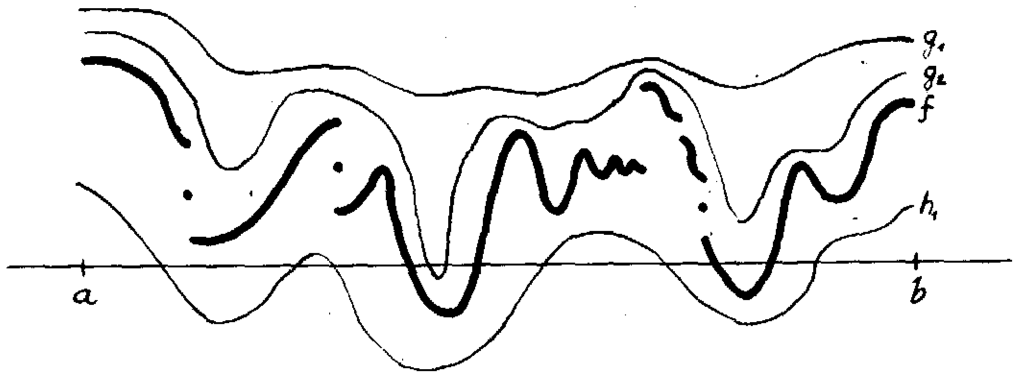
pro funkce ze systému $H_f(a,b)$ existuje Riemannův integrál a můžeme položit

$$\tilde{L} f = \inf (R) \int_a^b g(x)\, dx ,$$

kde infimum se bere přes všechny funkce $g \in H_f(a,b)$.
Obdobně můžeme definovat

$$\underset{\sim}{L} f = \sup (R) \int_a^b h(x)\, dx ,$$

kde supremum se bere přes množinu všech funkcí h, které jsou spojité v $\langle a,b \rangle$ a na tomto intervalu menší anebo rovny naší funkci f. Nakreslete si obrázek!



Obrázek č.2

V případě, že nastane rovnost $\underset{\sim}{L}f = \tilde{L}f$, mohli bychom tuto společnou hodnotu nazvat Lebesgueovým integrálem funkce f přes interval $\langle a,b \rangle$. Ukazuje se, že tato myšlenka je vhodná, ovšem majorisovat naši funkci f pouze spojitými funkcemi není ještě nejlepší (zkuste spočítat podle této definice $\underset{\sim}{L}f$ a $\tilde{L}f$ přes interval $\langle 0,1 \rangle$ pro Dirichletovu funkci! Viz př. 3,3 ; 2,31); pro tuto myšlenku vybudování integrálu je třeba vzít o něco širší třídu funkcí než jsou funkce spojité. Přesně je celý tento postup vyložen ve skriptech I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I.

Shrneme-li, lze říci, že zavedení Lebesgueova integrálu je vhodné zejména z těchto dvou důvodů:

1) systémy funkcí, které mají Riemannův či Newtonův integrál jsou příliš úzké, je zapotřebí nalézt nějakou širší třídu funkcí, která má integrál,
2) věty odvozené v teorii Lebesgueova integrálu jsou velmi silné za hodně obecných předpokladů (viz například Fubiniova věta), teorie se proto dá velmi dobře aplikovat na konkrétní příklady.

V tomto krátkém úvodu jsem se pokusil - často ne zcela přesně a korektně - nastínit problematiku zavedení Lebesgueova integrálu.

V další části této kapitoly podáme základy teorie Lebesgueova integrálu a přidáme soupis jednotlivých vět.

Mějme dánu neprázdnou množinu P, symbolem $S(P)$ značme množinu všech funkcí na množině P (pozor! - pod pojmem funkce na množině M budeme vždy v dalším rozumět zobrazení množiny M do E_1^*; připouštíme tedy, že funkce mohou nabývat i nekonečných hodnot).

Buď $Z \subset S(P)$ množina takových funkcí, že jsou splněny následující axiomy:

axiom (1_Z)	:	$f \in Z \Rightarrow f$ je konečná na P (tj. $f(P) \subset E_1$) ,
axiom (2_Z)	:	$f_1, f_2 \in Z$, $\alpha_1, \alpha_2 \in E_1 \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in Z$,
axiom (3_Z)	:	$f \in Z \Rightarrow \lvert f \rvert \in Z$.

To znamená, že mezi všemi funkcemi $S(P)$ vydělíme jistou třídu funkcí Z a to tak, aby byly splněny naše axiomy.

Na množině Z buď dán funkcionál A (tj. každé funkci $f \in Z$ je přiřazeno jisté reálné číslo Af) tak, že jsou splněny následující axiomy:

axiom (4_A)	: $f \in Z \Rightarrow Af \in E_1$,
axiom (5_A)	: $f \in Z$, $f \geq 0$ na $P \Rightarrow Af \geq 0$,
axiom (6_A)	: $f_1 , f_2 \in Z$, $\alpha_1 , \alpha_2 \in E_1 \Rightarrow A(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 Af_1 + \alpha_2 Af_2$,
axiom (7_A)	: $f_n \in Z$, $f_n \searrow 0$ na $P \Rightarrow Af_n \to 0$.

Systému Z budeme říkat <u>základní systém funkcí</u>, funkcionálu A na Z pak <u>základní funkcionál na Z</u> , dvojici (Z,A) budeme nazývat <u>základní prostor</u>.

Základní systém funkcí Z dále rozšíříme. Definujeme systémy Z^R , Z^K , Z^* takto:

$$Z^R = \{ f \in S(P) \; ; \text{ existují } f_n \in Z , \; f_n \nearrow f \},$$
$$Z^K = \{ f \in S(P) \; ; \text{ existují } f_n \in Z , \; f_n \searrow f \},$$
$$Z^* = Z^R \cup Z^K .$$

Rovněž tak funkcionál A - který je prozatím definován na systému Z - rozšíříme na systém Z^*. Pro libovolnou funkci $f \in Z^*$ definujeme Af takto:

je-li $f_n \in Z$ monotonní posloupnost funkcí , $f_n \to f$ na P , definujeme $Af = \lim_{n\to\infty} Af_n$.

Je nutno si uvědomit, že

a) $\lim_{n\to\infty} Af_n$ vždy existuje (objasněte proč!),

b) číslo Af (které pro funkce ze systému Z^* může již být rovno $\pm\infty$) nezávisí na výběru posloupnosti $f_n \in Z$ (nemůže se tedy stát, že by existovaly dvě posloupnosti funkcí $f_n \in Z$, $g_n \in Z$, které by obě monotonně konvergovaly k funkci f a pro něž by bylo $\lim_{n\to\infty} Af_n \neq \lim_{n\to\infty} Ag_n$),

c) pro funkce $f \in Z$ splývá nová definice Af se "starým" Af (na systému Z byl totiž již funkcionál A definován a $Z \subset Z^*$!).

Máme tedy prozatím definován funkcionál A na systému Z^*. Pro <u>libovolnou</u> funkci $f \in S(P)$ definujeme nyní její <u>horní</u> a <u>dolní</u> abstraktní integrál (značme $\tilde{A}f$ a $\underset{\sim}{A}f$).

$$\tilde{A}f = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in Z^R}} Ag \; , \qquad \underset{\sim}{A}f = \sup_{\substack{h \leq f \\ h \in Z^K}} Ah \; .$$

Poznamenejme při této příležitosti, že $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$ (v některých případech by se totiž mohlo stát - viz např. 2,7 či 2,10 - že k dané funkci $f \in S(P)$ neexistuje žádná funkce $g \in Z^R$, resp. $h \in Z^K$ taková, že $g \geq f$, resp. $h \leq f$).

Platí nyní:

$\boxed{\text{věta } 8}$: $f \in S(P) \Rightarrow \underset{\sim}{A}f \leq \tilde{A}f$,

$\boxed{\text{věta } 9}$: $f \in Z^* \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f = Af$.

Definujme nyní další systém funkcí, a to $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f \in E_1 \right\}.$$

Pro funkce $f \in \mathcal{L}$ značme společnou hodnotu $\underset{\sim}{A}f$ a $\tilde{A}f$ (což je konečné číslo) opět symbolem Af (věta 9 nám k tomu dává oprávnění).

Obor funkcí $\mathcal{L}$ ještě dále rozšiřme, buď

$$\mathcal{L}^R = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \text{existují } f_n \in \mathcal{L}, \; f_n \nearrow f \right\},$$
$$\mathcal{L}^K = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \text{existují } f_n \in \mathcal{L}, \; f_n \searrow f \right\},$$
$$\Lambda = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \text{existují } f_n \in \mathcal{L}, \; f_n \to f \right\},$$
$$\mathcal{L}^* = \mathcal{L}^R \cup \mathcal{L}^K .$$

Platí tato důležitá věta:

$\boxed{\text{věta } 10}$: $f \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$.

Pro funkce $f \in \mathcal{L}^*$ značme tuto společnou hodnotu (která již nemusí být konečná!) opět symbolem Af . Funkcionál A na systému funkcí $\mathcal{L}^*$ nazýváme <u>abstraktním Lebesgueovým integrálem</u> a systém $\mathcal{L}^*$ je nejširším systémem funkcí, pro které je tento integrál definován. Funkce ze systému Λ nazýváme <u>měřitelné</u>.

Ověřte, že platí následující vztahy:

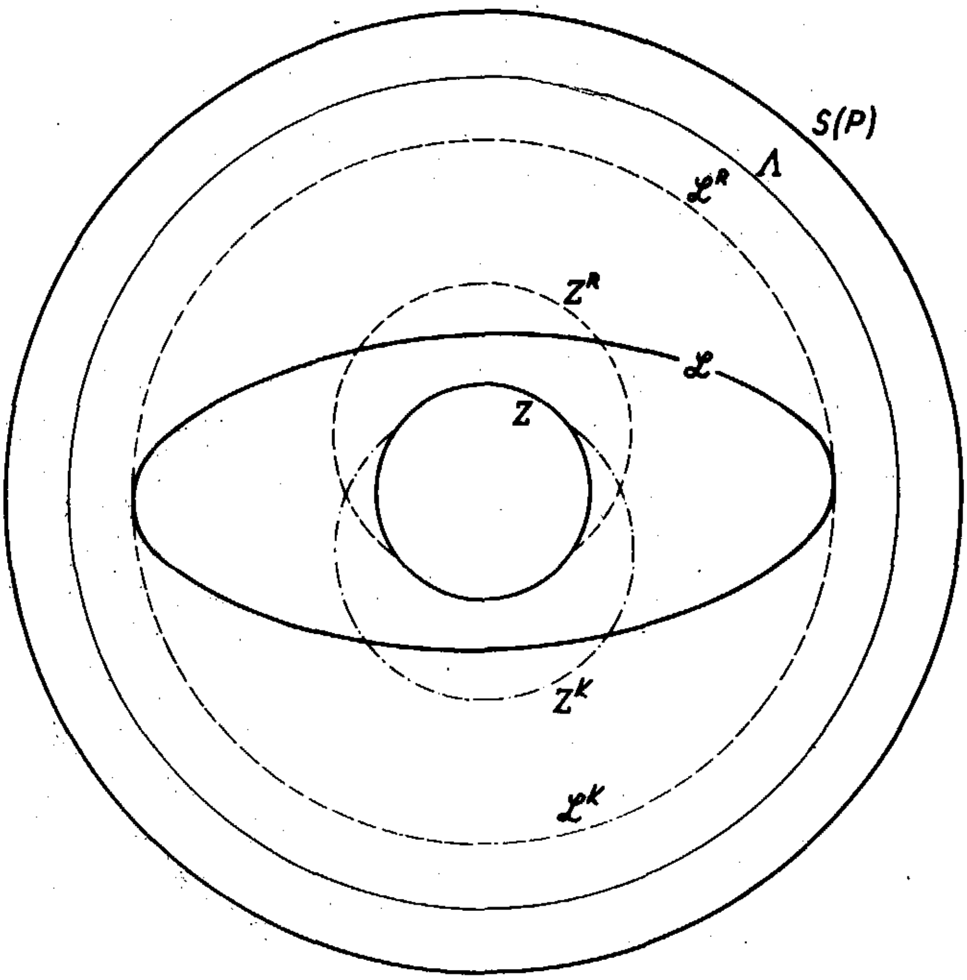
$$Z \subset Z^R \cap Z^K, \quad Z \subset \mathcal{L} \quad , \; \mathcal{L} = \mathcal{L}^R \cap \mathcal{L}^K \; , \quad Z^R \subset \mathcal{L}^R$$
$$Z^K \subset \mathcal{L}^K, \quad Z^* \subset \mathcal{L}^*, \quad \mathcal{L}^* \subset \Lambda \; .$$

Jak je možno tyto inkluse graficky znázornit viz na následující straně (nahoře).

Množina $M \subset P$ se nazývá <u>nulová</u>, jestliže $\tilde{A}c_M = 0$ (c_M je tzv. <u>charakteristická funkce množiny M</u>, je definována takto: $c_M(x) = 1$ pro $x \in M$, $c_M(x) = 0$ pro $x \in P - M$). Řekneme, že funkce f a g jsou na množině P <u>ekvivalentní</u> (budeme značit $f \sim g$), jestliže množina $\left\{ x \in P \; ; \; f(x) \neq g(x) \right\}$ je nulová.

Platí tato věta:

$\boxed{\text{věta } 11}$: $f \sim g \Rightarrow \tilde{A}f = \tilde{A}g \; , \; \underset{\sim}{A}f = \underset{\sim}{A}g$.



Obrázek č.3

Tedy horní a dolní integrál funkce f se nezmění, změníme-li funkci f na nulové množině. Proto definujeme horní a dolní integrál i pro funkce, které jsou definovány jen "skoro všude" v P, tj. jsou definovány všude až na nulovou množinu. Je vidět, že funkci f můžeme na této nulové množině dodefinovat jak chceme, aniž tím změníme hodnotu jejího horního či dolního integrálu.

Buď dán nyní určitý výrok $V(x)$ týkající se prvků množiny $X \subset P$. Řekneme, že $V(x)$ platí skoro všude (v X), jestliže množina $\{ x \in X \; ; \; V(x) \text{ neplatí} \}$ je nulová. Můžeme tedy kupříkladu říci, že funkce f a g jsou ekvivalentní, právě když $f = g$ skoro všude (v P).

Pro libovolnou množinu $M \subset P$ definujeme její vnější míru $\tilde{\mu} M$ předpisem

$$\tilde{\mu} M = \tilde{A} c_M .$$

Je-li $c_M \in \mathcal{L}^*$, definujeme tzv. míru množiny M

$$\mu M = A c_M .$$

Systém všech množin $M \subset P$, pro něž $c_M \in \mathcal{L}^*$, značme symbolem $\mathfrak{M}$. Množiny ze systému $\mathfrak{M}$ nazýváme měřitelné, funkci μ pak říkáme míra na $\mathfrak{M}$.

25535 Z2

Je-li tedy nějaká množina neměřitelná, má pouze vnější míru, nikoliv míru. Pro měřitelné množiny míra splývá s vnější mírou.

Buď nyní $M \subset P$ měřitelná množina, $f \in S(P)$ libovolná funkce na P. Definujeme funkci $\hat{f}$ takto:

$$\hat{f}(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad x \in M \,, \quad \hat{f}(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in P - M \,,$$

tj. $\hat{f} = f.c_M$ (kde pochopitelně chápeme $0 \,.\, \pm\infty = \pm\infty \,.\, 0 = 0$).

Platí následující věta:

$\boxed{\text{věta } 12}$: $f \in \Omega \implies \hat{f} \in \Omega$, kde Ω může znamenat kterýkoliv ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ.

Je-li opět $M \subset P$ měřitelná množina a funkce f je definována pouze na množině M, definujme funkci $\overline{f}$ následovně:

$$\overline{f}(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad x \in M \,, \quad \overline{f}(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \in P - M \,.$$

Dále definujme horní a dolní integrál přes množinu M takto

$$\tilde{A}_M f = \tilde{A}\,\overline{f} \;, \quad \underset{\sim}{A}_M f = \underset{\sim}{A}\,\overline{f} \,.$$

Konečně definujeme systémy $\mathcal{L}_M$, $\mathcal{L}_M^R$, $\mathcal{L}_M^K$, $\mathcal{L}_M^*$, Λ_M vztahem

$$f \in \Omega_M \iff \overline{f} \in \Omega \,,$$ kde Ω opět může znamenat libovolný ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ.

Upozorněme znovu, že tyto systémy definujeme pouze v případě $M \in \mathcal{M}$; napíšeme-li proto v dalším $\mathcal{L}_M$, automaticky předpokládáme, že množina M je měřitelná.

Pro funkce ze systémů $\mathcal{L}_M^*$ definujeme A_M - integrál přes množinu M - předpisem

$$A_M f = A\,\overline{f} \quad (= \tilde{A}_M f = \underset{\sim}{A}_M f) \,.$$

Nyní lze odvodit následující věty:

A/ O míře a měřitelných množinách

$\boxed{\text{věta } 13}$: $M_n \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{M}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{M}$, $M_1 - M_2 \in \mathcal{M}$,

$\boxed{\text{věta } 14}$: $\emptyset \in \mathcal{M}$,

$\boxed{\text{věta } 15}$: $M_n \in \mathcal{M} \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu M_n$,

Jsou-li navíc množiny M_n po dvou disjunktní, platí rovnost ,

$\boxed{\text{věta } 16}$: $M_n \in \mathcal{M}$, $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots\ldots \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu M_n$,

$\boxed{\text{věta } 17}$: $M_n \in \mathcal{M}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots\ldots$, $\mu M_1 < +\infty \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n\right) =$
$= \lim_{n\to\infty} \mu M_n$,

B/ <u>Pro integraci posloupností a řad funkcí</u>

$\boxed{\text{věta } 18}$: a/ $f_n \in \mathcal{L}_M^R$, $f_n \nearrow f$ skoro všude na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^R$,
$A_M f_n \longrightarrow A_M f$,
b/ $f_n \in \mathcal{L}_M^K$, $f_n \searrow f$ sk.vš. na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^K$,
$A_M f_n \longrightarrow A_M f$ /tzv. Leviho věta/,

$\boxed{\text{věta } 19}$: $f_n \in \Lambda_M$, $f_n \longrightarrow f$ sk.vš. na M , existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že $|f_n(x)| \leq g(x)$ pro všechna n a sk.vš. $x \in M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a $A_M f_n \longrightarrow A_M f$
/tzv. Lebesgueova věta/,

$\boxed{\text{věta } 20}$: $f_n \in \mathcal{L}_M$, $\mu M < +\infty$, $f_n \rightrightarrows f$ na M /tj. posloupnost funkcí f_n konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M / $\Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a $A_M f_n \longrightarrow A_M f$,

$\boxed{\text{věta } 21}$: a/ $v_n \in \Lambda_M$, $v_n \geq 0$ sk. vš. na M ,
$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk. vš. na $M \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M^R$ a $A_M v =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$,
b/ $v_n \in \Lambda_M$, $v_n \leq 0$ sk. vš. na M ,
$v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk. vš. na $M \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M^K$ a $A_M v =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$ /Leviho věta / ,

$\boxed{\text{věta } 22}$: $v_n \in \Lambda_M$, $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sk. vš. na M , nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že pro všechna k a sk.vš. $x \in M$ jest $\left|\sum_{j=1}^{k} v_j(x)\right| \leq g(x) \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M$ a $A_M v =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$
/Lebesgueova věta/ ,

$\boxed{\text{věta 23}}$: $v_n \in \mathcal{L}_M$, $\mu M < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$ stejnoměrně na $M \Rightarrow v \in \mathcal{L}_M$ a $A_M v = \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$.

C/ Pro závislost na integračním oboru

$\boxed{\text{věta 24}}$: M nulová, $f \in S(P) \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^*$ a $A_M f = 0$,

$\boxed{\text{věta 25}}$: $M, N \in \mathcal{M}$, $N \subset M$, $f \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_N$
/obdobně pro systémy $\mathcal{L}^R$, $\mathcal{L}^K$, $\mathcal{L}^*$, Λ /,

$\boxed{\text{věta 26}}$: $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}$ po dvou disjunktní,
$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \Rightarrow A_M f = \sum_{i=1}^{n} A_{M_i} f$,
má-li jedna strana smysl
/tj. je buďto $f \in \mathcal{L}_M^*$ anebo je $f \in \mathcal{L}_{M_i}^*$ pro všechna $i = 1,\dots,n$ a součet vpravo má smysl/,

$\boxed{\text{věta 27}}$: $M_n \in \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$,
$\underline{f \in \mathcal{L}_M^*} \Rightarrow A_M f = \sum_{i=1}^{\infty} A_{M_i} f$,

$\boxed{\text{věta 28}}$: $M_n \in \mathcal{M}$, $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots$, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$,
$\underline{f \in \mathcal{L}_M^*} \Rightarrow A_M f = \lim_{n\to\infty} A_{M_n} f$,

$\boxed{\text{věta 29}}$: $M_n \in \mathcal{M}$, $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$, $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$,
$f \in \mathcal{L}_{M_1} \Rightarrow A_M f = \lim_{n\to\infty} A_{M_n} f$.

D/ O měřitelných funkcích

$\boxed{\text{věta 30}}$: $f_n \in \Lambda_M$, $f_n \to f$ sk.vš. v $M \Rightarrow f \in \Lambda_M$,

$\boxed{\text{věta 31}}$: $f \in \Lambda_M$, $g \in \mathcal{L}_M$, $|f| \leq g$ sk.vš. v $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$,

$\boxed{\text{věta 32}}$: $f \in \Lambda_M \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}_M^R$, $f^- \in \mathcal{L}_M^R$
/kde $f^+ = \max(f,0)$ je tzv. kladná část funkce f, $f^- = \max(-f,0)$ záporná část f /,

$\boxed{\text{věta 33}}$: a/ $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^R$,
b/ $f \in \Lambda_M$, $f \leq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M^K$,
c/ $f \in \Lambda_M \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}_M^R$,
/odtud speciálně plyne, že

$$c_M \in \Lambda_M \Leftrightarrow M \in \mathcal{M} ,$$

tj. množina je měřitelná, právě když její charakteristická funkce je měřitelná/,

$\boxed{\text{věta } 34}$: $f \in \Lambda \Leftrightarrow$ existují $f_n \in Z$, $f_n \longrightarrow f$ sk. vš.,

$\boxed{\text{věta } 35}$: $f \in \Lambda_M - \mathcal{L}^*_M \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}^R_M$, $f^- \in \mathcal{L}^R_M$,
$A_M f^+ = A_M f^- = +\infty$,

$\boxed{\text{věta } 36}$: $f \in \Lambda_M - \mathcal{L}^*_M \Rightarrow \tilde{A}_M f = +\infty$, $\underset{\sim}{A}_M f = -\infty$.

E/ <u>O integrálu</u>

$\boxed{\text{věta } 37}$: $f \in \mathcal{L} \Rightarrow f$ je konečná skoro všude ,

$\boxed{\text{věta } 38}$: a/ $f \in \mathcal{L}^R \Rightarrow f > -\infty$ sk. vš. ,
b/ $f \in \mathcal{L}^K \Rightarrow f < +\infty$ sk. vš. ,

$\boxed{\text{věta } 39}$: $f,g \in \mathcal{L}^*_M$, $f \leq g$ sk. vš. v $M \Rightarrow A_M f \leq A_M g$,

$\boxed{\text{věta } 40}$: $f \in \mathcal{L}^*_M$, $c \in E_1 \Rightarrow c.f \in \mathcal{L}^*_M$ a $A_M(cf) = c.A_M f$,

$\boxed{\text{věta } 41}$: $f \in \mathcal{L}^*_M$, $g \in \mathcal{L}^*_M$, nechť má smysl součet
$A_M f + A_M g \Rightarrow$ skoro všude v M má smysl součet $f + g$,
jest $f + g \in \mathcal{L}^*_M$,
$A_M (f + g) = A_M f + A_M g$,

$\boxed{\text{věta } 42}$: $f \in \mathcal{L}^*_M \Leftrightarrow f^+ \in \mathcal{L}^R_M$, $f^- \in \mathcal{L}^R_M$ a má smysl rozdíl
$A_M f^+ - A_M f^-$ /potom ovšem je $A_M f = A_M f^+ - A_M f^-$ / ,

$\boxed{\text{věta } 43}$: $f \in \mathcal{L}^*_M \Rightarrow |A_M f| \leq A_M|f|$,

$\boxed{\text{věta } 44}$: $f \in \Lambda_M \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_M \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}_M \right]$,

$\boxed{\text{věta } 45}$: $f \geq 0$ sk.vš. v M , $A_M f = 0 \Rightarrow f \sim 0$ v M ,

$\boxed{\text{věta } 46}$: $f \in \mathcal{L} \Rightarrow$ existují $f_n \in Z$ a funkce $g \in \mathcal{L}$ tak, že
$|f_n| \leq g$ a $f_n \longrightarrow f$ sk.vš.

Nejdůležitějším příkladem základního prostoru (Z,A) je případ, kdy zvolíme $P = E_r$, za základní systém funkcí zvolíme systém funkcí C_r a za základní funkcionál A Riemannův integrál přes E_r . Podrobněji - C_r je systém všech spojitých funkcí v E_r , každá z nichž je rovna nule vně nějakého kompaktního intervalu. Ještě jinak řečeno, definujeme-li pro libovolnou funkci f v E_r její nosič N_f

$$N_f = \overline{\{ x \in E_r \; ; \; f(x) \neq 0 \}}$$ /kde pruh znamená uzávěr v E_r /,

je C_r systém všech spojitých funkcí v E_r s kompaktním nosičem. /Ukažte, že C_r tvoří základní systém funkcí, tj. splňuje axiomy 1_Z, 2_Z, 3_Z ! /

Pro libovolnou funkci $f \in C_r$ definujeme Af jako Riemannův integrál funkce f přes E_r.

Je-li $f \in C_r$, existuje kompaktní interval $I \subset E_r$, vně kterého je $f = 0$, definujeme

$$(R)\int_{E_r} f = (R)\int_I f(x)\,dx .$$

Ukažte, že

1/ $f \in C_r \Rightarrow$ existuje $(R)\int_{E_r} f$,

2/ $(R)\int_{E_r} f$ nezávisí na výběru intervalu I.

Lze ukázat, že Riemannův integrál přes E_r splňuje axiomy $4_A - 7_A$ /pro $Z = C_r$/. Rozšíříme-li nyní základní systém $Z = C_r$ se základním funkcionálem $A = (R)\int_{E_r}$, dostaneme teorii, v níž platí ještě navíc některé další důležité věty /které obecně nemusí platit/. Rozšířenému funkcionálu říkejme v tomto případě krátce <u>Lebesgueův integrál</u>, příslušné míře <u>Lebesgueova míra</u>. Je-li zapotřebí zvláště vyznačit závislost na dimensi E_r, říkejme podrobněji r - rozměrný Lebesgueův integrál, r - rozměrná Lebesgueova míra /značme ji symbolem μ_r /. Systém všech měřitelných množin v E_r značme symbolem $\mathcal{M}_r$. Lebesgueův integrál přes množinu $M \subset E_r$ značme $(L)\int_M$ anebo - nehrozí-li nedorozumění - krátce $\int_M$.

$\boxed{\text{věta } 47}$: a/ $f \in Z^R \Leftrightarrow f > -\infty$ všude v E_r, $f \geq 0$ vně nějakého kompaktního intervalu, f je polospojitá [1] zdola v E_r,

b/ $f \in Z^K \Leftrightarrow f < +\infty$ všude v E_r, $f \leq 0$ vně nějakého kompaktního intervalu, f je polospojitá [1] shora v E_r,

c/ $Z = Z^R \cap Z^K$,

$\boxed{\text{věta } 48}$: f je spojitá na měřitelné množině $M \Rightarrow f \in \Lambda_M$,

$\boxed{\text{věta } 49}$: buď $I \subset E_r$ kompaktní interval, nechť existuje

$$(R)\int_I f \Rightarrow f \in \mathcal{L}_I \quad \text{a} \quad (R)\int_I f = (L)\int_I f ,$$

1/ Funkce f se nazývá polospojitá zdola /shora/ v bodě $x_0 \in E_r$, jestliže ke každému $\alpha < f(x_0)$ ($\alpha > f(x_0)$) existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x) > \alpha$ ($f(x) < \alpha$) pro všechna $x \in U(x_0)$.
Funkce f se nazývá polospojitá zdola /shora/ v množině $M \subset E_r$, je-li polospojitá zdola /shora/ v každém bodě množiny M.

$\boxed{\text{věta } 50}$: $M \subset E_r$ otevřená nebo uzavřená $\Rightarrow M \in \mathcal{M}_r$,

$\boxed{\text{věta } 51}$: $I \subset E_r$ buď interval /libovolný/ $\Rightarrow I \in \mathcal{M}_r$ a
$\mu_r I = \text{vol } I$
/kde vol I znamená objem intervalu I , viz též př. 7,18/,

$\boxed{\text{věta } 52}$: a/ každá jednobodová množina v E_r je nulová,
b/ každá spočetná množina v E_r je nulová ,

$\boxed{\text{věta } 53}$: a/ $a > 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}(a,+\infty) \Leftrightarrow \alpha > 1 \right]$
b/ $a,b \in E_1$, $a < b \Rightarrow \left[\frac{1}{(x-a)^\alpha} \in \mathcal{L}(a,b) \Leftrightarrow \alpha < 1 \right]$

$\boxed{\text{věta } 54}$: existují neměřitelné množiny a neměřitelné funkce, přesněji
a/ $M \subset E_r$, $\tilde{\mu}_r M > 0 \Rightarrow$ existuje $N \subset M$, $N \notin \mathcal{M}_r$,
b/ $M \subset E_r$, $M \in \mathcal{M}_r$, $\mu M > 0 \Rightarrow$ existuje f taková,
že $f \notin \Lambda_M$,

$\boxed{\text{věta } 55}$: $M \subset E_r \Rightarrow \tilde{\mu}_r M = \inf\limits_{\substack{G \supset M \\ G \text{ otevřená}}} \mu_r G$

$\boxed{\text{věta } 56}$: $f \in \Lambda_M \Leftrightarrow$ pro každé $c \in E_1$ je $\left\{ x \in M \; ; \; f(x) > c \right\} \in \mathcal{M}$,

$\boxed{\text{věta } 57}$: buď f omezená na intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$, potom
$(R)\int_a^b f$ existuje $\Leftrightarrow$ množina
$\left\{ x \in \langle a,b \rangle \; ; \; f \text{ není spojitá v bodě } x \right\}$ je nulová

<u>Označení .</u>

Je-li $M \subset E_{r+s}$, nechť pro každé $y \in E_s$ je

$$M^{*,y} = \left\{ x \in E_r \; ; \; [x,y] \in M \right\}$$

a pro každé $x \in E_r$ je

$$M^{x,*} = \left\{ y \in E_s \; ; \; [x,y] \in M \right\}$$ /kreslete v rovině !/.

Je-li funkce f definována v množině $M \subset E_{r+s}$, označme $f^{*,y}$, resp. $f^{x,*}$ funkci definovanou v $M^{*,y}$, resp. $M^{x,*}$ vztahem

$$f^{*,y}(x) = f(x,y), \text{ resp. } f^{x,*}(y) = f(x,y) .$$

$\boxed{\text{věta } 58}$: /Fubiniova/
Buď $M \subset E_{r+s}$ měřitelná množina, buď M' průmět množiny M do prostoru E_r prvních r souřadnic, tj.
$M' = \left\{ x \in E_r \; ; \text{ existuje } y \in E_s \text{ tak, že } [x,y] \in M \right\}$
/kreslete v E_2 ! / , buď $f \in \mathcal{L}^*_M$.
Potom pro sk.vš. $x \in E_r$ je $f^{x,*} \in \mathcal{L}^*_{M^{x,*}}$;

označíme-li $F(x) = (L)\int_{M^{x,*}} f^{x,*}$, je $F \in \mathcal{L}^*_M$,

a $(L)\int_M f = (L)\int_{M'} F$.

Připomeňme si nyní definici regulárního zobrazení.

Řekněme, že zobrazení $f = (f_1, \dots, f_r)$ množiny $M \subset E_r$ do E_r je <u>regulární v množině M</u> , jestliže

1/ M je otevřená,

2/ funkce f_i /$i = 1,\dots,r$/ mají v množině M spojité parciální derivace,

3/ Jacobiův determinant zobrazení f

$$D_f(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(u), \dots\dots, \frac{\partial f_1}{\partial u_r}(u) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1}(u), \dots\dots, \frac{\partial f_r}{\partial u_r}(u) \end{vmatrix} \neq 0$$

pro všechna $u = (u_1,\dots,u_r) \in M$.

$\boxed{\text{věta 59}}$: /věta o substituci/

Buď f prosté a regulární zobrazení množiny $P \subset E_r$ na množinu $R \subset E_r$ /tj. $f(P) = R$/.

Potom

$$\int_R F(x)dx = \int_P F(f(u)).\left|D_f(u)\right|du ,$$

má-li jedna strana rovnosti smysl.

$\boxed{\text{věta 60}}$: /věta o spojité závislosti integrálu na parametru/

Buď $f(x,\alpha)$ funkce definovaná v množině $M \times A$, kde $M \subset E_1$, $A \subset E_1$, nechť

1/ pro každé $\alpha \in A$ je $f(x,\alpha) \in \Lambda_M$ /přesněji $f^{*,\alpha} \in \Lambda_M$/,

2/ pro sk.vš. $x \in M$ je $f(x,\alpha)$ spojitá v množině A jakožto funkce α /přesněji funkce $f^{x,*}$ je spojitá v A /,

3/ existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že nerovnost $|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ je splněna pro sk. vš. $x \in M$ a všechna $\alpha \in A$.

Potom funkce $f(x,\alpha) \in \mathcal{L}_M$ pro všechna $\alpha \in A$ /přesněji $f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M$ / a funkce F ,

$$F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx ,$$

je spojitá v množině A .

$\boxed{\text{věta 61}}$: /věta o derivaci integrálu podle parametru/

Buď $f(x,\alpha)$ funkce definovaná v množině $M \times I$, kde $M \subset E_1$ a I je <u>interval</u> v E_1 , nechť

1/ pro každé $\alpha \in I$ je $f^{*,\alpha} \in \Lambda_M$,

2/ alespoň pro jedno $\alpha \in I$ je $f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M$,

3/ existuje nulová množina $N \subset M$ tak, že pro všechna $x \in M - N$ a pro všechna $\alpha \in I$

a/ existuje konečná $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$,

b/ existuje funkce $G \in \mathcal{L}_M$ tak, že

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq G(x) .$$

Potom

I/ pro každé $\alpha \in I$ je $f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M$, označme opět

$F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\, dx$,

II/ pro každé $\alpha \in I$ je

$$F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\, dx$$

věta 62 : /geometrický význam integrálu/

Buď $R \subset E_r$ množina, $f \in S(R)$, označme

$N_1(f) = \left\{ [x,y] \in R \times E_1 ;\ 0 < y < f(x) \right\}$,

$N_2(f) = \left\{ [x,y] \in R \times E_1 ;\ 0 \leq y \leq f(x) \right\}$,

$\operatorname{graf} f = \left\{ [x,y] \in R \times E_1 ;\ y = f(x) \right\}$.

I/ Je-li f spojitá v R , R uzavřená, jsou množiny graf f, $N_2(f)$ uzavřené v E_{r+1} a

1/ $\mu_{r+1}(\operatorname{graf} f) = 0$,

2/ je-li navíc $f \geq 0$ v R , je

$\mu_{r+1}(N_2(f)) = (L)\int_R f(x)\,dx$.

II/ Je-li f spojitá v R , R otevřená, je množina $N_1(f)$ otevřená v E_{r+1} . Je-li navíc $f \geq 0$ v R , je

$$\mu_{r+1}(N_1(f)) = (L)\int_R f(x)\,dx .$$

Jako dodatek k této kapitole uvedeme ještě definici a základní vlastnosti zobecněného Newtonova integrálu.

definice 63 : /definice zobecněné primitivní funkce/

Buď $(a,b) \subset E_1$ interval libovolného druhu. Funkci F nazýváme <u>zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b)</u>, jestliže

1/ F je spojitá v (a,b) ,

2/ existuje konečná množina K tak, že

$$F' = f \quad \text{v } (a,b) - K .$$

věta 64 : Jsou-li F, G dvě zobecněné primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b), existuje konstanta $k \in E_1$ tak, že $f - G = k$ v (a,b).

definice 65 : /definice zobecněného Newtonova integrálu/

Buď $(a,b) \subset E_1$ interval, f funkce na (a,b). Nechť existuje zobecněná primitivní funkce F k funkci f v (a,b), nechť existují vlastní $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$.

Potom rozdíl $\lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$ nazýváme zobecněným Newtonovým integrálem funkce f v (a,b) a značíme následovně

$$(ZN)\int_a^b f = (ZN)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b .$$

Poznámky:

a/ $(ZN)\int_a^b f$ nezávisí na volbě zobecněné primitivní funkce k funkci f v (a,b),

b/ neexistuje-li zobecněná primitivní funkce F k funkci f v intervalu (a,b) anebo neexistuje-li některá z limit $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$ vlastní, říkáme, že $(ZN)\int_a^b f$ neexistuje,

c/ v definici zobecněné primitivní funkce k funkci f v (a,b) a v definici $(ZN)\int_a^b f$ není třeba předpokládat, že funkce f je definována v celém intervalu (a,b), stačí, je-li definována v $(a,b) - M$, kde M je konečná množina,

d/ je-li F zobecněná primitivní funkce k funkci f v intervalu (a,b), kde $a,b \in E_1$ a je-li navíc F spojitá v $\langle a,b\rangle$, je

$$(ZN)\int_a^b f = F(b) - F(a) ,$$

e/ existence ani hodnota $(ZN)\int_a^b f$ se nezmění, změníme-li hodnoty integrované funkce f v konečném počtu bodů v (a,b),

f/ pro libovolné $a \in E_1$ definujeme $(ZN)\int_a^a f = 0$,

g/ je-li $a > b$, definujeme $(ZN)\int_a^b f = -(ZN)\int_b^a f$, pokud $(ZN)\int_b^a f$ existuje,

h/ zopakujte si též definici Newtonova integrálu, porovnejte tuto s definicí ZN - integrálu,

k/ rovněž tak následující věty formulujte pro Newtonův integrál.

věta 66 : Nechť existuje $(ZN)\int_a^b f$, potom

a/ pro libovolné $c \in (a,b)$ existuje $(ZN)\int_a^c f$,

b/ označíme-li pro každé $x \in (a,b)$ $\Phi(x) = (ZN)\int_a^x f$, je Φ zobecněnou primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a,b), přičemž $\Phi'(x) = f(x)$ v těch bodech, v nichž f je spojitá.

věta 67 : Je-li $a < b < c$, potom

$$(ZN)\int_a^c f = (ZN)\int_a^b f + (ZN)\int_b^c f ,$$

existuje-li buďto integrál vlevo anebo oba integrály vpravo.

věta 68 : Nechť existují $(ZN)\int_a^b f$, $(ZN)\int_a^b g$, nechť $\alpha, \beta \in E_1$. Potom existuje také $(ZN)\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ a platí

$$(ZN)\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha (ZN)\int_a^b f + \beta (ZN)\int_a^b g .$$

věta 69 : Nechť existuje $(ZN)\int_a^b f$, nechť $f \geq 0$ v $(a,b) - M$, kde M je konečná množina.
Potom $(ZN)\int_a^b f \geq 0$.

věta 70 : /integrace per partes pro ZN - integrál/
Nechť F , resp. G je zobecněná primitivní funkce k funkci f , resp. g v intervalu (a,b) .
Potom

$$(ZN)\int_a^b F.g = \Big[F.G \Big]_a^b - (ZN)\int_a^b f.G ,$$

mají-li alespoň dva výrazy v této rovnici smysl.

věta 71 : /substituční metoda pro ZN - integrál/
Nechť

a/ funkce g je spojitá a ryze monotonní v intervalu (α, β) ,

b/ $g\ ((\alpha, \beta)) = (a,b)$,

c/ existuje vlastní $g'(t) \neq 0$ v $(a,b) - M$, kde M je konečná množina.

Potom

$$(ZN)\int_a^b f = (ZN)\int_\alpha^\beta f(g(t)) \ . \ |g'(t)| \ dt ,$$

existuje-li alespoň jeden z těchto integrálů.

věta 72 : Nechť f je spojitá v $\langle a,b \rangle$,
Potom

$$\left| (ZN)\int_a^b f \right| \leq (ZN)\int_a^b |f| .$$

věta 73 : Nechť f je spojitá a omezená v $(a,b) - K$, kde K je konečná množina, nechť $a,b \in E_1$. Potom $(ZN)\int_a^b f$ existuje.

věta 74 : Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a,b)$, kde $b \in E_1$ anebo $b = +\infty$. Nechť $|f| \leq g$ v $\langle a,b)$ a nechť existuje $(ZN)\int_a^b g$. Potom existují také $(ZN)\int_a^b f$ a $(ZN)\int_a^b |f|$.

věta 75 : Nechť funkce f , g jsou spojité v $\langle a,b)$ /$b \in E_1$ nebo $b = +\infty$ / , nechť funkce g je monotonní v $\langle a,b)$.
Potom $(ZN)\int_a^b f.g$ existuje, jestliže buď

1/ $(ZN)\int_a^b f$ existuje a funkce g je omezená v $\langle a,b)$ /Abelovo kriterium/ anebo

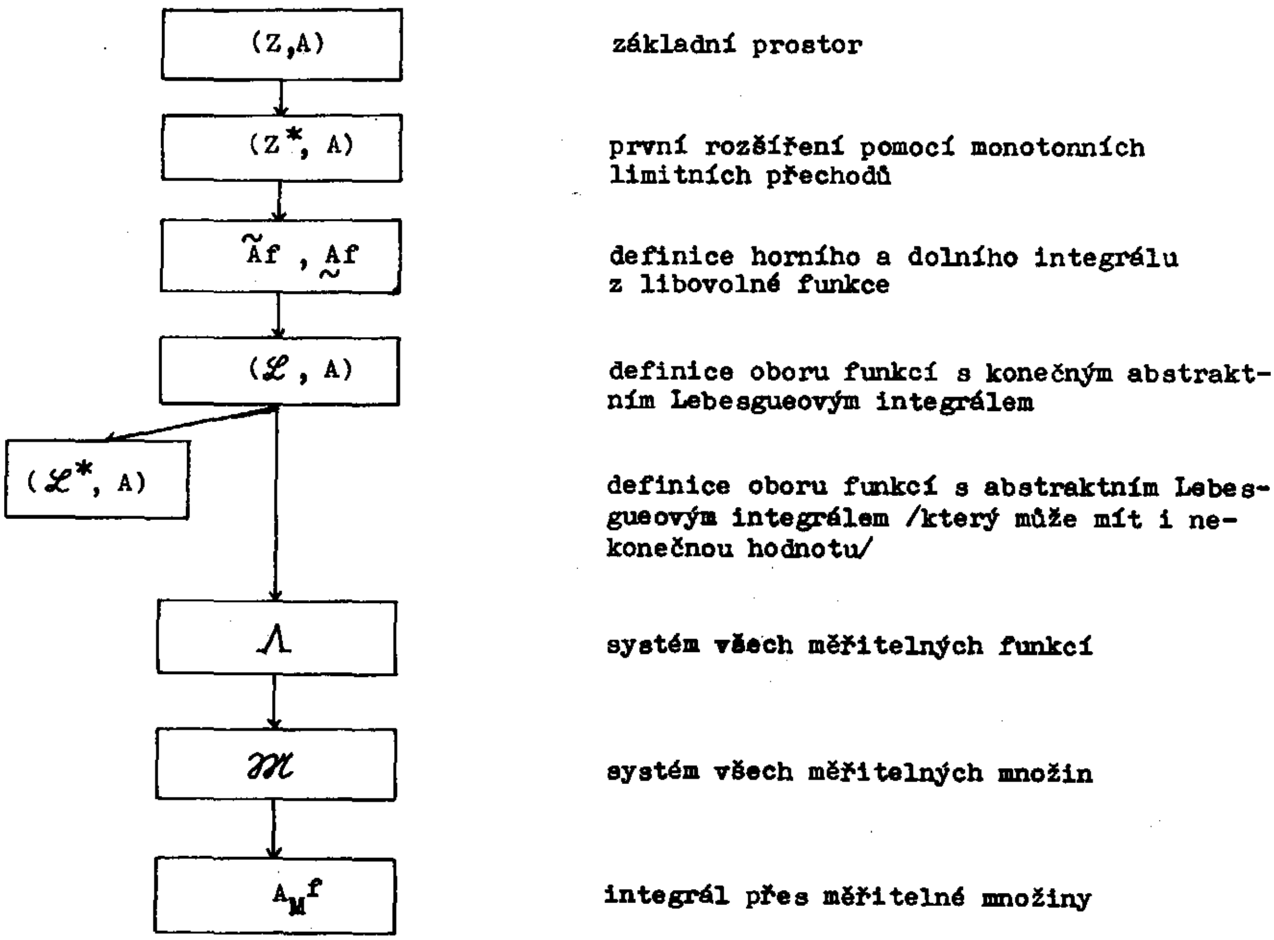
2/ $(ZN)\int_a^x f$ je omezenou funkcí proměnné x v $\langle a,b)$ a $\lim\limits_{x \to b_-} g(x) = 0$ /Dirichletovo kriterium/.

2. Základní vlastnosti všech systémů

2,1. Znovu si zopakujte definice základního systému funkcí Z , základního funkcionálu A na Z i definici základního prostoru (Z,A). Uvědomte si, jakým způsobem se rozšíří základní systém Z s funkcionálem A na systém $\mathscr{L}$ všech integrovatelných funkcí s konečným abstraktním Lebesgueovým integrálem A .

Zhruba řečeno - nejdříve se základní systém Z /který je příliš "úzký" /rozšíří na širší obor funkcí Z^* a pro funkce z tohoto systému se definuje "přirozeným" způsobem integrál A . Poté se pro libovolnou funkci definuje její horní a dolní integrál $\tilde{A}f$, $\underset{\sim}{A}f$ a v případě, že tyto dvě hodnoty splývají a jsou konečné, říkáme, že f leží v systému $\mathscr{L}$. Společnou hodnotu $\tilde{A}f$ a $\underset{\sim}{A}f$ pak nazveme abstraktním Lebesgueovým integrálem funkce f . Odtud již lehko utvoříme systém funkcí $\mathscr{L}^*$ a systém měřitelných funkcí Λ . Konečně můžeme definovat systém měřitelných množin $\mathfrak{M}$ a integrál přes libovolnou množinu z tohoto systému.

Schematicky by bylo možno celý postup znázornit asi následovně:



Jednotlivé kroky, definice i jejich oprávnění je zapotřebí si velmi podrobně rozmyslet. Až si celou teorii projdete, pokuste si ji ilustrovat na některém z konkrétních příkladů 2,5 - 2,23.

2,2. Rozhodněte, zda následující množiny funkcí tvoří základní systém Z (P je libovolná neprázdná množina):

a/ $Z = \{ f \in S(P);\ f$ je konečná na $P \}$, tj. Z je systém všech konečných reálných funkcí na P,

b/ $Z = \{ f \in S(P);\ f = 0$ na $P \}$, tj. systém Z sestává z jediné funkce identicky rovné nule na P,

c/ $Z = \{ f \in S((0,\pi))\ ;\ f(x) = a.\sin x$, a probíhá množinu všech reálných čísel $\}$,

d/ $Z = \{ f \in S(E_1)\ ;\ f$ je spojitá v $E_1 \}$,

e/ $Z = S(P)$, tj. Z je systém všech funkcí na P,

f/ $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f$ je konečná a nezáporná na $P \}$,

g/ $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f$ je konečná a záporná na $P \}$,

h/ $Z = \{ f \in S(E_1)\ ;$ existuje vlastní derivace f' v $E_1 \}$,

i/ $Z = \{ f \in S(P)\ ;\ f$ je omezená na $P \}$.

[V případech a/, b/, c/, d/, i/ tvoří ; v případě e/, g/ není splněno 1_Z, 2_Z, v případě f/, h/ není splněno 3_Z]

2,3. Buď Z základní systém funkcí, zjistěte, zda funkcionál A na Z splňuje axiomy $4_A - 7_A$:

a/ je-li $a \in P$, definujeme pro $f \in Z$ funkcionál A vztahem $Af = f(a)$,

b/ $f \in Z \longrightarrow Af = 0$,

c/ $a \in P$, $f \in Z \longrightarrow Af = -f(a)$,

d/ $a \in P$, $f \in Z \longrightarrow Af = |f(a)|$,

e/ $f \in Z \longrightarrow Af = \sup\limits_{x \in P} f(x)$.

[V případech a/, b/ jsou axiomy splněny, v případě c/ není splněn axiom 5_A, v případě d/ axiom 6_A, v případě e/ nemusí být splněn axiom 4_A, 6_A, 7_A.]

2,4. Definujme systém Z na intervalu $(0,1)$ takto:

$f \in Z$, právě když f je spojitá na $(0,1)$ a existuje konečná
$$\lim_{x \to 0_+} f(x).$$

Pro funkce ze systému Z definujme $Af = \lim\limits_{x \to 0_+} f(x)$

Ukažte, že

a/ Z tvoří základní systém funkcí,

b/ funkcionál A splňuje axiomy 4_A, 5_A, 6_A,

c/ funkcionál A nesplňuje axiom 7_A.

Jaká by byla situace, kdybychom systém Z i funkcionál A definovali stejně - ale na uzavřeném intervalu $\langle 0,1\rangle$?

2,5. Buď Z množina všech funkcí definovaných na intervalu $(0,1)$ tvaru $f(x) = ax$, tj.

$$Z = \left\{ f \in S((0,1)) \; ; \; f(x) = ax \text{ pro } x \in (0,1) \right\} .$$

Pro $f \in Z$, $f(x) = ax$ definujme $Af = a$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_{+\infty}\}$, $Z^K = Z \cup \{f_{-\infty}\}$, kde $f_{+\infty}$, resp. $f_{-\infty}$ je funkce rovná identicky $+\infty$, resp. $-\infty$ na $(0,1)$,

3/ $Af_{+\infty} = +\infty$, $Af_{-\infty} = -\infty$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ $f \in \Lambda$, $g \in \Lambda$ $\not\Rightarrow$ $f \cdot g \in \Lambda$,

6/ jediná měřitelná množina je prázdná množina,

7/ $f \sim g \iff f = g$ na $(0,1)$,

8/ $(0,1) \notin \mathcal{M}$, $\tilde{\mu}(0,1) = +\infty$,

9/ buď $A \subset (0,1)$, $A \neq \emptyset$, označme $x = \inf A$, potom

a/ $\tilde{\mu} A = +\infty$, je-li $x = 0$,

b/ $\tilde{\mu} A = x^{-1}$, je-li $x > 0$,

10*/ $f \in Z \not\Rightarrow \min(f,1) \in Z$,

11*/ $f \in \Lambda \not\Rightarrow$ pro každé $c \in E_1$ je $\{x \in (0,1) \; ; \; f(x) > c\} \in \mathcal{M}$ /viz větu 56/,

12*/ $f \in \mathcal{L}$, $\hat{f} = f$ v $(0, \frac{1}{2})$, $\hat{f} = 0$ v $\langle \frac{1}{2}, 1)$ $\not\Rightarrow$ $\hat{f} \in \mathcal{L}$

/uvědomte si však, že $\langle \frac{1}{2}, 1) \notin \mathcal{M}$, viz větu 12/.

2,6. Nechť systém Z je stejný jako ve cvičení 2,5, tj.

$f \in Z \iff f \in S((0,1))$ a existuje $k \in E_1$ tak, že $f(x) = kx$ pro $x \in (0,1)$.

Pro libovolnou $f \in Z$ položme $Af = 0$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_{+\infty}\}$, $Z^K \cup \{f_{-\infty}\}$ /definice funkcí $f_{+\infty}$, $f_{-\infty}$ je v předchozím cvičení 2,5/, 3/ $Af_{+\infty} = Af_{-\infty} = 0$,

4/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \Lambda = S((0,1))$,

5/ každá množina v $(0,1)$ je měřitelná a nulová,

6/ $f \in S((0,1)) \Rightarrow f \sim 0$ a $Af = 0$,

7/ $f,g \in S((0,1)) \Rightarrow f \sim g$,

8*/ $f \in Z \not\Rightarrow \min(f,1) \in Z$,

9*/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$.

2,7. Buď Z systém všech funkcí definovaných na intervalu $\langle 0,1)$ tvaru $f(x) = kx$, tj.

$$Z = \left\{ f \in S(\langle 0,1)) \; ; \; f(x) = kx \text{ pro } x \in \langle 0,1) \right\} .$$

Pro $f \in Z$, $f(x) = kx$ položme $Af = k$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor ,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_1\}$, $Z^K = Z \cup \{f_2\}$, kde f_1 , resp. f_2 je funkce rovná $+\infty$, resp. $-\infty$ na $(0,1)$, $f_1(0) = f_2(0) = 0$,

3/ $f(0) > 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$,

$f(0) < 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ $\mathfrak{M} = \{\emptyset\}$, tj. jediná měřitelná množina je prázdná množina.

2,8. Definujme základní systém funkcí Z stejně jako v předchozím příkladě 2,7. Pro libovolnou $f \in Z$ položme $Af = 0$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_1\}$, $Z^K = Z \cup \{f_2\}$, kde funkce f_1 , f_2 jsou definovány stejně jako v př. 2,7 ,

3/ $f(0) > 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$,

$f(0) < 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

4/ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow f(0) = 0$,

5/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow Af = 0$,

6/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}^* = \Lambda \neq S(\langle 0,1))$,

7/ $A \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow A \subset (0,1)$ /tj. když $0 \notin A$ / ,

8/ $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \underset{\sim}{\mu} A = 0$,

9/ $P = \langle 0,1) \notin \mathfrak{M}$,

10/ $0 \in A \Rightarrow \tilde{\underset{\sim}{\mu}} A = +\infty$,

11/ $f \sim g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$,

12*/ $f \in Z \not\Rightarrow \min(f,1) \in Z$,

13*/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$.

2,9. Buď $Z = \{ f \in S(E_1) ;\ f$ je konstantní na $E_1 \}$. Pro libovolnou $f \in Z$ definujeme $Af = f(0)$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{ f_{+\infty} \}$, $Z^K = Z \cup \{ f_{-\infty} \}$, kde $f_{+\infty}$ /$f_{-\infty}$/ je funkce identicky rovná $+\infty$ / $-\infty$ / na E_1 ,

3/ $f \in S(E_1) \Longrightarrow \tilde{A}f = \sup_{x \in E_1} f(x)$, $\underset{\sim}{A}f = \inf_{x \in E_1} f(x)$,

4/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ $\mathfrak{M} = \{ \emptyset, E_1 \}$, tj. jediné měřitelné množiny jsou prázdná množina a celý prostor E_1 , přičemž

$$\mu(\emptyset) = 0 \ , \ \mu E_1 = 1 \ ,$$

6/ $A \notin \mathfrak{M} \Longrightarrow \tilde{\mu} A = 1$.

2.10.* Buď $Z = \{ f \in S(\langle 0,1 \rangle) ;\ f$ je konečná a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in \langle 0,1 \rangle$ s výjimkou snad konečného počtu bodů $\}$,

pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$ /jedná se o konečný součet ! /.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f(x) > 0$ pro nespočetně mnoho $x \in \langle 0,1 \rangle \Longrightarrow \tilde{A}f = +\infty$

⟦ zjistěte nejdříve charakteristiku systému Z^R a uvědomte si, že $\inf \emptyset = +\infty$ ⟧ ,

$f(x) < 0$ pro nespočetně mnoho $x \in \langle 0,1 \rangle \Longrightarrow \underset{\sim}{A}f = -\infty$,

3/ jediná nulová množina je prázdná množina,

4/ $\mathcal{L} = \{ f \in S(\langle 0,1 \rangle) ;\ f(x) \neq 0$ pouze pro spočetně mnoho $x \in \langle 0,1 \rangle$ a $\sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} |f(x)| < +\infty \}$,

5/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow Af = \sum_{x \in \langle 0,1 \rangle} f(x)$,

6/ $\Lambda = \{ f \in S(\langle 0,1 \rangle) ;\ f(x) \neq 0$ pouze pro spočetně mnoho $x \in \langle 0,1 \rangle \}$,

7/ $\mathfrak{M} = \{ A \subset \langle 0,1 \rangle ;\ A$ je spočetná $\}$,

8/ $A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mu A = +\infty$, je-li A nekonečná spočetná,

$\mu A = n$, je-li A konečná a má právě n prvků ,

9/ $A \subset \langle 0,1 \rangle$ je nespočetná $\Longrightarrow \tilde{\mu} A = +\infty$.

2.11 Buď P spočetná neprázdná množina, nechť $Z = \{ f \in S(P) ;\ f$ je konečná na P , $f \neq 0$ pouze na konečné podmnožině $P \}$.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{x \in P} f(x)$ /jedná se o konečný součet/

25535 Z3

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor

2/ $f \geqq 0$ na $P \Rightarrow f \in Z^R$

$\|\ulcorner$ je-li $P = \{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$, definujme $f_j(x_n) = 0$ pro $j < n$, $f_j(x_n) = \min(j; f(x_n))$ pro $j \geqq n$, potom $f_j \in Z$, $f_j \nearrow f \lrcorner\|$,

3/ $\Lambda = S(P)$

$\|\ulcorner f \in S(P) \Rightarrow f^+ \geqq 0 \Rightarrow f^+ \in Z^R \subset \mathscr{L}^R$ a použije se věta 32 $\lrcorner\|$,

4/ každá podmnožina P je měřitelná,

5/ $M \subset P \Rightarrow \mu M = +\infty$, je-li M nekonečná

$\mu M = n$, je-li M konečná a má právě n prvků.

$\boxed{2,12.}$ Buď P dvoubodová množina, $P = \{ a, b \}$, nechť

$$Z = \{ f \in S(P) \; ; \; f \text{ je konečná na } P \}.$$

Pro $f \in Z$ definujme $Af = f(a) + 2f(b)$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \Leftrightarrow f > -\infty$ na P

$f \in Z^K \Leftrightarrow f < +\infty$ na P,

3/ $\mathscr{L} = Z$, $\Lambda = S(P)$,

4/ $\Lambda - \mathscr{L}^* \neq \emptyset$,

5/ každá podmnožina P je měřitelná, při čemž

$\mu(\emptyset) = 0$, $\mu\{a\} = 1$, $\mu\{b\} = 2$, $\mu P = 3$.

$\boxed{2,13.}$ Buď opět P dvoubodová množina, $P = \{ a,b \}$, nechť $Z = \{ f \in S(P) \; ; \; f$ je konečná na a $f(b) = 0 \}$.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = f(a)$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $Z^R = Z \cup \{f_1\}$, $Z^K = Z \cup \{f_2\}$, kde f_1, f_2 jsou definovány takto: $f_1(a) = +\infty$, $f_2(a) = -\infty$, $f_1(b) = f_2(b) = 0$,

3. $f(b) > 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$

$f(b) < 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$,

4/ $\mathscr{L} = Z$, $\mathscr{L}^* = Z^* = \Lambda$,

5/ definujeme-li funkci φ předpisem

$$\varphi(b) = 1 , \quad \varphi(a) = +\infty ,$$

je $\underset{\sim}{A}\varphi = \tilde{A}\varphi = +\infty$ a přesto $\varphi \notin \Lambda$,

6/ jediné měřitelné množiny jsou $\emptyset$, $\{ a \}$, při čemž

$\mu(\emptyset) = 0$, $\mu\{ a \} = 1$,

7/ množiny $\{b\}$, P jsou neměřitelné a

$$\tilde{\mu}\{b\} = \tilde{\mu}P = +\infty ,$$

8/ je-li funkce ψ rovna identicky $+\infty$ na P, je $\psi \notin \Lambda$.

$\boxed{2,14^*.}$ Buď $P = \langle -1,0) \cup (0,1\rangle$, definujme funkce φ_1, φ_2 takto:

$\varphi_1(x) = 0$ pro $x \in \langle -1,0)$, $\varphi_1(x) = x$ pro $x \in (0,1\rangle$,

$\varphi_2(x) = 0$ pro $x \in (0,1\rangle$, $\varphi_2(x) = x$ pro $x \in \langle -1,0)$.

Buď $Z = \{ f \in S(P)$; existují a_1, $a_2 \in E_1$ tak, že

$f = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ na $P\}$.

Pro $f \in Z$, $f = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$ definujme $Af = a_1$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \Leftrightarrow$ buďto $f \in Z$, nebo $f = +\infty$ na $\langle -1,0)$ a $f = k\varphi_1$ na $(0,1\rangle$, nebo $f = K.\varphi_2$ na $\langle -1,0)$ a $f = +\infty$ na $(0,1\rangle$, anebo $f = +\infty$ na P.

Charakterizujte obdobně systém funkcí Z^K!

3/ $\mathcal{L} = \{ f \in S(P);\ f = K.\varphi_1$ na $(0,1\rangle$, f libovolná na $\langle -1,0)\}$,

4/ $f \in \mathcal{L}$, $f = K.\varphi_1$ na $(0,1\rangle \Rightarrow Af = K$,

5/ $f \in \Lambda \Leftrightarrow f = K.\varphi_1$ na $(0,1\rangle$, kde $K \in E_1^*$, f libovolná na $\langle -1,0)$,

6/ $M \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow M \cap (0,1\rangle = \emptyset \Leftrightarrow M \subset \langle -1,0)$,

7/ $M \in \mathfrak{M} \Rightarrow \mu M = 0$,

8/ $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ na $(0,1\rangle$,

9/ $P \notin \mathfrak{M}$,

10/ pro $A \subset P$, označme $x_A = \inf\{A \cap (0,1\rangle\}$, potom

$\tilde{\mu}A = +\infty$, je-li $x_A = 0$,

$\tilde{\mu}A = x_A^{-1}$, je-li $x_A > 0$.

$\boxed{2,15^*.}$ Definujme P, φ_1 stejně jako v předchozím cvič. 2.14.

Buď $Z = \{ f \in S(P)$; existuje $k \in E_1$ tak, že $f = k.\varphi_1$ na $P\}$

Pro $f \in Z$, $f = k.\varphi_1$ definujme $Af = k$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \Leftrightarrow$ buďto $f \in Z$ anebo $f = +\infty$ na $(0,1\rangle$, $f = 0$ na $\langle -1,0)$, obdobně charakterisujte Z^K,

3/ $\mathcal{L} = Z$, $\mathcal{L}^* = Z^* = \Lambda$,

4/ nechť pro nějaké $x_0 \in \langle -1,0)$ je $f(x_0) > 0$, potom

$f \notin Z^*$, $\tilde{A}f = +\infty$,

je-li pro nějaké $x_0 \in \langle -1,0)$ $f(x_0) < 0$, je $f \notin Z^*$, $\underset{\sim}{A}f = -\infty$, 5/ jediná měřitelná množina je prázdná množina,

6/ pro $A \subset P$ označme $x_A = \inf A$, potom

$$\tilde{\mu}A = +\infty \quad , \text{ je-li } x_A \leq 0 \, ,$$
$$\tilde{\mu}(A) = x_A^{-1} \, , \text{ je-li } x_A > 0 \, .$$

7/ udejte příklad takové funkce $f \in S(P)$, aby

a/ $\underset{\sim}{A}f = -\infty$, $\tilde{A}f = +\infty$,

b/ $\underset{\sim}{A}f = -\infty$, $\tilde{A}f \in E_1$ (speciálně aby $\tilde{A}f = 0$) ,

c/ $\tilde{A}f = +\infty$, $\underset{\sim}{A}f \in E_1$ (speciálně aby $\underset{\sim}{A}f = 0$) ,

d/ $\underset{\sim}{A}f = -1$, $\tilde{A}f = 2$,

e/ $\underset{\sim}{A}f = 2$, $\tilde{A}f = -1$.

2,16.* Buď $P = E_1 \times \langle 0,1 \rangle$. Definujme základní systém funkcí Z takto:

$f \in Z \Leftrightarrow$ a/ $f \in S(P)$,

b/ $x \in E_1 \Rightarrow f^{x,*}(y)$ je konstantní na $\langle 0,1 \rangle$,

c/ $f(x,0) \in C_1$ /definici systému C_r viz za větou 46/.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = (R)\int_{E_1} f(x,0)\,dx$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor

2/ $f \in \Lambda \Leftrightarrow$ a/ $x \in E_1 \Rightarrow f^{x,*}$ je konstantní (připouštíme i $\pm\infty$)

b/ $f(x,0)$ je lebesgueovsky měřitelná v E_1 ,

3/ obdobně charakterisujte systémy Z^R, Z^K, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^*$,

4/ $\mathfrak{M} = \{ M \times \langle 0,1 \rangle \, ; \text{ kde } M \subset E_1 \text{ je lebesgueovsky měřitelná} \}$,

5/ $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \notin \mathfrak{M}$, $\{ [x,x] \in E_2 \, ; \; x \in \langle 0,1 \rangle \} \notin \mathfrak{M}$.

2,17.* Buď $M = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \}$, nechť

$Z = \{ f \in S(E_1);$ f je konečná v E_1 a $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ absolutně konverguje $\}$

Pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor (důkaz, že funkcionál A splňuje axiom 7_A je poněkud obtížnější!)

- co by se stalo v případě, kdybychom požadovali pouze konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$?

2/ $f \geq 0$ na množině M, $f > -\infty$ v E_1 $\Rightarrow f \in Z^R$,

3/ $\Lambda = S(E_1)$,

4/ každá podmnožina E_1 je měřitelná,

5/ $B \subset E_1 \Rightarrow \mu B = +\infty$ v případě, že množina $B \cap M$ je nekonečná,

$\mu B = n$ v případě, že množina $B \cap M$ má právě n prvků, 6/ $Z^R = \{ f \in S(E_1) \; ; \; f > -\infty$ na E_1 a $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ konverguje absolutně anebo $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty \}$,

charakterizujte obdobně systém Z^K,

7/ množina N je nulová $\Leftrightarrow$ $N \cap M = \emptyset$

8/ $f \sim g$ $\Leftrightarrow$ $f = g$ na množině M.

2,18.* Buď P libovolná neprázdná množina, buď $M \subset P$ spočetná, nechť $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Buďte $\alpha_n \in E_1$, $\alpha_n \geqq 0$ a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$.

Buď $Z = \{ f \in S(P) \; ; \; f$ je omezená na $P \}$.

Pro $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(x_n)$

Dokažte, že:

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ udejte charakteristiku systémů Z^R, Z^K,

3/ libovolná podmnožina P je měřitelná

(je-li $B \subset P$, je $C_B \in Z$!)

4/ $B \subset P \Rightarrow \mu B = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot C_B(x_n)$,

5/ $B \subset P$, $B \cap M = \emptyset$ $\Rightarrow$ B je nulová

(v jakém případě lze toto tvrzení obrátit?)

2,19. Buď $Z = C_1$ (systém všech spojitých funkcí v E_1 s kompaktním nosičem). Pro $f \in Z$ definujme $Af = f(0)$.

Dokažte, že :

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ funkcionál A je navíc multiplikativní,

tj. $A(f.g) = Af \cdot Ag$ pro f, $g \in Z$,

3/ $f \in Z^* \Rightarrow Af = f(0)$,

4/ $f \in S(E_1) \Rightarrow \underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f = f(0)$,

5/ $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow f(0) \in E_1$,

6/ $\mathcal{L}^* = \Lambda = S(E_1)$,

7/ každá podmnožina E_1 je měřitelná, při čemž $\mu M = C_M(0)$,

8/ $f \sim g$ $\Leftrightarrow$ $f(0) = g(0)$.

2,20. Buď Z množina všech funkcí na $\langle 0, \pi \rangle$ tvaru $f(x) = a.\sin x$. Pro $f \in Z$ definujme $Af = (R)\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

Dokažte, že:

1/ (Z,A) je základní prostor,

2/ a podejte charakteristiku systémů Z^R, Z^K, L !

2,21. Buď P množina všech přirozených čísel, nechť

$Z = \{ f \in S(P)$; f je konečná, $f(n) = 0$ pro všechna $n \in P$ a výjimkou snad konečného počtu $\}$.

Pro $f \in Z$ definujeme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ /jedná se o konečný součet/.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ $f \in Z^R \Leftrightarrow f > -\infty$ na P a existuje N tak, že $f(n) \geq 0$ kdykoliv $n \geq N$,

3/ $f \in \mathscr{L} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$,

4/ $f \in \mathscr{L} \Rightarrow Af = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$,

5/ $\Lambda = S(P)$,

6/ každá podmnožina P je měřitelná /čemu je rovno μM pro $M \subset P$?/.

Jak lze interpretovat funkce na množině P ? Charakterisujte potom systém funkcí $\mathscr{L}$!

Pomocí tohoto cvičení a věty 42 dokažte následující zajímavou větu z teorie řad /viz též V.Jarník, Diferenciální počet II, kap. III, §2, pozn.1/: "Buď dána řada reálných čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, označme $a_n^+ = \max(a_n,0)$, $a_n^- = \max(-a_n,0)$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, právě když řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergují. V tomto případě pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$."

Jako další aplikaci viz příklad 8,21.

2,22.* Definujme množinu P a základní systém Z stejně jako v předchozím cvičení 2,21. Pro libovolnou $f \in Z$ položme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n}$. Dokažte, že (Z,A) tvoří základní prostor a podejte charakteristiku systémů Z^*, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^*$, Λ , $\mathfrak{M}$! /Viz též př. 2,18/.

2,23.* Buď $\langle a,b\rangle \subset E_1$, buď Z množina všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a,b\rangle$. Pro libovolnou $f \in Z$ definujme $Af = (R)\int_a^b f$.

Ukažte, že (Z,A) tvoří základní prostor.

Uvažujme nyní $\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle$ a funkce

f: $f(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $f(0) = 0$

g: $g(x) = +\infty$ pro $x \in (0,1\rangle$, $g(0) = 0$

h: $h(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, $h(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{1}{2}$ pro $x \in (\frac{1}{2}, 1\rangle$.

Ukažte, že všechny tyto funkce leží v systému Z^R .

Definujme dále funkci φ ,

$\varphi(x) = 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle$, $\varphi(\frac{1}{2}) = c$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ pro $x \in (\frac{1}{2}, 1 \rangle$, ukažte, že $\varphi \in Z^R \Leftrightarrow c \in (-\infty, 0 \rangle$.

Použijeme-li nyní teorii abstraktního rozšíření, obdržíme systémy $Z^*, \mathcal{L}, \mathcal{L}^*, \Lambda, \mathcal{M}$. Jaký bude vztah těchto systémů k systémům $\mathcal{L}(a,b)$, $\mathcal{L}^*(a,b)$, $\Lambda(a,b)$, $\mathcal{M}_1$, - k systémům vzniklým rozšířením $Z = C_1$ a $Af = (R)\int_{E_1} f$ (toto je těžší otázka).

2,24. Ukažte, že některé z axiomů $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ by mohly být nahrazeny jinými, s nimi ekvivalentními:

a/ $(3_Z) \Leftrightarrow (f \in Z \Rightarrow \min(f,0) \in Z)$,

b/ $(3_Z) \Leftrightarrow (f,g \in Z \Rightarrow \max(f,g) \in Z, \min(f,g) \in Z)$,

c/ $(5_A) \Leftrightarrow (f \in Z \Rightarrow A|f| \geqq 0)$.

2,25. Dokažte, že platí:

a/ $f \in Z^K \Rightarrow Af = \inf Ag, \quad g \in Z, \quad g \geqq f$,
$f \in Z^R \Rightarrow Af = \sup Ah, \quad h \in Z, \quad h \leqq f$,

b/ $f \in S(P) \Rightarrow$
$\tilde{A}f = \inf Ag, \quad g \geqq f, \quad g \in Z^*$,
$\underset{\sim}{A}f = \sup Ah, \quad h \leqq f, \quad h \in Z^*$

[ukažte, že platí: $h \in Z^K$, $h \geqq f \Rightarrow Ah \geqq \tilde{A}f$].

2,26. Dokažte, že platí:

a/ $f_n \in Z, \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \Rightarrow g \in Z^R$,

b/ $f_n \in Z^R, \quad f_n \geqq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in Z^R$,

c/ $f, g \in \mathcal{L} \Rightarrow A(\max(f,g)) + A(\min(f,g)) = Af + Ag$,

d/ $f, g \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \min(Af, Ag) \geqq A(\min(f,g))$.

2,27. Nechť Z_1, Z_2 jsou dva základní systémy funkcí nad množinou P, Nechť $Z_1 \subset Z_2^R$, $Z_2 \subset Z_1^R$. Potom $Z_1^R = Z_2^R$. Dokažte a vyslovte obdobnou větu pro systémy Z_1^K, Z_2^K !

> Ve všech dalších příkladech - až do kapitoly 7 - předpokládáme, že $Z = C_r$, $Af = (R)\int_{E_r} f$!!

2,28. Dokazujte následující tvrzení:

a/ $f(x) = 1$ pro $x \in \langle 0,1 \rangle$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^K$,
$f \notin Z^R$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 1$

[tvrzení dokazujte přímo z definic i pomocí charakteristik jednotlivých systémů - viz např. věta 47], b/ $f(x) = 1$ pro $x \in (a,b)$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^R$, $f \notin Z^K$, $f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ interval (a,b) je omezený, $Af = b - a$,

c/ $f(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z^*$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 1$,

d/ $f(x) = 1$ pro $x \in E_1 \Rightarrow f \in Z^R - Z^K$, $Af = +\infty$,

e/ $f(0) = +\infty$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0 \Rightarrow f \notin Z^*$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 0$

‖ a/ protože platí implikace $f \in Z^K \Rightarrow f < +\infty$ všude, nemůže být $f \in Z^K$,

b/ nechť existují $f_n \in Z$, $f_n \nearrow f$, potom existuje n_0 a $\delta > 0$ tak, že $n \geqq n_0$, $x \in (-\delta + \delta) \Rightarrow f_n(x) > 3$ (odůvodněte!), tedy též nemůže být $f \in Z^R$,

c/ zřejmě $\underset{\sim}{A} f \geqq 0$

d/ ukážeme, že $\tilde{A} f = 0$; buď tedy $\varepsilon > 0$, definujme funkci g takto:

$$g(0) = +\infty, \quad g(x) = \frac{3\varepsilon}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{pro} \quad x \in \left\langle \frac{1}{3^{n+1}} ; \frac{1}{3^n} \right) \qquad n = 0,1,2 \ldots\ldots,$$

$g(x) = 0$ pro $x \in \langle 1, +\infty)$, g sudá funkce v E_1,

potom 1/ $g \in Z^R$,

2/ $Ag = \varepsilon$,

3/ $g \geqq f$.

e/ podle věty 52 též lehko ukážete, že $f \sim 0$. ‖

f/ $f(0) = 1, f(x) = 0$ pro $x \neq 0 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^K$, $f \notin Z^R$, $f \in \mathcal{L}$, $Af = 0$,

g/ $f(x) = +\infty$ pro $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \Rightarrow f \notin Z$, $f \in Z^R$, $f \notin Z^K$, $Af = +\infty$,

h/ $f(x) = -\infty$ pro $x \in E_1 \Rightarrow f \in Z^K - Z^R$, tedy $Af = -\infty$.

2,29. Dokažte, že:

a/ $\dfrac{\cos x}{1+x^2} \notin Z^*$,

b/ $\sin x \notin Z^*$,

c/ $x \notin Z^*$,

d/ $\dfrac{1}{1+x^2} \in Z^R$,

e/ $e^{-x^2} \in Z^R$

‖ tvrzení dokažte přímo z definic i použitím věty 47 . ‖

2,30. Dokažte, že:

a/ $\underset{\sim}{A} \sin x = -\infty$, $\tilde{A} \sin x = +\infty$,

b/ $\underset{\sim}{A} x = -\infty$, $\tilde{A} x = +\infty$

‖ ukažte, že platí: $g \in Z^R$, $g \geqq \sin x \Rightarrow Ag = +\infty$ ‖ .

$\boxed{2,31.}$ Buď D Dirichletova funkce v E_1 (tj. $D(x) = 1$ pro x racionální, $D(x) = 0$ pro x iracionální).

Dokažte, že:

a/ $D \notin Z^*$,

b/ $\underset{\sim}{A}D \geqq 0$,

c/ $\tilde{A}D = 0$.

‖ K důkazu posledního tvrzení musíte dokázat podle vlastnosti infima toto:

1) $g \in Z^R$, $g \geqq D \Rightarrow Ag \geqq 0$

2) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková funkce $g \in Z^R$, že $g \geqq D$ a $Ag < \varepsilon$, toto ukažte následovně - buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo; protože množina racionálních čísel je v E_1 spočetná, lze ji srovnat do posloupnosti $\{ x_1, x_2, x_3, \dots \}$. Okolo každého x_n opište interval $J_n = (x_n - \frac{\varepsilon}{2^n} , x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})$ a definujte funkce f_n takto:

$$f_n(x) = 1 \text{ pro } x \in J_n, \quad f_n = 0 \text{ jinde v } E_1 .$$

Potom - např. podle 2,28 b - je $f_n \in Z^R$ a $Af = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$.

Položíme-li $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, dostáváme

α) $g \in Z^R$ (viz 2,26. b) ,

β) $g \geqq D$,

γ) $Ag = 2\varepsilon$. ‖

d/ $D \sim 0$, tedy $D \in \mathcal{L}$ a $AD = 0$.

‖ Viz předchozí nebo větu 52 , též 5,6 . ‖

$\boxed{2,32.}$ Buď $x \in (0,1\rangle$, $x = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla , $q > 0$. Položme $f(x) = \frac{1}{q}$; pro ostatní $x \in E_1$ buď $f(x) = 0$.
(f je tzv. Riemannova funkce).

Dokažte, že:

1/ f je spojitá v každém iracionálním bodě,

2/ v každém racionálním bodě intervalu $(0,1\rangle$ má ostré lokální maximum,

3/ $f \in Z^K$ (ukažte přímo z definice i charakteristiky Z^K),

4/ $Af = 0$,

5/ existuje $(R)\int_0^1 f(x)\,dx = 0$

‖ ukažte přímo či pomocí věty 57 . ‖

6/ Existuje $(N)\int_0^1 f$ či $(ZN)\int_0^1 f$?

$\boxed{2{,}33.^{*}}$ Buď $G \subset E_1$ otevřená množina. Potom $c_G \in Z^R$, dokažte !

‖ Libovolnou otevřenou množinu v E_1 lze vyjádřit jako sjednocení spočetného systému otevřených disjunktních intervalů, použijte 2,28b a 2,26b . ‖

$\boxed{2{,}34.^{o}}$ Je-li $f \in \mathcal{L}^*$, je $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$ /věta 10/. Obrátit toto tvrzení nelze, tj. je-li pro nějakou funkci f $\underset{\sim}{A}f = \tilde{A}f$, pak nemusí ještě být $f \in \mathcal{L}^*$ /vzhledem k větě 36 je pak pochopitelně $f \notin \Lambda$ /. Uveďme následující příklad.

Buď $N \subset E_1$ lebesgueovsky neměřitelná množina, nechť funkce f je identicky rovna 5 na E_1, potom

1/ $\underset{\sim}{A}\,(c_N + f) = \tilde{A}\,(c_N + f) = +\infty$,

2/ $c_N + f \notin \Lambda$.

Dokažte ! Všimněte si též př. 2,13 .

$\boxed{2{,}35.}$ Rozhodněte, zda platí následující implikace:

a/ $f \in Z^K$, $f \geq 0 \Rightarrow f \in Z^R$,

b/ $f \in Z^K$, $f \geq 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^R$,

c/ $f_n \in Z^R$, $f_n \searrow f \Rightarrow f \in Z^R$ $(f \in Z^K, \mathcal{L}^*, \Lambda)$,

d/ $f_n \in Z^K$, $f_n \searrow f \Rightarrow f \in Z^K$,

e/ $f \in \Lambda_M$, $|g| \leq f$ na $M \Rightarrow g \in \Lambda_M$,

f/ $f \in \Lambda_M$, $g \in \mathcal{L}^*_M$, $|f| \leq g$ na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}^*_M$,

3. Zkoumání konvergence integrálů.

Jednou ze základních úloh integrálního počtu je úloha zjistit, do jakého systému funkcí zadaná funkce patří. Jedná se hlavně o určení funkcí ze systémů $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*-\mathcal{L}$, $\Lambda-\mathcal{L}^*$. S funkcemi, které by nepatřily do systému Λ /systém všech měřitelných funkcí/ se nesetkáme. Funkce ze systému $\Lambda-\mathcal{L}^*$ jsou měřitelné, ale nemají integrál; funkce ze systému $\mathcal{L}^*-\mathcal{L}$ mají Lebesgueův integrál, který má však nekonečnou hodnotu /v tomto případě říkáme, že jejich integrál diverguje/. Funkce ze systému $\mathcal{L}$ mají konečný Lebesgueův integrál /říkáme, že jejich integrál konverguje/.

Máme k disposici hlavně následující věty - věty 28, 31, 33, 35, 48, 49, 53, ještě jednou si je zopakujte.

3,1. Poznámka

Je-li I jednorozměrný interval, I = ⟨a,b⟩ , píšeme místo $\int_I$ obyčejně $\int_a^b$. Je-li J některý z intervalů ⟨a,b) , (a,b⟩ , (a,b) , platí $\int_a^b f = \int_J f$, jakmile má alespoň jedna strana rovnosti smysl /množina I - J je totiž nulová, odůvodněte podrobně ! /.

Obdobná je situace se symboly

$$\int_a^{+\infty}, \quad \int_{-\infty}^a, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}.$$

Je-li $-\infty \le b < a \le +\infty$ a existuje-li $\int_b^a f$, položíme $\int_a^b f = -\int_b^a f$.
Dále položíme $\int_a^a f = 0$ pro libovolnou funkci f .

3,2. Vztah Lebesgueova, Riemannova, Newtonova a zobecněného Newtonova integrálu v E_1

Riemannův integrál - je definován jako společná hodnota horního Riemannova integrálu / = infimum horních součtů/ a dolního Riemannova integrálu / = supremum dolních součtů/,
- je definován pouze pro omezené funkce a uzavřené intervaly ⟨a,b⟩ ,
- existuje například, je-li funkce f spojitá v⟨a,b⟩ /viz též obecnou větu 57/,
- značíme jej symbolem $(R)\int_a^b$,

Newtonův integrál - buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) [tj. $F' = f$ v (a,b)] , nechť existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$, pak definujeme Newtonův integrál vztahem

$$(N)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)$$

/je-li a nebo b nevlastní, chápeme pochopitelně $x \to b_-$ jako $x \to +\infty$, $x \to a_+$ jako $x \to -\infty$ /
- existuje například, je-li f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$,
- je-li f spojitá v otevřeném intervalu (a,b) , pak ještě N - integrál nemusí existovat,

<u>zobecněný N - integrál</u> - viz definice 63 a 65 ,
- buď F zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) [tj. F je spojitá v (a,b) a $F' = f$ platí všude v (a,b) až snad na konečný počet bodů], nechť existují <u>vlastní</u> limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$, pak definujeme

$$(ZN)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) ,$$

<u>Lebesgueův integrál</u> - je definován pouze pro funkce ze systému $\mathcal{L}^*$,
- je-li zapotřebí jej rozlišit od ostatních integrálů, budeme jej označovat symbolem $(L)\int$, jinak používáme pouze symbolu $\int$,
- poznamenejme, že Lebesgueův integrál může nabývat i nekonečných hodnot, což se nemůže stát u R , N , ani ZN - integrálu.

Platí nyní důležité věty:

1/ existuje-li $(R)\int_a^b f \Rightarrow$ existuje $(L)\int_a^b f$ a $(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$

2/ existuje-li $(N)\int_a^b f \Rightarrow$ existuje $(ZN)\int_a^b f$ a $(N)\int_a^b f = (ZN)\int_a^b f$

3/ <u>existují-li</u> kterékoliv dva z těchto integrálů, jsou si rovny.

Mohou nastat tyto případy:

a) existuje $(L)\int$ a neexistuje $(R)\int$ (viz př. 3,3)

b) existuje $(L)\int$ a neexistuje $(ZN)\int$ (viz např. 3,3)

c) existuje $(N)\int$ a neexistuje $(L)\int$ (viz např. 3,4)

d/ existuje $(N)\int$ a neexistuje $(R)\int$ (např. neomezený interval či funkce, viz též př. 8,54)

e) existuje $(R)\int$ a neexistuje $(N)\int$ (viz např. 3,5)

f) existuje $(R)\int$ a neexistuje $(ZN)\int$ (viz např. 3,5)

g) existuje $(ZN)\int$ a neexistuje $(N)\int$ (viz např. 3,6)

3,3. Buď D Dirichletova funkce (viz např. 2,31). Potom

a) existuje $(L)\int_0^1 D(x)\,dx$

[Lze ukázat přímo jako v 2,31 anebo v 5,6 . Jiný důvod - množina racionálních čísel v 0,1 je spočetná, tedy nulová. Tudíž $D \sim 0$ v $\langle 0,1\rangle$.]

b) neexistuje $(R)\int_0^1 D(x)\,dx$

Ukažte, že libovolný horní součet je $\underline{1}$ a libovolný dolní součet je nula.

c) neexistuje $(N)\int_0^1 D(x)\,dx$

Ukažte, že neexistuje primitivní funkce k Dirichletově funkci v $(0,1)$. Tvrzení dokažte pomocí jedné z následujících vět:

A/ Buď F funkce, mající v intervalu $\langle a,b\rangle$ vlastní derivaci F', buď $\langle\alpha,\beta\rangle \subset \langle a,b\rangle$ libovolný interval. Potom ke každému ξ ležícímu mezi hodnotami $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$ existuje $\eta \in \langle\alpha,\beta\rangle$ tak, že $F'(\eta) = \xi$ /tzv. Darbouxova vlastnost derivace/.

B/ Buď F funkce, mající v intervalu (a,b) vlastní derivaci F'. Potom funkce F je funkce tzv. Baierovy 1.třídy /tj. jest limitou posloupnosti spojitých funkcí na (a,b)/ a množina bodů spojitosti funkce F' je hustá v intervalu (a,b) /tj. označíme-li A množinu bodů spojitosti funkce F' v intervalu (a,b), je $\bar{A} = (a,b)$, kde $\bar{A}$ znamená uzávěr množiny A v (a,b) /.

Viz též př. 3,16.

d) neexistuje $(ZN)\int_0^1 D(x)\,dx$.

3,4. Uvažujte $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Ukažte, že

a/ existuje jako Newtonův

Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je spojitá v $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, tedy funkce $(N)\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ je primitivní funkcí k funkci $\frac{\sin x}{x}$ na $(0,+\infty)$; zbývá dokázat, že existuje konečná limita

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt .$$

Aby tato existovala, je nutné a stačí, aby byla splněna (B - C) podmínka, tj.

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{x_0>0}\ \forall_{x'}\ \forall_{x''} \left(x'>x_0,\ x''>x_0 \Rightarrow \left|\int_0^{x'} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| < \varepsilon\right).$$

Odhadněte $\int_{x'}^{x''} \frac{\sin t}{t}\,dt$ pomocí integrace per partes pro Newtonovy integrály /věta 70/. Viz též větu 75 /Dirichletovo kriterium/.

b/ neexistuje jako Lebesgueův /viz př. 3,47/,

c/ neexistuje jako Riemannův.

3,5. Definujme funkci f takto:

$$f\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1,\ n = 1,2,\dots,\quad f = 0 \quad \text{jinde v } \langle 0,1\rangle .$$

Ukažte, že

a/ existuje $(R)\int_0^1 f$

⌈ Viz např. větu 57. Dokažte toto tvrzení také přímo z definice. Je ihned vidět, že libovolný dolní součet je nula a že k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle 0,1 \rangle$, pro něž příslušný horní součet je menší než ε . ⌋ ,

b/ neexistuje (N) $\int_0^1 f$

⌈ Viz např. obecnou větu A v 3,3c . Ukažte též přímo, že neexistuje primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. ⌋ ,

c/ neexistuje (ZN) $\int_0^1 f$

⌈ Nechť F je zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, potom nutně je F konstantní v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, tudíž

$$F'(\tfrac{1}{n}) \neq f(\tfrac{1}{n}) .$$

Ukažte, že neexistuje zobecněná primitivní funkce k funkci f na $\langle 0,1 \rangle$ též pomocí věty A v 3,3c . ⌋

3,6. Buď $f(x) = \operatorname{sign} x$ na E_1 /tj. $f(x) = 1$ pro $x \in (0,+\infty)$, $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ pro $x \in (-\infty, 0)$. Potom

a/ neexistuje (N) $\int_{-1}^{+1} f$,

b/ existuje (ZN) $\int_{-1}^{+1} f$.

3,7. <u>Poznámka</u>

Říkáme, že " $\int_M f$ konverguje " , právě když $f \in \mathcal{L}_M$.
Říkáme, že " $\int_M f$ existuje " , jestliže $f \in \mathcal{L}^*_M$; v případě, že integrál existuje, ale nekonverguje /tj. v případě, že $f \in \mathcal{L}^*_M - \mathcal{L}_M$/, budeme též někdy říkat, že " $\int_M f$ diverguje " .

3,8°. Buď f spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, dokažte!

⌈ 1/ Existuje (R) $\int_a^b f$ a použije se věta 49 .

2/ Ukažte, že $f \in \Lambda_{(a,b)}$ /věta 48/, f je omezená na $\langle a,b \rangle$, použije se věta 31 . ⌋

3,9°. Buď $-\infty < a < b < +\infty$, buď f spojitá v (a,b) . Nechť existují vlastní limity $\lim_{x \to a_+} f(x)$, $\lim_{x \to b_-} f(x)$.
Potom $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Dokažte !
Platí tato věta i pro $a = -\infty$ či $b = +\infty$?

3,10. Buď $-\infty \leq a < b < +\infty$, nechť $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$ /tj. nechť existuje (L) $\int_a^b f$! /. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx .$$

Dokažte!

⌈ Viz větu 28 . ⌋

Předpoklad $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$ je podstatný, ukažte, že jej nelze vynechat

$\boxed{3,11^\circ.}$ Buď $-\infty \leq a < +\infty$, nechť $f \in \mathcal{L}^*_{(a,+\infty)}$.

Potom $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f$. Dokažte !

Opět nelze vynechat předpoklad existence integrálu vlevo, ukažte !

$\boxed{3,12^\circ.}$ Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$. Potom

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} \int_a^x f = \lim_{x\to a_+} \int_x^b f \text{ . Dokažte !}$$

‖ Použijte větu 28 a následující větu /Heine/:

"buď φ funkce v intervalu (a,b) , buď $A \in E_1^*$, potom

$\lim_{x\to b_-} \varphi(x) = A \iff$ pro každou posloupnost

$\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $b_n < b$, $b_n \nearrow b$ jest $\lim_{n\to\infty} \varphi(b_n) = A$ "

viz též cv. 4,14 . ‖

$\boxed{3,13^\circ.}$ Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, buď f spojitá funkce v (a,b) .

Nechť F je primitivní funkce k funkci f v (a,b) /proč existuje ?/.

Jestliže $f \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$, pak existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$, $\lim_{x\to b_-} F(x)$

/ne nutně vlastní ! / a

$$(L)\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) \text{ .}$$

Dokažte!

‖ Zvolíme-li $c \in (a,b)$, je pro každé $x \in (c,b)$ $\int_c^x f(t)\,dt =$
$= F(x) - F(c)$ a aplikujeme 3,12 . Obdobně se zjistí, že
$\int_a^c f = F(c) - \lim_{x\to a_+} F(x)$, stačí nyní užít větu 26 . ‖

$\boxed{3,14.}$ <u>Poznámka</u>

Připomeňme následující věty.

A/ Nechť existuje $(N)\int_a^b f$. Potom pro každé $x \in (a,b)$ existuje
$(N)\int_a^x f$ a označíme-li tento integrál $\Phi(x)$, je Φ primitivní
funkce k funkci f na intervalu (a,b) .

B/ Vyslovte obdobnou větu pro ZN - integrál /věta 66/.

$\boxed{3,15^*.}$ a/ Nechť existují $(N)\int_a^b f$ i $(L)\int_a^b f$, nechť f je spojitá v (a,b).
Potom $(N)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$. Dokažte !

‖ Použijte předchozí poznámku 3,14 A , větu 28 a Heineho větu v 3,12
či přímo cv. 3,12. ‖

b/ Nechť existují $(ZN)\int_a^b f$ i $(L)\int_a^b f$, nechť f je spojitá v (a,b).
Potom jsou si rovny. Dokažte !

3,16.* Buď F funkce, mající v intervalu (a,b) vlastní derivaci. Potom existují spojité funkce f_n v intervalu (a,b) tak, že $F' = \lim_{n\to\infty} f_n$ v (a,b). Dokažte !

‖ Zvolte $x \in (a,b)$, buď n takové přirozené číslo, že $x + \frac{1}{n} \in (a,b)$. Položte $f_n(x) = n \cdot \left[F(x + \frac{1}{n}) - F(x)\right]$ a ukažte, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = F'(x)$ /z definice/.

Buď nyní $n_0 \in N$ takové, že $a < b - \frac{2}{n_0}$.

Definujme nyní pro libovolné $n \geq n_0$ funkci f_n takto

$$f_n(x) = \begin{cases} n.\left[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)\right] & \text{pro } x \in (a, b - \frac{2}{n}\rangle, \\ n.\left[f(b - \frac{1}{n}) - f(b - \frac{2}{n})\right] & \text{pro } x \in (b - \frac{2}{n}, b). \end{cases}$$

Lehko ukážete, že posloupnost f_n je hledanou posloupností. ‖

Srovnáte-li tento výsledek s 3,3c, vidíte, že derivace libovolné funkce v intervalu (a,b) /pokud v tomto intervalu existuje!/ je funkce Baierovy 1. třídy. Derivace libovolné funkce v intervalu (a,b) nemusí být spojitá ve všech bodech (a,b) /uveďte příklad !/, ale z 3,3 c plyne, že bodů, ve kterých je derivace nespojitá, nemůže být "mnoho". Přesněji, množina bodů spojitosti derivace libovolné funkce v (a,b) je v tomto intervalu hustá.

3,17.° Buď F funkce, mající v intervalu (a,b) vlastní derivaci. Potom $F' \in \Lambda_{(a,b)}$. Dokažte !

‖ Použijte předchozí cvičení 3,16, větu 48 a větu 30. ‖

3,18.° Nechť existuje $(N)\int_a^b f$. Potom $f \in \Lambda_{(a,b)}$, dokažte !

‖ Použijte předchozí cvičení 3,17. ‖

3,19.° Vyslovte a dokažte obdobné věty k větám ze cvičení 3,16 - 3,18 pro zobecněnou primitivní funkci a pro ZN - integrál !

3,20.° Nechť funkce F má v intervalu (a,b) vlastní derivaci. Dokažte, že $F \in \Lambda_{(a,b)}$ /srovnejte s 3,17/ !

3,21.° Nechť $f \in \Lambda_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom $|f| \in \mathcal{L}^*_{(a,b)}$ a $\int_a^b |f| = +\infty$. Dokažte !

‖ Použijte větu 35 a vztahu $|f| = f^+ + f^-$. ‖

3,22.° Nechť existuje $(N)\int_a^b f$ a neexistuje $(L)\int_a^b f$. Ukažte, že

a/ $f \in \Lambda_{(a,b)} - \mathcal{L}^*_{(a,b)}$,

b/ f mění na intervalu (a,b) své znaménko, tj. není $f \geq 0$ anebo $f \leq 0$ na (a,b), c/ (L) $\int_a^b |f| = +\infty$,

d/ (N) $\int_a^b |f|$ neexistuje .

Srovnejte též pro zajímavost s cvičením 8,50 .

3,23. Poznámka

Podle předchozích cvičení je zřejmé, že pro výpočet (L) $\int_a^b f$ nestačí nalézt primitivní funkci k funkci f na (a,b) a spočítat rozdíl příslušných limit. Vždy musíme nejdříve ověřit, že (L) $\int_a^b f$ skutečně existuje, tj. že funkce f patří do systému $\mathcal{L}^*_{(a,b)}$. Prostudujte pečlivě následující příklad.

3,24. Definujme funkci f takto:

$$f(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{pro} \quad x \in \langle -1,0) \cup (0,1\rangle , \quad f(0) = 0 .$$

Lehko zjistíme, že funkce F ,

$$F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} \quad \text{pro} \quad x \in \langle -1,0) \cup (0,1\rangle ,$$

$$F(0) = 0 ,$$

je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $\langle -1,+1 \rangle$

/všimněte si, že derivace funkce nemusí být spojitá funkce ! /.

Dokažte, že

a/ existuje (N) $\int_{-1}^{+1} f = 0$,

b/ neexistuje (R) $\int_{-1}^{+1} f$

⟦ ukažte, že funkce f není v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$ omezená, uvažujte např. posloupnost $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ ⟧,

c/ neexistuje (L) $\int_a^b f$

⟦ ukažte, že $2x \sin \frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}(-1, +1)$, zatímco $\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \notin \mathcal{L}^*_{(-1,+1)}$, viz též obdobný př. 3,56 ⟧.

3,25°. Dokažte větu 5,3 , tj. větu

a/ buď $a > 0$, potom $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$,

b/ buďte $a,b \in E_1$, $a < b$, potom $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$.

⟦ Ukažte, že funkce $\frac{1}{x^\alpha} \in \mathcal{L}^R_{(a,+\infty)}$ podle vět 48 a 53 a poté použijte cvičení 3,11. Též pak můžete použít př. 3,13. Obdobně pro druhou část . ⟧

3,26°. Dokažte následující větu:

"Buďte f,g spojité a nezáporné funkce v intervalu $\langle a,b)$

/ $-\infty < a < b \leq +\infty$ / . Nechť existuje $\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

25535 24

Potom

1/ je-li $0 < A < +\infty$, platí $\left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

2/ je-li $A = 0$, platí $\left[g \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ je-li $A = +\infty$, platí $\left[g \in \mathcal{L}^{R}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \Rightarrow f \in \mathcal{L}^{R}_{(a,b)} - \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$."

Použijte definici limity a větu 31 .

Jak by bylo možné požadavky kladené na funkce f,g zeslabit ?

3,27°. Dokažte následující věty:

I/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,+\infty)$, $a > 0$. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot x^{\alpha} = A$. Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha > 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha > 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,\infty)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \leq 1 \Rightarrow \int_a^{\infty} f = +\infty \right]$

Použijte buďto cvičení 3,25 a 3,26 anebo přímo definici limity .

II/ Buď f spojitá a nezáporná funkce v intervalu $\langle a,b)$, $a,b \in E_1$. Nechť existuje $\lim\limits_{x\to b_-} f(x) \cdot (b-x)^{\alpha} = A$. Potom

1/ $A \in (0,+\infty) \Rightarrow \left[f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \Leftrightarrow \alpha < 1 \right]$,

2/ $A = 0 \Rightarrow \left[\alpha < 1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}_{(a,b)} \right]$,

3/ $A = +\infty \Rightarrow \left[\alpha \geq 1 \Rightarrow \int_a^{b} f = +\infty \right]$.

Vyslovte obdobné věty pro nekladné funkce !

Jak je možno oslabit předpoklady o funkci f ?

3,28. Dokažte, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$!

1/ Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\frac{1}{1+x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ /věta 48/. Jelikož je tato funkce kladná, je $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ /věta 33/.

2/ Protože funkce $\frac{1}{1+x^2}$ je spojitá v $\langle 0,1\rangle$, existuje $(R)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$, tedy $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ / věta 49/. Jelikož v E_1 dále platí odhad $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ a $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$/věta 53 či cvič. 3,25/ , je i $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ /věta 31/. Použitím věty 26 odtud plyne, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Použijeme-li cvičení 3,27 , dostáváme ze vztahů

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot x^2 = 1 , \quad \alpha = 2 > 1$$

tvrzení, že $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$.

4/ Jiný způsob důkazu:

jelikož jsme zjistili, že $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ existuje

/ $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ / a jelikož

$(N)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2}$, musí mezi oběma integrály nastat rovnost /př. 3,15/ , tedy i $(L)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ je konečný, tj. $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

5/ Použijte též cvič. 3,13 . ‖

Pochopitelně, že jsme mohli postupovat i jinak, např. využít odhadu $0 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ pro chování integrálu v intervalu $(0,1)$; zkuste následující tvrzení dokazovat z hlediska dobrého procvičení látky - vždy všemi možnými způsoby.

3,29. Buď $\alpha \in E_1$, potom $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

Použijte větu 26 a 53 .

3,30. Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$!

1/ Ukažte, že $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$,

2/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

3/ dále ukažte, že $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$,

a/ poslední tvrzení dokážeme třeba následovně:

tvrdíme, že existuje takové $x_0 > 0$, že $\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ pro $x > x_0$.

Jak dokážeme tuto poslední nerovnost? Zřejmě je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \qquad \text{pro } x > x_0 .$$

Protože ale $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = 1$, existuje např. k číslu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ takové x_0 /podle definice limity/ , že

$x > x_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} \leq 1 + \frac{1}{2}$, což jsme vlastně chtěli ukázat.

Jelikož nyní $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$, je $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx = +\infty$.

Jak je to s integrálem $\int_{1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$, je-li $x_0 > 1$?

b/ použijete-li cvičení 3,27 /což vlastně není nic jiného, než rychle provedená část a/ /, je vzhledem k

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \cdot x = 1 , \quad \alpha = 1$$

dokázáno, že $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = +\infty$.

Celý postup si dobře rozmyslete a jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!

3,31. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$ konverguje !

Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův !

Při vyšetřování konvergence integrálů, je třeba velmi dobře znát chování jednotlivých funkcí - zvláště v okolí "nepříjemných" bodů. Zopakujte si proto, jak vypadají například následující limity:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \log^k x , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} , \ldots .$$

3,32. Dokažte, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$!

1/ Funkce e^{-x^2} je spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$.

2/ Zřejmě $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,9)}$ /proč?/; protože $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$, je podle cvičení 3,25 i $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(9,+\infty)}$. Tudíž $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

3/ Lze také postupovat takto /což není nic jiného, než důkaz vět ze cvičení 3,25 /:

existuje takové x_0 , že $0 \le e^{-x^2} \le \frac{1}{x^2}$ pro $x > x_0$.

Proč?

Naše nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$0 \le e^{-x^2} \cdot x^2 \le 1 \qquad \text{pro } x > x_0 ,$$

která vyplývá ze vztahu $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \cdot x^2 = 0$ a z definice limity.

Protože $\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ je konečný pro $x_0 > 0$, je konečný i integrál $\int_{x_0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Lehko ukážeme, že $e^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,x_0)}$.

4/ Ještě jiný důkaz:

pro každé $x \in E_1$ jest $-x^2 \leq -2x + 1$ /proč ?/,
tedy též $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$ /odůvodněte ! / .

Zřejmě $(L)\int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx$ existuje /tj. je $e^{-2x+1} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$/
a $(N)\int_0^\infty e^{-2x+1}\,dx = \frac{e}{2}$. Odtud již lehko učiníme závěr,
že $0 \leq \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \frac{e}{2}$ /s pomocí jakých vět ? / . ‖

3,33. Dokažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$!

1/ Opět ukažte, že $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(1,2)}$.

2/ Protože

$$\lim_{x \to 1_+} \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} \text{ , tedy } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \text{ ,}$$

je podle 3,25 $\frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$.

3/ Ukažte, že existuje taková konstanta $k > 0$, že

$$x \in (1,2) \Rightarrow 0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{k}{\sqrt{x-1}} \text{ .}$$

Toto dokažte např. takto:

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

a funkce $\frac{e^x}{\sqrt{x+1}}$ je spojitá v intervalu $\langle 1,2 \rangle$, tedy i omezená v $\langle 1,2 \rangle$.

Ze vztahu $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \in \mathcal{L}_{(1,2)}$ pak plyne tvrzení . ‖

3,34. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{1-x^3}\,dx = +\infty$!

1/ Opět $\frac{1}{1-x^3} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$.

2/ Protože $\lim_{x \to 1_-} \frac{1}{1-x^3}(1-x) = \frac{1}{3}$, $\alpha = 1$,
plyne podle 3,25 tvrzení.

3/ Ukažte, že existuje taková kladná konstanta K , že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{1-x^3} \geq \frac{K}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x+x^2}$ a funkce $\frac{1}{1+x+x^2}$

nabývá v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ kladného minima , odtud již lehko dokážete tvrzení.

4/ Spočtěte primitivní funkci F k funkci $\frac{1}{1-x^3}$ na intervalu $(0,1)$ a použije cvič. 3,13 . ‖

3,35. Dokažte, že $x^{-\frac{5}{4}} \cdot \log x \in \mathscr{L}^{K}_{(0,+\infty)} - \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$

‖ 1/ Ukažte, že $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathscr{L}^{K}_{(0,1)}$ a $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathscr{L}^{R}_{(1,+\infty)}$.

2/ Ukažte, že

a/ $x^{-\frac{5}{4}} \log x \in \mathscr{L}_{(1,+\infty)}$, neboť

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^{-\frac{5}{4}} \log x \right] \cdot x^{\frac{9}{8}} = 0 ,$$

b/ $x^{-\frac{5}{4}} \log x \notin \mathscr{L}_{(0,1)}$, neboť např.

$$\lim_{x \to 0_+} \left[x^{-\frac{5}{4}} \log x \right] \cdot x = -\infty .$$

3/ Ukažte, že

a/ existuje $K > 0$ tak, že $0 \leq x^{-\frac{5}{4}} \log x \leq \frac{K}{x^{\frac{9}{8}}}$,
pro velká x ,

b/ existuje $C > 0$ tak, že

$$x^{-\frac{5}{4}} \log x \leq \frac{-C}{x} < 0 \quad \text{pro} \quad x \in (0,1) .$$

4/ Nalezněte primitivní funkci a použijte 3,13 . ‖

3,36.

Dokažte, že

1/ $e^{-x} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$ /ukažte podle 3,28 všemi způsoby, výsledek si pamatujte/ ,

2/ $\log x \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

3/ $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

4/ $\frac{\log(1+x)}{x} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

5/ $\frac{\log x}{1-x} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

6/ $\frac{\log x}{1+x^2} \in \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$

7/ $\log \sin x \in \mathscr{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$

8/ $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

9/ $\frac{1}{\log x} \in \mathscr{L}^{K}_{(0,1)} - \mathscr{L}_{(0,1)}$

10/ $\frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}} \in \mathscr{L}_{(0,1)}$

11/ $\int_0^\infty \frac{\operatorname{artg} x}{x}\, dx = +\infty$

12/ $\int_1^\infty \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}} < +\infty$

13/ $\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

14/ $\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ konverguje

15/ $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}$ konverguje

16/ $\sin^2 \frac{1}{x} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$

17/ $\int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ konverguje

18/ $\int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$ konverguje

19/ $\int_0^1 \log x \quad e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$ konverguje

20/ $\int_0^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

21/ $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje

22/ $\int_0^1 \frac{\log x}{x.\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

23/ $\int_1^\infty \frac{\log x}{x.\sqrt{x^2-1}}$ konverguje

24/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{tgx}}$ konverguje

25/ $\int_0^\infty e^{-(x^2+\frac{1}{x^2})}\,dx$ konverguje

26/ $\int_0^\infty (x)^{\frac{1}{x}}\,dx = +\infty$

27/ $\int_0^2 \frac{\log x}{2-x}\,dx = +\infty$

28/ $\int_{-1}^{+1} \cos\left[\sin \frac{1}{x} + e^{\frac{1}{x}}\right] dx$ konverguje

29/ $\int_{-1}^{+1} \left(\left|\sin \frac{1}{x}\right|\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$ konverguje

30/ $\int_0^\infty e^{-x} \sin x\,dx$ konverguje

31/ $\int_0^1 \log x \sin \frac{1}{x}\,dx$ konverguje

32/ $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} \sin \frac{1}{x}\,dx$ konverguje

33/ $\int_2^\infty \frac{\log x}{x}\,dx = +\infty$

34/ $\frac{1}{x^2(x+1)} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$

35/ $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx = +\infty$

36/ $\int_1^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x}\,dx = +\infty$

37/ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$

38/ $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ konverguje

39/ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$ konverguje

40/ $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$ diverguje

41/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje

42/ $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3-1}\,dx = +\infty$

43/ $\frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

44/ $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$ konverguje

45/ $\frac{x}{(1+x)^3} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

46/ $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$ konverguje

47/ $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+5}}$ diverguje

48/ $\int_1^2 \frac{dx}{x.\log x}$ diverguje

49/ $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ konverguje

50/ $\int_{-1}^{+1} \frac{4x^3}{x^4-1}\, dx$ diverguje

$\boxed{3,37^{\circ}.}$ I/ Buď f definována v intervalu $(a,+\infty)$. Nechť $f \in \Lambda_{(a,+\infty)}$, $f \geq 0$ na $(a,+\infty)$. Nechť existuje limita $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$. Je-li $A > 0$, je $\int_a^{+\infty} f = +\infty$. Dokažte !

‖ Zřejmě $f \in \mathcal{L}^R_{(a,+\infty)}$. Podle definice limity existuje takové $x_0 > a$, že $0 < \frac{A}{2} \leq f(x)$ kdykoliv $x \geq x_0$. Tedy nutně

$$\int_a^\infty f \geqq \int_{x_0}^\infty \frac{A}{2} = +\infty \quad . \|$$

Co lze říci v případě, že $A = 0$?

II/ Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}$, $f \geqq 0$ na $(a,+\infty)$.

Potom

1/ buďto $\lim_{x\to\infty} f(x)$ neexistuje, anebo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$,

2/* nutně $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Uveďte příklad funkce $f \in \mathcal{L}_{(a,+\infty)}$, $f \geqq 0$ takové, že $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ neexistuje ! /Viz kupř. 3,52/.

Jaká je situace v případě, že není $f \geq 0$ na $(a,+\infty)$?

$\boxed{3,38.}$ Poznámka

Srovnejte výsledky předchozího cvičení 3,37 s obdobnými vlastnostmi konvergentních řad

$$/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \; / .$$

$\boxed{3,39.}$ Velmi často se stává, že funkce jejíž integrál zkoumáme, je funkcí ještě nějakého dalšího parametru, tj. jest funkcí dvou /eventuelně více/ proměnných. Pro nějaké hodnoty tohoto parametru může integrál konvergovat, pro jiné divergovat či vůbec neexistovat. Naším úkolem je pak zjistit, do jakého systému funkcí daná funkce patří pro různé hodnoty parametru.

Všimněte si, že obě věty ze cvičení 3,27 dávají nejsilnější tvrzení v případě, že limita A je konečná a různá od nuly. V příkladech se vždy snažíme tedy nalézt exponent α tak, aby skutečně bylo $0 < A < +\infty$. V dalších příkladech vždy x znamená proměnnou, ostatní písmena parametry. Čtenáři by neškodilo, kdyby si již nyní přečetl odstavec 4,14 .

3,40. Dokažte, že $\dfrac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

1/ Funkce $\dfrac{x^{a-1}}{1+x}$ je pro každé $a \in E_1$ spojitá a kladná v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\dfrac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ pro všechna $a \in E_1$.

2/ Použijeme cvičení 3,27.

Protože $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{x^{a-1}}{1+x} \, x^{1-a} = 1$, jest

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow 1 - a < 1 \text{ , tj. } a > 0 .$$

Dále $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{a-1}}{1+x} \, x^{2-a} = 1$, tedy

$$\frac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)} \Leftrightarrow 2 - a > 1 \Leftrightarrow a < 1 .$$

Celkově je $\dfrac{x^{a-1}}{1+x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

3/ Jiné řešení:

v podstatě týmž - vám již známým - způsobem ukážete, že existují kladné konstanty K_1 , K_2 , C_1 , C_2 a reálná čísla $x_k > 0$, $x_c > 0$ tak, že

$$x \in (0,x_k) \Rightarrow \frac{K_1}{x^{1-a}} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} \leq \frac{K_2}{x^{1-a}} ,$$

$$x \in (x_c,+\infty) \Rightarrow \frac{C_1}{x^{2-a}} \leq \frac{x^{a-1}}{1+x} \leq \frac{C_2}{x^{2-a}} .$$

Odtud opět vyplývá tvrzení.

4/ Ukažme na tomto příkladě, jak by si měl asi počínat zkušenější posluchač.

Předně si uvědomí, že integrál existuje pro každou hodnotu $a \in E_1$. Zjistí, že jedinými "nepříjemnými body" jsou body "0" a " $+\infty$ " , V okolí nuly se integrál bude chovat jako integrál z funkce x^{a-1} /neboť funkce $\frac{1}{1+x}$ nemá v okolí 0 na konvergenci integrálu žádný vliv/, tedy integrál $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx$ bude konvergovat, právě když

$-(a-1)<1$. V okolí nekonečna se bude integrál chovat asi jako integrál z funkce x^{a-2} /neboť v okolí nekonečna se chová funkce $\frac{1}{1+x}$ jako funkce $\frac{1}{x}$ /, tj. bude konvergovat, právě když $-(a-2)>1$. Odtud již zjistí výsledek, a protože je zkušený posluchač, lehko svá tvrzení podrobně odůvodní . ‖

3,41. Zařaďte funkci $\dfrac{x^{a+\frac{3}{2}}}{1+x^2}$ do systémů $\mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, $\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ v závislosti na parametru a !

‖ Proveďte diskusi jako v předchozím příkladě ; integrál konverguje, právě když $a \in \left(-\frac{5}{2}\, ;\, -\frac{1}{2}\right)$. ‖

3,42. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^k}\, dx$ konverguje, právě když $k \in (1,2)$!

‖ 1/ Ukažte, že $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ pro každé $k \in E_1$.

2/ Použijte cvičení 3,27:

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \cdot x^{k-1} = 1 \text{ , tedy}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow k-1<1 \text{ ,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^k}\; x^k = \frac{\pi}{2} \text{ , tedy}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^k} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)} \Leftrightarrow k>1 \text{ .}$$

3/ Odhadněte funkci $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^k}$ jako v př. 3,40 - 3 / .

4/ Zkušený posluchač:

u nuly se funkce chová jako funkce $\dfrac{1}{x^{k-1}}$ /neboť $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ je asi 1 / , u nekonečna se chová jako funkce $\dfrac{1}{x^k}$ / neboť arctg x je asi $\frac{\pi}{2}$ / , odtud odvodí výsledek . ‖

3,43. Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx \quad \text{konverguje} \Leftrightarrow s \in (0,+\infty) \text{ .}$$

1/ Integrál existuje pro každé $s \in E_1$.

2/ Použijte cvičení 3,27 .

3/ Lehko ukážete, že

$$x \in (0,1) \Rightarrow \frac{e^{-1}}{x^{1-s}} \leq x^{s-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^{1-s}} ,$$

$$x \in (x_0, +\infty) \Rightarrow 0 \leq x^{s-1} e^{-x} \leq \frac{1}{x^3}$$

odtud plyne tvrzení .

Viz též př. 8,63 . ‖

$\boxed{3,44.}$ Dokažte, že

1/ $\int_{-\infty}^{0} e^{px}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p > 0$,

2/ $x^2 \cos ax \in \mathcal{L}_{(0,2)}$ $\Leftrightarrow$ $a \in E_1$,

3/ $\dfrac{\sin x}{x^a(\pi - x)^a} \in \mathcal{L}_{(0,\pi)} \Leftrightarrow a \in (-\infty, 2)$,

4/ $a \in (0,+\infty) \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} e^{-ax} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$,

5/ $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $b \in E_1$,

6/ $a \leq -1 \Rightarrow \int_0^1 x^a \log x\, dx = -\infty$,

7/ $(\operatorname{tg} x)^a \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow a \in (-1,+1)$,

8/ $\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow n \in (-1,+\infty)$,

9/ $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $p > 0$, $q > 0$,

10/ $\dfrac{x}{2+x^a} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow a \in (2,+\infty)$,

11/* pro která n , k konverguje $\int_0^{\infty} \dfrac{x^k}{1+x^n}\, dx$? ,

12/ $\int_0^{\infty} x^k\, dx$ diverguje pro všechna $k \in E_1$,

13/ $\dfrac{1-\cos x}{x^k} \in \mathcal{L}_{(0,\pi)} \Leftrightarrow k < 3$,

14/ $\dfrac{1}{(\sin x)^a} \in \mathcal{L}_{(0,\pi)} \Leftrightarrow a < 1$,

15/ $\dfrac{x^k}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow k \in (-1,+\infty)$,

16/ $(\log x)^n \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow n > -1$, 17/ $\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^4}\,dx = +\infty$ pro každé $n \in E_1$,

18/ $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^n}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $n \in (1,2)$,

19/ $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x.\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in E_1$,

20/ $\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in \langle -1,+1 \rangle$,

21/ $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{a^2+x^2}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in E_1$, $a \neq 0$,

22/ $\int_0^\pi \log(\sin ax)\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in (0,1\rangle$,

23/ $a \in E_1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+a^2} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$,

24/ buď $a > b$, potom

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{b-1}}{1-x}\,dx \text{ konverguje } \Leftrightarrow 0 < b < a < 1 ,$$

25/ $\int_0^\infty \sin\left(\sqrt{x^{2a}+1} - x^a\right)dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $a \in (1,+\infty)$,

26/ $\int_0^1 x^s(1-x^2)^t\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow$ $s > -1$, $t > -1$,

27/ $x^x e^{-x^k} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Leftrightarrow k \in E_1$,

28/ $n \in E_1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1-x}\,dx = +\infty$,

29/ $\int_A^\infty \frac{x^2}{a^2+x^2}\,dx$ diverguje pro všechna $a, A \in E_1$

Dalším typem příkladů, které budeme řešit, jsou úlohy, v nichž máme ukázat, že daná funkce nemá integrál, tj. že neleží v systému $\mathcal{L}^*$. Protože v praxi se nesetkáme s neměřitelnými funkcemi, jde o to dokázat, že daná funkce leží v systému $\Lambda - \mathcal{L}^*$. K tomu budeme hlavně používat následujících vět - věty 26, 27, 35 a 44 , zopakujte si jejich znění !

3,45. Dokažte, že $\sin x \in \Lambda_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$!

/Dopouštíme se zde jedné nekonkretnosti - místo abychom správně psali "funkce sin", píšeme "funkce sin x" , čtenáři tato menší nekonkretnost snad nebude vadit./

1/ Funkce sin x je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$, tedy $\sin x \in \Lambda_{(0,+\infty)}$. Odtud plyne, že $(\sin x)^+ \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$, $(\sin x)^- \in \mathcal{L}^{\mathcal{R}}_{(0,+\infty)}$ /věta 35/ a podle věty 27 je

$$\int_0^\infty (\sin x)^+ dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{2\pi n}^{(2n+1)\pi} \sin x \, dx = +\infty ,$$

obdobně $\int_0^\infty (\sin x)^- \, dx = +\infty$, tedy $\sin x \notin \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$ /věta 35/.

2/ Kdyby $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, musel by mít podle věty 27 smysl součet $\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x \, dx$, což však není splněno.

3/ Kdyby $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, musela by podle cvičení 3,13 existovat limita $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, kde F je libovolná primitivní funkce k funkci sinx na $(0,+\infty)$. Ale např. $F(x) = -\cos x$ a uvedená limita zřejmě neexistuje.

4/ Definujme si funkci g na E_1 takto:

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0,+\infty) , \\ 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle . \end{cases}$$

Ukažte podle definice, obdobně jako v př. 2,30, že

$$\tilde{A}g = +\infty , \qquad \underset{\sim}{A}g = -\infty ,$$

tedy i $\tilde{\int_0^\infty} \sin x \, dx = +\infty$, $\int_{\underset{\sim}{0}}^\infty \sin x \, dx = -\infty$ /viz definici za větou 12 /.

Odtud je vidět, že nemůže být $\sin x \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$.

3,46. Dokažte, že neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$!

1/ Ukažte opět, že $x \in \Lambda$ a dále, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x)^+ dx = \int_0^\infty x \, dx = +\infty ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x)^- dx = \int_{-\infty}^0 (-x) \, dx = +\infty .$$

2/ Kdyby bylo $x \in \mathcal{L}^*_{(-\infty,+\infty)}$, musel by mít smysl součet

$$\int_{-\infty}^0 x \, dx + \int_0^\infty x \, dx .$$

3/ Použijte též cvičení 3,13 - kdyby bylo $x \in \mathcal{L}^*_{(-\infty,+\infty)}$, muselo by být $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2}$, ale rozdíl posledních limit nemá smysl.

4/ Použijte též př. 2,30.

3,47. Dokažte, že neexistuje (L) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$!

/Viz též př. 3,4/.

1/ Pomocí vztahu

$$x \in (k\pi, (k+1)\pi) \Rightarrow \frac{1}{x} \geqq \frac{1}{(k+1)\pi}$$

a věty 27 ukažte, že

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^+ dx \geqq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = +\infty \ .$$

Obdobně $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^- dx = +\infty$.

2/ Použijte též přímo větu 27 .

3/ Lze použít cvičení 3,13 pro důkaz neexistence tohoto integrálu?

3,48. Proveďte diskusi existence a konvergence $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx$!

a/ $a \in \langle 2, +\infty) \Rightarrow \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a}\, dx = +\infty$,

$$\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x^a}\right| dx < +\infty \ .$$

b/ $a \in (1,2) \Rightarrow \frac{\sin x}{x^a} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

c/ $a \in (-\infty, 1\rangle \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx$ neexistuje .

Jaká bude diskuse, budeme-li chápat tento integrál jako Newtonův ?

3,49. Dokažte, že

1/ $\frac{\sin x}{(1-x^2)^a} \in \mathcal{L}_{(-1,+1)}$ pro $a \in (-\infty, 1)$,

$\frac{\sin x}{(1-x^2)^a} \in \Lambda_{(-1,+1)} - \mathcal{L}^*_{(-1,+1)}$ pro $a \in 1, +\infty)$,

2/ neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} x\, dx$,

3/ neexistuje $\int_{-\infty}^{3} \cos x\, dx$,

4/ neexistuje $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx$,

5/ neexistuje $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x\, dx$

‖ použijte vztahu

$$x \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{2} , \frac{(2k+3)\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geqq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad , \|$$

6/ neexistuje $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$

‖ a/ ukažte, že

$$\int_0^\infty (\sin x^2)^+ \, dx = \sum_{K=0}^\infty \int_{\sqrt{2K\pi}}^{\sqrt{(2K+1)\pi}} \sin x^2 \, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{K=0}^\infty \left[\sqrt{(2k+\tfrac{1}{2})\pi} - \sqrt{2k} \right]$$

a poslední řada diverguje,

obdobně $\int_0^\infty (\sin x^2)^- \, dx = +\infty$,

b/ pomocí věty o substituci ukažte, že

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \, dy$$

tato rovnost platí co do existence i co do hodnoty ,

podle př. 3,48 však poslední integrál neexistuje ‖,

7/ $\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{x} \, dx = +\infty$

‖ viz obdobný př. 3,47 ‖ ,

8/ neexistuje $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{x^2-x+1}} \, dx$ pro žádné $a \neq 0$

‖ buď $a > 0$, využijte odhadu

$$x \in \left(\frac{2k\pi}{a} , \frac{(2k+1)\pi}{a} \right) \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \leqq x \leqq \frac{(2k+1)\pi}{a} \quad \|$$

3,50. Definujme funkci f takto:

$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{pro} \quad x \in \langle n-1, n) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots .$$

Dokažte, že $f \in \Lambda_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$.

‖ 1/ Ukažte, že $f \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

a/ použitím věty 56 anebo

b/ následovně:

definujme funkce f_n takto /n = 1,2,.../

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{pro} \quad x \in \langle n-1, n) \quad ,$$

$f_n(x) = 0$ jinde ,

potom $f_n \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ /proč ?/ a

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n .$$

2/ $\int_0^{\infty} f^+ = \int_0^{\infty} f^- = +\infty$.

3/ Kdyby $f \in \mathcal{L}^*_{(0,+\infty)}$, pak nutně $\int_0^{\infty} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,

tato řada konverguje, což je ve sporu s větou 44 , neboť

$\int_0^{\infty} |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.||

Co lze říci o (N) $\int_0^{\infty} f$ či o (ZN) $\int_0^{\infty} f$?

3,51.* Zkoumejte $\int_0^{\infty} \frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha} . \sin^2 x} dx$ pro $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$.

|| Ukažte, že

1/ $\frac{x^{\beta}}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x} \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ pro $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$,

2/ platí vztah

$$x \in (n\pi , (n+1)\pi) \Rightarrow \frac{(n\pi)^{\beta}}{1+[(n+1)\pi]^{\alpha} . \sin^2 x} \leq \frac{x^{\beta}}{1+x^{\alpha} \sin^2 x} \leq$$

$$\leq \frac{[(n+1)\pi]^{\beta}}{1+(n\pi)^{\alpha} . \sin^2 x} ,$$

3/ $A > 0 \Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + A \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + A}}$,

4/ $\alpha > 0$, $\beta \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{x^{\beta} dx}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x}$ konverguje ,

5/ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi (n\pi)^{\beta}}{\sqrt{1+ [(n+1)\pi]^{\alpha}}} \leq \int_{\pi}^{\infty} \frac{x^{\beta} dx}{1+ x^{\alpha} . \sin^2 x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)\pi]^{\beta}}{\sqrt{1 + (n\pi)^{\alpha}}}$,

6/ náš integrál tedy konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta - \frac{1}{2}\alpha}$,
tedy právě když $\beta - \frac{1}{2}\alpha < -1$ tj. právě když $\alpha > 2(\beta + 1)$.||

3,52. Poznámka

Podle předešlého cvičení konverguje například integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^5 . \sin^2 x} .$$

Funkce $\frac{x}{1 + x^5 . \sin^2 x}$ je spojitá v intervalu $(0,+\infty)$ a všimněte si, že přes tyto dvě podmínky není $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x^5 \sin^2 x} = 0$. Stačí třeba uvažovat posloupnost $x_n = n\pi$ a dostáváme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x_n}{1 + x_n^5 \sin^2 x_n} =$

$= +\infty$. Čemu je tedy rovna $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1 + x^5 \sin^2 x}$?

/Viz též př. 3,37/.

$\boxed{3,53.^*}$ Buďte $\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$. Potom

$$\int_0^\infty \frac{x^\beta}{1 + x^\alpha \cdot |\sin x|}\, dx \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > \beta + 1 .$$

Dokažte !

$\boxed{3,54.^*}$ Buďte a,b,c kladná. Potom

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}}{e^{bx} \cdot \sin^2 x + e^{cx} \cdot \cos^2 x}\, dx \quad \text{konverguje} \Leftrightarrow b + c > 2a .$$

Dokažte !

‖ Obdobné př. 3,51 . Je nutno spočítat

$$\int_{\frac{2n+1}{2}\pi}^{\frac{2n+3}{2}\pi} \frac{1}{A \sin^2 x + B \cos^2 x}\, dx$$

Náš integrál pak konverguje $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{an}}{\sqrt{e^{bn+cn}}}$

konverguje $\Leftrightarrow$ $b + c > 2a$. ‖

$\boxed{3,55.^*}$ Zařaďte funkci f , $f(x) = \dfrac{1}{e^x \cdot |\sin x|^a}$ do systémů

$\mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, $\mathcal{L}^R_{(0,+\infty)} - \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ v závislosti na parametru a !

$\boxed{3,56.}$ /Viz též př. 3,24/.

Definujme funkci f na intervalu (0,1) předpisem :

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \sin \frac{\pi}{x^2}\right) .$$

Ukažte, že

a/ (N) $\int_0^1 f = 0$,

b/ (L) $\int_0^1 f$ neexistuje .

‖ Zřejmě $f \in \Lambda_{(0,1)}$, $f(x) = 2x \sin \dfrac{\pi}{x^2} - \dfrac{2\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2}$.

Funkce $2x \sin \dfrac{\pi}{x^2}$ leží v systému $\mathcal{L}_{(0,1)}$, vyšetřujme funkci g ,

$g(x) = -\dfrac{2\pi}{x} \cos \dfrac{\pi}{x^2}$. Ukážeme-li, že $g \notin \mathcal{L}^*_{(0,1)}$, vyplyne

odtud a z věty 41 i $f \notin \mathcal{L}^*_{(0,1)}$.

25535 25

Buď tedy $a_n = (n + \frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}$, $b_n = (n - \frac{1}{3})^{-\frac{1}{2}}$, $x \in \langle a_n, b_n \rangle$. Potom

$$n\pi - \frac{1}{3}\pi \leq \frac{\pi}{x^2} \leq n\pi + \frac{1}{3}\pi ,$$

tudíž $\left|\cos \frac{\pi}{x^2}\right| \geq \frac{1}{2}$ a

$$\int_0^1 |g| \geq 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x} \left|\cos \frac{\pi}{x^2}\right| dx \geq \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{3n+1}{3n-1} = +\infty .$$

Podle věty 44 a př. 3,22 nemůže být $g \in \mathcal{L}^*_{(0,1)}$. ‖

3,57. Buď f funkce spojitá na intervalu $\langle 0,1 \rangle$, $f(0) = 0$. Nechť existuje vlastní $f'_+(0)$. Potom $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}}\, dx$ konverguje. Dokažte !

‖ Ukažte, že $\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)}{\sqrt{x^3}} \cdot \sqrt{x} = f'_+(0)$ a použijte 3,27 . ‖

3,58. Rozhodněte, zda platí následující implikace:

a/ $f \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f^2 \in \mathcal{L}_M$,

b/ $f \in \mathcal{L}^R_M$, $f^2 \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$,

c/ $f \in \Lambda_M$, $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $\mu M < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$

‖ použijte vztahu $|f| \leq \frac{1}{2}(1 + f^2)$ ‖,

d/* $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M \Rightarrow f.g \in \mathcal{L}_M$,

e/ $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M$, $f \in \Lambda_M$, $g \in \Lambda_M \Rightarrow f.g \in \mathcal{L}_M$

‖ použijte vztahu $|f.g| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ ‖ ,

f/ $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M \Rightarrow (f + g)^2 \in \mathcal{L}_M$,

g/ $f^2 \in \mathcal{L}_M$, $g^2 \in \mathcal{L}_M$, $f, g \in \Lambda_M \Rightarrow (f + g)^2 \in \mathcal{L}_M$

‖ použijte vztahu $(f + g)^2 \leq 2(f^2 + g^2)$ ‖ .

3,59. Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce f je spojitá v intervalu (a,b) a nechť $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom existuje (N) $\int_a^b f$ /a je roven (L) $\int_a^b f$ /, dokažte !

‖ Použijte cvičení 3,13 ‖.

3,60.° Dokažte následující tvrzení:

1/ f monotonní v intervalu (a,b) $\Rightarrow f \in \Lambda_{(a,b)}$

‖ použijte větu 56 ‖ ,

2/ f omezená na množině M , $f \in \Lambda_M$, $\mu M < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$.

$\boxed{3{,}61.^*}$ Definujme funkci q na intervalu $(0,+\infty)$ takto:

je-li $x \in (0,+\infty)$, je $q(x)$ největší celé číslo, které je menší anebo rovno $\frac{1}{x}$.

Položme dále $f(0) = 0$, $f(x) = q(x) \cdot (-1)^{q(x)}$ pro $x \in (0,1\rangle$.

Ukažte, že $f \notin \mathscr{L}_{(0,+\infty)}$, $\int_0^1 |f| = +\infty$.

4. Integrace posloupností a řad funkcí

Nechť na množině M je dána posloupnost funkcí f_n, která na této množině konverguje k funkci f (tj. pro každé $x \in M$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$). Budeme se zabývat otázkou, za jakých předpokladů je též $\lim_{n\to\infty} A_M f_n = A_M f$. Máme přitom k disposici věty 18 (Leviho), 19 (Lebesgueova) a větu 20.

4.1. Poznámky:

a/ uvědomte si, že věta 20 je vlastně důsledek Lebesgueovy věty. Tedy - nepodaří-li se nám najít funkci $g \in \mathcal{L}_M$ (pro $\mu M < +\infty$) tak, aby pro všechna n a sk.vš. $x \in M$ platilo $|f_n| \leq g$, je zbytečné vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti f_n na M (f_n pak nekonvergují na M stejnoměrně - proč ?),

b/ při vyšetřování stejnoměrné konvergence posloupnosti f_n na množině M používáme následující větu:

"Nechť $f_n \to f$ na množině M, pro každé n $(n = 1,2,\dots)$ označme $\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$.

Potom

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \text{"}.$$

Jak nalezneme v jednoduchém příkladě supremum funkce na množině ukazuje následující věta:

"Nechť $I \subset E_1$ je interval libovolného druhu s koncovými body a,b $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$. Nechť H je spojitá funkce v intervalu I, nechť existují $\lim_{x\to a_+} H(x) = A$, $\lim_{x\to b_-} H(x) = B$. Nechť dále $\xi_1,\dots,\xi_n$ jsou všechny body intervalu I, v nichž derivace H' neexistuje anebo je rovna nule.

Označme

$$Q_x\,[H(x)\ ,\ I] \text{ množinu } \{A, B, H(\xi_1), \dots, H(\xi_n)\}.$$

Potom $\sup_{x\in I} H(x) = \max Q_x\,[H(x)\ ,\ I]$."

K této větě jen dvě stručné poznámky:

1/ je-li $I = \langle a,b \rangle$, píšeme krátce $A = H(a)$, $B = H(b)$; víme, že v tomto případě funkce H nabývá v intervalu I svého maxima (které tedy může nabývat buďto v krajních bodech intervalu I anebo v bodech kde je první derivace rovna nule či neexistuje).

2/ neexistují-li $\lim_{x\to a_+} H(x)$, $\lim_{x\to b_-} H(x)$, zůstává věta v platnosti, položíme-li $A = \limsup_{x\to a_+} H(x)$, $B = \limsup_{x\to b_-} H(x)$, 3/ při použití Lebesgueovy věty bývá výhodné položit

$g(x) = \sup_{n \in N} |f_n(x)|$ (kde N je množina přir. čísel)

pro každé $x \in M$. V tomto případě zvolíme $x \in M$ pevné a hledáme $\sup |f_n(x)|$ přes množinu všech přirozených čísel (anebo alespoň pro všechna $n \geq n_0$, kde n_0 je pevné přirozené číslo). Jak postupovat v tomto případě ukážeme na příkladech.

POZOR ! - při vyšetřování stejnoměrné konvergence hledáme

$\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$, kdežto při použití Lebesgueovy věty hledáme $\sup_{n \in N} |f_n(x)|$!

4,2.	Ukažte, že $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = 0$!

1/ Pro každé $n \in N$ existuje integrál jako Riemannův i Newtonův, ukažte, že $\int_0^1 x^n n^{-1}\, dx = \frac{1}{n\,(n+1)}$, odkud plyne tvrzení.

2/ Využijte též odhadu $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\, dx \leq \frac{1}{n}$.

3/ Použijte větu 20 :

a/ limitní funkce $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n} = 0$ pro každé $x \in (0,1)$,

b/ $\frac{x^n}{n} \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0,1)$ (zřejmě $0 \leq \frac{x^n}{n} \leq \frac{1}{n}$)

tedy $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n}\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$.

(Jako cvičení ukažte, že $\sigma_n = \frac{1}{n}$!).

4/ Použijte Leviho větu:

a/ $\frac{x^n}{n} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $n \in N$ (proč ? ! ,

b/ $\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{x^n}{n}$ pro každé $x \in (0,1)$ a každé $n \in N$.

Dokažte poslední nerovnost přímo anebo použitím tvrzení, že pro libovolné $x \in (0,1)$ je funkce $\varphi(z) = \frac{x^z}{z}$ jakožto funkce z klesající v intervalu $(1, +\infty)$.

5/ Použijte Lebesgueovu větu:

Hledáme funkci g tak, aby $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a byla splněna nerovnost $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq g(x)$ pro všechna $n \in N$ a všechna $x \in (0,1)$, stačí zřejmě položit $g = 1$ na intervalu $(0,1)$.

Zkusme spočítat $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n}$ pro $x \in (0,1)$

(tím vlastně dostaneme nejlepší odhad), je vidět, že $\sup_{n \in N} \frac{x^n}{n} = x$ pro $x \in (0,1)$, stačí tedy položit v Lebesgueově větě $g(x) = x$ na $(0,1)$. ||

4,3. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ukažte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu $0 \leqq \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^{1/n} \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} + \int_{1/n}^1 \frac{nx\,dx}{1+n^2x^2} \leqq$

$$\leqq \int_0^{1/n} nx\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{nx}\,dx = \frac{1}{2n} + \frac{\log n}{n}$$

3/ Zkoumejte, zda $\frac{nx}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ v $(0,1)$

(nekonvergují stejnoměrně, neboť

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ 0 ; \frac{n}{1+n^2} ; \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Big)$$

4/ Použijte Lebesgueovu větu.

Z předchozího odstavce vyplývá, že

$$x \in (0,1)\ ,\ n \in N \Rightarrow 0 \leqq \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqq \frac{1}{2}$$

stačí tedy položit $g = \frac{1}{2}$ na intervalu $(0,1)$ a ověřit podrobně předpoklady Lebesgueovy věty,

dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = 0\ .$$

Jako cvičení se pokusme nalézt "lepší" odhad, položme

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \text{pro každé } x \in (0,1).$$

Zvolme tedy pevně $x \in (0,1)$, místo abychom počítali

$\sup\limits_{n\in N} \frac{nx}{1+n^2x^2}$, položme pro každé $n \in \langle 1,+\infty)$ (a každé $x \in (0,1)$

$$H_x(n) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\ .$$

Zde tedy považujeme n za "spojitě" proměnnou a hledejme

$$G(x) = \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

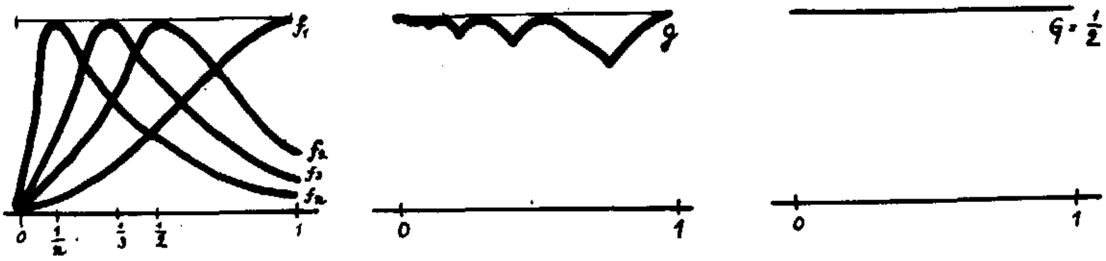
Odůvodněte, proč $g(x) \leqq G(x)$ pro každé $x \in (0,1)$!

Opět zjistěte, že

$$\sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \max\left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0 ; \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\ .$$

Žádný "lepší" odhad jsme tedy neobdrželi. Uvědomte si, že funkce G není "nejlepším" odhadem, je to způsobeno tím, že místo abychom vyšetřovali supremum přes množinu všech přirozených čísel N, vyšetřovali jsme vlastně supremum přes množinu všech reálných čísel v intervalu $\langle 1, +\infty)$ (podrobně rozmyslete !). Kdyby tedy vyšlo $\int_0^1 G = +\infty$, stále by mohlo být $\int_0^1 g < +\infty$.

Viz následující obrázek:



Obrázek č.4

5/ Ukažte, že nelze přímo použít Leviho větu.

4,4.	Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{n^3}\,.\,x}{1+n^2x^2}\,dx = 0$!

1/ Ověřte přímým výpočtem.

2/ Využijte odhadu

$$0 \leqq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \frac{x}{1+n^2x^2}\,dx \leqq n^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{1/n} x\,dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{n^2x}\,dx \right) =$$

$$= n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{\log n}{n} \right).$$

3/ Ukažte, že posloupnost $\frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2}$ nekonverguje stejnoměrně k nule v intervalu $(0,1)$ jest

$$\sigma_n = \sup_{x\in(0,1)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max \left\{ 0 ; \frac{\sqrt{n^3}}{1+n^2} ; \frac{\sqrt{n}}{2} \right\}.$$

4/ Ukažte, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty, jest

$$\sup_{n\in N} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} \leqq \sup_{n\in\langle 1,\infty)} \frac{\sqrt{n^3}\,x}{1+n^2x^2} = \max \left\{ \frac{x}{1+x^2} ; 0 ; \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{x}} \right\} =$$

$$= \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4.\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

4,5.	Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$

$\|$ 1/ Ukažte, že $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$ na intervalu $(0,1)$, ale nekonvergují tam stejnoměrně.

Poslední tvrzení dokažte

a/ tím, že ukážete $\sigma_n = \frac{1}{2}$,

b/ podrobně z následujících vztahů:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1_-} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\right) \quad !$$

2/ Použijte Lebesgueovu větu:

"rychlý", ale "hrubý" odhad dává $0 \leqq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqq \underline{1}$ v $(0,1)$

anebo "lepší" odhad $0 \leqq \dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqq \dfrac{x}{1+x^2}$ pro $x \in (0,1)$, $n \in N$.

3/ Použijte Leviho větu $\underline{.}\,\|$

4,6.	Dokažte, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx = 0$!

$\|$ 1/ Využijte odhadu

$$0 \leqq \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx + \int_1^\infty x^{-n}\,dx = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \quad \text{pro } n \geqq 2 .$$

2/ Limitní funkce f : $f(1) = \frac{1}{2}$; $f = 0$ jinde v $(0, +\infty)$.

3/ Ukažte, že posloupnost $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ nekonverguje k f stejnoměrně v intervalu $(0, +\infty)$

(využijte výsledku z př. 4,5 anebo nespojitosti funkce f !)

Kdyby nicméně bylo $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \rightrightarrows f$ v$(0, +\infty)$, nemohli bychom stejně použít větu 20 (proč?).

4/ Použijte Lebesgueovu větu, vyjde

$$g(x) = \sup_{n\in N} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x}{1+x^2} \text{ , tedy } g \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

(je okamžitě vidět, že $\int_0^{+\infty} f_1 = +\infty$), omezme se proto na $n \geqq 2$, potom $\displaystyle\sup_{n\geqq 2} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{x^2}{1+x^4} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Vše si podrobně rozmyslete a proveďte !

5/ Použijte Leviho větu! $\|$

4,7.	Dokažte, že $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} = \underline{1}$!

$\|$ 1/ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \underline{1}$.

2/ Ukažte, že platí:

$$n \in N \;;\; x \in (0,1) \Longrightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} ,$$

$$n \geqq 2 \;,\; x \in (1,+\infty) \Longrightarrow \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \cdot \sqrt[n]{x}} \leqq (1+\frac{x}{n})^{-n} =$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot (\tfrac{x}{n})^j\right]^{-1} \leqq \left[\frac{1}{2}\, n\,(n-1)\,\frac{x^2}{n^2}\right]^{-1} \leqq \frac{4}{x^2} .$$

Položíme-li tedy $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x \in (0,1)$, $g(x) = \frac{4}{x^2}$ pro $x \in (1,+\infty)$, jest $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte !) a můžeme použít Lebesgueovu větu . $\|$

$$\boxed{4{,}8. \text{ Dokažte, že } \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n}\, e^{-x} \cos x\,dx = 0 \text{ !}}$$

$\|$ 1/ Limitní funkce je rovna nule na $(0,+\infty)$.

2/ Použijte Lebesgueovu větu a využijte vztahů:

a/ $n \in N$, $x \in (0,+\infty) \Longrightarrow \frac{\log(x+n)}{n} < \frac{x+n}{n} \leq 1+x$

b/ $e^{-x}(1+x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ $\|$.

$$\boxed{4{,}9. \text{ Buď } 0 < A < +\infty \text{ , potom } \lim_{n\to\infty} \int_0^A \frac{e^{x^3}}{1+nx}\,dx = 0 .}$$

$\|$ Použijte Lebesgueovu i Leviho větu, využijte vztahu

$$x \in (0,A) \;,\; n \in N \Rightarrow \frac{e^{x^3}}{1+nx} \leq e^{x^3} \in \mathcal{L}_{(0,A)} .$$ $\|$

Ne vždy je pravda, že

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{na } M \Longrightarrow \int_M f_n \longrightarrow \int_M f$$

Uveďme příklady

$\boxed{4{,}10.}$ Definujme pro každé $n \in N$ funkci f_n na $\langle 0,1\rangle$ takto:

$f_n(x) = n \sin(\pi n x)$ pro $x \in \langle 0, \frac{1}{n})$,

$f_n(x) = 0$ pro $x \in \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Potom a/ $f_n \longrightarrow 0$ v $\langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 f_n = \frac{2}{\pi}$, $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

Může být $f_n \rightrightarrows 0$ v $\langle 0,1\rangle$?

4,11. Definujme funkce f_n na $\langle 0,1\rangle$ jako v př. 4,10 ,

položme $g_n = (-1)^n \cdot f_n$ v $\langle 0,1\rangle$.

Potom: a/ $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ v $\langle 0,1\rangle$, tedy $\int_0^1 \lim g_n = 0$,

b/ $\int_0^1 g_n = \frac{(-1)^n\, 2}{\pi}$, tedy $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n$ neexistuje .

Jak je to se stejnoměrnou konvergencí posloupnosti g_n na $\langle 0,1\rangle$?

4,12°. Nalezněte posloupnost spojitých a nezáporných funkcí f_n definovaných v E_1 tak, aby

a/ $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ v E_1 ,

b/ $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$ neexistovala.

4,13°. Nalezněte posloupnost spojitých a nezáporných funkcí f_n definovaných v E_1 tak, aby

a/ $f_n \searrow 0$ v E_1 ,

b/ $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n \neq 0$.

Zřejmě v tomto případě vždy bude existovat $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$ (proč ?), lze najít f_n tak, aby $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n$ byla konečná ?

[Nelze, to by byl spor s Leviho větou - odůvodněte !]

4,14. V dalším se budeme zabývat limitami integrálů "závislých" na parametru. Buď $f(x,\alpha)$ funkce dvou reálných proměnných x), předpokládejme, že pro určité hodnoty α existuje $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ (přesněji - existuje integrál $\int_M f^{*,\alpha}(x)\,dx$; použijeme však prvního, byť ne zcela korektního označení). Je vidět, že hodnota integrálu $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ závisí obecně na volbě parametru α (a též pochopitelně na funkci f a množině M), tedy $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ je vlastně funkce proměnné α , značme

$$F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx \, .$$

Souborem otázek, kterými se budeme zabývat, je, jak vlastnosti funkce F závisejí na vlastnostech funkce f . Abychom mohli vůbec mluvit o funkci F , musíme určit, pro jaké hodnoty parametru α existuje $\int_M f(x,\alpha)dx$ a je konečný. Tímto jsme se zabývali v 3.kapitole, kdy jsme určovali, do jakého systému daná funkce patří. Dále nás zajímá, za jakých podmínek existuje $\lim_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha)$, kdy je funkce F spojitá, kdy existuje $F'(\alpha)$,

---

x/ Obecně funkcemi více proměnných a případem, kdy parametr α probíhá body nějakého metrického prostoru, se zabývá kniha V.Jarníka, „Integrální počet II".

kdy $\int_a^b F(\alpha)\, d\alpha$ a pochopitelně, jak se dá limita, derivace či integrál funkce F počítat. Otázkou výpočtu limity $\lim_{\alpha \to \alpha_0} F(\alpha)$ se budeme zabývat v tomto paragrafu, ostatními otázkami až v šesté kapitole.

Zopakujte si znovu Leviho a Lebesgueovu větu, které budeme v dalším používat. Rovněž tak si připomeňte následující věty (Heine):

1/ Buďte $c, A \in E_1^*$, nechť funkce f je definována v jistém redukovaném okolí bodu c. Potom

$\lim_{x \to c} f(x) = A \iff$ pro libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \neq c$, $\alpha_n \to c$, (pro kterou je definováno $f(\alpha_n)$) jest $\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n) = A$.

(Vyslovte též obdobnou větu pro jednostranné limity! a uvědomte si význam této věty).

2/ Nechť funkce f je definována v intervalu (a,b), buď $A \in E_1^*$. Potom

$\lim_{x \to b_-} f(x) = A \iff$ pro libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \neq b$, $\alpha_n \nearrow b$ jest $\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n) = A$.

V čem spočívá rozdíl obou vět?

Uveďme nyní jednoduchý příklad.

4,15. Vyšetřujte $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx$!

1/ Ukažte, že $e^{-\alpha x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \iff \alpha \in (0,+\infty)$, viz př. 3,32. "Definičním oborem" funkce F jest tedy interval $(0,+\infty)$.

2/ Spočteme $\lim_{\alpha \to 0_+} F(\alpha)$.

Zvolme tedy libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \searrow 0$ a pro každé $x \in (0,+\infty)$ a každé n $(n = 1,2,3,\dots)$ položme

$$f_n(x) = e^{-\alpha_n x^2} .$$

Zřejmě $f_n \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ (proč?), $f_n > 0$ v $(0,+\infty)$, dále pro každé $x \in (0,+\infty)$ jest $f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq f_3(x) \leqq \dots$.

Odtud podle Leviho věty dostáváme (prověřte detailně!),

že

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx \text{, tedy}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty e^{-\alpha_n x^2} dx = \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} e^{-\alpha_n x^2} dx = \int_0^\infty 1\, dx = +\infty .$$

Podle předešlé poznámky je tudíž

$$\lim_{\alpha \to 0_+} F(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0_+} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx = +\infty .$$

Mohli jsme při výpočtu $\lim_{\alpha \to 0_+} F(\alpha)$ použít též Lebesgueovu větu?

3/ Dokážeme, že $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$.

a/ Zvolme libovolnou posloupnost α_n , $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \longrightarrow +\infty$ (nemusí být monotonní!), předpokládejme například, že $\alpha_n \geq 7$ (proč to můžeme předpokládat?). Položme opět

$$f_n(x) = e^{-\alpha_n x^2} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty)\ , \ n = 1,2,\dots$$

Zřejmě opět $f_n \in \mathcal{L}^{R}_{(0,+\infty)}$ (proč?) a pro každé $n \in N$ a každé $x \in (0,+\infty)$ platí $0 \leq f_n(x) \leq e^{-7x^2}$.

Protože $e^{-7x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (odůvodněte jako v př. 3,32), jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \text{ , tedy}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha_n x^2} dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} e^{-\alpha_n x^2} dx = \int_0^\infty 0\, dx = 0 .$$

Opět vidíme, že $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = 0$.

b/ Použijte při důkazu vztahu $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$ Leviho větu.

4/ Výsledek porovnejte se cvičením 5,84 b , podle kterého je

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{pro } \alpha \in (0,+\infty) .$$

5/ Při důkazu $\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0$ můžeme též použít nerovnosti

$$\alpha \in (0,+\infty)\ ,\ x \in (0,+\infty) \implies e^{-\alpha x^2} \leq e^{-\alpha(2x-1)} \text{(viz př. 3,32)}.$$

Postup při výpočtu shora uvedených limit nás vede ke dvěma následujícím větám, které si snadno sami dokážete.

$\boxed{4{,}16^\circ}$ Viz též V.Jarník, Integrální počet II, věta 106).

Buď $M \subset E_1$ měřitelná množina, buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce $f(x,\alpha)$ je definována v $M \times (a,b)$.

Nechť platí:

1/ Pro sk.vš. $x \in M$ existuje $\lim_{\alpha\to b_-} f(x,\alpha) = \varphi(x)$,

2/ pro každé $\alpha \in (a,b)$ je $f^{*,\alpha} \in \Lambda_M$ (tj. nepřesněji - funkce $f(x,\alpha)$ jakožto funkce x je měřitelná v M),

3/ existuje funkce $g \in \mathcal{L}_M$ tak, že nerovnost

$|f(x,\alpha)| \leq g(x)$ je splněna pro všechna $\alpha \in (a,b)$ a pro sk.vš. $x \in M$.

Potom je $\varphi \in \mathcal{L}_M$ a platí

$$\lim_{\alpha\to b_-} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \varphi(x)\,dx .$$

(Je-li $b = +\infty$, rozumíme pochopitelně symbolem $\alpha \to b_-$ symbol $\alpha \longrightarrow +\infty$). Vyslovte obdobnou větu pro limitu zprava!

4,17. (Viz též V. Jarník, Integrální počet II. str. 300).

Buď $M \subset E_1$ měřitelná množina, buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, nechť funkce $f(x,\alpha)$ je definována v $M \times (a,b)$.

Nechť platí:

1/ pro sk.vš. $x \in M$ existuje $\lim\limits_{\alpha \to b_-} f(x,\alpha) = \psi(x)$,

2/ pro každé $\alpha \in (a,b)$ je $f^{*\mu} \in \mathcal{L}_M^{\mathcal{R}}$

3/ pro sk.vš. $x \in M$ je $f(x,\alpha) \leq f(x,\beta)$, kdykoliv $a < \alpha \leq \beta < b$.

Potom je $\psi \in \mathcal{L}_M^{\mathcal{R}}$ a platí

$$\lim_{\alpha \to b_-} \int_M f(x,\alpha)\,dx = \int_M \psi(x)\,dx .$$

Důkazy těchto vět jsou vlastně jednoduchými důsledky Lebesgueovy a Leviho věty. Tyto věty si nemusíme pamatovat, v praxi můžete vždy postupovat jako v příkladu 4,15 - což nebylo vlastně nic jiného než důkazy vět 4,16 a 4,17 .

4,18. Spočtěte limity funkce $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ v krajních bodech jejího "definičního oboru".

$\|$ 1/ Zjistíme, že $\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx$ je konečný, právě když $s \in (0,+\infty)$. (Viz př. 3,43).

2/ Dokažte, že $\lim\limits_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$.

Zvolme libovolnou posloupnost s_n, $s_n \nearrow +\infty$. Potom

$x \in (0,1) \Rightarrow x^{s_1-1} e^{-x} \geq x^{s_2-1} e^{-x} \geq x^{s_3-1} e^{-x} \geq \ldots \geq 0$,

$x \in (1,+\infty) \Rightarrow 0 \leq x^{s_1-1} \cdot e^{-x} \leq x^{s_2-1} \cdot e^{-x} \leq x^{s_3-1} e^{-x} \leq \ldots$

Odtud je vidět, že nelze použít Leviho větu (posloupnost funkcí $x^{s_n-1} e^{-x}$ není monotonní v celém intervalu $(0,+\infty)$) ani Lebesgueovu větu $\left(\sup\limits_{n\in N} x^{s_n-1} e^{-x} = +\infty \text{ pro } x \in (1,+\infty)\right)$.

Nicméně lehko zjistíte (proveďte podrobně ! , pokud možno podle obou vět), že

$$\lim_{s\to+\infty} \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx = 0 , \quad \lim_{s\to+\infty} \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx = +\infty ,$$

tedy $\lim\limits_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$.

3/ Obdobně dokažte, že $\lim\limits_{s\to 0_+} \Gamma(s) = +\infty$. $\|$

4,19. Dokažte, že $\lim\limits_{\alpha\to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = -\infty$!

$\|$ Zvolte libovolnou posloupnost α_n, $\alpha_n \in (\frac{9}{10}, 1)$, $\alpha_n \nearrow 1$.

Potom $0 \geq \frac{1}{\log(\alpha_1 - \sin x)} \geq \frac{1}{\log(\alpha_2 - \sin x)} \geq \ldots$ pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

Podle Leviho věty (provádějte vše podrobně !) jest

$$\lim_{\alpha\to 1_-} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(\alpha - \sin x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\log(1-\sin x)} \quad \text{a}$$

poslední integrál je roven $-\infty$. ||

Lze v tomto příkladě též užít Lebesgueovu větu?

4,20. Ukažte, že $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = 0$ pro libovolné $a \in E_1$!

|| Zvolte posloupnost k_n , $k_n > 0$, $k_n \nearrow +\infty$. Ukažte, že posloupnost funkcí $e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}$ není monotonní v intervalu $(0,+\infty)$, nelze tedy užít přímo Leviho větu.

Zřejmě však platí

$$\left| e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| \leq e^{-k_1 x} \frac{|\sin ax|}{x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

tedy Lebesgueova věta dává

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-k_n x} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} e^{-k_n x} \cdot \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} 0\, dx = 0 .$$

Příklady tohoto druhu však nemusíme vždy řešit automaticky pomocí Leviho či Lebesgueovy věty, leckdy můžeme postupovat přímo.

Ke příkladu, položíme-li $C(a) = \max_{x\in(0,+\infty)} \frac{|\sin ax|}{x}$ pro $a \in E_1$,

jest

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax}{x}\, dx \right| \leq \int_0^{\infty} \left| e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x} \right| dx \leq C(a) \int_0^{\infty} e^{-kx}\, dx = \frac{C(a)}{k} ,$$

odkud snadno plyne naše tvrzení . ||

4,21. Dokažte, že $\lim_{\alpha\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx = 0$!

|| 1/ Ukažte, že $\frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \Leftrightarrow \alpha \in \langle 0,+\infty)$.

2/ použijte Lebesgueovu i Leviho větu ,

3/ využijte též odhadu

$$0 \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\, dx \leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \quad . ||$$

4,22. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n}\, dx = 1$!

|| 1/ Použijte Lebesgueovu větu a vztahu

$$n \geq 1,\ x \in (0,+\infty) \Longrightarrow e^{-x^n} \leq \phi(x) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

kde $\phi(x) = 1$ pro $x \in (0,1\rangle$, $\phi(x) = e^{-x}$ pro $x \in (1,+\infty)$,

2/ použijte Leviho větu - tuto nemůžete použít přímo na celý interval $(0,+\infty)$, ale lehko ji lze aplikovat zvláště na intervaly $(0,1)$ a $(1,+\infty)$, zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{-x^n}\,dx = 1 \, , \quad \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty e^{-x^n}\,dx = 0 \, . \, \|$$

4,23. Řešte následující příklady .

1/ Zkoumejte, zda lze provést limitní přechod za integračním znamením v následujících příkladech (tj. zkoumejte, zda platí

$$\int_M \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n \,) \quad :$$

a/ $f_n(x) = 1$ pro $x \in (n,+\infty)$, $f_n(x) = 0$ jinde v E_1 , $M = E_1$,

b/ $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $M = \langle 0,1\rangle$,

c/ $f_n(x) = n\, x^{-nx^2}$, $M = (0,1)$,

d/ $f_n(x) = nx\, e^{-nx^2}$, $M = (0,1)$, $(1,+\infty)$, $(0,+\infty)$

2/ Spočítejte následující limity:

a/ $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \sin x\,dx$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \int_0^\infty e^{-xy} \cos x\,dx$,

b/ $\lim\limits_{a\to 0_+} \int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$,

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\,dt$, 3/ Ukažte, že

$$\lim_{a\to 0_+} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2ax) \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \sin x \, dx .$$

4/ Buď $f \in \mathcal{L}_M$, $\varphi \in \Lambda_M$, potom

$$\lim_{n\to+\infty} \int_M f(x) \,.\, \operatorname{arctg}\left[n\,\varphi(x)\right] dx = \int_M f(x) \,.\, \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}\left[n\,\varphi(x)\right] dx .$$

Dokažte ! Čemu je rovna poslední limita ?

5/ Buď $M = \left\{[x,y] \in E_2 \;;\; x \in (0,2) \;,\; y \in \langle 0,1\rangle\right\}$. Potom

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_M \operatorname{arctg} n\,(x^2 - y^2)\, dxdy = \frac{\pi}{2} .$$

6/ Buď K množina všech racionálních čísel intervalu $(0,1)$, nechť $K = \{ r_1 , r_2 , r_3 , \dots \}$. Označme $K_n = \{r_1,\dots,r_n\}$, $f_n = c_{K_n}$ /f_n je tedy charakteristická funkce množiny K_n /. Buď D Dirichletova funkce v intervalu $(0,1)$ /viz 2,31/. Dokažte, že

a/ $f_n \in Z^K$,

b/ $f_n \nearrow D$ v $(0,1)$,

c/ funkce f_n jsou spojité v E_1 až na konečný počet bodů, existují tedy $(R)\int_0^1 f_n$, $(ZN)\int_0^1 f_n$,

d/ $(R)\int_0^1 f_n = (ZN)\int_0^1 f_n = 0$,

e/ neexistují $(R)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$, $(ZN)\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$.

Lze použít v tomto případě Leviho větu pro Lebesgueovy integrály, tj. platí $\lim_{n\to\infty} (L)\int_0^1 f_n = (L)\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$?

Může být $f_n \in Z^R$?

7/ Předpokládejme, že funkce f_n /n = 1,2,.../ i funkce f jsou riemannovsky integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ /tj. existují $(R)\int_a^b f_n$, $(R)\int_a^b f$ /. Předpokládejme, že existuje $K \in E_1$ tak, že $|f_n(x)| \leq K$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ a každé $n \in N$. Nechť dále $f_n \to f$ na $\langle a,b\rangle$.

Platí potom, že

$$(R)\int_a^b f_n \longrightarrow (R)\int_a^b f \quad ?$$

Co lze říci v případě, vynecháme-li předpoklad existence $(R)\int_a^b f$?

8/ Nechť f_n jsou spojité funkce v intervalu $\langle 0,1\rangle$,

95335 P5

$f_n \rightrightarrows f$ v $\langle 0,1\rangle$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n = \int_0^1 f \ .$$

Dokažte ! Lze větu zobecnit ?

9/ Nechť $f_n \sim 0$ v množině M , $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ v M . Potom $f \sim 0$ v M . Dokažte !

10/ Nechť f_n , $f \in \mathcal{L}_M$, $\int_M |f_n - f| \longrightarrow 0$. Potom $\int_M f_n \longrightarrow \int_M f$, dokažte !

$$\left[\ \left|\int_M f_n - \int_M f\right| = \left|\int_M f_n - f\right| \le \int_M |f_n - f| \ .\ \right]$$

V dalším se budeme zabývat integrací řady funkcí. Nechť na množině M je dána řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, nechť pro každé $x \in M$ existuje součet $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ (konečný nebo nekonečný), označme $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ na M . Budeme se zabývat otázkou, za jakých předpokladů je

$$\int_M v = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n \ , \quad \text{tj.}$$

kdy platí $\int_M \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n$.

Máme opět k disposici hlavně věty 21 (Leviho), 22 (Lebesgueova) a větu 23. Opět si uvědomte, že věta 23 je důsledek věty 22 !

4,24.	Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$!

[1/ Nejdříve vždy zkoumejte existenci tohoto integrálu (jako cvičení, neboť pro vlastní použití vět 21 - 23 je to zbytečné). Ukažte, že tento integrál existuje jako Riemannův.

2/ Pro $x \in (0,1)$ jest

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(rozvoj funkce $\log(1+x)$; tento rozvoj odvoďte

a/ pomocí Taylorova rozvoje,

b/ ze vztahu $\left[\log(1+x)\right]' = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$)

tedy $\dfrac{\log(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{1+n}$

3/ Položte $v_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ a ukažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ konverguje stejnoměrně na intervalu $(0,1)$. K důkazu tohoto tvrzení použijte například Dirichletova kriteria, kde položíte

$$a_n(x) = (-1)^n \ , \quad b_{n}(x) = \frac{x^n}{n+1} \quad \text{pro } x \in (0,1) \ ;$$

musíme ověřit, že

a/ $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq 0$ pro $x \in (0,1)$,

b/ funkce b_1 je omezená na $(0,1)$,

c/ $b_n \rightrightarrows 0$ v $(0,1)$ (odhad $|b_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$!),

d/ existuje takové $C > 0$, že

$$\left| \sum_{n=0}^{K} a_n(x) \right| \leq C \text{ pro všechna } x \in (0,1) \text{ a všechna } K \in N .$$

4/ Použitím věty 23 dostáváme tedy

a/ $\frac{\log(1+x)}{x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$,

b/ $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n+1} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

a použijeme-li výsledku cvičení 5,85 , dostáváme

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} \, dx = \frac{\pi^2}{12} \ . \ \|$$

4,25. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} \, dx = -\frac{\pi^2}{6}$!

1/ Jako cvičení ukažte přímo, že integrál konverguje.

2/ Ukažte, že platí

$$x \in (0,1) \implies \frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^{n-1}}{n} \ .$$

3/ Použijte Leviho větu 21 (předpoklady podrobně ověřte!), dostáváte tvrzení

a/ $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathcal{L}^{K}_{(0,1)}$,

b/ $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$,

použijeme-li opět výsledku z př. 5,85 . $\|$

(Zároveň jsme tím ukázali, že $\frac{\log(1-x)}{x} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$) .

4,26. Ukažte, že $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1}\,dx$ konverguje !

1/ Dokažte přímo metodami jako v 3. kapitole.

2/ Ukažte, že platí

$$x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{-x}}\right) = xe^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(n+1)x} ,$$

tedy podle Leviho věty (proveďte podrobně !)

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx .$$

Jak nyní spočítáme $\int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx$?

Víme, že existuje jako Lebesgueův (proč?), lehko jej spočítáme podle věty o integraci per partes (věta 70 - uvědomte si, že nemáme k disposici větu o integraci per partes pro Lebesgueovy integrály!) jako Newtonův, tedy

$$(L) \int_0^\infty xe^{-(n+1)x}\,dx = (N) \int_0^\infty x\, e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{1}{(n+1)^2} .$$

Konečně tedy dostáváme - opět s použitím př. 5,85

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

Tím jsme ukázali konvergenci tohoto integrálu a navíc jej i spočítali.

4,27. Dokažte, že $\int_0^\infty \frac{xdx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$!

1/ Opět nejdříve ukažte - čistě jako cvičení - že

$$\frac{x}{e^x + 1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

2/ Jako v minulém příkladu ukažte, že

$$x \in (0, +\infty) \Rightarrow \frac{x}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, xe^{-(n+1)x} .$$

Leviho větu nyní použít nemůžeme (proč?), ověříme, že jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty 22 :

a/ $(-1)^n \cdot x\, e^{-(n+1)x} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$ (proč?) , b/ potřebujeme odhadnout částečný součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x\, e^{-(n+1)x}$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x\, e^{-(n+1)x}\right| \leq \sum_{n=0}^{N}\left|(-1)^n x\, e^{-(n+1)x}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-(n+1)x}$$

(důkladně si tento obrat promyslete !).

Avšak podle minulého cvičení víme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-(n+1)x} = \frac{x}{e^x - 1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} .$$

Volíme-li tedy $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, jsou splněny předpoklady Lebesgueovy věty a jest

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (-1)^n x\, e^{-(n+1)x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{12} \; .\|$$

4,28. Buď $q > 0$, $p > 0$, potom $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p + nq}$!

‖ 1/ Je-li $q > 0$, potom integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 + x^q}\, dx$

konverguje, právě když $p > 0$. Dokažte přímo jako cvičení !

2/ Použijte následující úpravy

$$\frac{x^{p-1}}{1 + x^q} = (1 - x^q) \cdot x^{p-1} \cdot \frac{1}{1 - x^{2q}} = (1-x^q)x^{p-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2nq}$$

a Leviho věty (proveďte podrobně !) .

3/ Zkusme daný integrál spočítat pomocí Lebesgueovy věty.

Pro $x \in (0,1)$ platí

$$\frac{x^{p-1}}{1 + x^q} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{p-1+nq} .$$

Potřebujeme hlavně odhadnout částečné součty, pokusme se o to stejně jako v minulém příkladě 4,27 , dostáváme

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{p-1+nq}\right| \leq \sum_{n=0}^{N}\left|(-1)^n x^{p-1+nq}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1+nq} = \frac{x^{p-1}}{1 - x^q}$$

položíme-li nyní pro $x \in (0,1)$ $\quad g(x) = \dfrac{x^{p-1}}{1 - x^q}$, je

sice funkce g majoranta pro částečné součty, ale není již $g \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ (ukažte!) .

Je to způsobeno tím, že náš odhad byl příliš "hrubý", odhadněme proto částečné součty "jemněji".

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{p-1+nq}\right| = \left|x^{p-1}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n . x^{nq}\right| = \left|x^{p-1} . \frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q}\right| \leqq$$

$$\leqq x^{p-1}\frac{2}{1+x^q}$$

a poslední funkce již leží v systému $\mathcal{L}_{0,1)}$.

Můžeme tedy použít Lebesgueovu větu,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+nq} . \rfloor\!|$$

4,29. Poznámky k příkladu 4,28:

1/ Ukažte, že funkce $\frac{x^{p-1}}{1-x^q} \in \mathcal{L}^R(0,1) - \mathcal{L}(0,1)$.

a/ Dokažte toto tvrzení přímo,

b/ dokažte tvrzení též pomocí Leviho věty:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^q}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1+nq}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p-1+nq}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p+nq} = +\infty . \rfloor\!|$$

2/ Zkusme do daného integrálu a řady dosadit určité hodnoty p,q - dostáváme:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots \qquad (p=q=1) ,$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots \qquad (p=1,\ q=2).$$

3/ Ukažte, že $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{p-1+nq}$ nekonverguje stejnoměrně v $(0,1)$, nemohli jsme tudíž užít větu 23

kdyby daná řada konvergovala stejnoměrně v $(0,1)$ musela by konvergovat řada $\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1_-}(-1)^n x^{p-1+nq} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. $\rfloor\!|$

4,30. Dokažte, že $\int_0^{\infty} e^{-x} . \cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . \frac{n!}{(2n)!}$!

1/ Lehko ukážete, že integrál konverguje.

2/ Použijte vztahu

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n . \frac{y^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{pro } y \in E_1$$

a ukažte, že

$$e^{-x} . \cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-x} . \frac{x^n}{(2n)!} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty).$$

3/ Použijte Lebesgueovu větu, jest

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!} \;.$$

Položte $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}$ a ukažte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

(poslední tvrzení plyne například z Leviho věty -

$$\int_0^{\infty} g(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$$

a poslední řada konverguje, jak zjistíte lehko např. pomocí d'Alembertova kriteria anebo odhadem $\frac{n!}{(2n)!} \leq 2^{-n}$) .

$$\text{Tedy}\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}(-1)^n e^{-x}\cdot\frac{x^n}{(2n)!}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n!}{(2n)!}\;,$$

kde jsme použili, že $\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot x^n\,dx = n\,!$ (odůvodněte!) ‖

4,31. ^{0} Poznámka.

Funkci g pro použití Lebesgueovy věty jsme hledali v příkladech 4,27, 4,28 a 4,30 ve tvaru $g = \sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$. Bylo-li $g \in \mathcal{L}_M$, mohli jsme použít Lebesgueovu větu, vyšlo-li $\int_M g = +\infty$ (např. v 4,28), museli jsme volit lepší "jemnější" odhad či postupovat jinak. Používáme tedy vlastně tuto větu (viz větu 3,5 skript Černý - Mařík):

"Buďte $v_n \in \Lambda_M$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_M|v_n| < +\infty$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ konverguje absolutně sk.vš., $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \in \mathcal{L}_M$ a $A_M\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_M v_n$."

Dokažte ji !

4,32. Ukažte, že $\int_0^1 x^p\cdot\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{(p+1)^2}$ pro $p+1>0$.

‖ Lehko zjistíte, že integrál existuje jako Lebesgueův, pomocí věty o integraci per partes pro Newtonovy integrály jej pak spočítáte jako Newtonův . ‖

4,33. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$!

‖ 1/ Substitucí (ať již použijete větu pro Lebesgueovy či Newtonovy integrály) se převede na integrál z př. 4,25 . Proveďte detailně !

2/ Integrál spočtěte též pomocí Leviho věty, vztahu

$$\frac{\log x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \log x \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1)$$

a příkladu 4,32 . ||

4,34. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1-x}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1-x}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2^2}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1+x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1+x}\,dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$,

e/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1+x}\,dx = \frac{\pi^2}{12} - 1 + \frac{1}{2^2}$!

4,35. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \log \frac{1}{1-x}\,dx = 1$

|| 1/ Integrál spočtěte jako Newtonův - per partes.

2/ Použijte též Leviho větu a vztah

$$\log \frac{1}{1-x} = -\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{pro} \quad x \in (0,1).$$

Nezapomeňte, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \;||$$

4,36. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x.\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{24}$,

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2.\log \frac{1}{x}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{8} - 1$!

Ve všech příkladech použijte

1/ rozvoj funkce $\frac{1}{1-x^2}$, Leviho větu a příklad 4,32 ,

2/ anebo vztahu

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \quad \text{a}$$

výsledků příkladů 4,33 a 4,34 .

4,37. Dokažte, že $\int_0^1 \log x \cdot \log(1-x)\, dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Použijte Leviho větu, dostanete

$$\int_0^1 \log x \cdot \log(1-x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 x^k \cdot \log x \, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

4,38. Dokažte, že $\int_0^1 \log x \cdot \log(1+x)\, dx = 2 - 2\log 2 - \frac{\pi^2}{12}$

Použijte vztahu

$$x \in (0,1) \Rightarrow \log x \cdot \log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \cdot \log x \, .$$

1/ Dále použijeme Lebesgueovu větu (či vztahu z poznámky 4,31), dostáváme

$$\left| \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \cdot \log x \right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \cdot \log x = \log x \cdot \log(1-x) \in$$

$$\in \mathcal{L}_{(0,1)}$$

(podle příkladu 4,37) anebo

2/ použijeme větu 23 - ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{x^k}{k} \cdot \log x$ konverguje stejnoměrně v $(0,1)$. K důkazu posledního tvrzení použijte Dirichletova kriteria, kde položíte

$$a_n(x) = (-1)^n \quad , \qquad b_n(x) = -\frac{x^n}{n} \cdot \log x \, ,$$

anebo použijte Weierstrasova kriteria

(ukažte, že $\left| (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \cdot \log x \right| \leqq \frac{1}{k^2}$ v $(0,1)$) .

V každém případě obdržíte, že

$$\int_0^1 \log x \cdot \log(1+x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot (k+1)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) . (-1)^k = 2 - 2\log 2 - \frac{\pi^2}{12} ,$$

kde jsme použili výsledků z př. 4,29 a 5,85 .‖

4,39. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 x.\log x . \log(1-x)\, dx = 1 - \frac{\pi^2}{12}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 x.\log x . \log(1+x)\, dx = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}$.

4,40. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+k+1)^2}$ pro $p \in (-1,+\infty)$.

‖ 1/ Ukažte, že integrál pro $p > -1$ konverguje.

2/ Použijte Leviho větu, rozvoj funkce $\frac{1}{1-x}$ a příklad 4,32 .‖

4,41. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(p+k+1)^2}$ pro $p \in (-1,+\infty)$.

‖ 1/ Ukažte, že integrál pro $p > -1$ konverguje.

2/ Použijte Leviho větu a vztahu

$$\frac{x^p}{1+x} \log \frac{1}{x} = (1-x) . x^p . \log \frac{1}{x} . \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} .$$

3/ Použijte Lebesgueovu větu přímo, "hrubý" odhad částečného součtu řady $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k . x^{p+k} \log \frac{1}{x}$ dá majorantu $\frac{x^p}{1-x} \log \frac{1}{x}$, "jemnější" odhad dá majorantu $\frac{2x^p}{1+x} . \log \frac{1}{x}$, obojí lze užít .‖

4,42. Dokažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \log \frac{1}{x}\, dx = \frac{4\pi^2}{27}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \log \frac{1}{x}\, dx = \frac{2\pi^2}{27}$.

‖ a/ Můžeme použít rozvoje funkce $\frac{1}{1-x^3}$ pro $x \in (0,1)$ a Leviho větu, dostaneme

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1-x^3} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{3k} . \log \frac{1}{x}\, dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{3k+1} \cdot \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+2)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2}{6} .$$

b/ Můžete použít rozvoje funkce $\frac{1}{1+x^3}$, Lebesgueovu větu a výsledku bodu a/, dostanete

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x^3} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(3k+2)^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(3k)^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2}{12} .$$ ‖

4,43. Dokažte, že $\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2 \cdot \log 2$.

‖ 1/ Integrál spočtěte metodou integrace per partes jako Newtonův.

2/ Ze vztahů

$$\left[\log \frac{1+x}{1-x} \right]' = \frac{2}{1-x^2} , \quad \log 1 = 0$$

odvoďte, že

$$\log \cdot \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \qquad \text{pro } x \in (-1,1) ;$$

dále použijte Leviho větu, dostanete

$$\int_0^1 \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = 2 \log 2$$ (viz př. 4,29). ‖

4,44. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$.

‖ 1/ Použijte rozvoj funkce $\log \frac{1+x}{1-x}$ v intervalu $(0,1)$ jako v př. 4,43 a Leviho větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \log \frac{1+x}{1-x}\, dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$ (viz př. 4,85)

2/ Použijte vztahu

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$$

a výsledků příkladů 4,33 , 4,34 . ‖

4,45. Buď $p \in (0,+\infty)$, potom

$$a/ \int_0^1 \frac{\log(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p},$$

$$b/ \int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p},$$

$$c/ \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^p}\log.\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6p^2},$$

$$d/ \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p^2}$$

Příklady a,b/ jsou analogické k příkladům 4,24; 4,25, příklady c,d/ lehko odvodíte rozvojem funkcí $\frac{1}{1-x^p}$, $\frac{1}{1+x^p}$. Viz též př. 4,33, 4,34 /substituce $x^p = t$! / anebo př. 6,67

4,46. Dokažte, že

$$a/ \int_0^\infty \log(1-e^{-x})\,dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$b/ \int_0^\infty \log(1+e^{-x})\,dx = \frac{\pi^2}{12},$$

$$c/ \int_0^\infty \log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = -\frac{\pi^2}{4}$$

I/ Substitucí $e^{-x} = t$ převeďte dané integrály na integrály z příkladů 4,33 a 4,34.

II/ Příklad a/ řešte pomocí rozvoje funkce $\log(1-e^{-x})$ a Leviho věty, příklad b/ pomocí rozvoje funkce $\log(1+e^{-x})$ a Lebesgueovy věty a konečně příklad c/ pomocí rozvoje funkce $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ (viz obdobný příklad 4,43) a Leviho věty.

III/ V příkladu c/ použijte též vztahu $\log\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \log(1-e^{-x}) - \log(1+e^{-x})$.

4,47. Dokažte, že $\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ pro $|b| < a$.

1/ Jako cvičení ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (0,+\infty)$.

2/ Použijte rozvoje funkce sin v E_1 -

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, y^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro každé } y \in E_1 ,$$

$$\text{tedy} \quad e^{-ax} \, . \, \sin bx = e^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Dále použijte Lebesgueovu větu, odhadneme částečné součty, "hrubým" odhadem dostáváme

$$\left| \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \, . \, e^{-ax} \, . \, \frac{(bx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqq g(x), \text{ kde}$$

$$g(x) = e^{-ax} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|b| x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty) .$$

Použijte dále vztahů

$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-ax} \, . \, x^n \, dx = \frac{n}{a} I_{n-1} , \quad I_o = \frac{1}{a} ,$$

dostáváme

$$\int_0^{\infty} g(x) \, dx = \frac{|b|}{a^2} \, . \, \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|b|}{a}\right)^{2k} \qquad \text{(ověřte!)},$$

tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, právě když $|b| < a$ (proč?).
V tomto případě

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \, . \, \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} = \frac{b}{a^2+b^2} .$$

Při tomto způsobu výpočtu integrálu bylo nepříjemné omezení $|b| < a$.

3/ Integrál též spočtěte jako Newtonův pomocí dvojnásobné integrace per partes, jediná podmínka na parametry a,b bude při tomto způsobu výpočtu podmínka $a > 0$.

*4/ Pokuste se také spočítat integrál pomocí následujícího postupu:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \, . \, \sin bx \, dx = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{x(-a+ib)} \, dx = \operatorname{Im} \frac{1}{a-ib} = \frac{b}{a^2+b^2} \, . \, \|$$

4,48. Dokažte, že $$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \text{pro } |b| < a \quad !$$

‖ Volte stejný postup jako v minulém příkladě . ‖

4,49. Dokažte, že $$\int_0^{\infty} e^{-ax} \, . \, \frac{\sin bx}{x} \, dx = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \qquad \text{pro } |b| < a \quad .$$

‖ Postupujte stejně jako v př. 4,47, uvědomte si, že

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{pro} \quad y \in \langle -1, +1 \rangle .$$

Výpočet nám opět nedává nic v případě $|b| \geqq a > 0$,

viz též př. 6,22 . ‖

Obdobně jako u posloupností funkcí, nemusí být vždy pravda, že

$$\int_M \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_M v_n .$$

Uveďme příklad:

4,50°. Definujme funkce v_n na intervalu $(0,1)$ předpisem

$$v_n(x) = n x^{n-1} - (n+1) x^n ,$$

$$\text{buď} \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \text{na} \quad (0,1) .$$

Potom

a/ $v(x) = 1$ pro $x \in (0,1)$, tedy $\int_0^1 v(x)\,dx = 1$,

b/ pro každé $n \in N$ je $\int_0^1 v_n(x)\,dx = 0$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 v_n(x)\,dx = 0 .$$

Jako cvičení ukažte přímo, že

1/ $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ nekonverguje stejnoměrně v $(0,1)$

(uvažujte $\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 1-} v_n(x)$ a ukažte, že tato řada nekonverguje),

2/ nemůže být $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |v_n(x)|\,dx < +\infty$ - viz př. 4,31

(pro $x \in (0, \frac{n}{n+1})$ je $v_n > 0$ a

$$\int_0^1 |v_n(x)|\,dx \geqq \int_0^{\frac{n}{n+1}} v_n(x)\,dx = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \frac{1}{n+1} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1}) .$$

4,51. Řešte následující příklady

a/ $$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = -4$$

‖ **1/ Integrál spočtěte jako Newtonův.**

2/ Použitím Leviho věty a rozvoje funkce $\log(1-x)$ vyjde

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\frac{4}{3}\left(1+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}+\dots\dots\right),$$

srovnáním obou výsledků dostáváme vzorec

$$1+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}+\dots\dots = 3 \quad .\|$$

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^{p-1}}{1-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}\right)$ pro $p\in(0,+\infty)$.

c/ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cdot(1-e^{-ax})\cdot x^{-1}\,dx = \log(1+a)$ pro $a\in(-1,+1)$

‖ 1/ Integrál konverguje pro $a\in(-1,+\infty)$.

2/ Ze vztahu

$$\frac{1-e^{-ax}}{x\,e^{x}} = e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{a^n}{n!}\,x^n$$

dostáváme použitím Lebesgueovy věty – pouze pro $a\in(-1,+1)$! – výsledek . ‖

*d/ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cdot\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{b^2}{a}}$ pro $a\in(0,+\infty)$, $b\in E_1$.

‖ 1/ Integrál konverguje pro $a\in(0,+\infty)$, $b\in E_1$.

2/ Ze vztahů

a/ $\displaystyle e^{-ax^2}\cdot\cos 2bx = e^{-ax^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(2bx)^{2n}}{(2n)!}$

b/ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}x^{2n}\,dx = \frac{2n-1}{2a}\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cdot x^{2n-2}\,dx$,

c/ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ (Laplaceův integrál, viz př. 5,84 b),

pomocí Lebesgueovy věty plyne výsledek

Viz též př. 6,49 . ‖

*e/ $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{e^x-1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{a^2+k^2}$ pro každé $a\in E_1$.

‖ Omezme se na $a\in(0,+\infty)$; pro každé $x\in(0,+\infty)$ jest

$$\frac{\sin ax}{e^x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}\cdot\sin ax .$$

Použijeme Lebesgueovu větu , odhadněme částečné součty:

1/ $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{N} e^{-kx}\cdot\sin ax\right| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \frac{1}{e^x-1}$, ale $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{e^x-1}\,dx = +\infty$ pro libovolné $\varepsilon > 0$,

musíme proto částečné součty odhadnout, "lépe" -

2/ $\left|\sum_{k=1}^{N} e^{-kx} \cdot \sin ax\right| \leqq ax \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx} = \frac{ax}{e^x-1} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

V tomto případě jsme užili odhadu $\sin ax \leqq ax$, který je sice "pro velká x příliš hrubý", ale nevadilo to. ||

4,52. Řešte následující příklady.

1/ Zkoumejte, zda lze integrovat řadu člen po členu (tj. zda

$$\sum_n \int_M u_n = \int_M \sum_n u_n \quad) \quad :$$

a/ $u_n(x) = a\, e^{-nax} - b\, e^{-nbx}$, $M = (0,+\infty)$,

b/ $u_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^p \cdot x}$ $p > 1$, $M = (0,1)$,

c/ $u_n(x) = (-1)^n \cdot x^n$, $M = (0,1)$,

d/ $u_n(x) = x^{n-1}(1 - x^{2n})$, $M = (0,1)$,

e*/ $u_n(x) = e^{-2nx} - e^{-\pi n^2 x^2}$, $M = (0,+\infty)$

2/ Ukažte, že

a/ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^5} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6k \cdot 2^{6k}}$,

b/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.n!}$

c/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1-x} \log \frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{3} - 1$,

d/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{1 + x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

e/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log \frac{1}{x}}{(1+x)^2}\, dx = \log 2$,

f/* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{dx}{\log x} = \log \frac{2}{\pi}$,

g/ $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\, e^{-x} \log \frac{1}{x}\, dx = 1 - e^{-1}$,

h/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$,

i/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax} - 1} = +\infty$ pro $a > 0$,

j/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^{ax} + 1} = \frac{\log 2}{a}$ pro $a > 0$

25535 F7

5. Míra množin, Fubiniova věta, substituční metoda

Znovu si uvědomte, že uvažujeme pouze případ $Z = C_r$, $Af = (R)\int_{E_r} f$, můžeme proto používat následující věty: věta 50, 51, 52, věta 58 /Fubiniova/, věta 59 /věta o substituci/.

Zopakujte si je !

Připomeňme ještě, že symbolem $\mathcal{M}_r$ označujeme systém všech měřitelných množin v E_r , symbolem μ_r r - rozměrnou Lebesgueovu míru v E_r .

Ze začátku této kapitoly si uveďme několik příkladů na jednorozměrnou míru v E_1 .

5,1. Nalezněte příklad množiny $A \in \mathcal{M}_1$ tak, aby

1/ A byla neomezená v E_1 , $\mu_1 A = 0$,

2/ A byla neomezená v E_1 , $\mu_1 A = 1$,

3/ A byla neomezená v E_1 , $A \neq E_1$, $\mu_1 A = +\infty$.

Ve všech případech - pokud to ovšem je možné - volte množinu A ještě tak, aby

a/ byla otevřená , b/ byla uzavřená ,

c/ nebyla ani otevřená ani uzavřená .

5,2. Sestrojte příklad posloupnosti množin $E_n \in \mathcal{M}_1$ tak, aby $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots\ldots$, $\mu_1 E_n < +\infty$ pro každé $n \in N$ a

1/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty$,

2/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < +\infty$.

5,3. Sestrojte příklad posloupnosti množin $E_n \in \mathcal{M}_1$ tak, aby $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots\ldots$, $\mu_1 E_n = +\infty$ pro každé $n \in N$ a

1/ $\mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = +\infty$,

2/ $\mu_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 3$, ,

3/ $\mu_1\left(\bigcap_{n=1} E_n\right) = 0$.

5,4. Je dána posloupnost nezáporných čísel a_n, buď $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Sestrojte příklad posloupnosti množin $E_n \in \mathfrak{M}_1$ /pokud to lze/ tak, aby $\mu_1 E_n = a_n$ a

1/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$,

2/ $0 < \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < a$,

3/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = a$,

4/ $\mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > a$.

5,5.° Buď $A \in \mathfrak{M}$, potom

$$\mu_1 A = \inf \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) ,$$

kde (a_n, b_n) jsou libovolné intervaly takové, že $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \supset A$ a infimum se bere přes všechny možné takovéto součty. Ukažte, že tvrzení zůstane v platnosti, budeme-li uvažovat jen disjunktní /anebo disjunktní omezené/ intervaly. Viz též dodatek D III.4.

⟦ Použijte větu 55 a tvrzení, že libovolnou neprázdnou otevřenou množinu v E_1 lze vyjádřit jako sjednocení spočetně mnoha disjunktních otevřených intervalů. ⟧

5,6. Ukažte, že množina všech racionálních čísel v E_1 je měřitelná a má míru nula.

⟦ a/ Viz větu 52 .

b/ Tvrzení dokažte přímo z definice - viz př. 2,31.

c/ Použijte též předchozího cvičení 5,5 . ⟧

5,7.* Věta 52 nám říká, že každá spočetná množina v E_1 je nulová.
Naskýtá se otázka, zda vůbec existuje nějaká nespočetná /zopakujte si definici spočetné a nespočetné množiny !/ množina v E_1 míry nula. Odpověď je positivní - uveďme si příklad.
Zaveďme následující označení /kreslete!/:

$$R_0 = \langle 0,1 \rangle ,$$

$$R_1 = \langle 0,1 \rangle - \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \langle 0, \tfrac{1}{3} \rangle \cup \langle \tfrac{2}{3}, 1 \rangle ,$$

$$R_2 = R_1 - \left[\left(\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right) \cup \left(\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right)\right] = \langle 0, \tfrac{1}{9} \rangle \cup \langle \tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3} \rangle \cup \langle \tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9} \rangle \cup$$
$$\cup \langle \tfrac{8}{9}, 1 \rangle, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{atd} .$$

máme-li již sestrojenou množinu R_n, dostaneme množinu R_{n+1} tak, že ze všech intervalů množiny R_n vynecháme prostřední třetiny /podejte přesnou definici pomocí matematické indukce !/.

Zřejmě

1/ $R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots\ldots$,

2/ R_n pro libovolné n je množina uzavřená .

Označme $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$, množina C se nazývá obyčejně <u>Cantorovo diskontinuum.</u>

Ukažte, že

3/ množina C je uzavřená

‖ C je průnik uzavřených množin ‖ ,

4/ $\mu_1 C = 0$

‖ množina $R_n \in \mathfrak{M}_1$ je disjunktním sjednocením 2^n intervalů délky $\frac{1}{3^n}$, tedy

$\mu_1 R_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, nyní se užije věta 17 ‖ ,

5/ libovolné číslo $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ lze psát ve tvaru

$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, kde $a_n = 0,1$ nebo 2 /rozvoj čísla α v "trojkové" soustavě/, tento rozvoj je jednoznačný, požadujeme-li, aby

$$\alpha > \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n} \text{ pro každé přirozené } k ,$$

6/ $x \in C \iff x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, kde $a_n \neq 1$ pro každé $n \in N$,

7/ množina C je nespočetná

‖ libovolnému $x \in C$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ přiřaďme bod $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ a ukažte, že množina $\{ \varphi(x) ; x \in C \}$ je nespočetná ‖,

8/ Množina C je řídká , tj. vnitřek množiny C je prázdná množina - anebo ekvivalentně - doplněk množiny C v $\langle 0,1 \rangle$ je množina hustá v $\langle 0,1 \rangle$.

Viz též V. Jarník, Diferenciální počet II .

$\boxed{5,8.^{\circ}}$ Buď $G \subset E_1$ otevřená množina , $\mu_1 G = 0$. Potom $G = \emptyset$. Dokažte !

‖ Nechť $x \in G$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(x - \delta , x + \delta) \subset G$ /odůvodněte!/ .

Tedy $\mu_1 G \geq \mu_1 (x - \delta , x + \delta) = 2\delta$. ‖

5,9° Buď $F \subset \langle 0,1\rangle$ uzavřená množina, $\mu_1 F = 1$. Potom $F = \langle 0,1\rangle$, dokažte !

[Použijte předchozí cvičení a větu 15.]

5,10° Ukažte, že platí /nemusí se ani jednat o množiny v E_1/:

a/ M nulová $\Longrightarrow M \in \mathfrak{M}$,

b/ $M_1 \subset M$, M nulová $\Longrightarrow M_1$ nulová.

5,11° Ukažte, že platí:

$$A \in \mathfrak{M}\ ,\ M \text{ nulová } \Longrightarrow A - M \in \mathfrak{M},\ \mu A = \mu(A - M).$$

[Podle věty 13 a cvičení 5,10 a/ jest $A - M \in \mathfrak{M}$, dále použijte vztahu $A = (A - M) \cup (A \cap M)$, větu 15 a cvičení 5,10b.]

5,12° Nechť $A \in \mathfrak{M}$, M nulová, $f \in \mathcal{L}^*_A$. Potom $f \in \mathcal{L}^*_{A-M}$ a $\int_{A-M} f = \int_A f$. Dokažte !

[Použijte cvičení 5,11, větu 24 a větu 26.]

5,13° (Důležité !!).

Ukažte, že Fubiniovu větu lze užít v následujících speciálních případech:

I/ množina $M \subset E_{r+s}$ je otevřená nebo uzavřená, funkce f je spojitá a nezáporná (resp. nekladná) na M,

II/ množina $M \subset E_{r+s}$ je otevřená nebo uzavřená a omezená, funkce f je spojitá a omezená na M.

[V obou případech lehko ukážete, že $f \in \mathcal{L}^*_M$.]

5,14. Označení:

Buď f funkce dvou proměnných, $f \in \mathcal{L}^*_M$. Potom budeme značit

$$A_M f = \iint_M f = \iint_M f(x,y)\,dx\,dy$$

a tento integrál budeme nazývat dvojným integrálem funkce f přes množinu M.

Nechť M_x znamená průmět množiny M do osy x, tj.

$$M_x = \{ x \in E_1 ;\ \text{existuje } y \in E_1 \text{ tak, že } [x,y] \in M \}.$$

Potom podle Fubiniovy věty je pro sk.vš. $x \in E_1$ $f^{x,*} \in \mathcal{L}^*_{M^{x,*}}$ a označíme-li $F(x) = \int_{M^{x,*}} f^{x,*}$, je $F \in \mathcal{L}^*_{M_x}$ a $\iint_M f = \int_{M_x} F$.

Můžeme tedy psát, že

$$\iint_M f = \int_{M_x} \Big(\int_{M^{x,*}} f^{x,*} \Big) = \int_{M_x} \Big(\int_{M^{x,*}} f^{x,*}(y)\,dy \Big) dx \,.$$

Zřejmě též

$$\iint_M f = \int_{M_y} \Big(\int_{M^{*,y}} f^{*,y} \Big) = \int_{M_y} \Big(\int_{M^{*,y}} f^{*,y}(x)\,dx \Big) dy \,,$$

kde $M_y = \{ y \in E_1 ,\ \text{existuje}\ x \in E_1\ \text{pro něž}\ [x,y] \in M \}$,

je průmět množiny M do osy y.

Poslední integrály budeme nazývat dvojnásobnými integrály funkce f přes množinu M.

V případě, že M_x je interval (a,b) a $M^{x,*}$ interval $(\varphi(x), \psi(x))$ - krajní body mohou pochopitelně záviset na x !! - pišme krátce místo

$$\int_{M_x} \Big(\int_{M^{x,*}} f^{x,*}(y)\,dy \Big) dx \quad \text{integrál} \quad \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^{x,*}(y)\,dy \Big) dx$$

a zpravidla se budeme dopouštět nekorektnosti a místo posledního integrálu budeme psát

$$\int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big) dx.$$

Jsou-li M_x, $M^{x,*}$ jiné intervaly než otevřené (uzavřené, polootevřené), ponechme stejné označení (viz poznámku 3,1).

Obdobná poznámka platí pro obrácené pořadí integrace.

Nakonec ještě připomeňme definici míry množiny:

je-li $M \subset E_2$, $M \in \mathcal{M}_2$, definujeme $\mu_2 M = \iint_M 1$;

podle předešlé poznámky a Fubiniovy věty je pro

$M_x = (a,b)$, $M^{x,*} = (\varphi(x) , \psi(x))$ či

$M_y = (c,d)$, $M^{*,y} = (\omega(y) , \eta(y))$,

$$\mu_2 M = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \Big) dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\,dx = \int_c^d \Big(\int_{\omega(y)}^{\eta(y)} dx \Big) dx =$$

$$= \int_c^d (\eta(y) - \omega(y))\,dy \,.$$

Stejná poznámka se týká i vícerozměrných integrálů, kde pak mluvíme o trojných či trojnásobných integrálech apod.

5,15. Buď $M = \{ [x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 = 7 \}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 0$. Dokažte !

‖ Nakreslete si obrázek množiny M !

Zřejmě $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$M_1 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ y = \sqrt{7 - x^2} ,\quad x \in \langle -\sqrt{7} , +\sqrt{7} \rangle \right\},$$

$$M_2 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ y = -\sqrt{7-x^2} ,\quad x \in \langle -\sqrt{7} , +\sqrt{7} \rangle \right\},$$

Podle věty 62 - ověřujte ! - je $M_1 \in \mathcal{M}_2$, $M_2 \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M_1 = \mu_2 M_2 = 0$. Nyní stačí použít větu 12 a 15 či faktu, že sjednocení spočetného systému nulových množin je množina nulová.

Viz též př. 5,103 . ‖

5,16. Buď $p \subset E_2$ libovolná přímka, potom $p \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 p = 0$. Dokažte!

‖ Nechť např. přímka p není rovnoběžná s osou y - v opačném případě pouze prohodíme osy - potom existuje lineární funkce f , $f(x) = ax + b$, v E_1 tak, že

$$p \equiv \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ y = ax + b ,\quad x \in E_1 \right\} .$$

Tedy opět podle věty 62 dostáváme, že p je nulová množina v E_2 . ‖

5,17. Buď $p \subset E_2$ libovolná přímka, $X \subset p$ libovolná podmnožina p . Potom X je nulová množina v E_2 . Dokažte !

‖ Při důkazu použijte cvičení 5,10 b) a 5,16 . ‖

Speciálně, je-li např. $X \subset E_1$ lebesgueovsky neměřitelná množina v E_1 , je množina $\left\{ [x,y] \in E_2 ;\ x \in X ;\ y = 0 \right\}$ vždy měřitelná (a nulová) v E_2 .

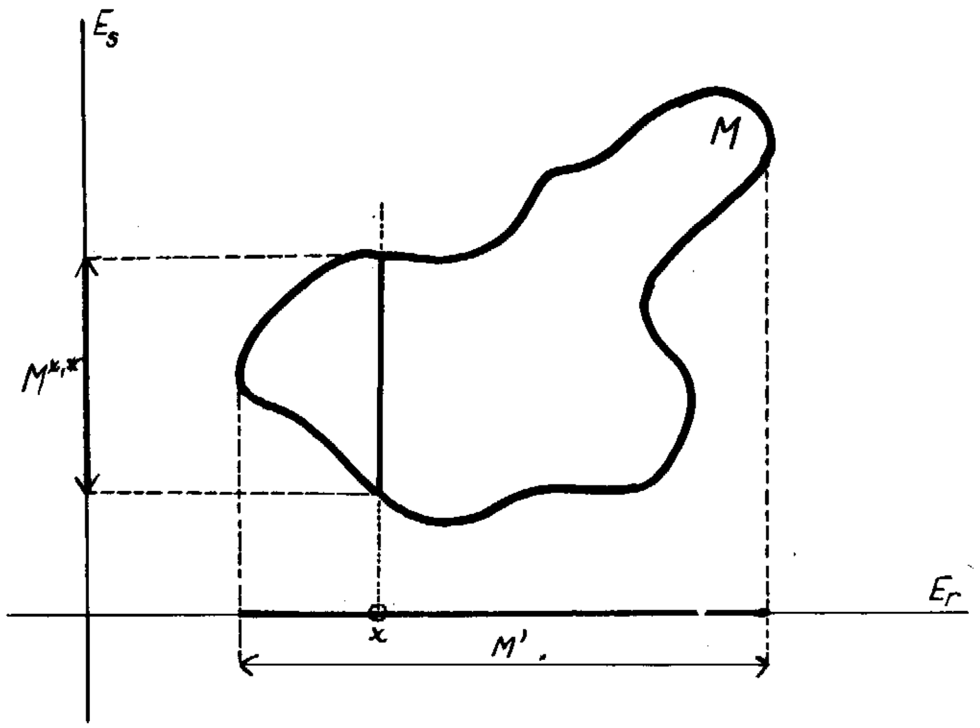
5,18. Dokažte toto speciální znění Fubiniovy věty:

buď $M \subset E_{r+s}$, $M \in \mathcal{M}_{r+s}$, buď M' průmět množiny M do prostoru E_r prvních r souřadnic, tj. $M' = \left\{ x \in E_r ;\ \text{existuje } y \in E_s \text{ tak, že } [x,y] \in M \right\}$.

Potom pro sk.vš. $x \in E_r$ je $M^{x,*} \in \mathcal{M}_s$ a označíme-li $F(x) = \mu_s(M^{x,*})$, je $F \in \mathcal{L}^{R}_{M'}$ a

$$\mu_{r+s} M = \int_{M'} F .$$

Nakreslete si příslušný obrázek !



Obrázek č.5

Ve větě 58 stačí položit $f = c_M$.

5,19. Buď $K = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x^2 + y^2 \leqq 6\}$. Ukažte, že

$$K \in \mathcal{M}_2 \quad \text{a} \quad \mu_2 K = 6\pi \; !$$

1/ Množina K je uzavřená v E_2 (dokažte!), tedy $K \in \mathcal{M}_2$ podle věty 50.

2/ Označme K_x průmět množiny K do osy x, tj.

$$K_x = \{x \in E_1 \; ; \text{ existuje } y \in E_1 \text{ pro něž } [x,y] \in K\} .$$

Zřejmě $K_x = \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$ - dokažme toto tvrzení pořádně a podrobně. Abychom tedy ukázali, že

$K_x = \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$, je nutné a stačí dokázat, že jednak $K_x \subset \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$ a jednak $K_x \supset \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$.

a/ Buď $x \in K_x \Rightarrow$ existuje $y \in E_1$, pro něž $[x,y] \in K$, tj. pro něž $x^2 + y^2 \leqq 6$. Potom ovšem $x^2 \leqq 6 - y^2 \leqq 6 \Rightarrow |x| \leqq \sqrt{6}$, což jest $x \in \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$. Tím jsme ukázali, že $K_x \subset \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle$.

b/ Buď $x \in \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6} \rangle \Rightarrow$ určitě existuje $y_0 \in E_1$ - např. $y_0 = 0$ - pro něž $x^2 + y_0^2 \leqq 6$, tedy $[x,y_0] \in K \Rightarrow x \in K_x$.

Tím jsme ukázali, že $\langle -\sqrt{6}\,,\ +\sqrt{6}\rangle \subset K_x$.

3/ Zřejmě dále

$K^{x,*} = \emptyset$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$,

$K^{x,*} = \langle -\sqrt{6-x^2}\,,\ +\sqrt{6-x^2}\rangle$ pro $x \in \langle -\sqrt{6}\,,\ +\sqrt{6}\rangle = K_x$,

(zde chápeme $\langle a, a\rangle = \{a\}$) - opět podrobně vysvětlete!

Tedy $\mu_1 K^{x,*} = 2\,.\sqrt{6-x^2}$ (podle věty 51) a

$$\mu_2 K = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} 2\sqrt{6-x^2}\,dx = 6\,\pi .$$

V praxi obyčejně postupujeme rychleji (musíme ovšem umět všechny jednotlivé kroky odůvodnit!):

Množina K je uzavřená, tedy měřitelná; $K_x = \langle -\sqrt{6}, +\sqrt{6}\rangle$, pro $x \in \langle -\sqrt{6}\,,\ +\sqrt{6}\rangle$ jest $K^{x,*} = \langle -\sqrt{6-x^2}\ ;\ +\sqrt{6-x^2}\rangle$, tedy

$$\mu_2 K = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \Big(\int_{-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} 1\,dx \Big)\,dx = 6\,\pi .$$

Jako cvičení zkuste změnit pořadí integrace ! ||

5,20. Buď $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 < 6\}$. Potom $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = 6\,\pi$. Dokažte !

|| M je otevřená množina v E_2 , tedy $M \in \mathfrak{M}_2$. Označíme-li

$$H(M) = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 = 6\} ,$$

je $H(M) \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 H(M) = 0$ (viz obdobný př. 5,15).

Potom $\mu_2(M \cup H(M)) = \mu_2 M$, podle předchozího cvičení je

$\mu_2(M \cup H(M)) = 6\,\pi$.

Jako cvičení spočtěte $\mu_2 M$ přímo ! ||

5,21. Buď K libovolný kruh v E_2 , tj.

$$K = \{[x,y] \in E_2\ ;\ (x-m)^2 + (y-n)^2 \leqq r^2\},$$

potom $K \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 K = \pi\, r^2$. Dokažte !

5,22. Buď $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ 0 \leqq x < y\}$. Potom $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = +\infty$. Dokažte !

|| Označíme-li (kreslete !)

$$K = \{[x,y] \in E_2\ ;\ 0 < x < y\},$$

$$N = \{[x,y] \in E_2 \; ; \quad x = 0,\ y \in (0, +\infty)\},$$

je N nulová množina v E_2 (viz př. 5,17), K otevřená v E_2, tedy $K \in \mathcal{M}_2$ a z věty 13 vyplývá, že $M = K \cup N \in \mathcal{M}_2$.
Podle věty 15 pak dostáváme $\mu_2 M = \mu_2 K$.
Označíme-li K_x průmět množiny K do osy x, je $K_x = (0,+\infty)$ a pro $x \in (0,+\infty)$ je $K^{x,*} = (x,+\infty)$.
Zřejmě $\mu_1 K^{x,*} = +\infty$ pro $x \in (0,+\infty)$, tedy $\mu_2 K = +\infty$.
V praxi postupujeme rychleji a rovnou píšeme

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K 1 \, dxdy = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty dy \right) dx = +\infty ,$$

anebo též - zaměníme-li pořadí integrace

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K 1 \, dx\, dy = \int_0^\infty \left(\int_y^\infty dx \right) dy = +\infty .$$

Zkuste dokázat ještě jinak, že $\mu_2 M = +\infty$! ‖

5,23. Definice:

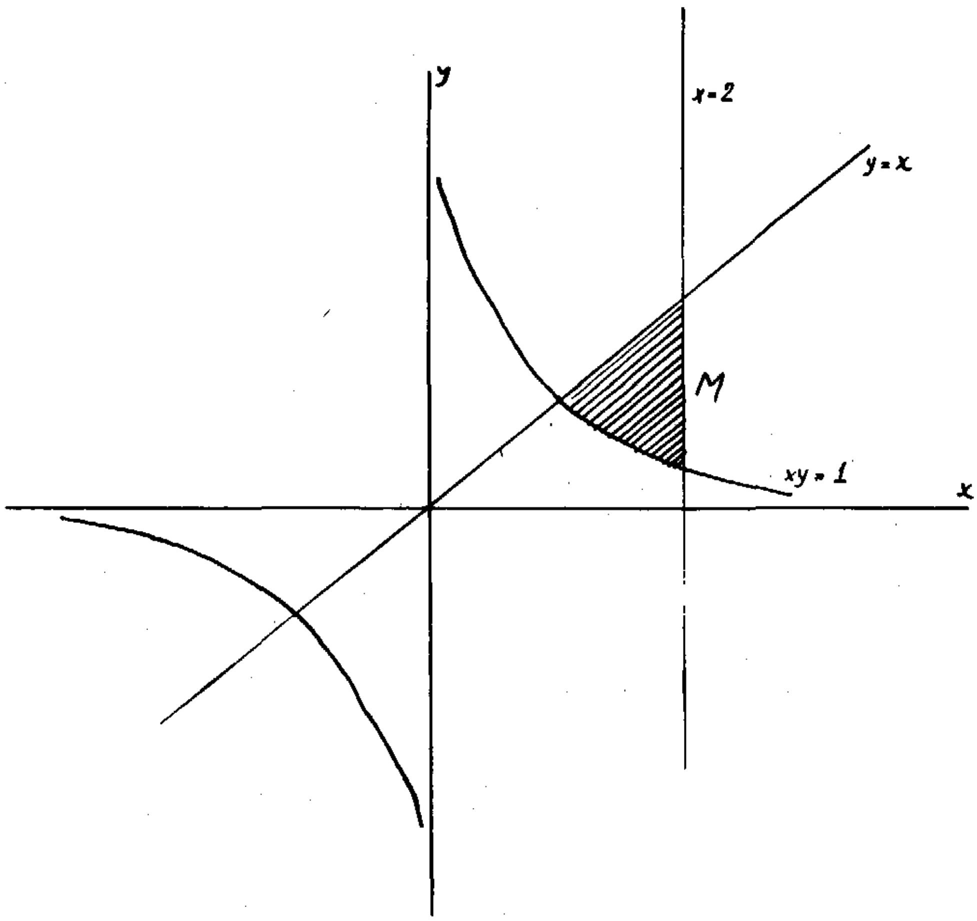
V mnohých sbírkách příkladů i v mnohých učebnicích se setkáme s úlohami následujícího typu:

" množina M je v rovině omezená křivkami
$x = 2$, $y = x$, $xy = 1$, spočtěte $\mu_2 M$! "

Co se rozumí slovy "omezená křivkami" ? Toto jest nějaký pojem - který, i když je intuitivně zřejmý - by bylo zapotřebí definovat. Pokusme se nejdříve na našem příkladě ilustrovat, co by se mohlo tímto pojmem rozumět. Nakresleme si tedy "křivky" $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$ (viz obrázek č.6 na následující straně).
Množina $\{[x,y] \in E_2 \; ; \; x = 2\}$ je přímka a dělí nám rovinu E_2 na dvě poloroviny, označme je A_1, A_2. Rovněž tak "množina $y = x$" dělí rovinu na dvě poloroviny, které si označme B_1, B_2. Konečně třetí množina $\{[x,y] \in E_2 \; ; \; xy = 1\}$ jest rovnoosá hyperbola a i ta nám dělí rovinu na dvě - byť ne souvislé - množiny (tzv. vnitřek a vnějšek hyperboly) - označme je C_1, C_2.
Nyní utvoříme všechny možné průniky.

$$A_1 \cap B_1 \cap C_1 , \quad A_1 \cap B_2 \cap C_1 , \quad A_1 \cap B_2 \cap C_2 , \ \ldots \ , A_2 \cap B_2 \cap C_2 .$$

Některé z těchto průniků jsou prázdné množiny, některé neomezené množiny a pouze jedna množina - jeden průnik - je omezená a neprázdná množina.
A této množině budeme zpravidla říkat, že je "omezená" danými křivkami".



Obrázek č. 6

Pokusme se nyní vyslovit obecnou definici:

Mějme dáno p funkcí dvou proměnných $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.
Nechť každá funkce φ_i $(i = 1,2,\dots,p)$ je definována na množině $M_i \times N_i$, označme

$$K_i = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ x \in M_i ,\ y \in N_i ;\ \varphi_i(x,y) = 0 \right\},$$

$i = 1,2,\dots,p$, (K_i jsou tedy naše "křivky"). Označme dále

$$\hat{K}_i = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ x \in M_i,\ y \in N_i ;\ \varphi_i(x,y) > 0 \right\},\quad i = 1,2,\dots,p,$$

$$\check{K}_i = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ x \in M_i ,\ y \in N_i ;\ \varphi_i(x,y) < 0 \right\},\quad i = 1,2,\dots,p.$$

Utvořme všechny možné průniky:

$$\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 \cap \dots \cap \hat{K}_p ,\ \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 \cap \dots \cap \check{K}_p ,\ \dots, \check{K}_1 \cap \check{K}_2 \cap \dots \cap \check{K}_p$$

(precizujte!).

Potom pod pojmem "<u>množina omezená křivkami $K_1, K_2, \dots, K_p$</u>" rozumíme libovolný z těchto průniků, který je

a/ neprázdný,

b/ omezený v E_2 .

Je nutno si uvědomit, že

1/ taková "množina" vůbec nemusí existovat (uveďte příklad!) ,

2/ těchto "množin" může být i více (uveďte příklad!).

Obdobná definice se dá uvést i pro prostory vyšší dimense, bude-li se jednat o množiny v E_3 , budeme zpravidla říkat "<u>množina omezená plochami</u>".

5,24. Nechť $M \subset E_2$ je omezená křivkami $y = \frac{8}{4+x^2}$ a $y = \frac{x^2}{4}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 2(\pi - \frac{2}{3})$.

1/ Nakreslete si příslušný obrázek, tj. množiny

$$K_1 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y = \frac{8}{4+x^2}\right\},$$

$$K_2 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y = x^2\right\}.$$

2/ Označme dále

$$\hat{K}_1 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y < \frac{8}{4+x^2}\right\},$$

$$\check{K}_1 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y > \frac{8}{4+x^2}\right\},$$

$$\hat{K}_2 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y < x^2\right\},$$

$$\check{K}_2 = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y > x^2\right\}.$$

Ukážeme, že množina $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ je neomezená v E_2 .
Zvolme posloupnost bodů $A_n = [n,0]$, potom

$$A_n \in \hat{K}_1 \text{ (proč?)}, \quad A_n \in \hat{K}_2 \text{ (proč?)} ,$$

tedy $A_n \in \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ a odtud vyplývá, že množina $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$ nemůže být omezená (odůvodněte !).

3/ Obdobně ukažte, že množiny $\check{K}_1 \cap \check{K}_2$, $\check{K}_1 \cap \check{K}_2$ nejsou omezené v E_2 !

4/ Uvažujme množinu $\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2$, označme ji $\overset{\infty}{M}$, tedy

$$M = \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad y < \frac{8}{4+x^2}\right\} \cap \left\{[x,y] \in E_2 ; \quad 4y > x^2\right\} = \left\{[x,y] \in E_2 ; \right.$$
$$\left. y < \frac{8}{4+x^2} \quad \text{a} \quad 4y > x^2\right\} = \left\{[x,y] \in E_2 ; \right.$$
$$\left. \frac{x^2}{4} < y < \frac{8}{4+x^2}\right\} .$$

Co bude průmětem M_x množiny M do osy x? - podle definice

$$M_x = \{ x \in E_1 \; ; \; \text{existuje } y \in E_1 \text{ takové, že } [x,y] \in M \}.$$

Zvolíme-li $x \in E_1$ tak, aby $\frac{x^2}{4} \geq \frac{8}{4+x^2}$, neexistuje zřejmě žádná $y \in E_1$ taková, že $[x,y] \in M$. Naopak, bude-li pro nějaké $x \in E_1$ platit $\frac{x^2}{4} < \frac{8}{4+x^2}$, bude zřejmě $x \in M_x$ (proč?),

tedy

$$x \in M_x \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4} < \frac{8}{4+x^2} \; .$$

Řešením poslední nerovnosti dostáváme

$$x \in M_x \Longleftrightarrow x \in (-2,+2) \; ,$$

tj. $M_x = (-2,2)$.

Nyní pro každé $x \in M_x$ jest

$$M^{x,*} = \{ y \in E_1 \; ; \; [x,y] \in M \} = \left(\frac{x^2}{4} \; ; \; \frac{8}{4+x^2} \right)$$

5/ Množina M je omezená v E_2, toto je ihned vidět z množin M_x a $M^{x,*}$, neboť

$$[x,y] \in M \Longrightarrow |x| < 2 \; , \quad 0 \leq \frac{x^2}{4} < y < \frac{8}{4+x^2} \leq 2 \; ,$$

tedy $M \subset (-2,+2) \times \langle 0,2 \rangle$.

6/ Množina M je měřitelná v E_2, neboť je průnik množin $\hat{K}_1$, $\check{K}_2$, které jsou obě otevřené v E_2 (dokažte!).

7/ Můžeme použít Fubiniovu větu, dostáváme

$$\mu_2 M = \iint_M dx\,dy = \int_{-2}^{2} \left(\int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{8}{4+x^2}} dy \right) dx = 2 \left(\pi - \frac{2}{3} \right) .$$

V dalších příkladech budeme zpravidla postupovat rychleji, je však zapotřebí umět jednotlivé kroky - tak jako jsme to provedli v tomto příkladě - podrobně odůvodnit.

5,25. Množina M je omezená následujícími křivkami :

$$x = 2 \; ; \quad y = x \; ; \quad xy = 1; \quad x = 0$$

Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{3}{2} - \log 2$. Dokažte !

1/ Nakreslete si příslušný obrázek !

2/ Ukažte, že

$$M = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \; \frac{1}{x} < y < x \; ; \; x \in (1,2) \right\} ,$$

tedy $\mu_2 M = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} dy \right) dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - \log 2$.

3/ Zkusme integrovat v obráceném pořadí.

Buď M_y průmět množiny M do osy y ,

zřejmě $M_y = \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$.

Pro $y \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ je $M^{*,y} = \left(\frac{1}{y}, 2 \right)$,

pro $y \in \langle 1,2)$ je $M^{*,y} = (y,2)$,

pro ostatní y je $M^{*,y} = \emptyset$.

Použijeme-li nyní Fubiniovu větu, dostáváme

$$\mu_2 M = \int_{\frac{1}{2}}^{2} F(y)\, dy ,$$

kde $F(y) = 2 - \frac{1}{y}$ pro $y \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$

$F(y) = 2 - y$ pro $y \in \langle 1,2)$.

Konečně tedy

$$\mu_2 M = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{y}\right) dy + \int_1^2 (2 - y)\, dy = \frac{3}{2} - \log 2 .$$

4/ Opět můžeme postupovat rychleji, označíme-li si

$M_1 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ \frac{1}{x} < y < 1 ,\ x \in (1,2) \right\}$,

$M_2 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ y = 1 ,\ x \in (1,2) \right\}$,

$M_3 = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ 1 < y < x ,\ x \in (1,2) \right\}$,

jest množina M_2 nulová, množiny M_1 , M_2 otevřené,

$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. Tedy $M \in \mathfrak{M}_2$ a

$$\mu_2 M = \mu_2 M_1 + \mu_2 M_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{2} dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^2 dx \right) dy = \frac{3}{2} - \log 2 .$$

5,26. Buď $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ;\ 1 \leqq x \leqq 5 ;\ y \leqq 3 ,\ xy \geqq 1 \right\}$

Spočtěte $\mu_2 M$!

1/ $M \in \mathfrak{M}_2$ (proč?)

2/ $\mu_2 M = \iint_M dx\, dy = \int_1^5 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{3} dy \right) dx = \int_1^5 \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx = 12 - \log 5$,

3/ $\mu_2 M = \iint_M dx\, dy = \int_{\frac{1}{5}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{5} dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_1^5 dx \right) dy = 12 - \log 5$

Velmi mnoho množin, s kterými se setkáme, bývá souměrných podle jedné či obou os. Při výpočtu měr takových množin či integrálů přes množiny tohoto typu může být pak užitečné se omezit jen na část těchto množin, např. jen na část ležící v prvním kvadrantu apod. Teoretickým základem je následující věta.

$\boxed{5{,}27^\circ.}$ a/ Buď $M \subset E_2$, $M \in \mathcal{M}_2$, nechť množina M je "souměrná" podle osy y, tj.

$$[x,y] \in M \Leftrightarrow [-x,y] \in M .$$

Označme

$$\tilde{M} = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad [x,y] \in M , \quad x > 0 \} .$$

Potom $\tilde{M} \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 2 \ \mu_2 \tilde{M}$. Dokažte!

‖ Označíme-li

$$K = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad x > 0 \} ,$$

je $K \in \mathcal{M}_2$ a $\tilde{M} = M \cap K$, tedy $\tilde{M} \in \mathcal{M}_2$ (odůvodněte!)

Podle věty 59 lehko zjistíte, že

$$\mu_2 \tilde{M} = \mu_2 (M - \tilde{M}) ,$$

tedy $\mu_2 M = \mu_2 \tilde{M} + \mu_2 (M - \tilde{M}) = 2 \ \mu_2 \tilde{M}$. ‖

b/ Dokažte obdobnou větu pro množiny souměrné podle osy x.

c/ Buď $M \subset E_2$ měřitelná množina souměrná podle obou os x i y. Označme

$$\tilde{\tilde{M}} = \{ [x,y] \in M ; \quad x > 0 , \quad y > 0 \}$$

Potom $\tilde{\tilde{M}} \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 4 \ \mu_2 \tilde{\tilde{M}}$. Dokažte !

d/ Vyslovte obdobné věty pro prostory vyšší dimense !

5,28. Buď $M = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 1 \leq x^2 + y^2 < 4 \}$ (kreslete!) ,

$$M_1 = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} ,$$

$$M_2 = \{ [x,y] \in E_2 ; \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \} .$$

Ukažte, že každá tato množina je měřitelná a

$$\mu_2 M = \mu_2 M_1 = \mu_2 M_2 = 3 \pi .$$

‖ 1/ Ukažte, že kterékoliv dvě z těchto množin se liší o nulovou množinu a že množina M_1 je uzavřená.

2/ Označme M_x průmět množiny M do osy x, zřejmě $M_x = (-2,+2)$ (dokažte podrobně!).

Dále platí implikace:

$$x \in (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty) \Rightarrow M^{x,*} = \emptyset$$

$$x \in (-2, -1\rangle \cup \langle 1,2) \Rightarrow M^{x,*} = (-\sqrt{4-x^2} \ ; \ +\sqrt{4-x^2}) ,$$

$$x \in (-1, +1) \Rightarrow M^{x,*} = (-\sqrt{4-x^2} \ ; \ -\sqrt{1-x^2}) \cup (\sqrt{1-x^2} \ ; \ \sqrt{4-x^2}) .$$

Tedy pro

$x \in (-2, -1\rangle \cup \langle 1, 2)$ je $\mu_1 M^{x,*} = 2\sqrt{4-x^2}$,

$x \in (-1, +1)$ je $\mu_1 M^{x,*} = 2(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2})$.

Odtud podle Fubiniovy věty dostáváme

$$\mu_2 M = \int_{-2}^{-1} 2\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_{1}^{2} 2\sqrt{4-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} 2(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2})\,dx =$$
$$= 3\pi .$$

3/ Použijeme-li předchozího cvičení 5,27 a postupujeme-li rychleji, dostáváme

$$\mu_2 M = 4\int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\Big)dx + 4 \cdot \int_1^2 \Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy\Big)dx = 3\pi .$$

4/ Použijte též vztahu

$$M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 < 4\} - \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 < 1\}$$

cvičení 5,21 a větu 15 .‖

5,29.	Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 < y < x+2\}$. Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{9}{2}$. (Nakreslete si obrázek!).

1/ Ukažte, že množina M je otevřená v E_2 .

2/ Je-li $x^2 < x+2$, je $M^{x,*} = (x^2, x+2)$, pro ostatní x je $M^{x,*} = \emptyset$.
Nerovnost $x^2 < x+2$ je splněna, právě když $x \in (-1,+2)$, tedy

$$\mu_2 M = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,dx = \frac{9}{2} .$$

3/ Integrujeme-li v "obráceném" pořadí - proveďte podrobně - jest

$$\mu_2 M = \int_0^1 \Big(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\Big)dy + \int_1^4 \Big(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\Big)dy = \frac{9}{2} .‖$$

5,30. Množina M bude v dalším vždy omezena křivkami (viz 5,23).
Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a spočtěte $\mu_2 M$!

a/ M omezená křivkami:

$2x - y = 0$, $2x - y - 7 = 0$, $x - 4y + 7 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$,

potom $\mu_2 M = 7$,

b/ M omezená:

$x = \frac{y^2+b^2}{2b}$; $x = \frac{y^2+a^2}{2a}$ $(0 < b < a)$,

$\mu_2 M = \frac{2}{3}(a-b) \cdot \sqrt{ab}$, c/ M omezená: $y = -2$; $y = x + 2$; $y = 2$; $y^2 = x$ ($\mu_2 M = \frac{40}{3}$),

d/ M : $y = \frac{1}{a}(x-a)^2$, $x^2 + y^2 = a^2$; $a > 0$ ($\mu_2 M = \frac{a^2}{12}(3\pi - 4)$),

e/ M : $x^2 + y^2 = a^2$; $x + y = a$; $x \geq 0$, $y \geq \frac{a}{2} > 0$

($\mu_2 M = \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{a^2}{8}(1 + \sqrt{3})$) ,

f/ M : $y = 4 - x^2$; $3x - 2y - 6 = 0$ ($\mu_2 M = \frac{1331}{48}$) ,

g/ M : $xy = a^2$; $x^2 = ay$, $y = 2a$, $x \geq 0$, $a > 0$

($\mu_2 M = \frac{23}{24} a^2 + a^2 \log 2$) ,

h/ M : $x^2 + y^2 = a^2$; $y = \frac{a}{n}$, $a > 0$, $n > 1$

($\mu_2 M = \frac{a^2}{2}(\arcsin \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - \frac{1}{n^2}\sqrt{n^2 - 1})$) ,

i/ M : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$

($\mu_2 M = \frac{1}{4} ab(\pi - 2)$) ,

j/ M : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $y = x$; $x \geq 0$; $y \geq 0$ ($\mu_2 M = 6 \arcsin \frac{4}{5}$),

k/ M : je omezená $x^2 + y^2 = 5$; $y = 0$; tečnou ke kružnici

$x^2 + y^2 = 5$ v bodě $[1,2]$ ($\mu_2 M = 5 - \frac{5}{2} \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$) ,

l/ M : $xy = 3$; $x + y = 4$ ($\mu_2 M = 4 - \log 27$) ,

m/ M : $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x = 0$, $y = 0$, $x = a$,

$a > 0$ ($\mu_2 M = \frac{a^2}{2}(e - e^{-1})$),

n/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x > 2 ,\ 0 < y < \frac{1}{x^2}\}$ ($\mu_2 M = \frac{1}{2}$) ,

o/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x > 2 ,\ 0 < y < \frac{1}{x}\}$ ($\mu_2 M = +\infty$) ,

p/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ 0 < y < \frac{1}{1+x^2}\}$ ($\mu_2 M = \pi$) ,

q/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x > 1 ;\ 0 < y < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\}$ ($\mu_2 M = +\infty$) ,

r/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ 0 < x < 9 ,\ 0 < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\}$ ($\mu_2 M = 6$) .

V dalším se budeme zabývat výpočty jednoduchých dvojných integrálů přes danou množinu M . Metody výpočtu jsou v podstatě stejné jako v předešlých cvičeních - obyčejně hledáme průmět množiny M do některé z os, příslušné řezy množiny M a aplikujeme Fubiniovu větu. Než však tuto větu použijeme, musíme vždy zjistit, zda daný dvojný integrál vůbec existuje.

255 35 F8

5,31.° Buď $M \subset E_2$ měřitelná množina souměrná podle osy y, buď f funkce dvou proměnných na M "sudá" v proměnné x, tj.

$$f(-x, y) = f(x,y) \quad \text{kdykoliv} \quad [x,y] \in M .$$

Nechť dále $f \in \mathcal{L}^*_M$

Označme $\tilde{M} = \{ [x,y] \in M ; \; x > 0 \}$.

Potom $f \in \mathcal{L}^*_{\tilde{M}}$ a

$$\int_M f = 2 \int_{\tilde{M}} f . \quad \text{Dokažte !}$$

⌈ Viz obdobné cvičení 5,27 . ⌋

Vyslovte věty analogické k větám ve cvičení 5,27 b) – d) .

5,32. Buď $M = \{ [x,y] \in E_2 ; \; |x| + |y| \leq 1 \}$ (nakreslete!).

Potom $\iint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \frac{2}{3}$. Dokažte !

⌈ 1/ $M \in \mathcal{M}_2$ (množina M je uzavřená v E_2) .

2/ Funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ je spojitá a nezáporná v M, tedy $f \in \mathcal{L}^R_M$ (viz věty 48 a 33) .

Lze tedy užít Fubiniovu větu (viz též 5,13), použijeme-li předchozího cvičení 5,31 dostaneme (proveďte podrobně ! , nalezněte M_x a $M^{x,*}$).

$$\iint_M (x^2 + y^2) \, dx \, dy = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) \, dy \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3} (1-x)^3 \right) dx = \frac{2}{3} .$$

3/ Zkuste též integrovat v obráceném pořadí . ⌋

5,33. Ukažte, že $\iint_M e^{-(x+y)} \, dx \, dy = \frac{1}{2}$, kde

$$M = \{ [x,y] \in E_2 ; \; 0 \leq x \leq y \}$$

⌈ Množina M je uzavřená, integrovaná funkce spojitá a kladná na M, tedy

$$\iint_M e^{-(x+y)} \, dx \, dy = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty e^{-(x+y)} \, dy \right) dx = \int_0^\infty e^{-2x} \, dx = \frac{1}{2} . ⌋$$

5,34. Spočtěte $\iint_M xy \, dx \, dy$, kde $M \subset E_2$ je množina omezená osami x a y a "křivkou" $\{ [x,y] \in E_2 ; \; \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \}$.

(viz definice 5,23).

⌈ Ukažte, že $M = \{ [x,y] \in E_2 ; \; 0 < y < 1 + x - 2\sqrt{x}$, $x \in (0,1) \}$ tedy (provádějte podrobně !)

25535 28

$$\iint_M xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{(1-\sqrt{x})^2} xy\,dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x\,(1-\sqrt{x})^4\,dx = \frac{1}{280} \;.$$

5,35. (Viz též cvičení 5,47).

Ukažte, že $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$, je-li $M = \{ [x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leqq 1 \}$

Funkce f , $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ není definována všude v M , protože však množina $N = \{ [x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 = 1 \}$ je nulová (viz cvičení 5,15), je funkce f definována skoro všude v M . Označíme-li $\tilde{M} = M - N$, je množina $\tilde{M}$ otevřená v E_2 , f spojitá a kladná v $\tilde{M}$ a

$$\int_M f = \int_{\tilde{M}} f \;,$$

tedy s použitím 5,31 dostáváme

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \left(\left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dx = 2\pi \;.$$

5,36. (Viz též cvičení 5,49).

Spočtěte $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, kde $M = \{ [x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leqq x \}$

Nakreslete si množinu M , je to vlastně "kruh" o středu $\left[\frac{1}{2} , 0 \right]$ a poloměru $\frac{1}{2}$. Opět funkce $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ není všude v M definována ($[0,0] \in M$). Označíme-li však $\tilde{M} = \{ [x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 < x \}$, je $\tilde{M}$ otevřená v E_2 , funkce f spojitá a kladná v $\tilde{M}$ a $\int_M f = \int_{\tilde{M}} f$ (vše podrobně proveďte!) , tedy

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dx = 2 \;.$$

5,37. Ukažte, že $\iint_M x^2 y^{-2}\,dx\,dy = \frac{9}{4}$, je-li množina $M \subset E_2$ omezena křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$! (Kreslete!).

$$\iint_M x^2\, y^{-2}\, dx\, dy = \int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{x} x^2 y^{-2}\, dy \Big)\, dx = \frac{9}{4}\ ,\ \text{anebo též}$$

$$\iint_M x^2 y^{-2}\, dx\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(\int_{\frac{1}{y}}^{2} x^2 y^{-2}\, dx \Big)\, dy + \int_1^2 \Big(\int_y^2 x^2 y^{-2}\, dx \Big)\, dy = \frac{9}{4}\,.$$

5,38. Dokazujte následující tvrzení:

a/ $\displaystyle\iint_M \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \log \frac{25}{24}$ pro $M = \langle 3,4\rangle \times \langle 1,2\rangle$

(tím rozumíme $M = \{ [x,y] \in E_2\ ;\ x \in \langle 3,4\rangle\ ,\ y \in \langle 1,2\rangle \}$),

b/ $\displaystyle\iint_M \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy = \frac{\pi}{12}$ pro $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

c/ $\displaystyle\iint_M \frac{y\, dy\, dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \log \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ pro $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

d/ $\displaystyle\iint_M y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dx\, dy = \frac{32}{45} R^5$ pro $M = \{ [x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 \leqq R^2\ ;\ R > 0 \}$,

e/ $\displaystyle\iint_M (x^2 + y)\, dx\, dy = \frac{33}{140}$, kde M je omezená křivkami

$y = x^2,\ y^2 = x$,

f/ $\displaystyle\iint_M \cos (x+y)\, dx\, dy = -2$, kde M je omezená křivkami

$x = 0\ ,\ y = x\ ,\ y = \pi$,

g/ $\displaystyle\iint_M (2x + y)\, dx\, dy = \frac{27}{2}$, kde M je omezená křivkami

$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ x + y = 3$,

h/ $\displaystyle\iint_M \sqrt{4x^2 - y^2}\, dx\, dy = \frac{1}{3} \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ \frac{\pi}{3}\Big)$, kde M je omezená křivkami

$y = 0\ ,\ x = 1\ ,\ y = x$,

i/ $\displaystyle\iint_M xy\, dx\, dy = \frac{1}{24}$ pro $M = \{ [x,y] \in E_2\ ;\ x^2 \leqq y \leqq x\ ,\ 0 \leqq x \leqq 1 \}$,

j/ $\displaystyle\iint_M (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{1}{3}$ pro M omezenou křivkami

$y = 0\ ,\ y = 1-x,\ y = 1+x$,

k/ $\displaystyle\iint_M (x^3 + y^3)\, dx\, dy = \frac{752}{5}$ pro M omezenou křivkami

$y = \frac{x}{2}\ ,\ y = x\ ,\ x = 4$,

l/ $\displaystyle\iint_M (x^2 + y)\, dx\, dy = \frac{13}{3}$ pro M omezenou křivkami

$x = 0\ ,\ y = \frac{3}{2} x\ ;\ y = 4-(x-1)^2 (x \geqq 0)$.

5,39. Buď $M = \{[x,y,z] \in E_3 \; ; \; x \geqq 0 \; , \; y \geqq 0 \; , \; 0 \leqq z \leqq 1-x-y \}$.
Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_3$ a $\mu_3 M = \frac{1}{6}$!

Nakreslete si množinu M - je to čtyřstěn s vrcholy $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, podle středoškolské látky je "objem M" roven $\frac{1}{3}$ z.v, kde z je plocha základny a v délka výšky. V našem případě je $z = \frac{1}{2}$, $v = 1$, tedy $\operatorname{vol} M = \frac{1}{6}$.

A/ M je množina uzavřená v E_3 (ukažte!), tedy $M \in \mathcal{M}_3$.

B/ Ukážeme, že $\mu_3 M = \frac{1}{6}$. Zde můžeme postupovat podle Fubiniovy věty v podstatě dvěma způsoby, ukážeme oba dva.

(I) Označme $M_{x,y}$ průmět množiny M do "roviny xy" , tj. $M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 \; ; \text{ existuje } z \in E_1 \text{ , pro něž } [x,y,z] \in M \}$.
Dokážeme, že

$$M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \; , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$$

(tj. M_{xy} je trojúhelník s vrcholy $[0,0,0]$, $[1,0,0]$, $[0,1,0]$), důkaz tohoto tvrzení proveďme podrobně:

a/ zvolme $[x,y] \in M_{x,y} \Rightarrow$ existuje $z \in E_1$ tak, že $[x,y,z] \in M$, tj. platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $0 \leqq z \leqq 1-x-y$.
Odtud plyne, že pro náš bod $[x,y] \in M_{x,y}$ platí $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $0 \leqq 1-x-y$, tedy $[x,y] \in \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \; , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$.
Tím jsme ukázali, že $M_{x,y} \subset \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \; , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$.

b/ Zvolme bod $[x,y] \in \{[x,y] \in E_2 \; ; \; x \geqq 0 \; , \; 0 \leqq y \leqq 1-x \}$, tj. zvolíme takový bod $[x,y]$, že je splněno $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq 1-x$.
Potom určitě existuje $z_0 \in E_1$ - například $z_0 = 0$ - pro něž platí

$$x \geqq 0 \; , \quad y \geqq 0 \; , \quad 0 \leqq z_0 \leqq 1 - x - y \; ,$$

tj. existuje takové $z_0 \in E_1$, že $[x,y, z_0] \in M$. Odtud plyne, že $[x,y] \in M_{x,y}$.

Tím jsme dokázali obrácenou inklusi a jsme hotovi.
Nyní pro libovolné $[x,y] \in M_{x,y}$ je

$$M^{x,y,*} = \{ z \in E_1 \; ; \; [x,y,z] \in M \} = \{ z \in E_1 \; ; \; 0 \leqq z \leqq 1-x-y \} =$$
$$= (0,1-x-y) \; ,$$

tedy $\mu_1 M^{x,y,*} = 1- x- y$ (délka intervalu !) .
Fubiniova věta konečně dává

$$\mu_3 M = \iiint_M dx\, dy\, dz = \iint_{M_{x,y}} \mu_1 M^{x,y,*} \; dx\, dy = \iint_{M_{x,y}} (1-x-y)\, dx dy \; .$$

Poslední integrál spočítáme již známým způsobem (opětným použitím Fubiniovy věty, tentokráte však již pro dvojrozměrný integrál funkce $1-x-y$ přes množinu $M_{x,y}$).

Dostáváme

$$\iint_{M_{x,y}} (1 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\Big) dy = \frac{1}{6}\ .$$

V praxi počítáme rychleji a přímo píšeme

$$\mu_3 M = \iiint_M dx\, dy\, dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big) \int_0^{1-x-y} dz\Big)\, dy\Big)\, dx\ ,$$

kde si pochopitelně předem spočítáme "příslušné" meze. Zkuste míru množiny M spočítat ve všech jiných pořadích integrace ! (např. nejdříve integrovat podle x, pak podle z a nakonec podle y).

II Označme tentokrát M_z průmět množiny M do "osy z" , tj.

$M_z = \{ z \in E_1 ;\ \ \text{existuje}\ [x,y] \in E_2\ \text{pro něž}\ [x,y,z] \in M \}$.

Opět podrobně ukážeme, že $M_z = \langle 0,1\rangle$ - k tomu je nutné a stačí ukázat, že jednak $M_z \subset \langle 0,1\rangle$ a jednak $\langle 0,1\rangle \subset M_z$.

a/ Buď tedy $z \in M_z$, tj. existuje dvojice $[x,y]$ taková, že $[x,y,z] \in M$, tj. taková dvojice $[x,y]$, pro niž platí $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$.

Odtud je lehko vidět, že $0 \leq z \leq 1$, tedy $z \in \langle 0,1\rangle$.

b/ Buď naopak $z \in \langle 0,1\rangle$, máme ukázat, že existuje bod $[x,y]$, pro nějž $[x,y,z] \in M$.

Položme např. $x_0 = \frac{1-z}{3}$, $y_0 = \frac{1-z}{3}$ (kreslete !)

potom $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, $0 \leq z \leq 1 - x_0 - y_0$ (ukažte!), tj. bod $[x_0 , y_0 , z] \in M$, tedy $z \in M_z$.

Fubiniova věta nám nyní dává

$$\mu_3 M = \int_{M_z} \Big(\int_{M^{*,z}} dx\, dy \Big)\, dz = \int_0^1 \mu_2 M^{*,z}\ dz\ ,$$

kde $M^{*,z} = \{[x,y] \in E_2 ;\ [x,y,z] \in M \}$.

Stačí tedy spočítat $\mu_2 M^{*,z}$ pro $z \in M_z$ - tuto úlohu však již umíme v rovině řešit.

Je lehko vidět, že (opět podrobně ukažte!)

$$M^{*,z} = \{[x,y] \in E_2 ;\ \ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x + y \leq 1 - z \},$$

Což neznamená nic jiného, než že $M^{*,z}$ je pro $z \in \langle 0,1\rangle$ rovnostranný a pravoúhlý trojúhelník s délkou odvěsny $1-z$, tedy

$$\mu_2 M^{*,z} = \frac{1}{2}\,(1 - z)^2\ .$$

(Zde se nám podařilo přímo spočítat míru množiny $M^{*,z}$ z jejích geometrických vlastností - jako cvičení zkuste spočítat $\mu_2 M^{*,z}$ pomocí Fubiniovy věty tak, jako jsme to udělali v minulých cvičeních).

Konečně tedy $\mu_3 M = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2\, dz = \frac{1}{6}$

Opět zkuste volit jiné pořadí integrace ! ⅃

Tímto příkladem jsme se úmyslně zabývali velmi podrobně, znovu si jej pečlivě projděte a hlavně si uvědomte rozdíl mezi oběma metodami I a II . V dalších příkladech, jejichž návody již nebudou tak detailní, se snažte opět vše sami podrobně odůvodnit!

5,40. Spočtěte objem tělesa $T \subset E_3$, omezeného plochami
$z = 1 , \; z^2 = x^2 + y^2$.
(Viz definice 5,23) .

⌈ 1/ Označme

$$M_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z > 1\} ,$$

$$M_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z < 1\} ,$$

$$N_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z^2 > x^2 + y^2\} ,$$

$$N_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z^2 < x^2 + y^2\} .$$

Pro názornost si plochy $z = 1$ (rovina) a $z^2 = x^2 + y^2$ (kuželová plocha) nakreslete !

Ukážeme, že množina $M_1 \cap N_1$ je neomezená - zvolme tedy posloupnost bodů $A_n = [0,0,n]$, $n = 2,3,4 \ldots$

Zřejmě $A_n \in M_1 \cap N_1$ (proč?) pro každé n , odtud plyne tvrzení (odůvodněte!).

Obdobně ukažte, že množiny $M_1 \cap N_2$, $M_2 \cap N_2$ jsou neomezené.

Množina $M_2 \cap N_1$ je omezená

$$\left([x,y,z] \in M_2 \cap N_1 \Rightarrow |x| \leq 1 , \; |y| \leq 1 , \; |z| \leq 1\right) ,$$

tedy $T = M_2 \cap N_1$.

2/ Z minulého vyplývá, že

$$T = \left\{[x,y,z] \in E_3 ; \quad \sqrt{x^2 + y^2} < z < 1\right\} ,$$

odtud lehko ukážete, že T je otevřená množina v E_3 , tedy $T \in \mathfrak{M}_3$.

3/ Lehko zjistíte, že T je kužel s vrcholem v bodě $[0,0,0]$ a základnou v rovině $z = 1$, poloměr základny je 1, podle známých vzorců je "objem T" roven $\frac{1}{3}\pi$.

4/ Spočítáme T podle obou metod (viz předchozí cvičení):

(I) označíme-li $T_{x,y}$ průmět T do roviny x,y,

jest

$$T_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 < 1\},$$

a pro $[x,y] \in T_{x,y}$ jest

$$T^{x,y,*} = \{z \in E_1 ;\ \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\} = (\sqrt{x^2+y^2}, 1)$$

tedy

$$\mu_3 T = \iiint_T dx\,dy\,dz = \iint_{T_{x,y}} \left(\int_{T^{x,y,*}} dz\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{T_{x,y}} (1 - \sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - \sqrt{x^2+y^2}\,.\,dy\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\pi .$$

Opět můžeme krátce psát

$$\mu_3 T = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\right) dy\right) dx$$

anebo též

$$\mu_3 T = 4 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} dx\right) dy\right) dz$$

a podobně.

(II) Označíme-li T_z průmět T do osy z, jest $T_z = (0,1)$ a pro $z \in (0,1)$ jest

$$T^{*,z} = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq z^2\},$$

tedy $\mu_2 T^{*,z} = \pi z^2$ (viz př. 5,21),

odtud podle Fubiniovy věty dostáváme

$$\mu_3 T = \int_{T_z} \left(\int_{T^{*,z}} dx dy\right) dz = \int_0^1 \pi z^2\,dz = \frac{\pi}{3} .$$

Opět zkuste volit jiné postupy integrace. ▌

Z uvedených příkladů je vidět, že snadnost výpočtu velmi závisí na tom, jaké pořadí integrace a jakou metodu zvolíme. Jest určitá věc cviku a šikovnosti, abychom výsledek obdrželi co nejjednodušší cestou. Uveďme následující příklad.

5,41. Buď $R > 0$, označme $M = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\}$.

Potom $\iiint_M z^2 dxdydz = \frac{59}{480} \pi R^5$. Dokažte !

1/ Ukažte, že množina M je uzavřená v E_3 a funkce f, $f(x,y,z) = z^2$, je spojitá a nezáporná na M.

Lze použít Fubiniovu větu (jak vypadá množina M ?).

2/ (I) Buď $M_{x,y}$ průmět množiny M do roviny x,y, ukažte, že

$$M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq \tfrac{3}{4} R^2\},$$

Pro $[x,y] \in M_{x,y}$ je

$$M^{x,y,*} = \langle R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} ;\ \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \rangle$$

(vše podrobně zdůvodněte!), tedy

$$\iiint_M z^2 \cdot dx\, dy\, dz = \iint_{M_{x,y}} \left(\int_{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2\, dz \right) dx\, dy$$

a vidíme, že jsme se dostali k velmi nepříjemným integracím.

(II) Označíme-li M_z průmět množiny M do osy z, jest

$$M_z = \langle 0,R \rangle .$$

Dále pro

$z \in (0, \frac{R}{2} \rangle$ je $M^{*,z} = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq 2Rz - z^2\}$,

$z \in (\frac{R}{2}, R)$ je $M^{*,z} = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$,

tedy $\mu_2 M^{*,z} = \pi (2Rz - z^2)$ pro $z \in (0, \frac{R}{2} \rangle$,

$\mu_2 M^{*,z} = \pi (R^2 - z^2)$ pro $z \in (\frac{R}{2}, R)$

a Fubiniova věta dává

$$\iiint_M z^2 dxdydz = \int_0^R \left(\int_{M^{*,z}} z^2 dx\, dy \right) dz = \int_0^R z^2\, \mu_2 M^{*,z}\, dz =$$

$$= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \pi (2Rz - z^2)\, dz + \int_{\frac{R}{2}}^R z^2 \pi (R^2 - z^2)\, dz =$$

$$= \frac{59}{480} \pi R^5 .$$

5,42. Dokažte následující tvrzení:

a/ Těleso $T \subset E_3$ je omezeno plochami $x = 0, y = 0, z = 0$, $x + 2y = 1$, $z = x^2 + y + 1$, potom $\mu_3 T = \frac{1}{3}$,

b/ Množina $T \subset E_3$ je omezena $y = 1$, $z = 0$, $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, potom $\mu_3 T = \frac{88}{105}$,

c/ T je omezeno $y = 0$, $z = 0$, $y = \frac{b}{a} x$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$, potom $\mu_3 T = \frac{1}{3} abc$,

d/ T je omezeno $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = xy$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$, potom $\mu_3 T = \frac{1}{8} R^4$,

e/ T je omezeno $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = x-y+5$, $\mu_3 T = \pi\, 10$,

f/ T je omezeno $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$ $(a > 0, r > 0)$,

$$\Rightarrow \mu_3 T = \frac{\pi r^4}{4a}$$

$\overset{*}{g}$/ T je omezeno $x^2 + y^2 = 2ax$, $y^2 + z^2 = 4ax$ $(a > 0)$, $\mu_3 T =$

$$= a^3 \left(2\pi + \frac{16}{3} \right),$$

$\overset{*}{h}$/ T je omezeno $x^2 + y^2 = Rx$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(R > 0$, množině T se někdy říká Vivianiho okénko$)$, $\mu_3 T = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$,

i/ T je omezeno $z = 0$, $x^2 + z^2 = R^2$, $y = 0$, $y = 3$ $(z > 0, R > 0)$,

$$\mu_3 T = \frac{3}{2} \pi R^2,$$

j/ T je omezeno $z = 0$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 2$, $y = 3$,

$$z = xy \Rightarrow \mu_3 T = 10,$$

k/ T je omezeno $az = x^2 + y^2$, $z = a$ $(a > 0) \Rightarrow \mu_3 T = \frac{\pi a^3}{2}$,

l/ T je omezeno plochou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ a dále

1/ plochou $z = \lambda x + \mu y + h$ $(h > 0) \Rightarrow \mu_3 T = \pi ab h$,

2/ plochou $2z = x^2 + y^2 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{\pi}{8} ab (a^2 + b^2)$,

3/ plochou $z = xy \Rightarrow \mu_3 T = \frac{1}{2} a^2 b^2$,

m/ $T = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \ \ a,b,c \text{ kladná} \right\} \Rightarrow \mu_3 T = \frac{4}{3} \pi abc$, n/ T je omezeno $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$,

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = 45$,

o/ T je omezeno $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $y = b$, a,b,c kladná $\Longrightarrow \mu_3 T =$

$= \frac{1}{2} \pi ab^2 c$,

p/ T je omezeno $3x - 2y = 0$, $8x - y = 0$, $2y + 3y - 13 = 0$,

$2x + 3y - 26 = 0$, $17x + 6y - 13z = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{1183}{24}$,

q/ T je omezeno $6x - 9y + 5z = 0$, $3x - 2y = 0$, $4x - y = 0$,

$x + y - 5 = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{15}{2}$,

r/ T je omezeno $2x + y - 2 = 0$, $4x + 3y - 2z = 0$, $x = 0$, $y = 0$,

$z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{5}{3}$,

s/ T je omezeno $z = 4 - x^2$; $y = 5$, $y = 0$, $z = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{160}{3}$,

t/ T je omezeno $z = a^2 - x^2$, $x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$,

$y = 2x$; $\mu_3 T = \frac{41}{162} a^4$,

u/ T je omezeno $z = a^2 - x^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $y = 0$,

$x = 0 \Rightarrow \mu_3 T = \frac{3}{16} \pi a^4$.

5,43. Dokažte následující tvrzení:

a/ $\iiint\limits_M z \, dx\, dy\, dz = \frac{\pi}{4} abc^2$ pro $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 ,\ z \geqq 0 \right\}$,

b/ $\iiint\limits_M \frac{dx\, dy\, dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2} (\log 2 - \frac{5}{8})$, je-li množina M omezena plochami

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$,

c/ $\iiint\limits_M z \, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \pi R^2 h^2$, je-li M omezena $z^2 = \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2)$,

$z = h$,

d/ $\iiint\limits_M x \, dx\, dy\, dz = 4$, je-li M omezena $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$y = 3$, $x + z = 2$,

e/ $\iiint\limits_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{15} abc\, (a^2 + b^2 + c^2)$, je-li

$M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$

[Stačí počítat pouze $\iiint_M x^2\,dx\,dy\,dz$, pak využijte symetrie !]

f/ $\iiint_M x\,dx\,dy\,dz = \frac{27}{4}$, je-li M omezena $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$,

g/ $\iiint_M xyz\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{96}$, je-li M omezena $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$.

5,44. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq 6\}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 6\pi$. Dokažte ! (Viz též př. 5,20).

[1/ Označme

$$N = \{[x,y] \in E_2 ;\ y = 0,\ x \in (-\infty, 0\rangle\},$$

$$H(M) = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 = 6\},$$

$$K = M - (N \cup H(M)).$$

Ukažte, že množina $N \cup H(M)$ je nulová, $K \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \mu_2 K$.

2/ Buď dále

$$L = \{[r, \varphi] \in E_2 ;\ r \in (0, \sqrt{6}),\ \varphi \in (-\pi, \pi)\}$$

a definujme zobrazení F množiny $L \subset E_2$ do E_2 předpisem

$$F(r, \varphi) = [x,y] \Leftrightarrow x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi.$$

(zavádíme tzv. polární souřadnice).

Ukažte, že

(A) $\underline{F(L) = K}$ - k tomu je nutné a stačí ukázat, že jednak $F(L) \subset K$ a jednak $K \subset F(L)$.

a/ $F(L) \subset K$: zvolme libovolné $[x,y] \in F(L) \Longrightarrow$ existuje $[r,\varphi] \in L$ tak, že $F(r, \varphi) = [x,y] \Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2 < 6 \Rightarrow [x,y] \in K \cup N$ a ukažte, že nemůže být $[x,y] \in N$,

b/ $K \subset F(L)$: zvolme $[x,y] \in K$ a položme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \varphi = \operatorname{sign} y \,.\, \arccos \frac{x}{r}.$$

Musíme ukázat, že

1/ $[r, \varphi] \in L$

2/ $F(r, \varphi) = [x,y]$.

(B) F je prosté na množině L :

vezměte tedy $[r_1, \varphi_1] \in L$, $[r_2, \varphi_2] \in L$ takové, že $F(r_1, \varphi_1) = F(r_2, \varphi_2)$ a dokažte, že $[r_1, \varphi_1] = [r_2, \varphi_2]$.

(C) F je regulární na množině L (viz definici za větou 58):

k tomu musíme dokázat, že

1/ L je otevřená

2/ F má spojité parciální derivace na L,

3/ $D_F(r, \varphi) \neq 0$ pro $[r, \varphi] \in L$

(vyjde $D_F(r, \varphi) = r$).

Použijeme-li nyní větu 59 o substituci (ověřte předpoklady!) dostáváme

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K dx\, dy = \iint_L r\, dr\, d\varphi ,$$

použijeme-li na poslední integrál Fubiniovu větu, je konečně

$$\mu_2 M = \iint_L r\, dr\, d\varphi = \int_0^{\sqrt{6}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} r\, d\varphi \right) dr = 6\pi \quad . \|$$

5,45. (Polární souřadnice v rovině).

Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem:

$$F(r, \varphi) = [x,y] \Leftrightarrow x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi .$$

Dokažte, že

1/ F je regulární v každé otevřené množině M takové, že

$$M \subset E_2 - \{[r, \varphi] \in E_2 ;\ r = 0 ,\}$$

2/ nechť $P \subset E_2$ je taková množina, že

$$[r,\varphi] \in P \Rightarrow r > 0 , \quad \varphi \in (-\pi, +\pi)$$

(respektive obecněji: existuje takové $\alpha \in E_1$, že

$$[r, \varphi] \in P \Rightarrow r > 0 , \quad \varphi \in (\alpha ; \alpha + 2\pi)) ,$$

potom zobrazení F je prosté v množině P.

‖ Viz návody ve cvičení 5,44 . ‖

5,46. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$. Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 3\pi$. Dokažte! (Viz též př. 5,28).

1/ Položte

$$K = M - (\{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{[x,y] \in E_2 ;$$

$y = 0\,,\ x \in (-\infty\,, 0\rangle\}\ )$

a ukažte, že $K \in \mathcal{M}_2$, $\mu_2 K = \mu_2 M$.

2/ Zaveďte "polární souřadnice", označte

$$L = \{[r,\varphi] \in E_2\ ;\quad r \in (1,2),\ \varphi \in (-\pi, \pi\ )\}$$

a ukažte, že

A/ $F(L) = K$,

B/ F je regulární a prosté v množině L ,

tedy

$$\mu_2 K = \iint_K dx\,dy = \iint_L r\,dr\,d\varphi = \int_1^2 \left(\int_{-\pi}^{\pi} r\,d\varphi\right) dr = 3\pi$$

5,47. Ukažte, že $\displaystyle\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$, je-li $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$.

(Viz též př. 5,35).

Označme opět

$K = M - \{[x,y] \in E_2\ ;\quad x^2 + y^2 = 1\} \cup \{[x,y] \in E_2\ ;\quad y = 0\ ,\ x \in \langle 0, +\infty\ )\}$,

buď $L = \{[r,\varphi] \in E_2\ ;\ r \in (0,1),\ \varphi \in (0,2\pi)\}$,

buď F zobrazení z př. 5,45 (polární souřadnice).

Ukažte, že

A/ $F(L) = K$ (tj. ukažte, že $F(L) \subset K$ a $K \subset F(L)$) ,

B/ F je regulární a prosté v L ,

C/ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \in \mathcal{L}_K^R$.

Lze tedy použít větu o substituci a Fubiniovu větu, dostáváme

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_L \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \frac{rd\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\right) dr = 2\pi$$

5,48. **Poznámka:**

1/ V příkladech 5,44 - 5,47 jsme se snažili ukázat na jednoduchou aplikaci věty 59 o substituci. Bylo též vidět - ve srovnání s větou o substituci pro jednorozměrné integrály - že ve vícerozměrných příkladech, je-li dána množina M a zobrazení F , bude hlavním problémem najít množinu L tak, aby $F(L) = M$. V tom bude spočívat také hlavní obtíž následujících příkladů,

2/ Jako cvičení se pokuste porovnat větu 71 (substituce pro Newtonovy integrály) a větu 59 (substituce pro Lebesgueovy integrály) pro jednorozměrný případ.

5,49. Ukažte, že $\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$ pro $M = \{[x,y] \in E_2 \, ; \, x^2 + y^2 \leq x\}$

(Viz též př.5,36).

Označme $K = M - \{[x,y] \in E_2 \, ; \, x^2 + y^2 = x\}$. Zřejmě $K \in \mathcal{M}_2$. Zaveďme zobrazení F dané polárními souřadnicemi (př. 5,45). Z podmínky $0 < x^2 + y^2 < x$ dostáváme podmínku $0 < r^2 < r \cdot \cos \varphi$, odkud plyne, že jednak $0 < r < \cos \varphi$ a jednak $\cos \varphi > 0$. Označíme-li $L = \{[r,\varphi] \in E_2 \, ; \, 0 < r < \cos \varphi \, , \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ je

A/ $F(L) = K$,

B/ F regulární a prosté v L ,

C/ $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathcal{L}^R_K$,

tedy

$$\iint_M \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_K \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_L \frac{rdrd\varphi}{r} =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos\varphi} dr \right) d\varphi = 2 .$$

Vše proveďte podrobně!

5,50. Buď $a > 0$, $M = \{[x,y] \in E_2 \, ; \, (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2-y^2)\}$.

Potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = 2a^2$. Dokažte !

1/ Křivka $N = \{[x,y] \in E_2 \, ; \, (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2-y^2)\}$ se nazývá lemniskata, máme tedy vlastně spočítat "plochu" množiny, omezené lemniskatou. Ukažte, že množina N je nulová (věta 62 či cvičení 5,103).

2/ Vzhledem k symetrii (cvičení 5,27) a k předchozímu je

$$\mu_2 M = 4 \, \mu_2 K ,$$

kde $K = \{[x,y] \in E_2 \, ; \, (x^2 + y^2)^2 < 2a^2(x^2 - y^2) ,$
$x > 0 \, , \, y > 0 \}$.

Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 takto:

$$F(r, \varphi) = [x,y] \Longleftrightarrow x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

(polární souřadnice). Musíme nalézt množinu $L \subset E_2$ tak, aby $F(L) = K$.

Z podmínky

$$[x,y] \in K \Longleftrightarrow x > 0, \; y > 0, \; (x^2 + y^2)^2 < 2a^2(x^2 - y^2)$$

dostáváme

$$r^4 < 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \quad \cos\varphi > 0, \quad \sin\varphi > 0$$

Odtud plyne, že

$$0 < r^2 < 2a^2\cos 2\varphi \text{ (tedy speciálně } \cos 2\varphi > 0\text{)} \quad r > 0,$$

$$\cos\varphi > 0, \; \sin\varphi > 0.$$

Označíme-li

$$L = \left\{[r,\varphi] \in E_2 ; \; 0 < r < \sqrt{2a^2\cos 2\varphi}, \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{4})\right\},$$

je

A/ $F(L) = K$,

B/ F regulární a prosté v L.

Dostáváme

$$\mu_2 M = 4\mu_2 K = 4\iint_K dx\,dy = 4 \cdot \iint_L r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr\right) d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2$$

Pokuste se nakreslit lemniskatu! ‖

5,51. Buď $a > 0$, $M = \left\{[x,y] \in E_2 ; \; (x^2 + y^2)^3 < a^2(x^4 + y^4)\right\}$, potom $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \frac{3}{4}\pi a^2$. Dokažte !

(Pokuste se nakreslit množinu M).

‖ 1/ Množina M je otevřená v E_2,

2/ Označme

$$K = \left\{[x,y] \in E_2 ; \; x > 0, \; y > 0\right\}.$$

Zaveďme zobrazení F (polární souřadnice) a nechť

$$L = \left\{[r,\varphi] \in E_2 ; \; 0 < r < a\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}, \; \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{2})\right\}.$$

Potom:

A/ $F(L) = K$

B/ F je regulární a prosté v L,

tedy

$$\mu_2 M = 4 \cdot \mu_2 K = 4 \iint_L r \, dr \, d\varphi = \frac{3}{4} \pi a^2 \quad \|$$

5,52. Definujme zobrazení F množiny $L = \{[r,\varphi] \in E_2 \,;\; r > 0 \,,\; \varphi \in (0, \frac{\pi}{2})\}$ do E_2 předpisem :

$$F(r,\varphi) = [x,y] \iff x = r \cdot \cos^2 \varphi \,, \quad y = r \sin^2 \varphi \,.$$

Buď $M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x > 0 \,,\; y > 0\}$.

Ukažte, že

1/ $F(L) = M$

2/ F je prosté v L,

3/ F je regulární v každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

‖ 1/ Zřejmě $F(L) \subset M$. Pro $[x,y] \in M$ položte

$$r = x + y \,, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{y}{x}} \,,$$

potom $[r,\varphi] \in L$ a $F(r,\varphi) = [x,y]$.

2/ Další je snadné.

Zapamatujte si pouze, že Jacobinův determinant zobrazení F

$D_F(r,\varphi) = r \cdot \sin 2\varphi$. ‖

5,53. Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 jako v př. 5,52,

$$F(r,\varphi) = [x,y] \iff x = r \cos^2 \varphi \,, \quad y = r \sin^2 \varphi \,.$$

Označme $L' = \{[r,\varphi] \in E_2 \,;\; r \in (0,+\infty) \,,\; \varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)\}$,

$M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; x > 0 \,,\; y > 0\}$.

Potom:

A/ $F(L') = M$

B/ F je prosté v L'

C/ F je regulární v L'.

Dokažte!

5,54. Buď $a > 0$, $M = \{[x,y] \in E_2 \,;\; (x+y)^4 < ax^2 y \,,\; x > 0\}$.
Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 M = \dfrac{a^2}{210}$.

‖ 1/ M je otevřená a zřejmě $y > 0$ pro libovolný bod $[x,y] \in M$.

2/ Zaveďme zobrazení jako v př. 5,52, pro r, φ dostáváme následující podmínky:

$$r \cos^2 \varphi > 0 \,, \quad r \sin^2 \varphi > 0 \,, \quad r^4 < ar^3 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \,,$$

255 35 79

z těchto podmínek vyplývá, že (omezíme-li se na $\varphi \in (0, 2\pi)$)

$$\varphi \in (0, 2\pi) \ , \quad r < a \cos^4 \varphi \ \sin^2 \varphi \ .$$

Kdybychom tedy označili např.

$$L' = \left\{ [r, \varphi] \in E_2 \ ; \ \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi) \ , \ 0 < r < a \cos^4 \varphi \ \sin^2 \varphi \right\} ,$$

bylo by sice $F(L') = M$, ale zobrazení F by nebylo prosté v L'(viz př. 5,52 a 5,53 - rozmyslete!).

Položme proto např.

$$L = \left\{ [r, \varphi] \in E_2 \ ; \ \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \ , \ 0 < r < a\cos^4 \varphi \ \sin^2 \varphi \right\},$$

potom

A/ $F(L) = M$,

B/ F je regulární a prosté v L (viz 5,52),

tedy

$$\mu_2 M = \iint_M dx\, dy = \iint_L 2 r \sin \varphi \cos \varphi \ dr\, d\varphi =$$
$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi} r \sin \varphi \cos \varphi \ dr \right) d\varphi = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 \varphi \sin^5 \varphi \, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{210} \ .$$

Co by se stalo, kdybychom položili

$$L = \left\{ [r, \varphi] \in E_2 \ ; \ \varphi \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi) \ , \ 0 < r < a \cos^4 \varphi \ \sin^2 \varphi \right\} \ ? \ \|$$

5,55. Buď $a > 0$, $M = \left\{ [x, y] \in E_2 \ ; \ (x + y)^4 < a x^2 y \ , \ x < 0 \right\}$

Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$, $\mu_2 M = +\infty$! (Nakreslete M !).

‖ Použijte zobrazení F z E_2 do E_2 daného předpisem

$$F(r, \varphi) = [x, y] \Leftrightarrow x = -r \cos^2 \varphi \ , \ y = r \sin^2 \varphi \ . \ \|$$

5,56. Uvedeme další typ příkladů, který se velmi často vyskytuje.

Máme např. v E_2 integrovat přes obor

$$M = \left\{ [x, y] \in E_2 \ ; \ a < \varphi_1(x, y) < b \ , \ c < \varphi_2(x, y) < d \right\} ,$$

kde φ_1, φ_2 jsou reálné funkce dvou proměnných.

Zavedeme zobrazení F z E_2 do E_2 takto:

$$F(u, v) = [x, y] \Leftrightarrow u = \varphi_1(x, y) \ , \ u_2 = \varphi_2(x, y)$$

Položme

$$L = \left\{ [u, v] \in E_2 \ ; \ u \in (a, b) \ , \ v \in (c, d) \right\} .$$

25535 29

Je-li nyní

A/ $F(L) = M$,

B/ F prosté a regulární v L ,

tj. rovnosti $u = \varphi_1(x,y)$ $v = \varphi_2(x,y)$ se dají "řešit" pro $u \in (a,b)$, $v \in (c,d)$ podle x,y rovnicemi $x = f_1(u,v)$, $y = f_2(u,v)$, je

$$\iint_M G(x,y)\,dx\,dy = \iint_L G(f_1(u,v),\ f_2(u,v)) \cdot |D_{F^{-1}}(u,v)|\ du dv ,$$

existuje-li jeden z napsaných integrálů.

Nejdříve však ještě uvedeme několik příkladů na zobrazení z E_2 do E_2 .

5,57. Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem

$$F(u,v) = [x,y] \iff x = u+v\ ,\quad y = u.v\ .$$

Označme

$$S = \{[u,v] \in E_2\ ;\quad u = v\},$$

$$T = \{[x,y] \in E_2\ ;\quad x^2 > 4y\}.$$

Potom

1/ $F(E_2 - S) = T$ (kreslete!),

2/ F není prosté v $E_2 - S$,

3/ F je regulární v každé otevřené množině $Q \subset E_2 - S$.

Označíme-li dále $L = \{[u,v] \in E_2\ ;\quad u < v\}$, je

4/ $F(L) = T$,

5/ F prosté v L . Dokažte !

1/ Zvolme $[x,y] \in F(E_2-S)$, potom $[x,y] \in T$.

Neboť pro $[x,y] \in E_2 - T$ neexistuje žádné $[u,v] \in E_2 - S$ takové, že $F(u,v) = [x,y]$.

Zvolme naopak $[x,y] \in T$, řešíme-li soustavu rovnic

$$x = u + v\ ,\quad y = u.v$$

dostáváme dvě dvojice řešení

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4y})\ ,\quad v_1 = \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4y})\ ,$$

$$u_2 = \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 4y})\ ,\quad v_2 = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4y})\ ,$$

Zřejmě $F(u_1, v_1) = F(u_2, v_2) = [x,y]$, $[u_1, v_1] \in E_2 - S$, $[u_2, v_2] \in E_2 - S$, tedy $[x,y] \in F(E_2 - S)$.

2/ Okamžitě plyne z předchozího.

Další je již snadné. ‖

$\boxed{5{,}58.}$ Definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem

$$F(u,v) = [x,y] \Longleftrightarrow x = u.v\ , \quad y = \frac{u}{v}\ .$$

Označme $L_1 = \{[u,v] \in E_2\ ;\quad v = 0\}$

$L_2 = \{[u,v] \in E_2\ ;\quad u = 0\}$,

$L_3 = \{[u,v] \in E_2\ ;\quad u > 0\ ,\ v > 0\}$.

Ukažte, že

1/ F není prosté v $E_2 - L_1$,

2/ F je regulární v každé otevřené množině $L \subset E_2 - L_1 \cup L_2$

3/ F je prosté v L_3 .

Jak vypadají množiny $F(L_i)$ pro $i = 1,2,3$?

$\boxed{5{,}59.}$ Zkoumejte v následujících příkladech, kde je zobrazení F z E_2 do E_2 regulární či prosté.

1/ $F(u,v) = [x,y] \Longleftrightarrow$

a/ $x = u + v\ ,\quad y = (u+v)^2\ ,$

b/ $x = u + v^2,\quad y = u^2$

c/ $x = \dfrac{u}{u^2+v^2}\ ,\quad y = \dfrac{v}{u^2+v^2}\ ,$

d/ $x = u.v\ ,\quad y = u(1-v)\ ,$

e/ $x = \dfrac{u^2}{v}\ ,\quad y = \dfrac{v^2}{u}\ .$

f/ $x = \dfrac{1}{2}(u+v),\ y = \sqrt{u.v}\ ,$

g/ $x = \dfrac{v}{\sqrt{1+u^2}}\ ,\ y = \dfrac{u.v}{\sqrt{1+u^2-v^2}}\ ,$

h/ $x = \dfrac{a}{2}(u+v),\ y = \dfrac{b}{a}(u-v)\ ,\quad a,b \in E_1\ .$

2/* $F(r,\varphi) = [x,y] \Longleftrightarrow x = ar\cos^{\alpha}\varphi\ ,\quad y = br\sin^{\alpha}\varphi\ ,$
$a,b\ \alpha \in E_1$

(zobecnění polární souřadnice).

5,60. Buď $M = \{[x,y] \in E_2\ ;\quad y \leqq x^2 \leq 4y\ ,\quad 2x \leq y^2 \leq 3x\}$ -

kreslete !

Ukažte, že $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = 1$.

1/ Označme $K = \{[x,y] \in E_2 ;\ y < x^2 < 4y ;\ 2x < y^2 < 3x\}$

Množina M je uzavřená, K otevřená v E_2, tedy

$K, M \in \mathcal{M}_2$ a $\mu_2 K = \mu_2 M$ (proč?)

2/ Postupujte "starým" způsobem, dostanete

$$\mu_2 M = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}} \left(\int_{\sqrt{2x}}^{4x^2} dy\right) dx + \int_{\frac{1}{2}\sqrt[3]{3}}^{3\sqrt{2}} \left(\int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3x}} dy\right) dx + \int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{3x}} dx\right) dx = 1 .$$

3/ Položme

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y}$$

a definujme zobrazení F z E_2 do E_2 předpisem

$$F(u,v) = [x,y] \Leftrightarrow u = \frac{y^2}{x},\ v = \frac{x^2}{y} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{uv^2},$$
$$y = \sqrt[3]{u^2v} .$$

Označme

$$L = \{[u,v] \in E_2 ;\quad u \in (2,3),\quad v \in (1,4)\} .$$

Potom

A/ $F(L) = K$,

B/ F je prosté a regulární v L,

C/ funkční determinant zobrazení F^{-1}

$$D_{F^{-1}}(x,y) = -3 ,$$

tedy
$$D_F(u,v) = -\frac{1}{3} .$$

(Jaké jsme zde použili věty? Zkuste též spočítat $D_F(u,v)$ přímo).

Odtud plyne, že

$$\mu_2 M = \mu_2 K = \iint_K dx\,dy = \iint_L \left|-\frac{1}{3}\right| du\,dv = \frac{1}{3}\int_2^3 \left(\int_1^4 dv\right) du = 1.$$

5,61. Ukažte, že $M \in \mathcal{M}_2$ a spočtěte $\mu_2 M$ v následujících příkladech (postupujte přímo anebo pomocí substituce:

a/ $M = \{[x,y] \in E_2 ;\ 2 < x + y < 3,\ x < y < 3x\}$

Zřejmě

$$\mu_2 M = \int_1^{3/2} \left(\int_x^{3-x} dy\right) dx + \int_{\frac{3}{4}}^{1} \left(\int_{2-x}^{3-x} dy\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \left(\int_{2-x}^{3x} dy\right) dx = \frac{5}{8}$$

anebo též po substituci

$$u = x + y ,\quad v = \frac{y}{x}$$

je $\mu_2 M = \iint\limits_{(1,3)\times(1,3)} \frac{u}{(v+1)^2}\, du\, dv = \frac{5}{8}$,

b/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; py < x^2 < qy \; , \; ax < y^2 < bx \; , \text{ kde } 0 < p < q \; , \; 0 < a < b\}$.

Stejná substituce jako v př. 5,60, $\mu_2 M = \frac{1}{3}\,(b-a)(p-q)$,

c/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; a < xy < b \; , \; py < x < qy \; , \text{ kde } 0 < a < b \; , \; 0 < p < q\}$

Položme $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, tj.

$F(u,v) = [x,y] \Leftrightarrow x = \sqrt{uv} \; , \; y = \sqrt{\frac{u}{v}}$,

$L = \{[u,v] \in E_2 \; ; \; u \in (a,b) \; , \; v \in (p,q)\}$

Potom

$$\mu_2 M = \iint\limits_{L} \left|\frac{1}{2v}\right| du\, dv = \frac{1}{2}\,(b-a) \log \frac{q}{p} ,$$

d/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; (x^2+y^2)^2 \leq 2ax^3\}$, kde $a > 0$

Polární souřadnice, $\mu_2 M = \frac{5}{8}\pi a^2$

e/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; (x+y)^3 < a \cdot xy \; , \; x > 0 \; , \; y > 0\}$, $a > 0$.

Substituce z př. 5,52 , $\mu_2 M = \frac{1}{60}\, a^2$,

f/ $M = \{[x,y] \in E_2 \; ; \; (x+y)^5 < a\, x^2 y^2 \; , \; x > 0 \; , \; y > 0\}$, $a > 0$.

Substituce z př. 5,52 , $\mu_2 M = \frac{a^2}{1260}$,

g/ Množina M je omezená křivkou $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$, a,b,c kladná

Ukažte, že $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 < \frac{xy}{c^2}\right\}$

(doplněk této množiny je množina neomezená, stačí zvolit posloupnost bodů $A_n = [an, 0]$; zatímco množina M je omezená, což je např. lehko vidět z vyjádření v zobecněných polárních souřadnicích), zaveďte zobecněné polární souřadnice (viz 5,59 - 2)

$$x = ar \cos\varphi \; , \quad y = b\, r \sin\varphi \; ,$$

dostanete $\mu_2 M = \frac{a^2 b^2}{2c^2}$

h/ M je omezená křivkou $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \varphi(x,y)$, kde

1/ $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$, pak $\mu_2 M = \frac{\pi}{2} ab\,(a^2 + b^2)$,

2/ $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{c^2}$, $c > 0$, pak $\mu_2 M = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3 b}{c^2}$,

3/ $\varphi(x,y) = \frac{x^2 y}{c^3}$, pak $\mu_2 M = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{a^5 b^3}{c^6}$,

i/ množina M je omezená následujícími křivkami

1/ $xy = p$, $xy = q$, $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $0 < p < q$, $0 < a < b$,

potom $\mu_2 M = \frac{1}{3}(q - p) \cdot \log \frac{b}{a}$,

2/ $x^2 = py$; $x^2 = qy$, $y = ax$, $y = bx$, $0 < p < q$, $0 < a < b$,

potom $\mu_2 M = \frac{1}{6}(q^2 - p^2)(b^3 - a^3)$;

*j/ množina M je omezená křivkami

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + (y-a)^2 = a^2, \quad a > 0$$

[Zaveďte polární souřadnice,

$$\mu_2 M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2a \sin\varphi} r\,dr\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr\right) d\varphi = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)],$$

k/ množina M je omezená křivkami

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

[Polární souřadnice, $\mu_2 M = \frac{3}{4}\pi a^2$],

l/ množina M je omezená křivkami

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 - 2Ry = 0, \quad x = 0$$

[Polární souřadnice, $\mu_2 M = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$],

m/ množina M je omezená křivkou $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$

[Nakreslete si křivku M ! a ukažte, že jak množina

$\{[x,y] \in E_2 ;\ x^3 + y^3 < 3axy\}$, tak i množina

$\{[x,y] \in E_2 ;\ x^3 + y^3 > 3axy\}$

jsou neomezené v E_2 (v prvém případě uvažujte např. posloupnost bodů $A_n = [-n,0]$, v druhém $B_n = [0,n]$.

Přidejte proto další podmínku, že M leží v 1.kvadrantu, potom

$M = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^3 + y^3 < 3axy,\ x > 0,\ y > 0\}$ a $\mu_2 M =$
$= \frac{3}{2} a^2$.]

$\boxed{5,62.}$ Dokazujte následující tvrzení:

a/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \leq \frac{x^2 y}{c^3} \, , \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \iint_M xy \, dx \, dy = \frac{1}{840} \, \frac{a^{10} b^6}{c^{12}} \, ,$$

b/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 \, , \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0\right\} \Rightarrow$

$$\iint_M \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \, dx \, dy = \frac{4}{27} \, ,$$

⟦ Substituce $x = r \cos^4 \varphi$, $y = r \sin^4 \varphi$ ⟧ ,

c/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1 \, , \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0\right\}$, $a > 0$,

$b > 0 \Rightarrow \iint_M \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^3 dx \, dy = \frac{2}{21} \, ab$,

⟦ Substituce $x = ar\cos^4 \varphi$, $y = b \, r \sin^4 \varphi$ ⟧ ,

d/ množina M je omezená křivkami $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < a < b$, $0 < p < q$, potom

$$\iint_M \frac{x^2 \sin xy}{y} \, dx \, dy = \frac{\sin pb - \sin pa}{p} - \frac{\sin qb - \sin qa}{q} \, ,$$

e/ množina M je omezená křivkami

$y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $0 < a < b$, $0 < p < q$,

potom

$$\iint_M xy \, dx \, dy = \frac{5}{48} \left(a^{-\frac{6}{5}} - b^{-\frac{6}{5}}\right) . \left(q^{\frac{8}{5}} - p^{\frac{8}{5}}\right) ,$$

f/ množina M je omezena křivkami

$y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$, $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$,

potom

$$\iint_M xy \, dx \, dy = \frac{1}{40} \left(b^4 - a^4\right) \left(\alpha^{-10} - \beta^{-10}\right) ,$$

g/ množina M je omezená křivkou $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2 y$,

potom $$\iint_M \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} = 2 \, ,$$

h/ $M = \left\{[x,y] \in E_2 \; ; \; \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 \leq \frac{xy}{6}\right\} \Rightarrow \iint_M \sqrt{xy} \, dx dy = \frac{2}{\sqrt[4]{6}}$.

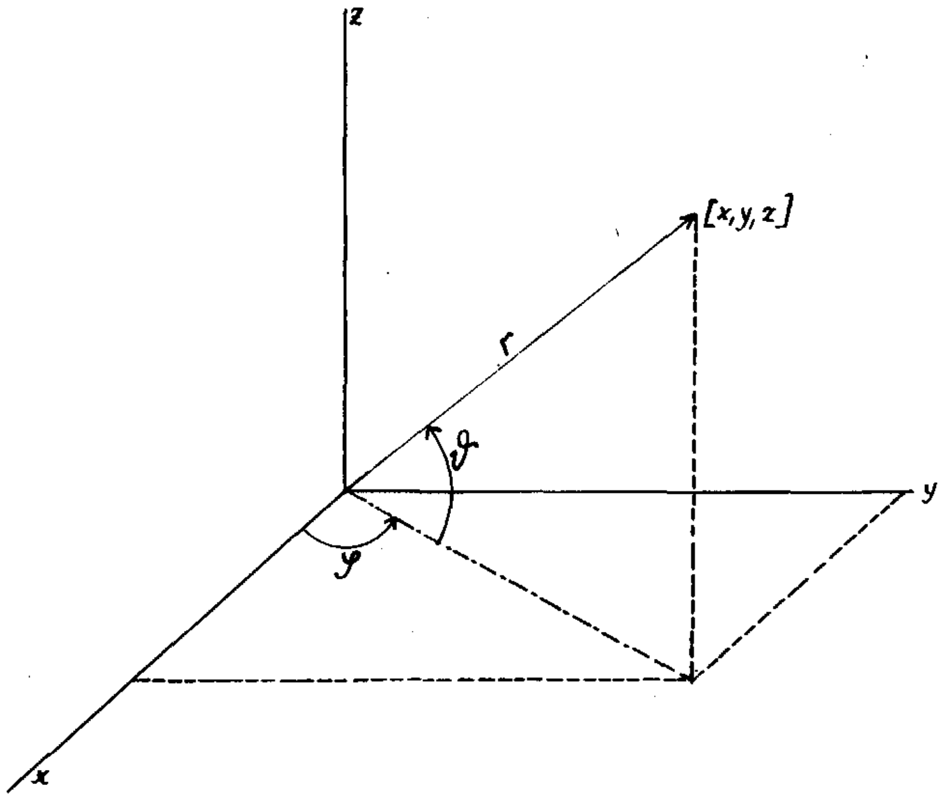
Při výpočtu trojných integrálů pomocí substituce budeme používat zejména tzv. sférické a cylindrické (válcové) souřadnice.

5,63. (Sférické souřadnice).

Definujme zobrazení F z E_3 do E_3 předpisem:

$$F(r, \varphi, \vartheta) = [x,y,z] \Leftrightarrow x = r \cos\varphi \cos\vartheta, \quad y = r \sin\varphi \cos\vartheta, \quad z = r \sin\vartheta .$$

Nakreslete si obrázek a představte si zobrazení F "geometricky".



Obrázek č.7

Ukažte, že

1/ zobrazení F zobrazuje množinu

$$L = \left\{ [r, \varphi, \vartheta] \in E_3 ; \quad r \in (0, +\infty), \varphi \in (0, 2\pi), \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

prostě na množinu $E_3 - N$, kde

$$N = \left\{ [x,y,z] \in E_3 ; \quad x \in \langle 0, +\infty), \quad y = 0 \right\}$$

je nulová množina (v E_3 !),

2/ Jacobiův determinant zobrazení F je roven $r^2 \cos\vartheta$, tedy zobrazení F je regulární v každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

5,64. Leckdy se "sférické souřadnice" zadávají takto:

$F(r, \varphi, \vartheta) = [x,y,z] \Leftrightarrow x = r \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r \sin\varphi \sin\vartheta$

$z = r \cos\vartheta$

(ϑ tedy znamená úhel mezi průvodičem bodu $[x,y,z]$ a osou z).

Zkoumejte prostoru a regularitu tohoto zobrazení obdobně jako v minulém př. 5,63.

5,65. (Cylindrické čili válcové souřadnice).

Definujme zobrazení F z E_3 do E_3 předpisem:

$F(r, \varphi, Z) = [x,y,z] \Leftrightarrow x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = Z$.

Opět si zobrazení F představte geometricky a porovnejte s polárními souřadnicemi v rovině !!

Ukažte, že

1/ zobrazení F zobrazuje množinu

$$L = \{[r, \varphi, Z] \in E_3 ;\ r \in (0, +\infty),\ \varphi \in (0, 2\pi),\ Z \in E_1\}$$

prostě na množinu $E_3 - N$, kde

$$N = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x \in \langle 0, +\infty),\ y = 0\}$$

je nulová množina,

2/ Jacobiův determinant zobrazení F je roven r , tedy zobrazení F je regulární v každé otevřené množině $L_1 \subset L$.

5,66. Spočtěte objem jednotkové koule v E_3 , tj. množiny

$$K = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\} .$$

1/ Množina K je otevřená v E_3 , tedy $K \in \mathfrak{M}_3$.

2/ Buď

$$L = \{[r, \varphi, \vartheta] \in E_3 ;\ r \in (0,1),\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \vartheta \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\},$$

$$N = \{[x,y,z] \in E_3 ;\ x \in \langle 0, +\infty),\ y = 0\}$$

a zaveďme zobrazení F z E_3 do E_3 jako v př. 5,63 (sférické souřadnice).

Ukažte, že

a/ $F(L) = K-N$ (k tomu musíte ukázat, že jednak $F(L) \subset K - N$ a jednak $F(L) \supset K - N$) ,

b/ F je prosté v množině L ,

c/ F je regulární v množině L .

Potom podle věty o substituci a Fubiniovy věty je

$$\mu_3 K = \iiint_K dx\,dy\,dz = \iiint_{K-N} dx\,dy\,dz = \iiint_L r^2 \cos\vartheta \,dr\,d\varphi\,d\vartheta =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta \,d\vartheta \right) d\varphi \right) dr = \tfrac{4}{3}\pi \;.\|$$

5,67. Buď $M = \{[x,y,z] \in E_3 \,;\; x^2+y^2+z^2 \leq 2az,\; x^2+y^2 \leq z^2\}$, $a > 0$ (nakreslete!) Potom $M \in \mathfrak{M}_3$ a $\mu_3 M = \pi a^3$. Dokažte !

1/ Množina M je uzavřená v E_3, tedy $M \in \mathfrak{M}_3$

Označíme-li

$N = \{[x,y,z] \in E_3 \,;\; x^2+y^2+z^2 = 2\,az\} \cup \{[x,y,z] \in E_3 \,;$
$x^2+y^2 = z^2\} \cup \{[x,y,z] \in E_3 \,;\; y = 0,\; x \in \langle 0,+\infty)\}$,

je množina N nulová (ukažte!) a $\mu_3 M = \mu_3(M-N)$.

2/ Zaveďme opět "sférické souřadnice" (tj. zobrazení jako v 5,63). Hledáme nyní množinu L tak, aby

$$F(L) = M - N\,.$$

Z podmínky $x^2+y^2+z^2 < 2az$ dostáváme $r^2 < 2a\,r\sin\vartheta$, čili $0 < r < 2a\sin\vartheta$ a $\sin\vartheta > 0$.

Z druhé podmínky $x^2+y^2 < z^2$ pak $r^2\cos^2\vartheta < r^2\sin^2\vartheta$, čili $\cos^2\vartheta < \sin^2\vartheta$ což dohromady s podmínkami $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\sin\vartheta > 0$ dává konečně $\vartheta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Položme tedy

$$L = \{[r,\varphi,\vartheta] \in E_3 \,;\; r \in (0, 2a\sin\vartheta),\; \vartheta \in (\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}),\; \varphi \in (0, 2\pi)\}\,.$$

Ukažte, že

A/ $F(L) = M - N$,

B/ F je regulární a prosté v L.

Tedy

$$\mu_3 M = \mu_3(M-N) = \iiint_{M-N} dx\,dy\,dz = \iiint_L r^2\cos\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta =$$
$$= \pi a^3 \;\|$$

5,68. Nechť množina $M \subset E_3$ je omezená plochami $z = x^2+y^2$, $z = 2$ (kreslete!).

Potom $\iiint_M z^2\,dx\,dy\,dz = 4\pi$, dokažte!

1/ Označme $M_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z > x^2 + y^2\}$,

$$M_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z < x^2 + y^2\},$$

$$N_1 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z > 2\},$$

$$N_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad z < 2\}.$$

Množina $M_1 \cap N_1$ je neomezená (neboť např. $[0,0,n] \in M_1 \cap N_1$ pro $n > 2$), rovněž tak množiny $M_2 \cap N_1$, $M_2 \cap N_2$ jsou neomezené. Množina $M_1 \cap N_2$ je omezená, neboť

$$M_1 \cap N_2 = \{[x,y,z] \in E_3 ; \quad x^2 + y^2 < z < 2\},$$

tedy $M \quad M_1 \cap N_2$. Odtud též vyplývá, že $M \in \mathfrak{M}_3$.

2/ Označme $M_{x,y}$ průmět množiny M do roviny x,y, zřejmě $M_{x,y} = \{[x,y] \in E_2 ; \; x^2 + y^2 < 2\}$ (dokazujte !). Pro $[x,y] \in M_{x,y}$ je

$$M^{x,y,*} = (x^2 + y^2, 2),$$

tedy $\iiint_M z^2 dx\,dy\,dz = \iint_{M_{x,y}} \left(\int_{M^{x,y,*}} z^2 dz\right) dx\,dy =$

$$= \iint_{M_{x,y}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} z^2 dz\right) dx\,dy = \iint_{M_{x,y}} \frac{1}{3}\left[8 - (x^2 + y^2)^3\right] dx\,dy.$$

Zde již můžeme integrovat přímo podle Fubiniovy věty (zkuste!), výhodnější bude ale použít polární souřadnice, potom

$$\iiint_M z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left[(8 - r^6)\, r\,dr \quad d\varphi \right] = 4 \,.\, \pi \right. .$$

3/ Označíme-li M_z průmět množiny M do osy z, je

$$M_z = (0,2) \quad \text{a pro} \quad z \in M_z \quad \text{jest}$$

$$M^{*,*,z} = \{[x,y] \in E_2 ; \; x^2 + y^2 < z\}.$$

Tedy

$$\iiint_M z^2\,dz\,dx\,dy = \int_{M_z} \left(\int_{M^{*,*,z}} z^2\,dx\,dy\right) dz = \int_0^2 z^2 \mu_2 M^{*,*,z}\,dz,$$

ak $M^{*,*,z}$ je vnitřek kruhu o poloměru $\sqrt{z}$, tedy

$$\mu_2 M^{*,*,z} = \pi z \quad \text{a}$$

$$\iiint_M z^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \pi z^3 dz = 4\pi .$$

4/ Zkusme také použít cylindrické souřadnice

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = Z.$$

Označíme-li

$$L = \{[r, \varphi, Z] \in E_3 ; \; r \in (0,\sqrt{Z}), \varphi \in (0,2\pi), Z \in (0,2)\},$$

jest
$$\iiint_M z^2 dx\,dy\,dz = \iiint_L rZ^2\,dr\,d\varphi\,dZ = 4\pi \quad .\|$$

5,69. Spočítejte míry následujících množin:

a/ množina $M \subset E_3$ je omezená plochami

$$x = 0\ ,\quad x = a\ ,\quad y = 0\ ,\quad y = b\ ,\quad z = 0\ ,\quad z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\ ,$$

a,b,p,q,z vesměs kladná $\Rightarrow \mu_3 M = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q}\right)$,

b/ množina M omezená $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 \leqq r^2$, $r < R \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_3 M = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right)$

c/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\ ;\ (x^2 + y^2 + z^2) \leqq a^3 z\ ,\ x \geqq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0\right\}$

‖ Sférické souřadnice, $\mu_3 M = \frac{1}{6}\pi a^3$ ‖ ,

d/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\ ;\ (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz\right\}$, $\mu_3 M = \frac{1}{6}a^3$

e/ množina M je omezená plochou $(x^2 + y^2 + z^2)^n = x^{2n-1}$, $n > 1$

‖ položte $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\varphi\sin\vartheta$

$$\mu_3 M = \frac{\pi}{3(3n-1)} \quad \|,$$

*f/ množina M omezená $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$

$$\| \ \mu_3 M = \frac{4}{3}\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \quad \|,$$

*g/ množina M omezena $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = 3z^3$, $\mu_3 M = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$

h/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\ ;\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \leqq \frac{x^2 y}{h^3}\right\}$

a,b,c,h kladná

‖ položte $x = ar\cos\varphi \cdot \cos\vartheta$, $y = br\cos\varphi \cdot \cos\vartheta$, $z = cr\sin\vartheta$,

$$\mu_3 M = \frac{\pi}{192}\ \frac{a^7 b^4 c}{h^9} \quad \|$$

i/ $M = \left\{[x,y,z] \in E_3\ ;\ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 \leqq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right\}$

$\mu_3 M = \frac{\pi^2}{4}abc$,

j/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leqq \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \cdot \frac{z}{c} \right\}.$

$\mu_3 M = \frac{\pi}{60}\, abc$,

k/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$,

$z^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $y = x$

⟦ sférické souřadnice , $\mu_3 M = \frac{21 . \sqrt{2}\, \pi}{4}$, ⟧

l/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \leqq 1 \right\}$, $\mu_3 M = \frac{4}{35}\, \pi\, abc$

⟦ položit $x = ar \sin^3 \varphi \cos^3 \vartheta$; $y = br \sin^3 \varphi \sin^3 \vartheta$,
$z = cr \, . \cos^3 \varphi$, ⟧

m/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad (x + y + z)^2 < ay , \quad x > 0 , \; y > 0 , \; z > 0 \right\}$,
$\mu_3 M = \frac{1}{60}\, a^3$

⟦ položte $x = r \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta$, $y = r \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta$,
$z = r \cos^2 \vartheta$ ⟧,

n/ $M = \left\{ [x,y,z] \in E_3 \; ; \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leqq ax , \quad a > 0 \right\} \Rightarrow \mu_3 M =$
$= \frac{1}{3}\, \pi\, a^2 bc$,

o/ M je omezena $c(x^2 + y^2) + a^2 z = a^2 c$, $z = 0$, $a > 0$,
$c > 0$

⟦ cylindrické souřadnice, $\mu_3 M = \frac{1}{2}\, \pi\, a^2 c$ ⟧

p/ M je omezena plochami $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_3 M = \frac{7}{6}\, \pi$,

q/ M je omezena $x^2 + y^2 = 4z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, $\mu_3 M =$
$= \frac{8}{3}\, \pi \, (6\sqrt{3} - 5)$,

r/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$
$\Rightarrow \mu_3 M = \frac{80}{3}\, \pi$

s/ M je omezena $y^2 = pz$, $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $p > 0$,
$\mu_3 M = \frac{\pi a^4}{4p}$,

t/ M omezena $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = z$, $z = 0 \rightarrow \mu_3 M = \frac{\pi R^4}{2}$, u/ spočítejte příklady v 5,42 pomocí substituce (pokud je to výhodné).

5,70. **Dokažte následující tvrzení:**

a/ $M = \{[x,y,z] \in E_3 \ ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\} \Rightarrow$

$$\iiint_M \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz = \frac{4}{5}\pi abc \ ,$$

b/ $M = \{[x,y,z] \in E_3 \ ; \quad x^2 + y^2 \leq 2az, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\} \Rightarrow$

$$\iiint_M (x + y + z)^2\, dx\, dy\, dz = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right),$$

c/ $M = \{[x,y,z] \in E_3 \ ; \quad y^2 + z^2 \leq x^2 \ , \quad x \geq 0 \ , \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

$$\iiint_M (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\pi R^5}{5}\,(2 - \sqrt{2}) \ ,$$

d/ M je omezena $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = ax^2y \ , \quad z = 0 \Rightarrow \iiint_M \frac{xyz}{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz =$

$$= \frac{a^4}{144} \ ,$$

e/* $M = \{[x,y,z] \in E_3 \quad x \geq 0 \ , \quad y \geq 1 \ , \quad z \geq 1 \ , \quad xyz \leq 1\} \Rightarrow$

$$\iiint_M e^{xyz} \cdot x^2y\, dx\, dy\, dz = \frac{e}{2} - 1$$

[Zaveďte substituci $x = u \ , \quad y = \frac{u+v}{u} \ , \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}$],

f/ M je omezena $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , \quad x^2 + y^2 = 3z \Rightarrow \iiint_M z\, dx\, dy\, dz =$

$$= \frac{13}{4}\pi \ .$$

Fubiniovy věty lze též užít k výpočtu některých integrálů. Metodě, podle které budeme v následujících příkladech postupovat, se někdy říká "integrace podle parametru".

5,71. Spočtěte integrál $I(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx$.

(viz též př. 6,44 .)

[Lehko zjistíte viz obdobný příklad 3,42 - že pro $a \leq 0, \quad b > 0$ anebo pro $a > 0 \ , \quad b \leq 0$ integrál $I(a,b)$ diverguje. Buď tedy $a > 0 \ , \quad b > 0$, nechť např. je $b < a$.

Uvažujme následující integrál I ,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\, dx\, dy \ , \text{ kde } M = \{[x,y] \in E_2 \ ; \quad x \in (0,+\infty) \quad y \in (b,a)\}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2y^2}$ je spojitá a kladná na množině M , tedy $\frac{1}{1+x^2y^2} \in \mathcal{L}_M^R$ a můžeme použít Fubiniovu větu.

Dostáváme

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_b^a \frac{dy}{1+x^2y^2} \right) dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx =$$

$$= I(a,b) ,$$

na druhé straně, provedeme-li integraci v obráceném pořadí,

$$I = \iint_M \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx\,dy = \int_b^a \left(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2}\,dx \right) dy = \int_b^a \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{y} \right]_{x=0}^{x=+\infty} dy =$$

$$= \int_b^a \frac{\pi}{2y}\,dy = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

Odtud vyplývá, že

$$I(a,b) = I = \frac{\pi}{2} \cdot \log \frac{a}{b} .$$

V praxi ovšem funkci $\frac{1}{1+x^2y^2}$ a množinu M musíme nalézt, obyčejně postupujeme takto:

$$\frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} = \left[\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right]_{y=b}^{y=a} = \int_b^a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\operatorname{arctg} yx}{x} \right) dy =$$

$$= \int_b^a \frac{1}{1+y^2x^2}\,dy . \|$$

Z uvedeného příkladu bylo vidět, v čem spočívá metoda integrace podle parametru. Oklikou přes dvojný integrál se nám podařilo spočítat integrál, s kterým bychom si jinak těžko věděli rady. Jiné způsoby výpočtu těchto integrálů, pomocí metody derivace podle parametru, jsou uvedeny v následující 6. kapitole.

5,72. Dokažte, že $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,dx = \log \frac{b+1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$, $b \in (-1,+\infty)$.

1/ Zjistěte jako cvičení, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > -1$, $b > -1$.

2/ Buď $-1 < a < b$. Potom

$$\frac{x^b-x^a}{\log x} = \left[\frac{x^y}{\log x} \right]_{y=a}^{y=b} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^y}{\log x} \right) dy = \int_a^b x^y \, dy \, .$$

Ukažte, že na integrál

$$\iint_M x^y \, dx \, dy \, , \quad M = \{ [x,y] \in E_2 \, ; \quad x \in (0,1) \quad y \in (a,b) \}$$

můžete použít Fubiniovu větu, dostanete

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x} \, dx = \iint_M x^y dx \, dy = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \log \frac{b+1}{a+1} \, .$$

5,73. Poznámka:

Speciální volbou hodnot a,b dostáváme z minulého příkladu např.

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\log x} \, dx = \log 2 \; (b = 1 \, , \quad a = 0 \,) \, ,$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\log x} \, dx = \log \tfrac{3}{2} \; (b = \tfrac{1}{2} \, , \quad a = 0), \text{ atd.},$$

kteréžto integrály bychom asi jinak těžko počítali.

5,74. Ukažte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x} = \pi \arcsin \frac{b}{a} \quad \text{pro} \quad 0 < b \leq a \, .$$

A/ Použijte vztahů

1/ $$\log \frac{a+b \sin x}{a-b \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = 2ab \int_0^1 \frac{dy}{a^2-b^2y^2 \sin^2 x}$$

pro $0 < b \leq a$,

2/ $$\frac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x} \in \mathcal{L}_M^R \qquad \text{pro} \quad M = \{ [x,y] \in E_2 \, ;$$

$$x \in (0, \tfrac{\pi}{2}), \quad y \in (0,1) \} \, ,$$

3/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{A^2 - B^2 \sin^2 z} = \frac{\pi}{2A} \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2-B^2}} \quad \text{pro} \quad |A| > |B| \, .$$

B/ Použijte též vztahu

255 35 / 10

$$\frac{1}{\sin x} \cdot \log \frac{a+b\sin x}{a-b\sin x} = 2a \int_0^1 \frac{dy}{a^2 - y^2 \sin^2 x} \quad .$$

Jaký bude výsledek pro $a \leq b < 0$?]

5,75. Ukažte, že $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \log(1+\sqrt{2})$.

[Použijte vztahů

1/ $$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2} \;,$$

2/ $$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} \quad] .$$

5,76. Dokažte následující tvrzení

a/ $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \qquad \text{pro} \quad a \geq 0,\ b \geq 0$$

[Použijte příkladu 5,84 , viz též 6,35]

b/ $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{b}{a} \qquad \text{pro} \quad a > 0\ ,\quad b > 0\ ,$$

c/ $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \log\frac{b}{a} \qquad \text{pro} \quad a > 0\ ,\quad b > 0\ ,$$

d/ $$\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) - \log(1+b^2x^2)}{x^2}\, dx = \pi\,(a-b) \qquad \text{pro} \quad a,b \in E_1\ ,$$

e/ $$\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx = \sqrt{\pi}\,(b-a) \qquad \text{pro} \quad a,b \in E_1\ ,$$

f/ $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b\sin x}{a}\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{a} \qquad \text{pro} \quad a > 0\ ,\ b \geq 0$$

[$$\frac{1}{\sin x} \operatorname{arc\,tg} \frac{b\sin x}{a} = \int_0^1 \frac{ab}{a^2 + b^2y^2\sin^2 x}\, dy \quad]$$

Další část této kapitoly věnujeme otázkám konvergence a divergence integrálů funkcí více proměnných. Důležitou roli zde bude hrát věta o substituci – ještě jednou si ji zopakujte !

25535 210

5,77. Pro které hodnoty α konverguje $\iint_M \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}$,

je-li $M = \{[x,y] \in E_2 ; \; x^2+y^2 \leqq 1\}$?

Funkce $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ jest kladná a spojitá v množině $M - \{[0,0]\}$ tedy zajisté $\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \in \mathscr{L}_M^R$ pro jakékoliv $\alpha \in E_1$ (znovu si uvědomte, že daná funkce není definovaná všude v množině M - není totiž definována v počátku - ale protože jednobodová množina je nulová množina, můžeme naši funkci dodefinovat v počátku jak chceme, aniž tím cokoliv změníme na existenci či konvergenci integrálu).

Zavedeme zobrazení F z E_2 do E_2 (polární souřadnice)

$$F(r, \varphi) = [x,y] \Leftrightarrow \quad x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi ,$$

dostáváme, že

$$\iint_M \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} = \iint_L r^{1-2\alpha}\, d r\, d\varphi ,$$

kde $L = \{[r,\varphi] \in E_2 ; \quad r \in (0,1) , \quad \varphi \in (0,2\pi)\}$.

Víme, že druhý integrál

$$\iint_L r^{1-2\alpha} dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^{1-2\alpha}\, dr\right) d\varphi$$

konverguje, právě když $1 - 2\alpha > -1$,čili pro $\alpha < 1$.

Podle věty o substituci tedy náš původní integrál konverguje, právě když $\alpha < 1$.

Vše si důkladně a detailně rozmyslete a proveďte !

5,78. Buď $M = \{[x,y] \in E_2 ; \; x^2+y^2 \leqq 1\}$, ukažte, že

a/ $\frac{1}{(2x^2+3y^2)^\alpha} \in \mathscr{L}_M \Leftrightarrow \alpha < 1$

Postupujte stejně jako v minulém př. 5,77, zaveďte "zobecněné polární souřadnice"

$$x = \sqrt{3}\, r\cos\varphi , \quad y = \sqrt{2}\, r\sin\varphi ,$$

b/ $\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^2-xy+y^2)^\alpha}$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Ukažte, že $\frac{1}{(x^2-xy+y^2)^\alpha} \in \mathscr{L}_M^R$ (kde není funkce definována?) a že

$$\iint_M \frac{dxdy}{(x^2-xy+y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1-\sin\varphi\cos\varphi)^\alpha} \cdot \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-1}}\,dr\,,$$

přičemž první integrál existuje jako Riemannův pro jakékoliv $\alpha \in E_1$ a druhý integrál konverguje, právě když $\alpha < 1$.‖

5,79. Buď $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, potom

$$\iint_M \frac{dx\,dy}{(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)^\alpha} \quad \text{konverguje} \iff \alpha < 1\,.$$

Použijte vztahů

$$x \in \langle 0,1\rangle \Rightarrow \frac{2}{\pi}\,x \leq \sin x \leq x\,,\quad \cos 1 \leq \cos x \leq 1\,,$$

tedy funkce $\dfrac{1}{(y^2\cos^2 x + \sin^2 x)^\alpha}$ se bude "chovat" asi stejně jako funkce $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ – proveďte podrobně ! , při odhadech nutno rozlišit případy $\alpha \geq 0$, $\alpha < 0$.‖

5,80. Zkoumejte konvergenci a divergenci následujících integrálů:

a/ $M = \{[x,y] \in E_2\,;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, pak $\displaystyle\iint_M \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$ konverguje $\iff \alpha < 1$,

b/ $M = \{[x,y] \in E_2\,;\ x^2 + y^2 \geq 1\}$, pak $\displaystyle\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ konverguje $\iff \alpha > 1$,

c/ $M = \{[x,y] \in E_2\,;\ x^\alpha + x^\beta \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ $\alpha > 0$, $\beta > 0$, potom

1/ $\displaystyle\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^\alpha + y^\beta)^m}$ konverguje $\iff \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} > m$,

2/ $\displaystyle\iint_M \frac{dxdy}{(1-x^\alpha - y^\beta)^m}$ diverguje $\iff m \geq 1$,

použijte substituce

$$x = r^{\frac{2}{\alpha}} \cdot \cos^{\frac{2}{\alpha}}\varphi\,,\quad y = r^{\frac{2}{\beta}}\,\sin^{\frac{2}{\beta}}\varphi$$ ‖ ,

d/ $M = \{[x,y] \in E_2\,;\ x^\alpha + y^\beta \geq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, potom

$$\iint_M \frac{dxdy}{(x^\alpha + y^\beta)^m} \text{ konverguje} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < m ,$$

e/ M je omezena křivkami $y = 0$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$,

potom $\iint_M \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ konverguje

‖ zavedeme-li polární souřadnice, existuje takové $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ (nezáleží nám teď na jeho velikosti), že

$$\iint_M \frac{dxdy}{x^2 + y^2} = \iint_L \frac{1}{r} \, dr \, d\varphi , \text{ kde}$$

$$L = \left\{ [r, \varphi] \in E_2 ; \; r \in \left(\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} , 1 \right) , \; \varphi \in (0, \varphi_0) \right\},$$

poslední integrál je roven $\int_0^{\varphi_0} \log \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} \, d\varphi$,

o kterém zjistíme, že konverguje ‖ ,

f/ $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \; x \geqq 0 , \; y \geqq 0 , \; x + y \leqq 1 \right\}$, potom

$$\iint_M \frac{dxdy}{1-x^2-y^2} \text{ konverguje}$$

‖ Zavedeme-li polární souřadnice, bude

$$\iint_M \frac{dxdy}{1-x^2-y^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\sin 2\varphi}{1+\sin 2\varphi} \, d\varphi$$

a poslední integrál konverguje ‖ ,

g/ definujme funkci f předpisem $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,

potom

1/ $M = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \; x \geqq 0 , \; x \leqq y \leqq 1 \right\} \Rightarrow \iint_M f = +\infty$

‖ přímý výpočet anebo polární souřadnice ‖ ,

2/ $N = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \; y \geqq 0 , \; 1 \geqq x \geqq y \right\} \Rightarrow \iint_N f = -\infty$,

3/ $P = \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \Rightarrow \iint_P f$ neexistuje

‖ použijte dvou předchozích výsledků a věty 26, či věty 42, viz též př. 5,81 ‖ ,

4/ $O = \left\{ [x,y] \in E_2 ; \; x \in \langle 0,1 \rangle , \; y \in (1, +\infty) \right\} \Rightarrow \iint_O f$ konverguje, 5/ $Q = \{[x,y] \in E_2 ;\ x \leq y,\ x \geq 1\} \Rightarrow \iint_Q f$ nekonverguje,

h/ M je omezena křivkami $y = 0$, $x = \pi$, $y = x$, potom

$$\iint_M \log \sin (x-y)\, dx\, dy \quad \text{konverguje .}$$

⌈ Zaveďte substituci $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$ a ukažte, že

$$\iint_M \log \sin (x-y) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \log \sin v\, dv ,$$ poslední integrál konverguje;

použijeme-li výsledků cvičení 6,30, 5,87 či 8,64, dostáváme navíc, že

$$\iint_M \log \sin (x-y) dx dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \log \sin v\, dv = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin v\, dv =$$
$$= -\frac{\pi^2}{2} \log 2 \ ⌋ ,$$

i/ $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, $k \in E_1 \Rightarrow \iint_M e^{-x-y} \dfrac{\cos 2k\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\, dx\, dy$ konverguje

⌈ daný integrál odhadněte a použijte vztahu $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ ⌋ ,

j/ $M = (0, +\infty) \times (0, +\infty) \Rightarrow \iint_M e^{-xy} \sin x\, dx\, dy$ nekonverguje

⌈ Ukažte, že

$$\iint_M |e^{-xy} \sin x|\, dx\, dy = \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = +\infty$$

(viz př. 3,47) a použijte věty 44 .

Může být $e^{-xy} \sin x \in \mathcal{L}^*_M$? ⌋ ,

k/ $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty) \Rightarrow \iint_M \sin (x^2+y^2) dx dy$ neexistuje

⌈ předpokládejte $\sin(x^2+y^2) \in \mathcal{L}^*_M$, označte pro $n = 1,2,\ldots$

$K_n = \{[x,y] \in E_2 ;\ x^2 + y^2 \leq n,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$,

Potom podle věty 28 musí být

$$\iint_M \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} \sin(x^2 + y^2) dx\, dy ,$$

zavedete-li do posledního integrálu polární souřadnice, jest

$$\iint_{K_n} \sin (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi}{4}(1 - \cos n^2)$$

a poslední výraz nemá pro $n \longrightarrow +\infty$ limitu . ⌋

Obdobně se vyšetřuje konvergence a divergence troj - i vícerozměrných integrálů. Nebudeme se tím však zabývat.

Fubiniova věta nám tedy zaručuje, že dvojný integrál se rovná kterémukoliv dvojnásobnému, toto obecně nemusí být pravda (potom ovšem dvojný integrál nemůže existovat!). Uveďme příklady.

5,81. Definujme funkci f takto: $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$, potom

a/ $\iint_M f$ neexistuje, je-li $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

b/ $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy = \frac{\pi}{4}$,

c/ $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = - \frac{\pi}{4}$.

K prvnímu bodu viz příklad 5,80, ostatní ověřte přímým výpočtem.

5,82. Ukažte, že

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \ , \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx \right) dy = -\frac{1}{2}$$

Odtud odvoďte podle Fubiniovy věty, že $\displaystyle\iint_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle} \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\, dy$ neexistuje. Poslední tvrzení dokažte také přímo.

5,83. Ukažte, že

a/ $$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right] \cdot e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx \right) dy = -\frac{1}{e} \ ,$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right] e^{-\frac{x}{y^2}}\, dy \right) dx = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2} \ .$$

b/ buď $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ na množině $M = E_1 \times E_1$, potom

1/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy \right) dx = 0$,

2/ $f \notin \mathcal{L}^*_M$

c/ buď

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} & \text{pro } 0 < y < \left| x - \frac{1}{2} \right| , \\ 0 & \text{jinde v } E_2 , \end{cases}$$

buď dále $M = (0,1) \times (0,1)$, potom

1/ $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$ neexistuje ,

$$2/ \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy = 0 .$$

Zbytek této kapitoly věnujeme různým příkladům.

5,84. a/ Spočtěte $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (tzv. Laplaceův integrál).

1/ V př. 3,32 jsme ukázali, že tento integrál konverguje.

2/ Označte $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

Pomocí Fubiniovy věty ukažte, že

$$\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = I^2 .$$

Do integrálu $\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ "zaveďte polární souřadnice", dostanete

$$\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty r\,e^{-r^2}\,dr\right) d\varphi = \frac{\pi}{4} ,$$

odtud vzhledem k podmínce $I \geq 0$ plyne $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3/ Jiný způsob:

do integrálu $\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$ proveďte substituci

$x = u$, $y = u.v$, dostanete

$$\iint_M e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-u^2(1+v^2)} \cdot u\,du\right) dv = \frac{\pi}{4} .$$

*

4/ Ještě jiný způsob:

Pro $n = 1,2 \ldots$ položte

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{pro } x \in (0, \sqrt{n}) , \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \sqrt{n}, +\infty) . \end{cases}$$

Ukažte, že

a/ $|f_n(x)| \leq e^{-x^2}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $n = 1,2 \ldots$,

b/ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x^2}$ pro každé $x \in (0,+\infty)$.

Podle Lebesgueovy věty je tedy

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx .$$

Zbývá spočítat poslední integrály a jejich limitu. Po provedení substituce $x = \sqrt{n} \cdot \cos t$, dostáváme s použitím Wallisovy formule výsledek.

Viz též V.Jarník, Integrální počet II . ||

b/ Substitucí odtud lehko odvodíte, že $\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pro $a \in (0,+\infty)$.

5,85. Uvedeme ještě jeden důležitý příklad.

Buď $M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, $I = \iint_M \frac{dt\,dx}{(1+t)(1+tx^2)}$.

Na poslední integrál použijte Fubiniovu větu (pokaždé v jiném pořadí integrace) a dostanete jednak

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(1+t)(1+tx^2)} \right) dt = \frac{\pi^2}{2} ,$$

jednak

$$I = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)(1+tx^2)} \right) dx = 2 \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx .$$

Ukažte dále, že $\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\,dx = -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx$

|| Použijte v prvním integrálu substituci $x = \frac{1}{t}$ na intervalu $(1,+\infty)$ a pak vztahu

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\log y}{1-y}\,dy = \int_0^1 \frac{\log y}{1-y^2}\,dy + \int_0^1 \frac{y \log y}{1-y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\log y}{1-y^2}\,dy + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log z}{1-z}\,dz . \,||$$

Konečně s použitím příkladu 4,25

$$\left[\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = -\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \right]$$

dostáváme

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} .$$

Podařilo se nám tímto způsobem s pomocí Fubiniovy věty sečíst konvergentní řadu $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$,

(jiným způsobem lze sečíst tuto řadu např. pomocí teorie Fourierových řad). Pomocí tohoto výsledku ukažte, že

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} .$$

(Použijte známých vlastností absolutně konvergentních řad a následující myšlenku:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ,$$

jednotlivé kroky podrobně odůvodněte!)

Ukažte též, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right) .$$

5,86.* Spočtěte $I = \iint_M \frac{du\,dt}{(1+tu)(1+tu^2)}$, kde

$M = \{[t,u] \in E_2 \;;\; t \in (0,+\infty) \;,\; u \in (1,+\infty)\}$.

Použijete-li Fubiniovu větu, dostanete jednak

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+tu)(1+tu^2)} \right) du = \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u(u-1)}\, du ,$$

jednak

$$I = \int_0^{\infty} \left(\int_1^{\infty} \frac{du}{(1+tu)(1+tu^2)} \right) dt = -\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\log x \, dx}{x(x-1)} + \frac{\pi^2}{4} .$$

Odtud dostáváme /viz též př. 4,26/, že

$$\frac{\pi^2}{6} = \int_1^{\infty} \frac{\log u}{u(u-1)}\, du = \int_0^{\infty} \frac{z\,dz}{e^z - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Opět se nám podařilo sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5,87. Počítejte $\iint_M \frac{dx\, d\lambda}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x}$, $M = \{[x,\lambda] \in E_2 \;;\; x \in (0,\frac{\pi}{2}),\ \lambda \in (0,1)\}$.

Lehko zjistíte, že $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+\lambda}$ pro $\lambda \in (0,+\infty)$

(viz též př. 6,17), tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx ,$$

zatímco

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x} \right) d\lambda = \frac{\pi}{2} \cdot \log 2 .$$

Odtud podle Fubiniovy věty dostáváte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \log 2 .$$

Integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx$ existuje jako Riemannův i jako Newtonův, budeme-li jej integrovat jako Newtonův per partes, obdržíme

$$(N) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx = - (N) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$$

/všimněte si, že integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ neexistuje již jako Riemannův, existuje pouze jako Lebesgueův či Newtonův/. Odtud plyne, že

$$(L) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = (N) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = - \frac{\pi}{2} \cdot \log 2$$

/viz též příklady 6,30 a 8,64/.

5,88.^{o} **Poznámka.**

Znovu na tomto místě připomeňme, že nemáme prozatím žádnou větu o integraci per partes pro Lebesgueovy integrály. Chceme-li přesto integrovat per partes, můžeme tuto metodu použít pouze pro Newtonovy integrály /věta 70/; víme-li, že daná funkce má jak Lebesgueův tak Newtonův integrál, musí pak mezi těmito integrály nastat rovnost /viz 3,15/.

5,89.* Zkoumejte $F(m) = \iint_M \cos mx \cdot \alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, dx\, d\alpha$,

$M = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

1/ Ukažte, že $\cos mx \cdot \alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} \in \Lambda_M$ pro každé $m \in E_1$.

2/ Ze vztahů

$$\left| \cos mx \cdot \alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} \right| \leq \alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)} ,$$

$$\iint_M \alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, dx\, d\alpha = \frac{\pi}{4}$$

plyne, že daný integrál pro každé $m \in E_1$ konverguje /věta 31/, lze tedy použít Fubiniovu větu.

3/ Použijete-li výsledků ze cvičení 5,84 a 6,51 dostanete pro $m \geq 0$, že

$$F(m) = \int_0^{\infty} \alpha\, e^{-\alpha^2} \left(\int_0^{\infty} \cos mx \cdot e^{-\alpha^2 x^2}\, dx \right) d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 - \frac{m^2}{4\alpha^2}}\, d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{4}\, e^{-m}$$

a také

$$F(m) = \int_0^\infty \cos mx \left(\int_0^\infty \alpha\, e^{-\alpha^2(1+x^2)}\, d\alpha\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx$$ ‖.

5,90. Ukažte, že pro každé $m \geqq 0$ je

$$C(m) = \int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-m} ,$$

$$S(m) = \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2}\,(1 - e^{-m}) .$$

‖ 1/ Jako cvičení ukažte, že oba integrály konvergují.

2/ Podle předešlého cvičení 5,89 jest $C(m) = \frac{\pi}{2} e^{-m}$.

3/ Ukažte - viz kapitolu o derivaci integrálu podle parametru - že

$S'(m) = C(m)$,

odtud vzhledem k podmínce $S(0) = 0$ dostáváme tvrzení. ‖

Jaký bude výsledek pro $m < 0$?

5,91.* Ukažte, že $\int_0^\infty \log \left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right) . \cos mx\, dx = \frac{\pi}{m}\,(e^{-bm} - e^{-am})$

pro $a > 0$, $b > 0$, $m > 0$.

‖ Použijte vztahu

$$\log \left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right) \cos mx = \int_b^a \frac{2y \cos mx}{y^2+x^2}\, dy$$

/jak jej odvodíte? / ,

Fubiniovu větu a výsledek předchozího cvičení 5,90.

Viz též př. 6,68 . ‖

Jaký bude výsledek pro $m < 0$, $a \leqq 0$, $b \leqq 0$ či pro $m = 0$?

5,92.* Ukažte, že

a/ $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}\, e^{-ma}$ pro $a > 0$, $m \geq 0$,

b/ $\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4a}\,(1-e^{-2ma})$ pro $a > 0$, $m \geq 0$,

c/ $\int_0^\infty \frac{\cos^2 mx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4a}\,(1+e^{-2ma})$ pro $a > 0$, $m \geq 0$.

‖ a/ Lehko plyne z 5,90 substitucí.

b/ Použijte vztahu $\sin^2 mx = \frac{1}{2}(1-\cos 2mx)$ a odstavce a/.

c/ Použijte vztahu $\cos^2 mx = 1 - \sin^2 mx$ a odstavce b/ , či vztahu $\cos^2 mx = \frac{1}{2}(1+\cos 2mx)$ a odstavce a/ . ‖

$\boxed{5{,}93.^*}$ Ukažte, že $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx = \frac{\pi m}{2}$ pro $m \geq 0$.

‖ Buď $m \in \langle 0,+\infty)$ pevné, označme $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}\,dx$.

Ukažte, že funkce F je spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$ /viz 6.kapitola/, odtud spolu s výsledkem př. 5,92b plyne

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{x^2}\,dx = F(0) = \lim_{a\to 0_+} F(a) = \lim_{a\to 0_+} \frac{\pi}{4a}(1-e^{-2ma}) = \frac{\pi m}{2} .$$

Viz též př. 6,73. ‖

Jaký by byl výsledek pro $m < 0$?

$\boxed{5{,}94.^*}$ Ukažte, že pro $a \in (0,+\infty)$, $m \in E_1$ jest

$$I(a,m) = \int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot \cos mx^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+m^2}}{a^2+m^2}} .$$

‖ Postup je stejný jako při výpočtu Laplaceova integrálu /př. 5,84/. Ukažte, že

$$I^2(a,m) = \frac{1}{2} \iint_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} e^{-a(x^2+y^2)} \cdot \left[\cos m(x^2+y^2) + \cos m(x^2-y^2)\right] dxdy.$$

Do posledního integrálu zaveďte polární souřadnice a využijte výsledku cvičení 4,48 , dostanete

$$I^2(a,m) = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{a^2+m^2} + \frac{a}{a^2+m^2\cos^2 2\varphi}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{a}{a^2+m^2} + \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+m^2}} ,$$

odkud již plyne výsledek. ‖

$\boxed{5{,}95.}$ Ukažte, že $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{a^2+1}{a^2}$ pro $a \in (0,+\infty)$.

‖ Použijte vztahu

$$e^{-ax}\frac{1-\cos x}{x} = \left[e^{-ax}\ \frac{\cos yx}{x}\right]_{y=1}^{y=0} = \int_0^1 e^{-ax} \cdot \sin xy\,dy$$

a cvičení 4,47. Viz též př. 6,72. ‖

V dalším ukážeme, že v oboru riemannovsky intergrovatelných funkcí je situace při použití Fubiniovy věty poněkud jiná.

5,96.° Je-li $x \in (0,1)$ racionální číslo, $x = \frac{p}{q}$ /p,q nesoudělná, $q > 0$), položme $\varphi(x) = q$. Dále položme $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Definujme funkci f na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ takto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(x)} + \dfrac{1}{\varphi(y)} & \text{jsou-li } x,y \text{ racionální,} \\ 0 & \text{jinde v } M. \end{cases}$$

Ukažte, že

1/ f je nespojitá ve všech bodech množiny M majících obě souřadnice racionální,

2/ f je spojitá ve všech ostatních bodech množiny M /porovnejte s př. 2,32/,

3/ $(L)\iint_M f = 0$,

4/ $(R)\iint_M f = 0$,

5/ $(R)\int_0^1 \left((R)\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy$, $(R)\int_0^1 \left((R)\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$ neexistují.

5,97.° Definujme nyní funkci g na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ takto:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x,y \text{ racionální, } \varphi(x) = \varphi(y) \text{ /viz př. 5,96/,} \\ 0 & \text{jinde v } M. \end{cases}$$

Ukažte, že

1/ $(L)\iint_M g = 0$,

2/ $(R)\iint_M g$ neexistuje,

3/ $(R)\int_0^1 \left((R)\int_0^1 g(x,y)\,dx\right) dy = (R)\int_0^1 \left((R)\int_0^1 g(x,y)\,dy\right) dx = 0.$

5,98.° Definujme funkci h na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ předpisem :

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální }, \ y \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \text{ libovolné anebo je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální}, \ y \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle \text{ libovolné}, \\ 0 & \text{je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ racionální}, \ y \in (\frac{1}{2}, 1\rangle \text{ anebo je-li } x \in \langle 0,1\rangle \text{ iracionální}, \ y \in \langle 0, \frac{1}{2}) . \end{cases}$$

Ukažte, že

1/ $(R)\int_0^1 \left((R)\int_0^1 h(x,y)\, dy\right) dx = \frac{1}{2}$,

2/ $(R)\int_0^1 \left((R)\int_0^1 h(x,y)\, dx\right) dy$ neexistuje ,

3/ $(R)\iint_M h$ neexistuje ,

4/ $h \in \Lambda_M$,

5/ $(L)\iint_M h = \frac{1}{2}$.

5,99. Buď $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, potom

$$\iint_M (xy)^{xy}\, dxdy = \int_0^1 z^z\, dz \ . \quad \text{Dokažte !}$$

‖ Použijte Fubiniovu větu, substituci $xy = t$ a větu o integraci per partes . ‖

5,100. Buďte $f, g \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom

$$\left(\int_a^b f.g\right)^2 \leqq \int_a^b f^2 \ . \int_a^b g^2 \ . \quad \text{Dokažte !}$$

/Tzv. Cauchy - Bunjakovského nerovnost./

‖ Použijte nerovnost /$M = \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle$ /

$$0 \leqq \iint_M (f(x)\, g(y) - f(y) g(x))^2\, dx\, dy =$$

$$= 2\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 - 2\left(\int_a^b f . g\right)^2 . ‖$$

5,101. Buď f kladná a měřitelná v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f \ . \int_a^b \frac{1}{f} \geqq (b-a)^2 \ . \quad \text{Dokažte !}$$

‖ Dokažte přímo anebo pomocí cv. 5,100 . ‖

5,102. Buď f spojitá a nezáporná v intervalu (a,b). Buď

$$M = \left\{ [x,y] \in E_2 \; ; \; x \in (a,b) \, , \quad 0 \leq y \leq f(x) \right\} .$$

Potom $M \in \mathfrak{M}_2$ a $\mu_2 M = \int_a^b f(x)\,dx$. Dokažte !

[Viz též větu 62.]

** 5,103. Budeme se nyní zabývat otázkou, kdy nějaká množina $N \subset E_r$ má Lebesgueovu míru nula. Především víme podle věty 62, že "graf" každé spojité funkce $r-1$ proměnných má v E_r nulovou míru. Předpoklad spojitosti funkce f ve větě 62 je zbytečně silný, v dalším vyslovíme daleko obecnější větu.

I/ Buď $M \subset E_r$, $M \in \mathfrak{M}_r$, nechť $f \in \Lambda_M$. Označíme-li

$$M_1 = \left\{ [x,y] \in E_{r+1} \; ; \; x \in M \, , \; y \in E_1 \, , \quad y < f(x) \right\},$$

$$M_2 = \left\{ [x,y] \in E_{r+1} \; ; \; x \in M \, , \; y \in E_1 \, ; \quad y > f(x) \right\},$$

$$\mathrm{graf}_M f = \left\{ [x,y] \in E_{r+1} \; ; \; x \in M \, , \; y \in E_1 \, , \quad y = f(x) \right\},$$

jest $M_1 , M_2 \in \mathfrak{M}_{r+1}$, $\mathrm{graf}_M f \in \mathfrak{M}_{r+1}$.

Zhruba řečeno - graf měřitelné funkce je měřitelná množina.

[Viz V.Jarník, Integrální počet II, věta 75.]

II/ Nechť jsou splněny předpoklady z I/. Potom

$$\mu_{r+1} (\mathrm{graf}_M f) = 0 .$$

Toto jest tedy slíbené zobecnění věty 62.

[Použijte Fubiniovu větu.]

Velmi často se stává, že množina $N \subset E_r$ je definována jako množina bodů $[x_1,\dots,x_r] \in E_r$, které vyhovují nějaké rovnici $F(x_1,\dots,x_r) = 0$ nebo je část takové množiny. Zajímá nás, za jakých předpokladů bude množina N nulová. Dokažte následující větu /viz V.Jarník, Integrální počet II, kap. VII, §2, poznámka 3/.

III/ Nechť reálná funkce $F(x_1,\dots x_r)$ má v otevřené množině $S \subset E_r$ konečné spojité parciální derivace až do řádu n-tého /$n > 0$/.
Buď $N = \left\{ x \in S \; ; \; F(x) = 0 \right\}$, buď N_n množina těch bodů $x \in S$, v nichž funkce F i všechny její derivace až do n-tého řádu jsou rovny nule.
Potom N, $N_n \subset \mathfrak{M}_r$ a $\mu_r(N - N_n) = 0$
/tedy je-li $\mu_r N_n = 0$, je $\mu_r N = 0$ /.

Na základě této věty /či též podle věty 62/ ukažte, že následující množiny jsou nulové:

a/ $N = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \;;\; a_1x_1 + \dots + a_rx_r = b\}$,

$$a_1^2 + \dots + a_r^2 > 0 ,$$

b/ $N = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \;;\; x_1^2 + \dots + x_r^2 = R^2\}$, $R > 0$,

c/ $N = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \;;\; P(x_1,\dots,x_r) = 0\}$, kde

$P(x_1,\dots,x_r)$ je reálný polynom n-tého stupně takový, že alespoň jeden člen tvaru $ax_1^{k_1}\dots x_r^{k_r}$ /$k_1+\dots+k_r = n$/ má koeficient $a \neq 0$,

speciálně např.

1/ $N = \{[x,y] \in E_2 \;;\; (x + y^2)^2 - x^3 - y^3 = 0\}$,

2/ $N = \{[x,y] \in E_2 \;;\; x + y^2 = \sqrt{x^3 + y^3}\}$,

3/ $N = \{[x,y] \in E_2 \;;\; x^2 + y^2 = 2a(x^2 - y^2)\}$,

4/ předchozí příklady aj.

d/ $N = \{[x,y] \in E_2 \;;\; 4y \sin x - \arcsin xy = 0\}$.

5,104.* Buď $K_r = \{[x_1,\dots,x_r] \in E_r \;;\; x_1^2 + \dots + x_r^2 \leq 1\}$ /jednotková koule v E_r /. Ukažte, že

$$\mu_{2r}(K_{2r}) = \frac{\pi^r}{r!} , \qquad \mu_{2r+1}(K_{2r+1}) = \frac{2\,.(2\pi)^r}{1.3.5.\dots(2r+1)} .$$

Čemu je rovna limita $\lim_{r\to+\infty} \mu_r K_r$?

5,105. Dokažte následující tvrzení:

a/ $f \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)} \Rightarrow \int_0^\infty f(x + \sqrt{x^2+1})\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_1^\infty f(x)dx + \int_0^1 f(\frac{1}{x})dx\right]$,

b/ $\int_0^\infty \frac{\log x}{x} \,.\, f(x + \frac{1}{x})\,dx = 0$, existuje-li tento integrál.

5,106. Dokažte následující tvrzení:

$M \in \mathfrak{M}_n \iff$ pro každý kompaktní interval $I \subset E_n$ je $I \cap M \in \mathfrak{M}_n$.

$\boxed{5,107.}$ Definujme funkci f na množině $M = (0,1) \times (0,1)$ předpisem:

$f(x,y) = \frac{1}{2}$, je-li y racionální, $f(x,y) = x$ je-li y iracionální.

Ukažte, že

1/ $f \in \mathscr{L}_M^R$, $\iint_M f = \frac{1}{2}$,

2/ označíme-li $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$, je funkce F v intervalu $(0,1)$ spojitá, ačkoliv funkce f při pevném x není /s výjimkou $x = \frac{1}{2}$; viz též následující kapitolu/.

$\boxed{5,108.^*}$ Buď $M \in \mathfrak{M}_r$, $N \in \mathfrak{M}_s$, $f \in \mathscr{L}_M$, $g \in \mathscr{L}_N$

Definujme funkci φ na $M \times N$ předpisem

$$\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y) , \quad x \in M , \quad y \in N$$

/funkce f je tedy funkcí r proměnných, funkce g funkcí s proměnných a funkce φ funkcí $r + s$ proměnných/. Potom $\varphi \in \mathscr{L}_{M \times N}$ a

$$\int_{M \times N} \varphi = \int_M f \cdot \int_N g .$$

Dokažte !

25535 211

6. Integrály závislé na parametru

6,1. Mějme dánu funkci dvou proměnných $f(x,\alpha)$ na množině $M\times A$, kde M je měřitelná množina v E_1, A prozatím libovolná množina. Předpokládejme, že pro každou hodnotu $\alpha \in A$ existuje $\int_M f(x,\alpha)\,dx$. Obecně pro různé hodnoty $\alpha \in A$ může tento integrál nabývat různých hodnot, vidíme tedy, že $\int_M f(x,\alpha)\,dx$ je funkcí proměnné α na množině A. Označme $F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,dx$ pro $\alpha \in A$ (viz též 4,14). Zajímají nás nyní vlastnosti funkce F - její limity, spojitost, monotonie, derivace, atd. Jde o řadu otázek, kdy určité vlastnosti funkce f (chápané jako funkce α) implikují tytéž vlastnosti funkce F. V dalším budeme potřebovat hlavně větu 60 (o spojité závislosti integrálu na parametru) a větu 61 (o derivaci integrálu podle parametru) - zopakujte si je. [Poznámka - funkci g z věty 60 říkáme konvergentní majoranta k funkci $f(x,\alpha)$ na množině M pro $\alpha \in A$, rovněž tak funkci G z věty 61 říkáme konvergentní majoranta k funkci $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ na množině M pro $\alpha \in I$.]

Všimněte si nyní analogických vět k větám 60, 61, které platí pro řady funkcí:

věta A: "Buďte funkce f_n definovány na množině M, buď

$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M, nechť

2/ f_n jsou spojité na M,

3/ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M.

Potom je f spojitá na M".

věta B: "Funkce f_n buďte definovány na intervalu $I \subset E_1$, nechť

2/ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje alespoň v jednom bodě intervalu I,

3/ a/ pro každé $n \in N$

a každé $x \in I$ existuje vlastní $f_n'(x)$,

b/ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje stejnoměrně na I.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na celém intervalu I. Označíme-li $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, má funkce f všude na intervalu I vlastní derivaci, přičemž $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ na I".

Vidíme, že věty A a B jsou zcela analogické větám 60 a 61, pouze roli existence konvergentních majorant zde hraje stejnoměrná konvergence. Zdá se, že věty 60 a 61 mají tedy "silnější" předpoklady než analogické věty A,B - víme totiž, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M podle Weierstrassova kriteria například tehdy, existuje-li k řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na množině M konvergentní majorantní řada s konstantními členy - může se ovšem stát, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje stejnoměrně na M i tehdy, když žádná taková konvergentní majorantní řada neexistuje (uveďte příklad!). Uvědomte si však, že řady nemusí být na druhé straně absolutně konvergentní, zatímco Lebesgueův integrál je "absolutně konvergentní" (věta 44).

6,2. **Poznámka**

Při hledání konvergentní majoranty g z věty 60 bývá výhodné položit $g(x) = \sup_{\alpha \in A} |f(x, \alpha)|$. Je-li nyní $g \in \mathcal{L}_M$ a jsou-li splněny ostatní předpoklady, můžeme větu 60 použít. Velmi často se stává, že takto získaná funkce g (což je vlastně "nejlepší" majoranta) neleží v systému $\mathcal{L}_M$. Z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce $F(\alpha)$ nebyla na množině A spojitá. Uvědomíme-li si, že (podle definice) funkce F je spojitá na množině A tehdy a jen tehdy, je-li spojitá v každém bodě množiny A , vidíme, že stačí dokázat spojitost funkce F v každém bodě množiny A (ostatně víme, že spojitost funkce F je pouze "lokální" vlastnost, nebude proto asi nutné hledat konvergentní majorantu v celé množině A).

Nechť například množina A je otevřený interval (p,q), chceme dokázat, že funkce F je spojitá v tomto intervalu (p,q). K tomu je nutné a stačí dokázat, jak jsme již poznamenali, že funkce F je spojitá v každém bodě intervalu (p,q). Buď tedy $a_0 \in (p,q)$. Abychom dokázali, že F je spojitá v bodě a_0 , stačí (není to však nutné!), dokážeme-li, že funkce F je spojitá v nějakém intervalu $\langle p_0, q_0 \rangle \subset (p,q)$ takovém, že $a_0 \in (p_0,q_0)$. (Odůvodněte!). Při důkazu spojitosti funkce F v intervalu $\langle p_0,q_0 \rangle$ použijeme opět větu 60, ale klademe nyní $g(x) = \sup_{\alpha \in \langle p_0, q_0 \rangle} |f(x, \alpha)|$, tedy supremum se již nebere přes celý původní interval (p,q).

Dokažte si nyní sami následující věty:

1/ funkce F je spojitá v intervalu $(p,q) \Leftrightarrow$ F je spojitá v __každém__ intervalu $\langle p_0,q_0 \rangle \subset (p,q)$,

2/ F je spojitá v $(p,q) \Leftrightarrow$ F je spojitá v __každém__ intervalu $(p,q_0\rangle \subset (p,q)$, 3/ F je spojitá v (p,q) $\iff$ F je spojitá v každém intervalu $\langle p_0, q) \subset (p,q)$.

Těchto jednoduchých vět tedy budeme v dalších příkladech používat, podrobně si je prostudujte a promyslete!

Tatáž poznámka platí i pro použití věty 61 , hledáme-li konvergentní majorantu $\mathcal{G}$, kde opět bývá nejlepší zkusit

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{\alpha \in A} \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| .$$

6,3.	Ukažte, že funkce F , $F(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}\, dx$, je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$.

1/ Ukažte nejdříve - jako cvičení - že tento integrál konverguje, právě když $\alpha \in \langle 0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $\langle 0, +\infty)$, použijeme větu 60 , kde klademe $M = (0, +\infty)$, $A = \langle 0, +\infty)$. Ověříme předpoklady:

1/ pro každé $\alpha \in \langle 0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$ (jakožto funkce x !) spojitá v $(0, +\infty)$, tedy $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2} \in \Lambda_{(0,+\infty)}$

2/ pro každé $x \in (0, +\infty)$ je funkce $\frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$ (jakožto funkce α !) spojitá v $\langle 0, +\infty)$,

3/ Položíme-li $g(x) = \sup_{\alpha \in \langle 0,+\infty)} \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2}$, je $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ na $(0, +\infty)$ a tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Tím jsme ověřili všechny předpoklady věty 60 a podle tvrzení této věty je funkce F spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$

6,4.	Ukažte, že funkce $F(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ je spojitá v $(0, +\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $\alpha \in (0, +\infty)$.

2/ Ukážeme, že F je spojitá v $(0, +\infty)$, položte ve větě 60 $A = (0, +\infty)$, $M = (0, +\infty)$ a ověřte předpoklady 1/ a 2/ . Hledejme konvergentní majorantu, nejvýhodnější je zkusit $g(x) = \sup_{\alpha \in (0,+\infty)} e^{-\alpha x}$, odtud plyne, že $g(x) = 1$ pro každé $x \in (0, +\infty)$ a není tudíž $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (proč?).

Zkusme postupovat podle poznámky 6,2. Stačí, ukážeme-li, že funkce F

je spojitá v každém intervalu $\langle p_0,+\infty)$, kde $p_0 > 0$ (vidíme totiž, že při hledání konvergentní majoranty, "vadí" bod 0). Buď tedy $p_0 > 0$ a aplikujme větu 60, kde klademe $A = \langle p_0,+\infty)$, $M = (0,+\infty)$. Opět sami ověřte předpoklady 1/ a 2/ a hledejte konvergentní majorantu ve tvaru

$$g(x) = \sup_{\alpha \in \langle p_0,+\infty)} e^{-\alpha x}, \quad x \in (0,+\infty).$$

Vidíme, že $g(x) = e^{-p_0 x}$ pro $x \in (0,+\infty)$, tedy $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

Funkce F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p_0,+\infty) \subset (0,+\infty)$, tedy je spojitá v $(0,+\infty)$.

3/ Jako cvičení spočtěte $F(a)$!

Příklad 6,4 ještě jednou podrobně projděte a rozmyslete; až vám bude jasné, proč jsme nemohli použít větu 60 na celý interval $(0,+\infty)$ najednou, přejděte k dalším příkladům.

6,5. Buď $F(a) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$. Dokažte, že

1/ integrál existuje, jako Riemannův pro každé $a \in E_1$ (spočtěte jej!),

2/ funkce F je spojitá v E_1.

Ukažte, že F je spojitá v každém intervalu $\langle -p,+p\rangle$, kde $p > 0$; majoranta $g(x) = \sqrt{x^2 + p^2}$ na $(-1,+1)$ pro $a \in \langle -p,p\rangle$.

6,6. Buď $F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Ukažte, že

1/ integrál existuje jako Riemannův pro každé $a \in E_1$, $a \neq 0$ (spočtěte!),

2/ $F(0) = +\infty$,

3/ F je sudá funkce,

4/ F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

4/ Ukažte, že F je spojitá v každém intervalu $\langle p, +\infty)$, kde $p > 0$; majoranta $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}}$ na $(0,1)$ pro $a \in \langle p, +\infty)$.

6,7. Dokažte, že:

1/ $F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$ [viz př. 5,84],

2/ $F(a) = \int_0^2 x^2 \cdot \cos ax\, dx$ je spojitá funkce v E_1 [spočtěte !], 3/ $F(a) = \int_0^1 x^a\, dx$ je spojitá funkce v $(-1,+\infty)$,

4/ $F(n) = \int_1^\infty x^n\, dx$ je spojitá funkce v $(-\infty,-1)$,

5/ $F(y) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\, dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$.

6,8. Dokažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{2 + x^a}$ je spojitá funkce v intervalu $(2,+\infty)$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a \in (2,+\infty)$,viz př.3,44-10.

2/ Ukažte, že F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,+\infty)$, kde $p > 2$.

Položíte-li $g(x) = \sup_{a\in\langle p,+\infty)} \frac{x}{2 + x^a}$ pro $x \in (0,+\infty)$

je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (0,1) \\ \frac{x}{2 + x^p} & \text{pro } x \in \langle 1,+\infty) . \end{cases}$$

(Promyslete a odůvodněte!)

Protože $\frac{x}{2} \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ a $\frac{x}{2 + x^p} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$ je

$g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (opět odůvodněte!) a jsou splněny předpoklady věty 60.

6,9. Ukažte, že funkce $I(a) = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^a}\, dx$ je spojitá v intervalu $(1,+\infty)$.

1/ Ukažte, že pro $a \in (1,+\infty)$ integrál konverguje.

2/ Ukažte, že funkce I je spojitá v každém intervalu $\langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$,

$$\text{majoranta } g(x) = \sup_{a\in\langle p,q\rangle} \left| \frac{\cos x}{x^a} \right| = \begin{cases} \frac{|\cos x|}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{|\cos x|}{x^p} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

snadno nahlédnete, že $g \in \mathcal{L}_{(\frac{1}{2},+\infty)}$

3/ Jako cvičení ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $\frac{\cos x}{x^a}$ na intervalu $(\frac{1}{2},+\infty)$ pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (1,+\infty)$:

a/ $g_1(x) = \frac{|\cos x|}{x^q} + \frac{|\cos x|}{x^p}$,

b/ $g_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^q} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \frac{1}{x^p} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$

c/ $g_3(x) = \max\left(\frac{1}{x^p}, \frac{1}{x^p}\right)$

d/ $g_4(x) = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^q}$. ‖

6,10. Ukažte, že funkce $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\,dx$ (tzv. Gamma funkce, viz též př. 8,63) je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$.

‖ 1/ Ukažte, že $\Gamma(s) < +\infty$ pro $s \in (0, +\infty)$, $\Gamma(s) = +\infty$ pro $s \in (-\infty, 0\rangle$.

2/ Ukažte, že funkce Γ je spojitá v každém intervalu $\langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$.

Majoranta $g(x) = \sup_{s \in \langle p,q\rangle} e^{-x} \cdot x^{s-1} = \begin{cases} e^{-x} \cdot x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1), \\ e^{-x} \cdot x^{q-1} & \text{pro } x \in (1, +\infty), \end{cases}$

opět zjistíte, že $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$

3/ Ukažte, že i následující funkce jsou konvergentní majoranty k funkci $x^{s-1} e^{-x}$ na $(0, +\infty)$ pro $s \in \langle p, q\rangle \subset (0, +\infty)$:

a/ $g_1(x) = \max(e^{-x} x^{p-1}, e^{-x} x^{q-1})$,

b/ $g_2(x) = e^{-x}(x^{p-1} + x^{q-1})$,

c/ $g_3(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\ c(q) \cdot e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x \in (1, +\infty) \end{cases}$. ‖

6,11. Ukažte, že funkce $F(b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx$ je spojitá v intervalu $(0,1)$.

‖ 1/ Integrál konverguje, právě když $b \in (0,1)$, viz př. 3,40.

2/ F je spojitá v libovolném intervalu $\langle p,q\rangle \subset (0,1)$, konvergentní majoranty:

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (0,1) \\[2ex] \dfrac{x^{q-1}}{1+x} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} x^{p-1} & \text{pro } x \in (0,1) \\[1ex] x^{q-2} & \text{pro } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

$$g_3(x) = x^{p-1} + x^{q-2} \qquad \text{apod.}$$

6,12. Dokažte, že

a/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{a^{x^2+1}}{x^2+1}\,dx$ je spojitá funkce v $(0,+\infty)$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin \frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\,dx$ -"- v $(-1,+\infty)$,

c/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^a(\pi - x)}\,dx$ -"- v $(-\infty,2)$,

d/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ -"- $(-1,+\infty)$,

e/ $F(a) = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{|\log x|^a}$ -"- $(-\infty,1)$,

f/ $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-ax}\,dx$ -"- $(0,+\infty)$,

g/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,dx$ -"- $(0,+\infty)$.

6,13. Uvažujeme $F(a) = \displaystyle\int_0^\infty a\, e^{-a^2x}\,dx$.

1/ Dokažte, že integrál konverguje pro každé $a \in E_1$.

2/ Dokažte, že F je funkce lichá.

3/ Dokažte, že F je spojitá v $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

Vezměte libovolný interval $\langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$, potom zřejmě

$$a \in \langle p,q\rangle \Rightarrow \left| ae^{-a^2x} \right| \leq qe^{-p^2x} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} . \rrbracket$$

4/ Zkoumejme nyní spojitost funkce F v bodě $a = 0$. Abychom ukázali, že F je spojitá v bodě $a = 0$, stačilo by ukázat (ale není to nutné!), že F je spojitá v nějakém intervalu $\langle -p, +p\rangle$, kde $p > 0$.
Zkoumejme, jak vypadala majoranta na intervalu $(0,+\infty)$ pro $a \in \langle -p,p\rangle$

$$g(x) = \sup_{a\in\langle -p,p\rangle} \left| ae^{-a^2x} \right| = \max \left(pe^{-p^2x} ; \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

(proveďte podrobně!). Protože $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$, nemůže být ani $g \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$. Vidíme, že se nám nepodaří nalézt konvergentní majorantu k funkci ae^{-a^2x} na $(0,+\infty)$ pro žádný interval $\langle -p,+p\rangle$ (z toho ovšem ještě neplyne, že by funkce F nebyla spojitá v bodě $a = 0$!). Spočtěte však, že $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$ – tedy F není spojitá v bodě $a = 0$.
I když tedy funkce $f(x,a)$ byla spojitá pro každé pevné $x \in (0,+\infty)$ v bodě $a = 0$, není funkce $F(a) = \int_0^\infty f(x,a)\, dx$ spojitá v bodě $a = 0$.

$\boxed{6,14.}$ Uvažujme $F(a) = \int_0^1 \mathrm{sign}(x-a)\, dx$.

1/ Pro každé $a \in E_1$ je $\mathrm{sign}\,(x-a) \in \Lambda_{(0,1)}$ (odůvodněte!).
Protože $|\mathrm{sign}\,(x-a)| \leq 1$ pro $x \in (0,1)$, je $\mathrm{sign}(x-a) \in \mathcal{L}_{(0,1)}$ pro každé $a \in E_1$.

2/ Buď $x \in (0,1)$ pevné, potom funkce $\mathrm{sign}(x-a)$ (jakožto funkce a!) je spojitá ve všech bodech $a \in E_1$ s výjimkou bodu $a = x$, kde je nespojitá.

3/ Lehko zjistíte, že

$$F(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \in (-\infty, 0\rangle , \\ 1-2a & \text{pro } a \in (0,1) \\ -1 & \text{pro } a \in \langle 1,+\infty) , \end{cases}$$

tedy F je spojitá v celém E_1.

Proti příkladu 6,13 je nyní $f(x,a)$ nespojitá (při pevném x jako funkce a/ a funkce $F(a)$ spojitá.

$\boxed{6,15.}$ Uvažujeme $F(a) = \int_1^3 \mathrm{sign}\ a\, dx$.

1/ Ukažte, že pro libovolné $a \in E_1$ integrál konverguje.

2/ Funkce $\mathrm{sign}\ a$ je nespojitá v bodě $a = 0$.

3/ Pro $a \in E_1$ je $F(a) = 2 \operatorname{sign} a$, tedy i F je nespojitá v bodě $a = 0$.

$\boxed{6,16.}$ Uvažujte obecně $F(a) = \int_M \varphi(a)\,dx$ pro $\mu M < +\infty$.

1/ Je-li $\varphi(a)$ konečná pro $a \in A$, integrál pro tato a konverguje,

2/ je-li $\mu M > 0$, potom

F je spojitá v bodě $a \iff \varphi$ je spojitá v bodě a,

3/ je-li $\mu M = 0$, je F spojitá v A (neboť $F = 0$).

Dokažte!

$\boxed{6,17.}$ Uvažujte $F(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\lambda^2 \operatorname{tg}^2 x}$

Dokažte, že

1/ pro libovolné $\lambda \in E_1$ integrál existuje jako Riemannův,

2/ F je funkce sudá,

3/ $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+|\lambda|}$ pro $|\lambda| \neq 1$

‖ použijte substituci $\operatorname{tg} x = t$ ‖

4/ ukažte odtud, že $F(\lambda) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+|\lambda|}$ pro všechna $\lambda \in E_1$

‖ funkce $F(\lambda)$ i $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+|\lambda|}$ jsou spojité v E_1 a rovnají se pro všechna $\lambda \neq \pm 1$ ‖ ;

5/ spočtěte též přímo $F(1)$, $F(-1)$.

$\boxed{6,18.}$ Buďte

$$C(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2}\,dx, \quad S(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xy)}{1+x^2}\,dx$$

Ukažte, že funkce C, S jsou spojité v E_1!

V dalším budeme vyšetřovat derivace integrálů závislých na parametru. Může se stát, že neumíme spočítat integrál $\int_M f(x,a)\,dx$ (běžnými metodami, obvykle jako Newtonův), označme jej $F(a)$. Naproti tomu se nám podaří spočítat $\int_M \frac{\partial}{\partial a} f(x,a)\,dx$, zajímá nás, jaký je nyní vztah tohoto integrálu a funkce $F'(a)$. Za určitých předpokladů (věta 61) mezi nimi platí rovnost. Takže i když přímo neumíme "spočítat $F(a)$", umíme "spočítat $F'(a)$" a určením příslušné primitivní funkce dostáváme $F(a)$.

Prostudujte si podrobně znovu poznámku 6,2 - chceme-li spočítat $F'(a)$ v intervalu (A,B), stačí, spočítáme-li $F(a)$ v každém intervalu $\langle p,q \rangle$ takovém, že $\langle p,q \rangle \subset (A,B)$.

6,19. Spočtěte $F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx$!

1/ I když to v těchto příkladech není nutné, budeme vždy zkoumat, pro jaké hodnoty parametru a daný integrál konverguje.
Ukažte, že integrál existuje jako Riemannův pro všechna $a \in E_1$.

2/ Podle věty 61 spočítáme $F'(a)$, vzhledem k tomu, že funkce F je lichá (proč?), omezíme se jen na hodnoty $a \geq 0$, tj. ve větě 61 položíme $M = (0, \frac{\pi}{2})$, $A = \langle 0, +\infty)$.
Ověřujeme jednotlivé předpoklady věty 61:
a/ pro každé $a \in \langle 0, +\infty)$ je $\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x} \in \Lambda_{(0,\frac{\pi}{2})}$ (proč?),
b/ integrál konverguje pro $a = 0$ (my jsme vlastně ukázali daleko více - že konverguje pro všechna $a \in E_1$!),
c/ pro každé $a \in \langle 0, +\infty)$ a každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ existuje

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\right) = \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x},$$

d/ musíme najít konvergentní majorantu k této derivaci, položme

$$\mathcal{G}(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x} \qquad \text{pro } x \in (0, \tfrac{\pi}{2}),$$

zřejmě $\mathcal{G}(x) = 1$ pro všechna $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, tedy $\mathcal{G} \in \mathcal{L}_{(0,\frac{\pi}{2})}$.
Podle tvrzení věty 61 integrál konverguje pro všechna $a \in \langle 0, +\infty)$ a

$$F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2x}\,dx, \quad a \in \langle 0, +\infty).$$

Podle př. 6,17 zjistíme, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}, \qquad a \in \langle 0, +\infty).$$

Odtud plyne, že existuje taková konstanta C, pro niž $F(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+a) + C$, $a \in \langle 0, +\infty\rangle$ (odůvodněte!).

Zbývá nyní jen určit hodnotu konstanty C. Víme však, že předchozí rovnost platí pro všechna $a \in \langle 0, +\infty)$, tedy i pro $a = 0$. Protože $F(0) = 0$, dostáváme ihned, že

$$0 = F(0) = \frac{\pi}{2}\cdot\log(1+0) + C,$$

tj. $C = 0$.

Uvědomíme-li si konečně, že F je lichá funkce, dostáváme

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx = \operatorname{sign} a \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \log(1+|a|)\,, \quad a \in E_1 \,.$$

6,20. Dokažte, že $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x(1+x^2)}\,dx = \operatorname{sign} a \,.\, \frac{\pi}{2} \,.\, \log(1+|a|)$ pro $a \in E_1$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$, označte jej $F(a)$.

2/ Použijte výsledku cvičení 6,19 a substituce $\operatorname{tg} x = t$.

3/ Ukažte, že F je funkce lichá.

4/ Ověřte, že jsou splněny předpoklady věty 61 – $M = (0,+\infty)$, $A = \langle 0,+\infty)$.

Nejdůležitější je opět nalezení konvergentní majoranty:

$$G(x) = \sup_{a\in\langle 0,+\infty)} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

Odtud plyne, že

$$F'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

Ukažte, že

$$F'(a) = \frac{\pi}{2} \,.\, \frac{1}{1+a} \qquad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty)$$

(nutno rozlišit případy $a = 0$, $a = 1$ anebo ukázat, že $F'(a)$ je spojitá v $\langle 0,+\infty)$ obojí proveďte podrobně!). Odtud vzhledem k podmínce $F(0) = 0$ a vzhledem k lichosti F dostáváme tvrzení.

6,21. Zkoumejte $\displaystyle K(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax}}{x\,e^{x}}\,dx$.

1/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$, pro $a \in (-\infty,-1\rangle$ je $K(a) = -\infty$.

2/ Ověřte předpoklady věty 61 ($M = (0,+\infty)$, $A = (-1,+\infty)$) – položíme-li

$$G(x) = \sup_{a\in A} \left| \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax}}{xe^{x}}\right) \right| \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty),$$

je

$$G(x) = \sup_{a\in(-1,+\infty)} e^{-(a+1)x} = 1 \quad \text{pro každé } x \in (0,+\infty)$$

a tedy $G \notin \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Musíme se proto omezit – obdobně jako u příkladů na spojitost – na libovolný interval $\langle p, +\infty) \subset (-1, +\infty)$.

Potom konvergentní majorantu nalezneme snadno:

$$G(x) = \sup_{a \in \langle p,+\infty)} e^{-(a+1)x} = e^{-(p+1)x} \quad \text{pro} \quad x \in (0, +\infty),$$

tedy $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ (ježto $p > -1$!).

Podle věty 61 jest

$$K'(a) = \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro} \quad a \in \langle p, +\infty).$$

Protože $\langle p, +\infty)$ byl <u>libovolný</u> interval s $p > -1$, jest

$$K'(a) = \frac{1}{a+1} \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, +\infty)$$

(rozmyslete!).

Vzhledem k podmínce $K(0) = 0$ dostáváme

$$K(a) = \log(1+a) \quad \text{pro} \quad a \in (-1, +\infty).$$

6,22. Buď $F(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \dfrac{\sin ax}{x}\, dx$

Potom $F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a}{k}$ pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

Dokažte!

1/ Integrál je v tomto případě dokonce funkcí dvou parametrů – a, k.
Ukažte, že integrál konverguje pro $k \in (0, +\infty)$, $a \in E_1$.

2/ V tomto případě máme na vybranou, můžeme derivovat podle "a" i podle "k". Probereme oba dva způsoby.

I/ Buď $k \in (0, +\infty)$ konstantní a derivujeme podle a.
Ověřte předpoklady věty 61. Nejdůležitější je opět nalézt konvergentní majorantu, ale

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) \right| = \left| e^{-kx} \cdot \cos ax \right| \leq e^{-kx},$$

stačí tedy položit $G(x) = e^{-kx}$ pro $x \in (0, +\infty)$
(funkce G "nezávisí na a" a $G \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$).

Tedy

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,k) = \int_0^\infty e^{-kx} \cdot \cos ax\, dx = \frac{k}{a^2 + k^2}$$

(viz kupříkladu 4,48).

Odtud plyne, že

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(k),$$

kde "konstanta" tentokrát může záviset na zvoleném $k \in (0,+\infty)$ (proč?). Z původního integrálu je ovšem ihned vidět, že

$$F(0,k) = 0 \;, \quad \text{tj.} \quad C(k) = 0 \;.$$

II/ Zkusme nyní derivovat podle "k", nechť tedy $a \in E_1$ je pevné. Opět ověřte předpoklady věty 61,

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(e^{-kx} \cdot \frac{\sin ax}{x}\right) = - e^{-kx} \cdot \sin ax \;.$$

Zde se nám již nepodaří najít majorantu společnou pro všechna $k \in (0,+\infty)$, to však nevadí - omezíme se opět pouze na $k \in (p,+\infty)$, kde $p > 0$.

Potom

$$\left| e^{-kx} \sin ax \right| \leqq e^{-kx} \leq e^{-px} \;, \qquad x \in (0,+\infty)$$

a funkce $G(x) = e^{-px}$ je hledaná konvergentní majoranta. Integrací opět dostáváme (proveďte podrobně!, viz 4,47)

$$F(a,k) = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{k} + C(a) \;,$$

kde "konstanta" opět může záviset na (ze začátku pevně zvolené) hodnotě a. Rovnost platí pro všechna $k \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$ bylo libovolné číslo, tedy výsledek platí pro všechna $k \in (0,+\infty)$. Zbývá ještě určit $C(a)$, zde nám není nic platné do získané rovnosti dosadit $a = 0$ (proč?). Zkusíme provést limitní přechod pro $k \to +\infty$, bude-li totiž existovat $\lim\limits_{k\to+\infty} F(a,k)$ (při pevném $a \in E_1$), bude

$$\lim_{k\to\infty} F(a,k) = \lim_{k\to\infty}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{k} + C(a)\right] = C(a) \;.$$

Podle 4,20 (proveďte ještě jednou)! je $\lim\limits_{k\to\infty} F(a,k) = 0$ pro libovolné $a \in E_1$. Teda $C(a) = 0$ pro každé $a \in E_1$ a jsme hotovi. ||

Z tohoto příkladu bylo velmi dobře vidět, že nebylo tak docela jedno, derivovali-li jsme podle jedné či druhé proměnné. V prvním případě byl přeci jenom postup o něco jednodušší. V dalších příkladech se vždy snažte derivovat podle všech proměnných a jednotlivé metody porovnávejte!

6,23. Ukažte, že funkce $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ má v intervalu $(0,+\infty)$ derivace všech řádů. Spočtěte je!

|| 1/ Lehko zjistíme, že $F(a) = \frac{1}{a}$, odkud plyne tvrzení a vztah

$$F^{(n)}(a) = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \quad , \qquad a \in (0,+\infty\ ).$$

2/ Na druhé straně ukažte, že

$$F^{(n)}(a) = (-1)^n \int_0^{\infty} x^n . e^{-ax}\, dx \ , \qquad a \in (0,+\infty\ )$$

věta 61 a matematická indukce!) ‖

Porovnáním obou výsledků dostáváme vztah

$$\int_0^{\infty} x^n \ . \ e^{-ax}\, dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \text{pro} \quad n = 1,2,\ldots a \in (0,+\infty\ ).$$

6,24. Ukažte, že následující funkce mají v uvedených oborech derivace všech řádů, spočtěte je, a s jejich pomocí pak odvoďte další vztahy.

A/ $F(a) = \int_0^1 x^a\, dx \ , \qquad a \in (-1,+\infty\ )\ ,$

$$\int_0^1 x^a \ . \ \log^n x\, dx = \frac{(-1)^n \ . \ n!}{(a+1)^{n+1}} \quad , \qquad a \in (-1,+\infty\ ), \quad n \in N \ .$$

B/ $F(a) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} \quad , \qquad a \in (1,+\infty\ )\ ,$

$$\int_1^{\infty} x^{-a} \ . \ \log^n x\, dx = \frac{n!}{(a-1)^{n+1}} \quad , \qquad a \in (1,+\infty\ ), \quad n \in N\ ,$$

C/ $F(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+x^2} \qquad a \in (0,+\infty\ )\ ,$

D/ $F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2}\, dx\ , \qquad a \in (0,+\infty\ )$ (viz 5,84) ,

E/ $F(a) = \int_0^2 \cos ax\, dx\ , \qquad a \in E_1\ ,$

F/ $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx\ , \qquad s \in (0,+\infty\ ).$

6,25. Spočtěte $H(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\, dx$!

‖ a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in (-1,+\infty)$.

b/ Ověříte-li předpoklady věty 61, jest

$$H'(a) = \int_0^{\infty} xe^{-(a+1)x^2}\, dx = \frac{1}{2(a+1)} \quad \text{pro každé} \quad a \in (-1,+\infty\ )\ ,$$

protože $H(0) = 0$, jest $H(a) = \frac{1}{2} \log (a+1)$. ‖

6,26. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje, právě když $a = b$ anebo $a > 0$, $b > 0$.

b/ Použitím věty 61 dostáváte

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \int_0^{\infty} -xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}\ ,$$ konvergentní majoranta je

$$G(x) = xe^{-px^2} \quad \text{pro } x \in (0,+\infty),\ a \in \langle p,+\infty),\ p > 0 .$$

Tedy

$$F(a,b) = -\frac{1}{2}\log a + C(b)\ ,$$ protože $F(b,b) = 0$,

je $C(b) = \frac{1}{2}\log b$, tj. $F(a,b) = \log\frac{b}{a}$.

6,27. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1\rangle$, pro ostatní a není funkce $\frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$ všude v $(0,\pi)$ definována.

b/ Omezte se na $a \in (-1,+1)$ a ukažte, že

$$J'(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x}\ .$$

(Majoranta: buď $0 < p < 1$, potom pro $a \in \langle -p,+p\rangle$ a pro $x \in (0,\pi)$ platí

$$\left|\frac{1}{1+a\cos x}\right| = \frac{1}{|1+a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a\cos x|} \leqq \frac{1}{1-|a|} \leqq \frac{1}{1-p}\ ,$$

stačí tedy položit $G(x) = \frac{1}{1-p}$ pro $x \in (0,\pi)$).

Pomocí substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ukažte, že

$$J'(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\ ,$$

tedy vzhledem k $J(0) = 0$ dostanete

$$J(a) = \pi \arcsin a \qquad \text{pro } a \in (-1,+1)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(a) = \pi\arcsin a$ pro všechna $a \in \langle -1,+1\rangle$, stačí ukázat, že funkce $J(a)$ je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$ (proč?), k důkazu posledního tvrzení použijte větu 60 a vztahu

$$a \in \langle -1,+1\rangle \Rightarrow \frac{\log(1-\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x} \leqq \frac{\log(1+\cos x)}{\cos x}$$

proveďte podrobně ! ‖

6,28. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Spočtěte $J(a)$ pomocí věty 61 , dostanete

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-a^2\cos^2 x} \quad \text{s konvergentní majorantou}$$

$G(x) = \dfrac{2}{1-p^2}$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle -p,+p\rangle \subset (-1,+1)$.

Po substituci $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $J'(a) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy

$(J(0) = 0)$ $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in (-1,+1)$.

c/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$, odkud vyplyne, že $J(a) = \pi \arcsin a$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$ – viz předchozí příklad 6,27.

d/ Použijte též výsledku př. 6,27 , dostanete

$$\pi \cdot \arcsin a = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)\,dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1-a\cos x)}{\cos x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\,dx = J(a) \quad \text{pro } a \in \langle -1,+1 \rangle .$$ ‖

6,29. Spočtěte $K(A) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1+\sin A\cos x)}{\cos x}\,dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro všechna $A \in E_1$.

b/ Uvědomte si, že $K(A)$ je periodická funkce s periodou 2π .

c/ Při vlastním výpočtu (použití věty 61) je třeba vyloučit hodnoty, kde $|\sin A| = 1$ (proč?), vyjde $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$, $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k celé.

d/ Ukažte, že funkce K je spojitá v E_1 , tedy $K(A) = \pi \arcsin(\sin A)$ pro všechna $A \in E_1$.

e/ Ukažte, že $K(A) = \pi A$ pro $A \in \langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \rangle$.

2553 Z12

f/ Nakreslete graf funkce $K(A)$!

g/ Má funkce $K(A)$ všude v E_1 derivaci ?

h/ Porovnejte výsledek s př. 6,27 - stačilo položit $a = \sin A$.

6,30. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a \in E_1$, $b \in E_1$ s výjimkou $a = b = 0$.

b/ Funkce $F(a,b)$ je sudá v „a" i „b", omezte se proto na $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

c/ Zvolme libovolné $b \in (0,+\infty)$ pevné, buď $a \in (0,+\infty)$.

Podle věty 61 dostanete

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\, dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$

$$\left| \frac{2}{a} \cdot \frac{a^2\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} \right| \leqq \left| \frac{2}{a} \right| \leqq \frac{2}{p} \in \mathscr{L}(0, \tfrac{\pi}{2}))$$

Substitucí $\operatorname{tg} x = t$ dostanete $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$.

Ze vztahu $F(b,b) = \pi \cdot \log b$ vyplyne konečně

$$F(a,b) = \pi \cdot \log \frac{a+b}{2} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b > 0 .$$

d/ Ukažte, že výsledek platí i pro $a = 0$, $b > 0$ (či $a > 0$, $b = 0$) .

Buď tedy $b \in (0,+\infty)$ pevné, stačí ukázat, že funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a je spojitá v bodě 0 zprava. Použijte větu 60 ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \langle 0,1 \rangle$) a odhadu

$$\log b^2\cos^2 x \leqq \log(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \leqq \log(1 + b^2)$$

e/ Pomocí předchozího výsledku odtud odvoďte, že

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2} ,$$

viz též př. 5,87 ; 8,64 .

6,31. Spočtěte $I(a,b,k) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin kx \, dx$!

a/ Ukažte, že pro $a > 0$, $b > 0$, $k \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Zvolte $k \in E_1$, $b \in (0,+\infty)$ pevně, buď $a \in (0,+\infty)$.

Potom

$$\frac{\partial I}{\partial a}(a,b,k) = \int_0^{\infty} -e^{-ax} \sin kx \, dx = \frac{-k}{a^2+k^2} \quad \text{(viz př. 4,47)}$$

konvergentní majoranta $G(x) = e^{-px}$ pro $x \in (0,+\infty)$, $a \in \langle p,+\infty) \subset (0,+\infty)$.

Odtud plyne, že

$$I(a,b,0) = 0 \quad \text{(přímo vidět)},$$

$$I(a,b,k) = \operatorname{arctg} \frac{b}{k} - \operatorname{arctg} \frac{a}{k} \quad \text{pro } k \neq 0,$$

neboť $I(b,b,k) = 0$.

c/ Výsledek srovnejte s příkladem 6,22, podle kterého jest

$$I(a,b,k) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin kx}{x} dx - \int_0^{\infty} e^{-bx} \frac{\sin kx}{x} dx =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{k}{a} - \operatorname{arctg} \frac{k}{b} \quad \text{pro } a > 0,\ b > 0,\ k \in E_1.$$

Není to ve sporu s předešlým výpočtem? Ukažte, že ne.

Pro $k = 0$ dostáváte v obou případech $I(a,b,0) = 0$.

Dále ukažte, že pro libovolné $z \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} z + \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} z,$$

odkud již vyplyne, že pro libovolná $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ platí

$$\operatorname{arctg} z_1 - \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{z_2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{z_1}.$$

6,32. Spočtěte $J(a,b,k) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos kx \, dx$!

Obdobně příkladu 6,31, obdržíte

$$J(a,b,k) = \frac{1}{2} \log \frac{b^2+k^2}{a^2+k^2} \quad \text{pro } k \in E_1,\ a > 0,\ b > 0.$$

6,33. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cdot \frac{\sin bx - \sin cx}{x} dx$!

a/ Ukažte, že pro $a \in (0,+\infty)$, $b \in E_1$, $c \in E_1$ integrál konverguje.

b/ Pomocí věty 61 a příkladu 4,48 ukažte, že

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta $G(x) = e^{-ax}$), tedy

$$F(a,b,c) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{c}{a} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b,c \in E_1 .$$

c/ Zkuste též spočítat $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$.

d/ Porovnejte též s př. 6,22 .

6,34. Spočtěte $F(a,b,c) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$!

Obdoba př. 6,33 , $F(a,b,c) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, $b,c \in E_1$.

6,35. Spočtěte $F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje buďto pro $a = b$ anebo pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$.

b/ Buď $b \geqq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = -\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \, dx = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(viz př. 5,84)},$$

(majoranta $G(x) = e^{-px^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

tedy – vzhledem k $F(b,b) = 0$ – jest

$$F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} \quad \text{pro} \quad a > 0 , \quad b \geq 0 .$$

c/ Ukažte, že $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ dokonce pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Toto tvrzení dokažte

1/ tím, že ukážete, že pro každé $b > 0$ je funkce $F(a,b)$ jakožto funkce a spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$,

2/ anebo takto: rovnost $F(a,b) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ je zřejmá pro $a = b = 0$, pro $a > 0$, $b \geq 0$ jsme je již dokázali a pro $a \geq 0$, $b > 0$ ji obdržíme derivováním podle b nebo ze symetrie. Vše podrobně proveďte !

d/ Porovnejte též s příkladem 5,76 a .

6,36. Spočtěte $J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+\infty)$.

b/ Pro $a \in (-1,+\infty)$ je podle věty 61 a př. 5,84

$$J'(a) = \int_0^{\infty} e^{-(a+1)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}}\ , \quad \text{tedy}$$

$$J(a) = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{a+1} - 1) \quad \text{pro} \quad a \in (-1,+\infty)\ .$$

c/ Ukažte, že $J(-1) = -\sqrt{\pi}$. K tomu stačí dokázat, že funkce J je spojitá v bodě -1 zprava (proč?), k důkazu tohoto tvrzení použijte větu 60, kde položíte $M = (0,+\infty)$, $A = \langle -1,0 \rangle$ a použijete odhadu

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \le \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 e^{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$$

6,37. Spočtěte $K(a,b) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a,b \in E_1$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá funkce jak v proměnné „a", tak v „b", omezíme se na $a \ge 0$, $b \ge 0$.

c/ Buď tedy $b \ge 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$. Potom je $\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} -\frac{2a}{x^2} \cdot e^{-\frac{a^2}{x^2}}\,dx$

(majoranta – pro $a \in \langle p,q \rangle$, kde $0 < p < q < +\infty$ – určíme podle následujícího odhadu – proveďte !

$$\left| -\frac{2a}{x^2}\, e^{-\frac{a^2}{x^2}} \right| \le \frac{2q}{x^2} \cdot e^{-\frac{p^2}{x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

Substitucí $t = \frac{1}{x}$ převedeme poslední integrál na Laplaceův integrál – př. 5,84 – dostaneme

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = -\sqrt{\pi}\ ,$$

tedy vzhledem k $K(b,b) = 0$ vyjde

$$K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a) \quad \text{pro} \quad b \ge 0\ ,\ a > 0\ .$$

d/ Ukažte, že $K(a,b) = \sqrt{\pi}\,(b-a)$ pro všechna $a,b \in E_1$ (viz obdobný příklad 6,35).

e/ Porovnejte též s příkladem 5,76 e .

6,38. Spočtěte $J(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Ukažte, že funkce J je spojitá v intervalu $\langle -1,+1 \rangle$

$\Big(a \in \langle -1,+1 \rangle \ , \ x \in (0,1) \implies$

$$\left| \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{|\log(1-x^2)|}{x^2\sqrt{1-x^2}} \in \mathcal{L}_{(0,1)} \Big)$$

c/ Pro $a \in (-1,+1)$ jest

$$J'(a) = \int_0^1 \frac{-2a}{(1-a^2x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$\Big($majoranta $G(x) = \dfrac{2p}{(1-p^2)\sqrt{1-x^2}}$ pro $a \in \langle -p,+p \rangle \subset (-1,+1) \Big)$

Pomocí substitucí $x = \sin t$, $\operatorname{tg} t = u$ dostanete

$J'(a) = -\dfrac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}$, tedy s přihlédnutím k části b/

je $J(a) = \pi \cdot \left(\sqrt{1-a^2} - 1 \right)$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

6,39. Spočtěte $F(a) = \int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

b/ Funkce F je spojitá v $\langle -1,+1 \rangle$.

c/ $F(a) = \pi \cdot \log \dfrac{\sqrt{1-a^2}+1}{2}$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$.

6,40. Spočtěte $F(a) = \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}}\,dx$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$.

b/ Funkce F je lichá, omezíme se na $a \in \langle 0,+\infty)$.

Potom

$$F'(a) = \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+a^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

(majoranta $G(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \in \mathcal{L}_{(1,+\infty)}$)

Pomocí substituce $u = \sqrt{x^2 - 1}$ je

$$F'(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \right)$$

a vzhledem k $F(0) = 0$

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\left(1 + a - \sqrt{a^2 + 1}\right) \quad \text{pro } a \in \langle 0,+\infty) .$$

c/ Čemu je rovno $F(a)$ pro $a < 0$?

6,41. Spočtěte $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x \cdot \sqrt{1-x^2}}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$.

b/ F je funkce lichá.

c/ $F(a) = \dfrac{\pi}{2} \log\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right)$ pro $a \geq 0$.

6,42. Spočtěte $K(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log (a^2+x^2)}{b^2+ x^2}\, dx$!

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro libovolná $a,b \in E_1$, $b \neq 0$.

b/ Protože funkce $K(a,b)$ je sudá v „a" i v „b" , omezíme se na $a \in \langle 0,+\infty)$, $b \in (0,+\infty)$.

c/ Ukažte, že pro každé pevné $b \in (0,+\infty)$ je funkce $K(a,b)$ spojitá jakožto funkce a v E_1

(pro $a \in \langle -p,+p \rangle$, kde $p > 0$, $x \in (0,+\infty)$ jest

$$\frac{\log x^2}{b^2+ x^2} \leq \frac{\log (a^2+ x^2)}{b^2 + x^2} \leq \frac{\log (p^2+ x^2)}{b^2 + x^2} \quad)$$

d/ Omezíme se na $a \in (0,+\infty)$; $b \in (0,+\infty)$ buď pevné. Potom

$$\frac{\partial K}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{2a}{(a^2+x^2).(b^2+x^2)}\, dx = \pi \frac{1}{b\,(b+a)}$$

(majoranta pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$ je $\dfrac{2q}{(p^2+x^2)(b^2+x^2)} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$)

tedy $K(a,b) = \dfrac{\pi}{b} \cdot \log (b + a) + C(b)$ pro $a > 0$, $b > 0$.

Musíme ještě určit "konstantu" $C(b)$. Vzhledem k části c/ dostáváme

$$K(0,b) = \lim_{a\to 0_+} K(a,b) = \lim_{a\to 0_+}\left[\frac{\pi}{b}\cdot\log(b+a) + C(b)\right] = \frac{\pi}{b}\cdot\log b + C(b)$$

a zbývá nám tedy pouze spočítat $K(0,b) = \int_0^\infty \frac{\log x^2}{b^2+x^2}\,dx$. Pomocí substitucí $x = bt$, $t = \frac{1}{u}$ zjistíme, že $K(0,b) = \frac{\pi}{b}\log b$, tedy $C(b) = 0$.

e/ Lehko zjistíte, že

$$K(a,b) = \frac{\pi}{|b|}\cdot\log(|a| + |b|) \quad \text{pro } a,b \in E_1,\ b \neq 0.$$

6,43. Spočtěte $F(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}\cdot\cos bx - e^{-\alpha x}\cdot\cos\beta x}{x}\,dx$!

---

a/ Ukažte, že integrál konverguje pro $a > 0$, $\alpha > 0$, $b,\beta \in E_1$.

b/ Ukažte, že (viz př. 4,47 a 4,48)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{a}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-px} pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$),

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,\alpha,\beta) = \int_0^\infty -e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

(majoranta e^{-ax}).

Odtud plyne, že

$$F(a,b,\alpha,\beta) = -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2) + C(\alpha,\beta) \quad \text{a}$$

vzhledem k podmínce $F(\alpha,\beta,\alpha,\beta) = 0$ jest

$$F(a,b,\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\log\frac{\alpha^2+\beta^2}{a^2+b^2} \quad \text{pro } a > 0,\ \alpha > 0,\ b,\beta \in E_1.$$

6,44. Spočtěte $J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\,dx$!

---

a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a > 0$, $b > 0$ či $a < 0$, $b < 0$.

b/ Předpokládejme, že $b > 0$ je pevné, buď $a \in (0,+\infty)$. Potom

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$

(majoranta $\frac{1}{1+p^2x^2}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$).

Vzhledem k podmínce $J(b,b) = 0$ je

$$J(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b} \quad \text{pro } a > 0 , \ b > 0 .$$

c/ Jaký je výsledek pro $a < 0$, $b < 0$?

d/ Porovnejte též s příkladem 5,71. ||

6,45.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^2} \, dx$!

a/ Integrál konverguje pro každé $a \in E_1$, $b \in E_1$.

b/ Buď $a \in E_1$, potom funkce $H^{a,*}(b)$ je spojitá v E_1 (pro $b \in \langle -p,+p \rangle$ kde $p > 0$ je

$$\left| \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot \operatorname{arctg} bx}{x^2} \right| \leq \frac{|\operatorname{arctg} ax| \cdot |\operatorname{arctg} px|}{x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)})$$

c/ Obdobně funkce $H^{*,b}(a)$ je spojitá v E_1 pro každé $b \in E_1$.

d/ Buď $b \geq 0$ pevné, $a \in (0,+\infty)$, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+a^2x^2)} \, dx$$

(majoranta $\frac{\operatorname{arctg} bx}{x(1+p^2x^2)} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$ pro $a \in \langle p,+\infty)$, kde $p > 0$) .

Je nutno nyní spočítat tento integrál.

1/ Podle příkladu 6,20 je

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \log (1+\alpha) \quad \text{pro } \alpha > 0 ,$$

provedeme-li tedy v našem integrálu substituci $ax = t$, bude

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a}$$

2/ Kdybychom neznali výsledek příkladu 6,20 , byli bychom nuceni postupovat stejně jako v 6,20 , dostali bychom vlastně, že

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a+b}$$

a odtud vzhledem k podmínce $\frac{\partial H}{\partial a}(a,0) = 0$ by bylo

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a+b}{a} \quad \text{pro } a > 0 , \ b \geq 0 .$$

Z kteréhokoliv tohoto výsledku obdržíme, že

$$H(a,b) = \frac{\pi}{2}\left[(a + b) \log (a + b) - (a + b) - a\log a + a\right] + C(b) .$$

Zbývá určit "konstantu" C(b). Vzhledem ke spojitosti (část c/) obdržíme

$$0 = H(0,b) = \lim_{a\to 0_+} H(a,b) = \frac{\pi}{2}(b\log b - b) + C(b) .$$

Odtud vzhledem k částem b/ a c/ dostáváme

$$H(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a . b^b} \quad \text{pro} \quad a \geq 0 , \quad b \geq 0$$

(kde chápeme $0^0 = 1$!!) ||

6,46.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right)^2 dx$!

|| a/ Integrál konverguje pro $a = b$ anebo pro $a \geq 0$, $b \geq 0$.

b/ Pro každé $a \in \langle 0,+\infty)$ je funkce $H^{a,*}(b)$ spojitá v intervalu $\langle 0,+\infty)$ a pro každé $b \in \langle 0,+\infty)$ je funkce $H^{*,b}(a)$ spojitá v $\langle 0,+\infty)$.

c/ Buď $b > 0$ pevné , $a \in (0,+\infty)$. Potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = \int_0^\infty -2 . \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} . e^{-ax}\, dx = \int_0^\infty -2 . \frac{e^{-2ax} - e^{-(a+b)x}}{x} dx$$

(majoranta pro $a \in \langle p,q\rangle \subset (0,+\infty)$

$$\left|-2 . \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} e^{-ax}\right| \leq 2 . \left|\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right| \leq$$

$$\leq 2 . \max \left(\left|\frac{e^{-px} - e^{-bx}}{x}\right| , \left|\frac{e^{-qx} - e^{-bx}}{x}\right|\right) \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} .$$

Je nutno spočítat poslední integrál :

1/ Podle př. 6,32 je

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b) = - 2 . \frac{1}{2} \log \frac{(a+b)^2}{4a^2} = 2\log \frac{2a}{a+b} .$$

2/ Jako cvičení zkuste spočítat

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b) = - 2 \int_0^\infty e^{-(a+b)x}\, dx = \frac{-2}{a+b} \quad (\text{s majorantou } e^{-ax}) .$$

Odtud vzhledem k $H(b,b) = 0$ a k spojitosti dostáváme

$$H(a,b) = \left[\frac{(2a)^a \cdot (2b)^b}{(a+b)^{a+b}}\right]^2 \qquad \text{pro } a \geq 0, \; b \geq 0$$

(opět $0^0 = 1$) .

6,47. Spočtěte $H(a,b,k) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin bx}{x} \cdot e^{kx}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro $a,b \in E_1$, $k \geq 0$.

b/ Buďte $b \in E_1$, $k > 0$ pevné, potom

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b,k) = \int_0^\infty \cos ax \cdot \frac{\sin bx}{x}\, e^{-kx}\, dx$$

(majoranta $|b| \cdot e^{-kx}$).

Spočtěte tento integrál,

1/ s použitím vztahů $\cos\alpha \; \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$
a příkladu 6,22, dostanete

$$\frac{\partial H}{\partial a}(a,b,k) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{a+b}{k} - \operatorname{arctg}\frac{a-b}{k}\right),$$

2/ tím, že spočítáte $\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b,k)$.

Obdržíte výsledek

$$H(a,b,k) = \frac{a+b}{2}\operatorname{arctg}\frac{a+b}{k} - \frac{a-b}{2}\operatorname{arctg}\frac{a-b}{k} + \frac{k}{4}\log\frac{k^2+(a-b)^2}{k^2+(a+b)^2}.$$

c/ Diskusi k případu $k = 0$ viz v cvičení 6,73 .

6,48.* Spočtěte $H(a,b) = \int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) \cdot \log(1+b^2x^2)}{x^4}\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $a,b \in E_1$.

b/ Vyjádřete $\frac{\partial^2 H}{\partial a \partial b}(a,b)$.

6,49. Spočtěte $J(b) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$!

a/ Integrál konverguje pro všechna $b \in E_1$.

b/ Podle věty 61 jest

$$J'(b) = -2\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin 2bx\, dx$$

(majoranta $xe^{-x^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)}$.

Integrací per partes pro Newtonovy integrály /odůvodněte ! /
dostáváme $J'(b) = -2\,J(b)$.
Toto je diferenciální rovnice pro funkci $J(b)$ jejímž řešením vzhledem k $J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (viz 5,84) získáme

$$J(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2} .$$

c/ Porovnejte se cvičením 4,51 d . ||

6,50. Buď $P(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt$.

a/ Ukažte, že pro $x \geq 0$ tento integrál konverguje.

b/ Ukažte, že pro $x \in (0,+\infty)$ funkce $P(x)$ vyhovuje diferenciální rovnici $y'' + y = \frac{1}{x}$.

6,51.* Spočtěte $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt$!

|| a/ Integrál konverguje pro všechna $x \in E_1$.

b/ Funkce F je spojitá v E_1 ,

$$\left(e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \leqq e^{-t^2} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} \right) .$$

c/ Buď $x \in (0,+\infty)$, potom

$$F'(x) = \int_0^{\infty} -\frac{2x}{t^2} \cdot e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}}\, dt$$

(majoranta pro $x \in \langle p,q \rangle \subset (0,+\infty)$ je

$$\left| -\frac{2x}{t^2}\, e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} \right| \leqq \frac{2q}{t^2}\, e^{-t^2 - \frac{p^2}{t^2}} \in \mathcal{L}_{(0,+\infty)} ,$$

proměnná je t !!)

d/ Ukažte, že $2F(x) - F'(x) = 2\, e^{-2x} \cdot \sqrt{\pi}$

(použijte substituci $z = t - \frac{x}{t}$ a př. 5,84).

Řešením této diferenciální rovnice dostanete

$$F(x) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-4x} + K \right) e^{2x} \qquad \text{pro } x \in (0,+\infty) ,$$

ze spojitosti obou stran v bodě $x = 0$ pak plyne $K = 0$.

Tedy $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}$ pro $x \in \langle 0, +\infty)$.

e/ Ukažte, že je též splněna rovnice

$$F'(x) + 2F(x) = 0 \quad \text{a}$$

1/ vypočtěte z této diferenciální rovnice $F(x)$,

2/ řešte soustavu

$$2F(x) - F'(x) = 2 e^{-2x} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$2F(x) + F'(x) = 0$$

jako soustavu dvou lineárních rovnic .

6,52. Posledním úkolem, kterým se budeme zabývat, je studium a nakreslení grafu funkce zadané integrálem, podrobněji - je dána funkce F , $F(\alpha) = \int_M f(x, \alpha)\, dx$, my máme nakreslit graf této funkce F .

Při řešení tohoto problému budeme postupovat takto:

1/ zjistíme maximální obor D_F ("definiční obor"), ve kterém je funkce F definována a konečná, tj. zjistíme množinu těch $\alpha \in E_1$, pro která konverguje $\int_M f(x, \alpha)\, dx$,

tedy $$D_F = \left\{ \alpha \in E_1 ;\ f^{*,\alpha} \in \mathcal{L}_M \right\},$$

2/ budeme zkoumat spojitost funkce F v množině D_F ,

3/ spočítáme limity funkce F v "krajních bodech" množiny D_F , přesněji - je-li např. $D_F = (a,b)$, spočítáme

$$\lim_{\alpha \to b_-} F(\alpha) , \quad \lim_{\alpha \to a_+} F(\alpha) ,$$

4/ budeme zkoumat monotonii F ,

5/ eventuelně pro podrobnější studium vyšetříme extrémy funkce F , resp. konkavitu a konvexitu.

6,53. Nakreslete graf funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1 + x^2}\, dx$!

1/ Zjistěte, že $D_F = \langle 0, +\infty)$.

2/ Ukažte, že F je spojitá v $\langle 0, +\infty)$ (viz př. 6,3) .

3/ Ukažte, že $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$ (viz př. 4,21).

4/ Ukažte, že F je nerostoucí v $\langle 0, +\infty)$:

a/ zvolte libovolné $\alpha_1, \alpha_2 \in \langle 0,+\infty)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, potom ze vztahu

$$\frac{e^{-\alpha_1 x}}{1+x^2} \geqq \frac{e^{-\alpha_2 x}}{1+x^2} \qquad x \in (0,+\infty)$$

plyne i $F(\alpha_1) \geq F(\alpha_2)$ (ukažte, že dokonce $F(\alpha_1) > F(\alpha_2)$),

b/ $F'(a) < 0$ pro $a \in (0,+\infty)$, odtud plyne, že F je klesající v $(0,+\infty)$.

5/ Ukažte, že F je konvexní v intervalu $(0,+\infty)$ (spočtěte F'' !)

6/ Ukažte, že

$$\max F(a) = F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \inf_{a\in\langle 0,+\infty)} F(a) = 0,$$

minima funkce F nenabývá.

7/* Ukažte, že $F'_+(0) = -\infty$.

(Podle známé věty - vyslovte ji a odůvodněte - jest

$$F'_+(0) = \lim_{a\to 0_+} F'(a) \quad \text{a zjistíte, že}$$

$$\lim_{a\to 0_+} F'(a) = \int_0^\infty \lim_{a\to 0_+} \left(-\frac{xe^{-ax}}{1+x^2}\right) dx = -\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\, dx = -\infty \quad).$$

Jednotlivé kroky si znovu podrobně proveďte! Nakreslete graf ! ‖

6,54. Nakreslete graf funkce $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ /!

‖ 1/ $D_F = (-\infty, 0) \cup (0,+\infty)$, F je funkce sudá,

2/ F je spojitá v D_F,

3/ $\lim_{a\to 0_+} F(a) = +\infty$, $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$,

4/ F je klesající v intervalu $(0,+\infty)$

5/ F je konvexní v intervalu $(0,+\infty)$. ‖

6,55. Nakreslete grafy funkcí

a/ $F(a) = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}}{x(x+a)^2}\, dx$,

b/ $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$, c/ $F(a) = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}}\, dx$,

d/ $F(a) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-ax} - ax}{x^2}\, dx$.

Uveďme nyní v dalším, již nikterak systematicky, různé příklady.

6,56.* Buď $a > 0$, funkce f nechť je definována v intervalu $\langle 0,a\rangle$, nechť $f \in \mathcal{L}_{(0,a)}$ a nechť f je spojitá v bodě 0 zprava.
Potom

$$\lim_{h\to 0} \int_0^a \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot f(0) .$$

‖ Položte $I(h) = \int_0^a \frac{h}{h^2+x^2} (f(x) - f(0))\, dx$.

Buď $x_0 \in (0,a)$, $|f(x) - f(0)| \leq K$ pro $x \in (0,x_0)$. Ukažte, že

$$\lim_{h\to 0} \int_{x_0}^a \frac{h}{h^2+x^2} (f(x) - f(0))\, dx = 0 ,$$

$$\left| \int_0^{x_0} \frac{h}{h^2+x^2} f(x) - f(0))\, dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot K .$$

Odtud již lehko odvodíte, že $\lim_{h\to 0} I(h) = 0$ a poté tvrzení. ‖

6,57.* Nechť funkce f,g jsou definovány v E_1 , nechť $(L)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1$.
Buď $x_0 \in E_1$, předpokládejme ještě, že f je omezená v E_1 a spojitá v bodě x_0 . Potom

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g\left(\frac{x-x_0}{y}\right) dx = f(x_0) .$$

Dokažte!

‖ Použijte substituci $x - x_0 = ty$ a větu 60 . ‖

6,58. Ukažte, že

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-ax} \cdot \cos bx\, dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2+b^2)^2} ,$$

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-ax} \cdot \sin bx\, dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$$

pro $a > 0$, $b \in E_1$.

Odvoďte derivací výsledků z př. 4,47 a 4,48.

6,59.* Ukažte, že

$$\int_0^a \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\log 2)\,.\,\mathrm{arctg}\, a + \frac{\pi}{8}\log(1+a^2),$$

pro libovolné $a > -1$.

Ukažte, že

1/ integrály konvergují pro $a > -1$,

2/ $\displaystyle\int_0^a \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx$ je primitivní funkcí k funkci

$$\frac{\log(1+a)}{1+a^2} \quad \text{na intervalu} \quad (-1,+\infty),$$

3/ derivace levé strany rovnosti je rovna derivaci pravé strany rovnosti pro libovolné $a > -1$,

4/ pro $a = 0$ je rovnost splněna.

6,60.* Ukažte, že

$$\int_1^a \frac{\log x}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{\log(1+ax)(a+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\,.\,\log(1+a^2)$$

pro libovolné $a > 0$.

Volte stejný postup jako v př. 6,59.

6,61. Ukažte, že

$$(R)\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\,.\,\log 2\,.$$

Dosaďte $a = 0$ do rovnosti v př. 6,59 anebo $a = 1$ do rovnosti v příkladu 6,60.

6,62.* Ukažte, že

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^a(1+x-2x^{a+1})}{1-x^2}\,dx = \log 2 \quad \text{pro} \quad a \in (-1,+\infty).$$

Ukažte, že

1/ pro $a > -1$ integrál konverguje ,

2/ $F'(a) = 0$ pro $a \in (-1,+\infty)$,

3/ $F(0) = \log 2$.

6,63.* Ukažte, že

$$\left[\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right]^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt \quad \text{pro } x \in E_1 .$$

Ukažte, že

1/ $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ je primitivní funkce k funkci e^{-x^2} na intervalu $(0,+\infty)$,

2/ derivace levé i pravé strany rovnosti jsou stejné na intervalu $(0,+\infty)$ /pozor při derivování složené funkce !/ ,

3/ proveďte limitní přechod pro $x \to +\infty$ a využijte výsledků příkladů 5,84 a či dosaďte $x = 0$.
Vše proveďte podrobně a odůvodněte ! .

6,64.* Dokažte, že

$$F(a,b) = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{bx^{ab-1}}{1-x^b}\right) dx = \log b$$

pro $a \in (0,+\infty)$, $b \in (0,+\infty)$!

Ukažte, že

1/ integrál pro $a > 0$, $b > 0$ konverguje,

2/ $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ pro každé $b > 0$ na intervalu $(0,+\infty)$,

3/ $F(1,b) = \log b$.

6,65.° Vyšetřujte funkci

$$F(a) = \int_0^1 \log(x^2 + a^2)\, dx .$$

Ukažte, že

1/ integrál konverguje pro všechna $a \in E_1$,

2/ funkce F je spojitá funkce v E_1 /viz podobný příklad 6,12 g/ ,

3/ $F(a) = \log(1+a^2) - 2 + 2a \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$, $F(0) = -2$,

25535 213

4/ $F'(a) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$ pro $a \neq 0$, $F'_+(0) = \pi$, $F'_-(0) = -\pi$.

Mechanickým derivováním - bez ověření předpokladů - dostáváme chybný výsledek

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{2a}{x^2 + a^2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pro } a = 0 \\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{a} & \text{pro } a \neq 0 \,. \end{cases}$$

Rozmyslete !

$\boxed{6{,}66.^{\circ}}$ Vyšetřujte funkci

$$F(a) = \int_0^1 \frac{x^a}{\log x}\,dx \,.$$

Ukažte, že

1/ $F(a) = -\infty$ pro libovolné $a \in E_1$,

2/ mechanickým derivováním integrálu za integračním znamením dostanete

$F'(a) = \frac{1}{a+1}$ pro $a \in (-1,+\infty)$

(který předpoklad věty 61 není splněn ?).

$\boxed{6{,}67.}$ Předpokládejte, že jste odvodili vzorce

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x^p)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6p} \,, \qquad \int_0^1 \frac{\log(1+x^p)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p}$$

pro $p \in (0,+\infty)$ (viz kupř. 4,45).

Odvoďte odtud pomocí derivace integrálu podle parametru, že

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{6p^2} \,, \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^p}\log\frac{1}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12p^2}$$

pro $p \in (0,+\infty)$.

$\boxed{6{,}68.^{*}}$ Vyšetřujte funkci

$$F(a,b,m) = \int_0^\infty \log\left(\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right)\cos mx\,dx \,.$$

Ukažte, že

1/ integrál konverguje pro libovolné hodnoty $a,b,m \in E_1$,

2/ je-li $a,b \in E_1$ pevné, je funkce $F(a,b,m)$ spojitá jakožto funkce m v E_1 /přesněji funkce $F^{a,b,*}$ je spojitá v E_1 pro libovolné $a,b \in E_1$ / .

Spočtěte $\frac{\partial F}{\partial a}$ s použitím př. 5,92 a a odtud spočtěte $F(a,b,m)$ /nutno rozlišit případy $m = 0$ a $m \neq 0$, viz též př. 5,91 /.

6,69. Dokažte, že

$$\int_0^1 x^{p-1} \cdot \sin(q\log x)\, dx = \frac{-q}{p^2+q^2} \quad , \quad \int_0^1 x^{p-1} \cdot \cos(q\log x)\, dx = \frac{p}{p^2+q^2}$$

pro libovolné $q \in E_1$, $p \in (0,+\infty)$.

Použijte výsledků př. 4,47 a 4,48 spolu se substitucí $\log x = t$.

6,70. Dokažte, že

$$a/ \int_0^1 \frac{x^{p-1} \cdot \sin(q\log x)}{\log x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{q}{p} \quad \text{pro } p \in (0,+\infty) \,,\ q \in E_1 \,,$$

$$b/ \int_0^1 \frac{x^{p-1} \cos(q \log x)}{\log x}\, dx$$ diverguje pro libovolné hodnoty p,q .

a/ Odvoďte derivováním integrálu /derivujte podle p i q !/ s použitím př. 6,69 .

b/ Zkoumejte chování integrálu v okolí bodu 1 .

Co nám dá mechanické derivování ?

6,71.* Dokažte, že

$$F(a,b) = \int_0^{\pi} \log(a \pm b \cos x)\, dx = \pi \log \frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

pro $0 < b \leq a$.

Ukažte, že $\frac{\partial F}{\partial a}(a,b) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ a použijte výsledku příkladu 8,66 - část 11 či př. 5,87 nebo př. 6,30 e .

6,72. Ukažte, že

$$F(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{1-\cos x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+1}{a^2} \quad \text{pro } a \in (0,+\infty) \,.$$

Lehko zjistíte podle př. 4,48, že $F'(a) = \frac{a}{a^2+1} - \frac{1}{a}$, odtud tedy plyne, že $F(a) = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+1}{a^2} + C$ a provedete limitní přechod pro $a \longrightarrow +\infty$.

Viz též př. 5,95 .

6,73. Ukažte, že

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot|b| \qquad \text{pro} \quad b \in E_1 .$$

Použijte příkladu 6,47 , kde provedete limitní přechod pro $k \longrightarrow 0_+$, viz též př. 5,93 .

6,74.* Ukažte, že

$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot|b| - \sqrt{a\pi}$$

pro $a \in \langle 0,+\infty)$, $b \in E_1$.

1/ Použijte vztahu

$$F(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - 1}{x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1-\cos bx}{x^2}\,dx$$

a výsledků příkladů 6,35 a 6,73 .

2/ Ukažte, že $F(a,b) = -\sqrt{a\pi} + C(b)$ /derivace podle "a" s př. 5,84/, odtud vyplyne, že

$$C(b) = \lim_{a\to 0_+} F(a,b) = \int_0^\infty \frac{1-\cos bx}{x^2}\,dx \quad \text{a opět}$$

použijeme 6,73 .

3/ Dostanete výsledek též derivováním podle "b" ? .

6,75.* Ukažte, že

1/ $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\cdot\cos mx\,dx = \sqrt{\frac{\pi(a+\sqrt{a^2+m^2})}{2(a^2+m^2)}} \quad \text{pro} \quad a \in (0,+\infty),\ m \in E_1 ,$$

2/ $$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x\sqrt{x}}\sin mx\,dx = \sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{\sqrt{a^2+m^2}-a}$$

pro $a \in (0,+\infty)$, $m \geq 0$.

1/ Substituce $x = t^2$ a př. 5,94 .

2/ Derivace podle "m" a výsledek první části .

6,76. Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Pro každé $x \in (a,b)$ buď $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Je-li f spojitá v bodě x_0 , existuje $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$. Dokažte !

(Více o funkci F viz dodatku D IV).

Odhadněte $\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right|$.

6,77.** Ukažte, že

$$F(b) = \int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi b} \quad \text{pro} \quad b \in (0,1) .$$

1/ Integrál konverguje pro $b \in (0,1)$.

2/ Dokažte, že $F(b) = \dfrac{\pi}{\sin \pi b}$ nejdříve pro

$b \in (0,1)$ racionální .

3/ Ukažte, že funkce F je spojitá v $(0,1)$ - viz př. 6,11 .

4/ Odtud ůvoďte již tvrzení .

Viz též V.Jarník, Integrální počet II, kap. VII, § 5.

6,78. Spočtěte následující integrály .

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x^p)(1-x^q)}{\log x}\,dx$,

b/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\sin x)}{\sin x}\,dx$,

c/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1+a\sin^2 x)}{\sin^2 x}\,dx$,

d/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}(a^2 \operatorname{tg}^2 x)\,dx$,

e/ $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{cotg} ax \,.\, \operatorname{cotg} bx\,dx$,

f/ $\displaystyle\int_0^\infty \log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right) . \log\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right) dx$,

g/ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x) \,.\, \cos 2nx\,dx$,

h/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2) \,.\, \operatorname{arctg} bx}{x^3}\,dx$,

i/ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \,.\, \operatorname{arc\,cotg} \frac{x}{p}}{x^2+q^2}\,dx$, j/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (a^2 + b^2 tg^2 x)\, dx$,

k/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (1 + p \sin^2 x)\, dx$.

7. Jiná pojetí Lebesgueova integrálu.

7,1. V této kapitole ukážeme, jak lze vybudovat teorii Lebesgueova integrálu, vyjdeme-li z prvotního pojmu míry. Bylo by vhodné, kdyby si čtenář nejdříve prostudoval dodatek ke 4.kapitole ve skriptech I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I , kde se autoři tímto problémem zabývají - ovšem pouze za omezujících předpokladů /uvažují totiž pouze podmnožiny eukleidovského prostoru/.

Zopakujeme ještě jednou, jak jsme my vybudovali teorii integrálu a míry. Vyšli jsme ze základního prostoru (Z,A) , tj. ze základního systému funkcí na němž byl definován základní funkcionál A , tento prostor jsme rozšířili a obdrželi jsme systém $\mathcal{L}$ všech funkcí s konečným abstraktním integrálem A ; pomocí tohoto systému jsme pak definovali systém všech měřitelných funkcí Λ , systém všech měřitelných množin $\mathcal{M}$ a míru μ na $\mathcal{M}$. Celému tomuto abstraktnímu postupu říkejme krátce <u>Daniellova metoda</u>, abstraktnímu rozšíření pak <u>Daniellovo rozšíření</u>.

Jestliže jsme zvolili za základní systém Z systém všech spojitých funkcí C_r s kompaktním nosičem v E_r a za základní funkcionál A Riemannův integrál přes E_r , dostali jsme speciální teorii, a sice teorii Lebesgueova integrálu v E_r ; systému $\mathcal{L}$ odvozenému v této teorii jsme říkali systém všech funkcí s konečným Lebesgueovým integrálem, mluvili jsme též o systému $\mathcal{M}_r$ všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_r i o Lebesgueově míře μ_r .

Při budování teorie Lebesgueova /či abstraktního- integrálu je možno také zvolit postup zcela opačný, tj. je možno vyjít z teorie míry a na základě této teorie pak vybudovat teorii integrálu. V dalším naznačíme, jak toto lze provést. Vzhledem k tomu, že tato kapitola má však pouze problémový charakter, omezíme se v dalším jen na stručné myšlenky, není možné na tomto místě vybudovat celou teorii detailně. Je nutno také předem upozornit na skutečnost, že mnozí autoři se zabývají těmito problémy za různých předpokladů a bývá jejich snahou vybudovat celou teorii pokud možno co nejobecněji. Domnívám se, že není účelem této kapitoly upozornit na všechny možné detaily různých teorií, budeme proto v dalším používat často značně omezujících předpokladů a nebudeme se uvedenou problematikou zabývat v celé šíři.

A ještě jednu poznámku. Tak jako při Daniellově metodě jsme mohli vyjít z abstraktního prostoru (Z,A) či tento specifikovat - mohli jsme vyjít z konkretního systému C_r všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem v E_r a z Riemannova integrálu - tak také při opačném postupu můžeme vyjít z abstraktní teorie míry anebo ze speciálního případu - Lebesgueovy míry v E_r . Aby se čtenář v této kapitole lépe orientoval, budeme za čísly jednotlivých odstavců vždy uvádět, zda se jedná o obecnou teorii či o speciální teorii v eukleidovských prostorech. Několik odstavců bude pak vyhraženo cvičením.

7,2. /obecně/: <u>Definice σ - okruhu</u>

Buď dána libovolná neprázdná množina X . Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X nazveme /množinovým/ σ - okruhem, jestliže platí:

1/ $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S} \Rightarrow A - B \in \mathcal{S}$,

2/ $A_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1,2,\dots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

To znamená, že σ - okruh $\mathcal{S}$ se svými libovolnými dvěma množinami obsahuje i jejich rozdíl a se spočetně mnoha množinami i jejich sjednocení.

Je-li navíc ještě $X \in \mathcal{S}$, budeme systému $\mathcal{S}$ říkat σ -algebra.

7,3. /cvičení/.

Buď $\mathcal{S}$ σ - okruh podmnožin množiny X . Ukažte, že platí:

a/ $\emptyset \in \mathcal{S}$,

b/ $A_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1,2,\dots) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.

7,4. /cvičení/.

Rozhodněte, zda následující systémy podmnožin množiny X tvoří σ - okruh:

a/ systém všech omezených podmnožin eukleidovského prostoru E_r ,

b/ systém všech spočetných podmnožin E_1 ,

c/ systém všech otevřených podmnožin metrického prostoru,

d/ systém všech uzavřených podmnožin metrického prostoru,

e/ systém všech kompaktních podmnožin metrického prostoru,

f/ systém všech jednobodových množin v E_1 ,

g/ systém všech podmnožin dané množiny X ,

h/ systém $\mathfrak{M}$ všech měřitelných podmnožin základní množiny P získaný při Daniellově rozšíření /tvoří $\mathfrak{M}$ σ - algebru ? , viz např. 2,5; 2,10/.

7,5. /obecně, cvičení/. <u>Definice generovaného σ - okruhu</u>.

Jako cvičení ukažte následující :

A/ průnik libovolného systému σ - okruhů podmnožin množiny X je opět σ - okruh podmnožin množiny X ,

B/ systém všech podmnožin dané množiny X tvoří σ - okruh /viz př. 7,4 g/,

C/ buď $\mathcal{U}$ libovolný systém podmnožin množiny X , potom existuje právě jeden σ - okruh $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X takový, že

1/ $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$,

2/ je-li $\mathcal{S}'$ libovolný σ - okruh podmnožin množiny X takový, že $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}'$, potom $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

⌈ Vezměte všechny σ - okruhy, které obsahují $\mathcal{U}$, podle B existuje alespoň jeden, a utvořte jejich průnik ⌋ .

Je-li tedy $\mathcal{U}$ libovolný systém podmnožin množiny X , existuje podle předešlého nejmenší σ - okruh $\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{U}$. Značme tento σ - okruh symbolem $\sigma(\mathcal{U})$, budeme říkat, že $\sigma(\mathcal{U})$ je <u>generován</u> /vytvořen/ systémem $\mathcal{U}$.

Ukažte, že

D/ je-li $\mathcal{U}$ σ - okruh, potom $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

Zkoumejte též, jaké σ - okruhy generují systémy množin ve cvičeních 7,4 a/ - h/ .

7,6. /eukleidovské prostory/. <u>Borelovské množiny.</u>

Označme symbolem $\mathcal{O}_n$ systém všech otevřených množin v E_n . Jak lehko nahlédnete /viz 7,4 c/ , netvoří systém $\mathcal{O}_n$ σ - okruh. Podle 7,5 však existuje nejmenší σ - okruh podmnožin E_n takový, že obsahuje systém $\mathcal{O}_n$, tj. všechny otevřené množiny. Značme tento systém symbolem $\mathcal{B}_n$ /tj. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{O}_n)$ / a jeho prvky nazývejme borelovskými množinami E_n .

Ukažte, že

1/ $F \subset E_n$ uzavřená množina $\Rightarrow$ $F \in \mathcal{B}_n$ /každá uzavřená množina je borelovská/,

2/ systém $\mathcal{B}_n$ všech borelovských množin je též generován systémem všech uzavřených množin, tj. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{U}_n)$, kde $\mathcal{U}_n$ značí systém všech uzavřených podmnožin E_n ,

3/ systém $\mathcal{B}_n$ je též generován systémem všech kompaktních množin v E_n , 4/ $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$, tj. každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná

$\lceil$ podle věty 50 je každá otevřená množina měřitelná, tj. $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{M}_n$, podle 7,4 g tvoří $\mathcal{M}_n$ σ - okruh a systém $\mathcal{B}_n$ je nejmenší σ - okruh obsahující $\mathcal{O}_n$ $\rfloor$,

5/ $\mathcal{B}_n$ je dokonce σ - algebra ,

6/ označíme-li symbolem $\mathcal{J}_1$ systém všech otevřených intervalů $(a,b) \subset E_1$, je $\mathcal{B}_1 = \sigma(\mathcal{J}_1)$,

7/ množina všech racionálních čísel v E_1 je borelovská,

8/ množina všech iracionálních čísel v E_1 je borelovská,

**9/ podmnožina borelovské množiny nemusí být borelovská,

**10/ množina všech borelovských podmnožin E_n má mohutnost kontinua /tj. $2^{\aleph_0}$ / ,

**11/ existují měřitelné množiny, které nejsou borelovské, tj. není $\mathcal{B}_n = \mathcal{M}_n$

$\lceil$ množina všech podmnožin Cantorova diskontinua C - viz př. 5,7 - má mohutnost $2^{\aleph_1}$ a každá podmnožina C je měřitelná . $\rfloor$

7,7. /obecně/. Definice míry.

Množinovou funkcí rozumíme funkci, jejíž definiční obor tvoří nějaký systém množin /tj. zobrazení, které určitým množinám přiřazuje hodnoty z E_1^*/. Mírou μ rozumíme takovou množinovou funkci, že

1/ definičním oborem μ je nějaký σ - okruh $\mathcal{S}$ /tj. existuje takový σ - okruh $\mathcal{S}$, že pro každou množinu $A \in \mathcal{S}$ je definováno μA /,

2/ $A \in \mathcal{S} \Longrightarrow \mu A \geqq 0$ / μ je nezáporná funkce/,

3/ $\mu(\emptyset) = 0$,

4/ μ je σ - aditivní na $\mathcal{S}$, tj. jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$ disjunktní množiny, potom $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

7,8. /cvičení/.

Zkoumejte, zda následující množinové funkce jsou míry:

1/ $X = E_1$, $\mathcal{S}$ = systém všech podmnožin E_1 ,

$$\mu E = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } 0 \in E , \\ 0 & \text{jestliže } 0 \notin E , \end{cases}$$

2/ $X = N$ /množina všech přirozených čísel/,

$\mathcal{S}$ = systém všech podmnožin N ,

$$\mu E = \begin{cases} n & \text{jestliže } E \subset N \text{ je konečná množina obsahující právě } n \text{ prvků ,} \\ +\infty & \text{jestliže } E \subset N \text{ je nekonečná množina ,} \end{cases}$$

3/ X , $\mathcal{S}$ definujme stejně jako v předešlém příkladě ,

$$\mu E = \begin{cases} 0 & \text{je-li } E = \emptyset \text{ ,} \\ +\infty & \text{je-li } E \text{ nekonečná} \\ \sum\limits_{n \in E} \frac{1}{n^2} & \text{je-li } E \neq \emptyset \text{ konečná,} \end{cases}$$

4/ míra μ na systému všech měřitelných množin $\mathcal{M}$ /viz definici za větou 12 a věty 14, 15 /,

5/ X je libovolná množina, $\mathcal{S}$ libovolný σ - okruh podmnožin množiny X ,

$$\mu E = \begin{cases} 0 & \text{je-li } E = \emptyset \text{ ,} \\ +\infty & \text{je-li } E \in \mathcal{S} \text{ , } E \neq \emptyset \text{ .} \end{cases}$$

$\boxed{7,9.}$ /cvičení/.

Buď μ míra na σ - okruhu $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X .
Potom

a/ $A , B \in \mathcal{S} , A \subset B \Rightarrow \mu A \leq \mu B$,

b/ $A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n$,

c/ $A_n \in \mathcal{S}$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots.$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \mu A = \lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n$,

d/ $A_n \in \mathcal{S}$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots.$, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,

$$\mu A_1 < +\infty \Rightarrow \mu A = \lim_{n \to \infty} \mu A_n \text{ .}$$

Dokažte tato tvrzení z definice míry v 7,7 ! Srovnejte též s větami 15, 16, 17 .

$\boxed{7,10^*}$ /obecně/. Definice úplné míry.

Buď μ míra na σ - okruhu $\mathcal{S}$. Ukažte na příkladě, že nemusí být splněna následující podmínka:

$$(*) \quad \mu E = 0 \,, \quad F \subset E \Rightarrow F \in \mathcal{S} \quad / \text{a} \quad \mu F = 0 \,/ \,.$$

Je-li splněna podmínka $(*)$, říkáme, že μ je úplná míra na $\mathcal{S}$.

$\boxed{7,11.}$ /cvičení/.

Ukažte, že míra μ odvozená v Daniellově rozšíření je úplná na $\mathcal{M}$ /viz př. 5,10/.

$\boxed{7,12.}$ (obecně/. Definice vnější míry.

Buď X libovolná množina. Vnější mírou μ^* na X nazveme libovolnou množinovou funkci takovou, že

1/ μ^* je definována na systému všech podmnožin množiny X /tj. každé množině $A \subset X$ je přiřazeno číslo $\mu^* A \in E_1$ / ,

2/ $A \subset X \Rightarrow \mu^* A \geq 0$ / μ^* je nezáporná/,

3/ $\mu^*(\emptyset) = 0$,

4/ $A \,, \; E_n \subset X \,, \; A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* E_n$.

$\boxed{7,13.}$ /cvičení/.

Zkoumejte, zda následující množinové funkce jsou vnější míry:

1/ funkce μ z př. 7,8 - část 1/ - 3/ ,

2/ libovolná míra definována na systému všech podmnožin množiny X ,

3/ X je nespočetná množina ,

$$\mu^* E = \begin{cases} 0 & \text{je-li } E \text{ spočetná ,} \\ 1 & \text{je-li } E \subset X \text{ nespočetná ,} \end{cases}$$

4/ X je libovolná množina,

$$\mu^* E = \begin{cases} 0 & \text{pro } E = \emptyset \,, \\ 1 & \text{pro } \emptyset \neq E \neq X \,, \\ 2 & \text{pro } E = X \,, \end{cases}$$

5/ $X = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,

$$\mu^* E = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{je-li } E \text{ konečná množina, která obsahuje právě } n \text{ prvků,} \\ 1 & \text{je-li } E \text{ nekonečná množina,} \end{cases}$$

6/ $X = E_1$; buď $B = \left\{ \frac{1}{n} ;\ n = 1,2,3,\dots \right\}$.

$$\mu^* E = \begin{cases} n & \text{obsahuje-li množina } E \cap B \text{ právě } n \text{ prvků} \\ +\infty & \text{je-li množina } E \cap B \text{ nekonečná,} \end{cases}$$

/viz též př. 2,17/,

7/ X je libovolná množina ,

$$\mu^* E = \begin{cases} 0 & \text{pro } E = \emptyset , \\ 2 & \text{obsahuje-li } E \subset X \text{ právě jeden prvek} \\ n & \text{obsahuje-li množina } E \subset X \text{ právě } n \text{ prvků , } n \geq 2 , \\ +\infty & \text{je-li } E \subset X \text{ nekonečná ,} \end{cases}$$

8/ vnější míra $\tilde{\mu}$ odvozená v teorii Daniellova rozšíření /viz definici za větou 11 /.

7,14.* /obecně/.

Buď X metrický prostor, μ^* vnější míra na podmnožinách množiny X , která navíc splňuje axiom

(M) : E_1 , $E_2 \subset X$ neprázdné množiny, které mají kladnou vzdálenost $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^* E_1 + \mu^* E_2$ /vzdálenost $d(E_1 , E_2)$ dvou množin E_1 , E_2 se definuje takto:

$$d(E_1 , E_2) = \inf \rho(x,y) , \quad x \in E_1 , \ y \in E_2 ,$$

kde ρ je metrika v X /.

Potom říkáme, že μ^* je <u>metrická</u> vnější míra.

7,15. /obecně - důležité !/. <u>Definice μ^* - měřitelných množin</u> .

Buď μ^* vnější míra na podmnožinách množiny X . Množina $E \subset X$ se nazývá μ^*- měřitelná /podle Caratheodoryho/, právě když

$$\mu^* T = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T - E)$$

pro libovolnou množinu $T \subset X$ /kreslete!/.

Systém všech μ^*- měřitelných množin značme symbolem $\mathfrak{M}(\mu^*)$.

Platí následující velmi důležitá věta, pokuste se ji dokázat!

$\boxed{7{,}16.^*}$ /obecně/. **Věta.**

1/ Systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin tvoří σ - okruh podmnožin množiny X .

2/ $X \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, tj. systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ tvoří dokonce σ - algebru.

3/ Definujeme-li funkci μ na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ předpisem

$$\mu E = \mu^* E \quad \text{pro} \quad E \in \mathfrak{M}(\mu^*) ,$$

je μ úplná míra na $\mathfrak{M}(\mu^*)$ /viz definice 7,7 a 7,10/. Říkáme též, že míra μ je indukována vnější mírou μ^* na $\mathfrak{M}(\mu^*)$.

4/ Je-li X metrický prostor, μ^* metrická vnější míra /viz 7,14/, potom je každá otevřená podmnožina X μ^*- měřitelná. Speciálně - označíme-li si symbolem $\mathcal{B}$ σ- okruh generovaný systémem všech otevřených podmnožin prostoru X , je $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}(\mu^*)$ - odůvodněte!

$\boxed{7{,}17.}$ /cvičení/.

Zkoumejte, jak budou vypadat systémy $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin v jednotlivých případech cvičení 7,13 !

⟦ K části 7 - všimněte si, že systém $\mathfrak{M}(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin podle naší definice 7,13 se nemusí shodovat se systémem $\mathfrak{M}$ všech měřitelných množin získaných v Daniellově rozšíření, neboť podle 7,16 jest vždy $P \in \mathfrak{M}(\mu^*)$, zatímco nemusí být $P \in \mathfrak{M}$ - viz příklady 2,5 ; 2,10 aj. Viz též cvič. 8,30 . ⟧

V dalším by bylo možné se zabývat otázkami vytváření vnější míry, otázkami rozšiřování a zúplňování míry aj., které však v dalším zcela opomineme. Ukážeme pouze, jak těmito postupy můžeme dospět k Lebesgueově míře v E_n .

$\boxed{7{,}18.}$ Lebesgueova míra v eukleidovských prostorech.

Buď dán otevřený interval $I \subset E_n$, tj. kartézský součin n jednorozměrných otevřených intervalů, $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots\dots \times (a_n , b_n)$. Objemem intervalu I nazveme číslo

$$\mathrm{vol}\,(I) = (b_1 - a_1) \,.\, (b_2 - a_2) \,.\, \dots \,.\, (b_n - a_n) \,.$$

Můžeme předpokládat /není to nutné/, že budeme uvažovat pouze omezené otevřené intervaly.

Je-li dána libovolná množina $E \subset E_n$ a je-li $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ spočetná soustava otevřených /omezených/ intervalů takových, že $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, nazveme soustavu $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ Lebesgueovým pokrytím množiny E. Pro libovolnou množinu $E \subset E_n$ definujeme její vnější Lebesgueovu míru $\mu^* E$ předpisem

$$\mu^* E = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_n) ,$$

kde infimum se bere přes všechna možná Lebesgueova pokrytí množiny E /viz pro srovnání 5,5 /.

Dokažte, že

1/ $I \subset E_n$ interval $\Rightarrow$ $\mu^* I = \operatorname{vol}(I)$,

2/ μ^* je metrická vnější míra na podmnožinách E_n /definice 7,12 a 7,14/.

Odtud podle 7,15 můžeme definovat systém $\mathcal{M}_n(\mu^*)$ všech μ^*- měřitelných množin v E_n. Množiny ze systému $\mathcal{M}_n(\mu^*)$ budeme též nazývat lebesgueovsky měřitelnými množinami v E_n /jak později ukážeme - viz př. 7,39 - splývá systém $\mathcal{M}_n(\mu^*)$ se systémem $\mathcal{M}_n$ všech měřitelných množin podle Daniella - pochopitelně vyjdeme-li ze systému $Z = C_n$ a $Af = (R) \int_{E_n} f$). Podle 7,16 můžeme na systému $\mathcal{M}_n(\mu^*)$ definovat míru μ_n - říkejme jí n - rozměrná Lebesgueova míra.

$\boxed{7,19.^*}$ /cvičení v eukleidovských prostorech/.

Dokažte, že

1/ každá borelovská množina je lebesgueovsky měřitelná

[viz 7,6 , 7,16 , 7,18 ,]

2/ $E \subset E_n \Rightarrow \mu^* E = \inf \{ \mu G ;\ G \text{ otevřená},\ E \subset G \}$ (viz též např. věta 55 či skripta I. Černý - J.Mařík, Integrální počet I , věta 4,5),

3/ $E \subset E_n \Rightarrow \mu^* E = \inf \{ \mu M ;\ M \in \mathcal{M}_n(\mu^*),\ E \subset M \}$ /tzv. regularita vnější míry /.

$\boxed{7,20.}$ /cvičení v eukleidovských prostorech/.

Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

a/ $E \in \mathcal{M}_n(\mu^*)$, tj. E je lebesgueovsky měřitelná ,

b/ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková otevřená množina G , že $E \subset G$ a $\mu^*(G - E) < \varepsilon$,

c/ ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková uzavřená množina F , že $F \subset E$ a $\mu^*(E - F) < \varepsilon$,

d/ existuje množina G_0 typu G_δ a nulová množina N /tj. množina, pro niž $\mu^* N = 0$ / tak, že $E = G_0 - N$,

e/ existuje množina F_0 typu F_σ a nulová množina M tak, že $E = F_0 \cup M$

/říkáme, že množina G je typu G_δ , resp. F_σ , existují-li otevřené, resp. uzavřené množiny G_n tak, že $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$; resp. $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ /.

Tato věta velmi dobře charakterisuje strukturu lebesgueovsky měřitelných množin v E_n .

Vraťme se však opět k abstraktní teorii míry.

7,21. /obecně/. <u>Definice prostoru s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$</u>.

Trojici $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazveme prostorem s mírou, jestliže

1/ X je neprázdná množina ,

2/ $\mathcal{S}$ je σ - algebra podmnožin množiny X /tj. $\mathcal{S}$ je σ -okruh a $X \in \mathcal{S}$ / ,

3/ μ je úplná míra na $\mathcal{S}$.

<u>Upozornění</u>: většina autorů nazývá prostorem s mírou $(X , \mathcal{S} , \mu)$ libovolnou trojici uvedených vlastností, pouze požadavek $X \in \mathcal{S}$ je u nich nahrazen požadavkem $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$ a požadavek úplnosti míry je vynechán ; my se v dalším podržíme naší definice, mnoho úvah se tím zjednoduší.

7,22. /cvičení/.

1/ Buď μ^* vnější míra na podmnožinách množiny X , nechť míra μ je indukována vnější mírou μ^* na $\mathcal{M}(\mu^*)$ (viz 7,16). Potom trojice $(X, \mathcal{M}(\mu^*), \mu)$ je prostor s mírou.

2/ Ukažte, že prostor $(P, \mathcal{M}, \mu)$ získaný Daniellovou metodou nemusí být prostorem s mírou /viz např. 2,5 /. Bude jím však v případě, když $P \in \mathcal{M}$.

7,23. /obecně/. <u>Definice $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí</u>.

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou.

Funkce f na množině X /tj. zobrazení X do E_1^*/ se nazývá $\mathcal{S}$ - měřitelná, právě když je splněna jedna z následujících podmínek:

25535 F14

1/ je-li $G \subset E_1$ otevřená množina, potom $f^{-1}(G) \in \mathcal{S}$ a dále $\{x \in X;\ f(x) = +\infty\} \in \mathcal{S}$, $\{x \in X;\ f(x) = -\infty\} \in \mathcal{S}$,

2/ $\{x \in X;\ f(x) < c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

3/ $\{x \in X;\ f(x) > c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

4/ $\{x \in X;\ f(x) \leq c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

5/ $\{x \in X;\ f(x) \geq c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

6/ $\{x \in X;\ f(x) < c\} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$.

Systém všech $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí na množině X značme symbolem $\Lambda(\mathcal{S})$.

/Poznámka: jak bylo vidět, stačilo předpokládat, že X je daná množina a $\mathcal{S}$ je σ-algebra jejích podmnožin, míra μ v definici $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí nikde nevystupovala/.

7,24. /cvičení/.

1/ Dokažte ekvivalenci jednotlivých výroků v 7,23 ; lze podmínku $c \in E_1^*$ nahradit všude podmínkou $c \in E_1$?

2/ Dokažte následující tvrzení:

je-li X metrický prostor a jestliže každá otevřená podmnožina X leží v $\mathcal{S}$ /speciálně je-li míra indukována metrickou vnější mírou - viz 7,16 a 7,22/, potom každá spojitá funkce na X je $\mathcal{S}$ - měřitelná.

3/ Jak lze zjednodušit definici $\mathcal{S}$ - měřitelné funkce, je-li f skoro všude na X konečná ? /tj. množina těch bodů, kde f nabývá hodnoty $+\infty$ či $-\infty$, je nulová/.

4/ Dokažte, že platí:

a/ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $g \sim f$ /tj. množina $\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\}$ je nulová/ $\Longrightarrow$ $g \in \Lambda(\mathcal{S})$,

b/ jsou-li f, g $\mathcal{S}$ - měřitelné na X, $\alpha, \beta \in E_1$, skoro všude má smysl součet $\alpha f + \beta g$, /chápeme $0 . \pm\infty = \pm\infty . 0 = 0$ /, potom funkce $\alpha f + \beta g$, $f . g$ jsou $\mathcal{S}$ - měřitelné,

c/ $f_n \in \Lambda(\mathcal{S})$, existuje $\lim_{n\to\infty} f_n$ $\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f_n \in \Lambda(\mathcal{S})$,

d/ $f \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow |f|,\ f^+,\ f^- \in \Lambda(\mathcal{S})$,

25535 214

e/ $f \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow \{ x \in X ;\ f(x) = 0 \} \in \mathcal{S}$,

f/ $f, g \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow \{ x \in X ;\ f(x) \neq g(x) \} \in \mathcal{S}$,

g/ $E \in \mathcal{S} \Leftrightarrow c_E \in \Lambda(\mathcal{S})$ /c_E je charakteristická funkce množiny E / .

7,25. /obecně/. <u>Definice nosiče funkce $N(f)$</u>

Buď f funkce na množině X . Potom množinu

$$N(f) = \{ x \in X ;\ f(x) \neq 0 \}$$

nazveme <u>nosičem</u> funkce f /v X / .

<u>Upozornění:</u> tato definice není zcela ve shodě s definicí za větou 46, kde jsme nosič definovali jako uzávěr množiny $N(f)$; v této kapitole však používejme stále shora uvedenou definici.

<u>Poznámka</u> /pro pochopení dalšího není nutné číst/.

V odstavci 7,23 jsme definovali $\mathcal{S}$ - měřitelné funkce v případě, že $\mathcal{S}$ je σ - algebra podmnožin množiny X , tj. v případě, že $X \in \mathcal{S}$. Pojem $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí lze definovat i tehdy, není-li $X \in \mathcal{S}$.

Definujeme /X je množina, $\mathcal{S}$ σ - okruh jejích podmnožin, f funkce na X /:

funkce f je $\mathcal{S}$ - měřitelná, je-li splněna jedna z následujících ekvivalentních podmínek:

1/ $f^{-1}(G) \cap N(f) \in \mathcal{S}$ pro každou otevřenou množinu

$$G \subset E_1 ,\ \{ x \in X ;\ f(x) = +\infty \} \in \mathcal{S} ,$$

$$\{ x \in X ;\ f(x) = -\infty \} \in \mathcal{S} ,$$

2/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) \leq c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

3/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) \geq c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

4/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) < c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$

a $\{ x \in X ;\ f(x) = +\infty \} \in \mathcal{S}$,

5/ $N(f) \cap \{ x \in X ;\ f(x) > c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1^*$,

$\{ x \in X ;\ f(x) = -\infty \} \in \mathcal{S}$.

Opět symbolem $\Lambda(\mathcal{S})$ můžeme označit systém všech $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí na X .

Ukažte, že v případě $X \in \mathcal{S}$ je tato definice ve shodě s definicí v 7,23. Která z tvrzení ve cvičení 7,24 zůstávají v platnosti i nyní ?

7,26. /cvičení/.

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou. Potom

$$f \in \Lambda(\mathcal{S}) \Rightarrow N(f) \in \mathcal{S}$$, dokažte !

[Viz 7,24 e, f .]

7,27. /obecně/ <u>Definice jednoduché funkce</u>.

Konečná funkc f definovaná na množině X ($(X, \mathcal{S}, \mu)$ je stále prostor s mírou) se nazývá jednoduchá, je-li množina $f(X)$ konečná /tj. f nabývá pouze konečně mnoha hodnot/ a $\{ x \in X ; f(x) = c \} \in \mathcal{S}$ pro každé $c \in E_1$.

7,28. /cvičení/.

Dokažte, že platí

1/ f jednoduchá na X $\Longrightarrow$ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$,

2/ f, g jednoduché funkce, $\alpha, \beta \in E_1 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ je jednoduchá, $f.g$ je jednoduchá funkce.

7,29. /obecně/. <u>Definice σ - konečné míry.</u>

Nechť μ je míra na σ - okruhu $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X . Řekneme, že míra μ je σ - konečná, právě když existují množiny $E_n \in \mathcal{S}$ tak, že

$$\mu E_n < +\infty \quad , \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \ .$$

Lze snadno nahlédnout, že ze σ - konečnosti míry μ plyne $X \in \mathcal{S}$, tj. $\mathcal{S}$ je pak nutně σ - algebra.

<u>Upozornění</u>: u mnoha autorů je tato definice trochu jiná.

7,30.* /obecně - důležité/.

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$ /viz 7,23/. Potom existuje posloupnost jednoduchých funkcí f_n na X takových, že $f_n \longrightarrow f$. Je-li navíc $f \geq 0$, lze volit posloupnost f_n tak, že $f_n \geq 0$ na X , $f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n . Je-li míra μ σ - konečná, můžeme volit posloupnost f_n tak, že $\mu(N(f_n)) < +\infty$ /viz definice 7,29 a 7,25 /.

Viz též skripta I. Černý - J. Mařík , Integrální počet I , odstavec 4,12.

7,31. /obecně/. Lemma.

Dokažte následující.

1/ Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, buď $E \in \mathcal{S}$.
Symbolem $\mathcal{S}_E$ označme systém všech množin $A \in \mathcal{S}$ takových, že $A \subset E$, tj.

$$\mathcal{S}_E = \{ A ;\ A \in \mathcal{S} ,\ A \subset E \} .$$

Potom trojice $(E, \mathcal{S}_E, \mu)$ je prostor s mírou.

2/ Buď $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $E \in \mathcal{S}$, definujme funkci $\hat{f}$ takto:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in E , \\ 0 & \text{pro } x \in X - E . \end{cases}$$

Potom $\hat{f} \in \Lambda(\mathcal{S})$ /viz též větu 12/.

3/ Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ prostor s mírou, $E \in \mathcal{S}$. Vytvořme prostor $(E, \mathcal{S}_E, \mu)$ podle části 1. Systém všech $\mathcal{S}_E$ - měřitelných funkcí na E značme symbolem $\Lambda(\mathcal{S}_E)$.
Dokažte následující:

a/ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $f_1 = f/E$ (tj. f_1 je funkce definovaná na E a rovna f na E)
$\Rightarrow$ $f_1 \in \Lambda(\mathcal{S}_E)$,

b/ $f_1 \in \Lambda(\mathcal{S}_E)$, $f = f_1$ na E , $f = 0$ na $X - E$
$\Rightarrow$ $f \in \Lambda(\mathcal{S})$.

Nyní máme již vše připraveno, abychom mohli definovat abstraktní integrál. Je mnoho způsobů, jak jej vhodně zavést, my zde ze začátku naznačíme klasickou definici, velmi podobnou definici Riemannova integrálu.

7,32. /obecně/. Zavedení abstraktního integrálu.

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ pevně daný prostor s mírou /definice 7,21/.

A/ Ze začátku předpokládejme, že $\mu X < +\infty$ a že f je libovolná $\mathcal{S}$ - měřitelná a omezená funkce na X .
Nechť $m < \inf_{x \in X} f(x)$, $M > \sup_{x \in X} f(x)$.
Vezměme libovolné dělení D intervalu $\langle m, M \rangle$, nechť

$$D : y_o = m < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M \,.$$

Označme

$$E_i = \{ x \in X \,;\; y_{i-1} \le f(x) < y_i \} \,, \quad i = 1, \dots, n \,.$$

Ukažte, že

1/ $E_i \in \mathcal{S}$ pro každé i ,

2/ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$,

3/ množiny E_i jsou po dvou disjunktní

/i islete si obrázek !/ .

Nyní utvoříme tzv. <u>horní a dolní Lebesgueův součet</u> funkce f příslušný dělení D - definujeme

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu E_i \,,$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot \mu E_i$$

/porovnejte s klasickou definicí Riemannovou !! /.

Lze ukázat /rozdíl od Riemannova integrálu !/, že

$$\sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) \,,$$

kde supremum a infimum se bere přes všechna možná dělení D intervalu $\langle m,M \rangle$.

Definujeme tedy abstraktní integrál vztahem

$$\int_X f \, d\mu = \sup_D s(f,D) = \inf_D S(f,D) \,,$$

/lze ukázat, že definice nezávisí na volbě hodnot m,M !/.

B/ Buď $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $E \in \mathcal{S}$ taková množina, že $\mu E < +\infty$. Buď f libovolná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X , která je na množině E omezená. Označme $\hat{f} = f/E$ /viz 7,31/. Potom definujeme

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \hat{f} \, d\mu \,,$$

kde integrál vpravo je již definován podle části A .

C/ Buď nyní $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, f libovolná <u>nezáporná</u> $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X .

Posloupnost funkcí $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ na X nazveme aproximující posloupností pro funkci f , právě když

1/ $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ pro každé n ,

2/ f_n jsou omezené na X ,

3/ f_n jsou $\mathcal{S}$ - měřitelné na X ,

4/ každá množina $N(f_n)$ /viz 7,25 a 7,26/ má konečnou míru ,

5/ $f_n \nearrow f$ skoro všude .

Ukažte, že platí následující tvrzení:

"Buď f nezáporná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X , buďte $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě aproximující posloupnosti pro funkci f , potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_{N(f_n)} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{N(g_n)} g_n \, d\mu \quad ."$$

Buď tedy f libovolná nezáporná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X . Funkci f nazveme <u>integrovatelnou</u>, existuje-li aproximující posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro funkci f .

V tomto případě definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{N(f_n)} f_n \, d\mu$$

/poslední limita může být i nevlastní !/.

Podle předchozí věty nezávisí $\int_X f \, d\mu$ na výběru aproximující posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ukažte, že v případě σ - konečné míry /definice 7,29/ vždy existuje aproximující posloupnost pro funkci f , tedy v tomto případě je libovolná $\mathcal{S}$ - měřitelná a nezáporná funkce na X integrovatelná /viz lemma 7,30/.

D/ Pro libovolnou $\mathcal{S}$ - měřitelnou funkci f na X definujeme <u>abstraktní integrál</u> vztahem

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \quad ,$$

má-li rozdíl vpravo smysl.

Systém všech $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí na X s konečným abstraktním integrálem označme symbolem $\mathcal{L}(\mu)$. Nyní bychom mohli definovat obvyklým způsobem integrál přes měřitelné podmnožiny X a odvodit všechny známé vlastnosti integrálu /tj. věty 18 - 46 první kapitoly /.

$\boxed{7{,}33.}$ /eukleidovské prostory/.

Celou abstraktní teorii můžeme nyní aplikovat na speciální případ eukleidovských prostorů. Vyjdeme ze systému $\mathcal{M}_n(\mu^*)$ všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_n a z n-rozměrné Lebesgueovy míry μ_n /viz definici 7,18/. Lehko se ukáže, že $(E_n, \mathcal{M}_n(\mu^*), \mu_n)$ je prostor s mírou a míra μ_n je na E_n σ - konečná. Systém všech $\mathcal{M}_n(\mu^*)$ - měřitelných funkcí na E_n definujeme jako v 7,23 a označíme jej symbolem $\Lambda_n(\mu)$.

Pro libovolnou omezenou lebesgueovsky měřitelnou množinu $A \subset E_n$ a libovolnou lebesgueovsky měřitelnou a omezenou funkci f na A definujeme integrál $\int_A f \, d\mu$ jako v 7,32 A - B /znovu si zopakujte! /.

Je-li nyní f libovolná lebesgueovsky měřitelná a nezáporná funkce v E_n - anebo přímo v libovolné měřitelné množině $M \subset E_n$ - můžeme definovat aproximující posloupnost pro funkci f

1/ buďto jako v 7,30 /f_n jsou jednoduché funkce/,

2/ anebo takto:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \cap \left[\langle -n,+n\rangle \times \ldots \times \langle -n,+n\rangle\right] \\ & \text{je-li } f(x) \leq n \,, \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in M \,. \end{cases}$$

/Lehko nahlédnete, že f_n tvoří aproximující posloupnost pro f na M/. Lebesgueův integrál $\int_M f \, d\mu$ definujeme nyní jako v 7,32 C . Integrál z libovolné lebesgueovsky měřitelné funkce pak definujeme jako v 7,32 D .

$\boxed{7,34.}$ /obecně/.

Potřebujeme nyní porovnat teorii integrálu, kterou jsme naznačili v 7,32 s postupem rozšíření základního prostoru (Z,A) /Daniellova metoda/. Ještě jednou zopakujme rozdíl obou metod - v této kapitole jsme vyšli z abstraktního prostoru s mírou (X, φ, μ) , vybudovali jsme teorii φ - měřitelných funkcí a potom jsme teprve definovali integrál a zavedli systém $\mathcal{L}(\mu)$ všech funkcí s konečným integrálem. Daniellova metoda naopak vychází ze základního prostoru (Z,A), definuje se integrál a systém $\mathcal{L}$ všech funkcí s konečným integrálem a teprve potom se buduje teorie měřitelných funkcí, měřitelných množin a míry.

Naskýtá se nyní následující otázka. Vyjdeme ze základního prostoru (Z,A) , provedeme Daniellovo rozšíření a dostaneme trojici $(P, \mathcal{M}, \mu)$. Dejme tomu, že $P \in \mathcal{M}$ - potom můžeme vyjít z prostoru s mírou $(P, \mathcal{M}, \mu)$ /viz 7,22/, vybudovat systém všech $\mathcal{M}$ - měřitelných funkcí, můžeme definovat "nový" integrál $\int_P f \, d\mu$ podle 7,32. Jaký bude nyní vztah původního systému měřitelných funkcí Λ a systému

$\Lambda(\mathcal{M})$ všech $\mathcal{M}$ - měřitelných funkcí ? A jaký bude vztah původního integrálu Af a "nového" integrálu $\int_P f \, d\mu$? Odpověď na tyto otázky dává následující věta.

7,35.** /obecně/. Věta.

Předpokládejme, že prostor s mírou $(P, \mathcal{M}, \mu)$ jsme získali rozšířením základního prostoru (Z, A) Daniellovou metodou. a že $P \in \mathcal{M}$.
Potom

1/ $\Lambda = \Lambda(\mathcal{M})$ /tj. systém všech měřitelných funkcí Λ splývá se systémem $\mathcal{M}$- měřitelných funkcí, tj. platí následující

$$f \in \Lambda \Leftrightarrow \{x \in P ; \ f(x) < c\} \in \mathcal{M} \text{ pro každé } c \in E_1 \text{ /,}$$

2/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu)$,

3/ $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu) \Rightarrow Af = \int_P f \, d\mu$.

Je tedy vidět, že obě metody /jedna metoda - nejdříve integrál, pak míra, druhá metoda - nejdříve míra, pak integrál/ dávají totéž. Přesněji, vybudujeme-li teorii integrálu a míry Daniellovou metodou rozšířením základního prostoru (Z, A) / a $P \in \mathcal{M}$ /, potom existuje takový σ - okruh podmnožin množiny P /a sice $\mathcal{M}$ / a taková míra / μ / , že systém měřitelných či integrovatelných funkcí jsme mohli také obdržet metodami této kapitoly z prostoru s mírou $(P, \mathcal{M}, \mu)$.

7,36. /obecně/.

Je možno si také položit obrácenou otázku. Dejme tomu, že máme dán prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$, značme jej raději $(X, \mathcal{S}, \mu_{\varphi})$ /znovu podotkněme, že podle naší definice je $X \in \mathcal{S}$ a míra μ_{φ} je úplná !/ ; můžeme vybudovat systém $\mathcal{S}$ - měřitelných funkcí $\Lambda(\mathcal{S})$, systém funkcí s konečným integrálem $\mathcal{L}(\mu_{\varphi})$ a konečně integrál $\int_X f \, d\mu_{\varphi}$ pro funkce z $\mathcal{L}(\mu_{\varphi})$. Ptáme se nyní, zda existuje takový základní prostor (Z, A) , že $\Lambda = \Lambda(\mathcal{S})$, $\mathcal{M} = \mathcal{S}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_{\varphi})$, kde systémy Λ , $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ jsou odvozeny ze základního prostoru (Z, A) Daniellovým rozšířením.

Částečnou odpověď dá následující věta, pokuste se ji dokázat.

7,37.* /obecně/. Věta.

Buď $(X, \mathcal{S}, \mu_{\varphi})$ prostor s mírou /viz 7,21/ , nechť míra μ_{φ} je σ - konečná na X /viz 7,29/. Symbolem Z označme systém všech jednoduchých funkcí /viz 7,27/, pro které $\mu[N(f)] < +\infty$ / viz 7,25 a 7,26/.

Ukažte, že

1/ systém Z tvoří základní systém funkcí, tj. Z splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$ /ukažte, že je navíc splněn Stoneův axiom, viz 8,11/.

Pro libovolnou funkci $f \in Z$, $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot c_{E_i}$ /tj. funkce f nabývá na množinách $E_i \in \mathcal{S}$ hodnot y_i / definujeme

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu(E_i) .$$

Ukažte, že

2/ číslo Af nezávisí na volbě tvaru funkce f, tj. je-li též $f = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot c_{F_i}$, je $\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu E_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \mu F_i$ /viz také 7,40 A/,

3/ funkcionál A splňuje na Z axiomy $4_A - 7_A$.

Tedy (Z,A) tvoří základní prostor, můžeme provést Daniellovo rozšíření - obdržíme systémy $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$ a míru μ na $\mathcal{M}$, značme ji raději symbolem $\mu_{\mathcal{M}}$.

Ukažte dále, že platí.

4/** $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}})$,

5/** $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_{\mathcal{S}}) \Longrightarrow Af = \int_X f \, d\mu_{\mathcal{S}}$,

6/** $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ a $\mu_{\mathcal{S}} A = \mu_{\mathcal{M}} A$ pro $A \in \mathcal{M} = \mathcal{S}$.

7,38.** /obecně/. <u>Věta</u>.

Z předchozího dokažte následující větu.

Buď (Z,A) základní prostor, proveďme Daniellovo rozšíření, dostaneme trojici $(P, \mathcal{M}, \mu)$. Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$. Označme symbolem $\overline{Z}$ systém všech jednoduchých funkcí na P s $\mu N(f) < +\infty$. Pro funkce ze systému $\overline{Z}$ definujme integrál $\overline{A}$ stejně jako v 7,37. Rozšíříme-li takto získaný základní prostor $(\overline{Z}, \overline{A})$, dostaneme systémy $\overline{\mathcal{L}}$, $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\Lambda}$, míru $\overline{\mu}$ a integrál $\overline{A}$.

Potom

1/ $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$ a $Af = \overline{A}f$ pro $f \in \mathcal{L} = \overline{\mathcal{L}}$,

2/ $\Lambda = \overline{\Lambda}$,

3/ $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$ a $\mu M = \overline{\mu} M$ pro $M \in \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$.

Tedy - vyjdeme-li z jednoduchých funkcí a utvoříme Daniellovo rozšíření, dostaneme přesně totéž. Viz též 8,42.

$\boxed{7,39.^{**}}$ /eukleidovské prostory/.

Vraťme se nyní k Lebesgueovu integrálu v E_n. Ten můžeme vybudovat různými způsoby, uvedli jsme si dvě podstatně různé metody - Daniellovo rozšíření základního prostoru $Z = C_n$, $A_f = (R)\int_{E_n} f$ a klasickou metodu z teorie míry /7,32, 7,33/. Opět označme symboly $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mu_{\mathcal{M}}$ systémy a míru získané Daniellovým rozšířením. Symbolem $\mathcal{S}_n$ označme systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v E_n /viz 7,15, 7,18/, symbolem μ_n n - rozměrnou Lebesgueovu míru na $\mathcal{S}_n$ /7,18/, nechť $\Lambda(\mathcal{S}_n)$ značí systém všech lebesgueovsky měřitelných funkcí v E_n /7,23/ a konečně $\mathcal{L}(\mu_n)$ a $\int_{E_n} f \, d\mu_n$ systém všech funkcí s konečným integrálem a Lebesgueův integrál v E_n /7,32, 7,33/.

Potom

1/ $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_n)$ a $Af = \int_{E_n} f \, d\mu_n$ pro $f \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mu_n)$,

2/ $\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n$, $\mu_{\mathcal{S}_n} = \mu_{\mathcal{M}}$,

3/ $\Lambda = \Lambda(\mathcal{S}_n)$.

V dalším ještě ukážeme některé další /v podstatě ekvivalentní definice integrálu .

$\boxed{7,40.}$ /obecně/.

Předpokládejme, že je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{S}, \mu)$.

A/ Nejdříve definujeme <u>integrál z jednoduchých funkcí</u> /viz 7,27/. Je-li f jednoduchá, f tvaru $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot c_{E_i}$, definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \mu E_i ,$$

má-li součet vpravo smysl /chápeme $0.\pm\infty = \pm\infty .0 = 0$ / .

Je nutno ukázat, že

a/ definice $\int_X f \, d\mu$ nezávisí na volbě tvaru funkce f /viz též 7,37 - 2/,

b/ jsou-li f_n jednoduché funkce, $f_n \nearrow f$, f jednoduchá funkce, potom $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f \, d\mu$,

c/ jestliže f_n, g_n jsou dvě posloupnosti jednoduchých funkcí, $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow f$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu .$$

B/ Nyní definujeme integrál z libovolné <u>nezáporné $\mathcal{S}$ - měřitelné funkce</u>.

Je-li $f \geq 0$, $f \in \Lambda$ ($\mathcal{S}$) , existuje podle 7,30 posloupnost jednoduchých funkcí f_n tak, že $f_n \nearrow f$ - definujeme

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \ .$$

Je nutno ukázat, že

a/ číslo $\int_X f \, d\mu$ nezávisí na volbě posloupnosti f_n ,

b/ nová definice $\int_X f \, d\mu$ není v rozporu s definicí $\int_X \cdot \, d\mu$ pro jednoduché funkce .

C/ Pro libovolnou $\mathcal{S}$ - měřitelnou funkci definujeme integrál jako v 7,32 D .

$\boxed{7{,}41.}$ Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou, $\mu X < +\infty$.
"Dělením množiny X " nazveme libovolnou konečnou soustavu $\{E_n\}_{n=1}^{N}$ podmnožin množiny X takovou, že

1/ $E_i \in \mathcal{S}$ pro i - 1,...,N ,

2/ množiny E_i jsou po dvou disjunktní ,

3/ $\bigcup_{i=1}^{N} E_i = X$.

Pro libovolné "dělení" $D = \{E_n\}_{n=1}^{N}$ množiny X a pro libovolnou omezenou funkci f na X utvořme veličiny

$$S(f,D) = \sum_{i=1}^{N} \sup_{x \in E_i} f(x) \ . \ \mu(E_i)$$

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{N} \inf_{x \in E_i} f(x) \ . \ \mu(E_i)$$

/S(f,D) a s(f,D) jsou tedy "horní" a "dolní" součty/.

Ukažte, že

1/ $f \in \Lambda \ (\mathcal{S}) \implies \inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D)$

/infimum a supremum se bere přes všechna dělení D množiny X ,

2/ $\inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D) \implies f \in \Lambda(\mathcal{S})$.

Pro libovolneu $\mathcal{S}$ - měřitelnou omezenou funkci na X /pro $\mu X < +\infty$!/ se nám tedy opět podařilo definovat integrál vztahem

$$\int_X f \ d\mu = \inf_D S(f,D) = \sup_D s(f,D) \ .$$

Rozšíření definice na případ obecné množiny $X \in \mathcal{S}$ a libovolné $\mathcal{S}$-měřitelné funkce na X je pak stejné jako v cvičení 7,32 .

7,42.* Buď dán opět prostor s mírou (X, φ, μ) , $\mu X < +\infty$, nechť $f \in \Lambda(\varphi)$. Definujme integrál $\int_X f \, d\mu$ například jako v cvičení 7,32.

Pro libovolné celé n a libovolné $\varepsilon > 0$ položme

$$A_n^{\varepsilon} = \{x \in X ; \ n\varepsilon \leq f(x) < (n+1)\varepsilon\} ,$$

$$S(f, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\varepsilon . \mu(A_n^{\varepsilon}) .$$

Potom platí

1/ $f \in \mathcal{L}(\mu) \Rightarrow$ řada $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n.\varepsilon . \mu(A_n^{\varepsilon})$

konverguje absolutně pro každé $\varepsilon > 0$ a

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0_+} S(f, \varepsilon)$$

/viz též př. 8,61/,

2/ řada $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\,\varepsilon . \mu(A_n^{\varepsilon})$ konverguje absolutně pro každé $\varepsilon > 0 \Rightarrow f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Odtud je též vidět, jak by bylo možno definovat integrál. Proveďte !

7,43. Uveďme ještě jednu poučnou definici Lebesgueova integrálu v E_1 . Zopakujte si proto definici <u>jednoduchých funkcí</u> v intervalu $\langle a,b \rangle$ /viz 7,27, kde položíte $X = \langle a,b \rangle$, φ = systém všech lebesgueovsky měřitelných množin v $\langle a,b \rangle$, μ = Lebesgueova míra/. Funkce φ se nazývá <u>elementární jednoduchá funkce</u> v intervalu $\langle a,b \rangle$, jestliže existuje dělení D intervalu $\langle a,b \rangle$,

$$D : y_0 = a < y_1 < \dots < y_n = b$$

a reálná čísla $c_1, \dots, c_n$ tak, že

$$\varphi(x) = c_i \quad \text{pro} \quad x \in \langle y_{i-1} , y_i) \quad , \quad i = 1,\dots,n .$$

Ukažte, že

1/ každá elementární jednoduchá funkce je jednoduchá funkce, ale ne naopak /např. Dirichletova funkce - viz př. 2,31 - je jednoduchá funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, ale není elementární jednoduchá funkce v $\langle 0,1 \rangle$ / .

Je-li f jednoduchá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$ /ať již elementární či ne/, definujeme $\int_a^b f$ stejně jako ve cvičení 7,40 A /čemu je pak roven integrál $\int_a^b f$ pro elementární jednoduché funkce ? /.

Buď nyní f libovolná omezená lebesgueovsky měřitelná funkce v intervalu $\langle a,b \rangle \subset E_1$. Označme symbolem J , resp. E systém všech jednoduchých, resp. elementárních jednoduchých funkcí na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Definujme následující veličiny:

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{g \in E \\ g \geq f}} \int_a^b g \,, \qquad (R)\underline{\int_a^b} f = \sup_{\substack{h \in E \\ h \leq f}} \int_a^b h \,,$$

$$(L)\overline{\int_a^b} f = \inf_{\substack{g \in J \\ g \geq f}} \int_a^b g \,, \qquad (L)\underline{\int_a^b} f = \sup_{\substack{h \in J \\ h \leq f}} \int_a^b h \,.$$

Ukažte, že

2/ $(R)\overline{\int_a^b} f$, $(R)\underline{\int_a^b} f$ jest horní a dolní Riemannův integrál funkce f ,

3/ $(R)\underline{\int_a^b} f \leq (L)\underline{\int_a^b} f = (L)\overline{\int_a^b} f \leq (R)\overline{\int_a^b} f$;

Společnou hodnotu $(L)\underline{\int_a^b} f$ a $(L)\overline{\int_a^b} f$ pak prohlásíme za Lebesgueův integrál funkce f přes interval $\langle a,b \rangle$.

Odtud již lehko ukážete, že

4/ existuje-li $(R)\int_a^b f$, jest $(R)\int_a^b f = (L)\int_a^b f$.

Jak by se nyní rozšířila definice $(L)\int_a^b f$ na neomezené intervaly či na neomezené funkce ?

7,44.** A/ Označme symbolem K systém všech nezáporných a nerostoucích funkcí /zobrazení do E_1^* !/ na intervalu $(0,+\infty)$. Lze ukázat, že existuje právě jeden funkcionál I na systému K /připouštíme, že If může být i $+\infty$ pro $f \in K$ / takový, že jsou splněny následující axiomy:

1/ $f_n \in K$, $f_n \nearrow f$ /zřejmě je $f \in K$ / $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} If_n = If$,

2/ $f,g \in K$ /zřejmě je $f + g \in K$ / $\Rightarrow I(f + g) = If + Ig$,

3/ $I\,c_z = z$ pro libovolné $z > 0$, přičemž c_z znamená charakteristickou funkci intervalu $(0,z\rangle$.

B/ Buď nyní $(X, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, buď f nezáporná $\mathcal{S}$ - měřitelná funkce na X , buď $x > 0$.

Označme $E_f^x = \{ y \in X ;\ f(y) > x \}$, tedy $E_f^x \in \mathcal{S}$. Každé funkci $f \in \Lambda(\mathcal{S})$, $f \geq 0$ přiřaďme reálnou funkci h_f definovanou na intervalu $(0,+\infty)$ předpisem $h_f(x) = \mu(E_f^x)$. Zřejmě $h_f \in K$ /viz odstavec A/. Existuje tedy Ih_f a položme $\int_X f \, d\mu = Ih_f$.
Pro libovolnou funkci $f \in \Lambda(\mathcal{S})$ položme pak

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \quad , \text{ má-li rozdíl}$$

vpravo smysl.

Máme-li nyní odvozeny základní vlastnosti funkcionálu I na systému K , vyplynou nám všechny vlastnosti $\int_X f \, d\mu$ zcela automaticky z příslušných vlastností funkcionálu I .

7,45. Poznámky

1/ O dalších způsobech zavedení Lebesgueova integrálu se lze dočíst např. v knihách

V.Jarník, Integrální počet II ,

I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I /skripta/.

2/ V celé této kapitole jsme předpokládali, že $X \in \mathcal{S}$. Lebesgueův abstraktní integrál lze definovat a zavést i bez tohoto omezujícího předpokladu, nebudeme se tím však zabývat.

8. Těžší příklady a problémy

V této kapitole uvedeme různé - většinou těžší - příklady i problémy. Jejich výběr /rovněž tak i pořadí/ není nikterak systematický; jsou určeny převážně pro lepší studenty se zájmem o problematiku Lebesgueova integrálu.

8,1. Buď $Z = \{ f \in S(E_1)$; existují intervaly $\langle a_i , b_i)$, $i = 1,2,\dots,n$, $-\infty < a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n < +\infty$, a reálná čísla $y_1 ,\dots, y_n$ tak, že $f(x) = y_i$ pro $x \in \langle a_i, b_i)$, $f(x) = 0$ jinde v $E_1 \}$.

Tedy systém Z je systém všech elementárních jednoduchých funkcí /viz též 7,43/ s omezeným nosičem v E_1. Ukažte, že Z tvoří základní systém funkcí, tj. jsou splněny axiomy $1_Z - 3_Z$.

Definujme funkci φ v E_1 takto :

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{pro } x < 1 , \quad \varphi(x) = 1 \quad \text{pro } x \geq 1 .$$

Na systému Z definujme funkcionál A předpisem:

je-li $f \in Z$, $f(x) = y_i$ pro $x \in \langle a_i, b_i)$, položíme

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\varphi(b_i) - \varphi(a_i) \right) .$$

Dokažte, že

I/ funkcionál A je jednoznačně definován,

II/ funkcionál A splňuje axiomy $4_A - 6_A$,

III/ funkcionál A splňuje axiom 7_A .

III/ Označte $I_n = \langle \frac{n}{n+1} , 1)$ a uvažujte posloupnost $f_n = c_{I_n}$ charakteristických funkcí intervalů I_n .

**/ Jak vypadají systémy Z^R , Z^K ?

8,2. Definujme systém funkcí Z stejně jako v př. 8,1. Buď φ libovolná spojitá a neklesající funkce v E_1 . Pro $f \in Z$ /$f(x) = y_i$, je-li $x \in \langle a_i , b_i)$ / definujeme

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(\varphi(b_i) - \varphi(a_i) \right) .$$

Splňuje funkcionál A na Z axiomy $4_A - 7_A$? Jestliže ano, zkoumejte, jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$. Srovnejte též s teorií Lebesgue - Stieltjesova integrálu. Co se stane, vynecháme-li předpoklad spojitosti funkce φ a definujeme-li

$$Af = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(\lim_{x \to b_i -} \varphi(x) - \lim_{x \to a_i +} \varphi(x) \right) ?$$

$\boxed{8,3.}$ Buď $Z = \{ f \in S(\langle a,b \rangle) ;$ f je lomená čára v $\langle a,b \rangle$ - tj. existují $t_0, \dots, t_n$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tak, že v každém intervalu $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ je f lineární $\}$.

Ukažte, že systém Z splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$.

Je-li $f \in Z$, existuje k funkci f v intervalu $\langle a,b \rangle$ primitivní funkce F /proč?/. Položme

$$Af = F(b) - F(a) .$$

Dokažte, že

I/ funkcionál A je jednoznačně definován,

II/ funkcionál A splňuje axiomy $4_A - 7_A$.

Dodatek **:

III/ jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$?

$\boxed{8,4.}$ Buď $Z = \{ f \in S(E_1) ;$ f je lomená čára v E_1, tj. existují $a,b \in E_1$ tak, že

a/ f je lomená čára v $\langle a,b \rangle$ - viz cvič. 8,3 ,

b/ $f(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, a\rangle \cup \langle b, +\infty) \}$.

Dokažte, že systém Z splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$.

Je-li $f \in Z$, existuje k funkci f v E_1 primitivní funkce F (proč?), položme

$$Af = \lim_{x \to +\infty} F(x) - \lim_{x \to -\infty} F(x) .$$

Dokažte, že

I/ funkcionál A je jednoznačně definován,

II/ funkcionál A splňuje axiomy $4_A - 7_A$.

Dodatek **:

III/ jak vypadají systémy Z^*, $\mathcal{L}$, Λ, $\mathcal{M}$?

8,5.* Buď (Z,A) základní prostor. Buď

$$Z' = \left\{ f \in S(P) \text{ ; ke každému } \varepsilon > 0 \text{ existují funkce } f_1, f_2 \in Z \text{ tak, že } f_1 \leq f \leq f_2 \text{ a } A(f_2 - f_1) < \varepsilon \right\} .$$

Dokažte, že:

I/ $Z \subset Z' \subset \mathcal{L}$.

II/ Z' tvoří základní systém funkcí, tj. splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$.

Definujeme-li základní prostor (Z,A) jako v př. 8,3 jest

$$Z' = \left\{ f \in S(\langle a,b\rangle) \text{ ; existuje } (R)\int_a^b f \right\} .$$

8,6.* Buď (Z,A) základní prostor. Buď

$$\hat{Z} = \left\{ f \in S(P) \text{ ; } f \in \mathcal{L} \text{ a } f \text{ je omezená na } P \right\} .$$

Dokažte, že

I/ $\hat{Z} \subset \mathcal{L}$,

II/ $\hat{Z}$ tvoří základní systém funkcí ,

III/ $\hat{Z}^R \subset \left\{ f \in \mathcal{L}^R \text{ ; } f \text{ je zdola omezená na } P \right\}$. Na příkladě ukažte, že nemusí platit rovnost.

8,7.* Buď (Z,A) základní prostor. Buď

$$\mathring{Z} = \left\{ f \in S(P) \text{ ; } f \in \mathcal{L} \text{ a } f \text{ je konečná na } P \right\} .$$

Dokažte, že

I/ $Z \subset \mathring{Z} \subset \mathcal{L}$,

II/ $\mathring{Z}$ tvoří základní systém funkcí.

Jak vypadají systémy $\mathring{Z}^R$, $\mathring{Z}^K$?

8,8.* /důležité!/.

Buď (Z,A) základní prostor. Buď $\bar{\bar{Z}}$ systém funkcí, který splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$ a pro nějž platí $Z \subset \bar{\bar{Z}} \subset \mathcal{L}$. V důsledku poslední inkluse můžeme na systému $\bar{\bar{Z}}$ definovat funkcionál $\bar{\bar{A}}$ následovně :

je-li $f \in \bar{\bar{Z}}$, je $f \in \mathcal{L}$; existuje tedy Af a položíme $\bar{\bar{A}} f = Af$.

Ukažte, že $(\bar{\bar{Z}},\bar{\bar{A}})$ je opět základní prostor.

25535 215

Systém $\overline{\overline{Z}}$ s funkcionálem $\overline{\overline{A}}$ můžeme tedy rozšířit Daniellovou metodou, dostaneme systém $\overline{\overline{\mathcal{L}}}$ a na něm funkcionál $\overline{\overline{A}}$.

Dokažte, že

I/ $\mathcal{L} = \overline{\overline{\mathcal{L}}}$,

II/ $f \in \overline{\overline{\mathcal{L}}} \implies \overline{\overline{A}}\, f = Af$.

/Odtud je též vidět, že "rozšířením $(\mathcal{L}, A)$" podle př. 8,7 nedostáváme již nic nového/.

8,9. Ukažte následující ekvivalenci axiomu 7_A /za předpokladu, že platí axiomy $1_Z - 3_Z$, $4_A - 6_A$ /:

$$\text{axiom } 7_A \iff \left[f, f_n \in Z \,, \quad |f| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \implies A|f| \le \sum_{n=1}^{\infty} A|f_n| \right] .$$

8,10.* Ukažte, že pro libovolnou funkci $f \in S(P)$ jest

$$\tilde{A}|f| = \inf \sum_{n=1}^{\infty} A|f_n| \,, \quad \text{kde } f_n \in Z \,, \quad |f| \le \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \,.$$

8,11. Předpokládejme, že kromě axiomů $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ je splněn ještě další axiom:

$$\text{axiom } 8_S \;:\; f \in Z \implies \min(f,1) \in Z$$

/tzv. Stoneův axiom/. Axiom 8_S nemusí být obecně splněn - viz kupř. 2,5, 2,6, 2,8 aj.

Dokažte, že potom platí

I/ $a > 0$, $f \in Z \implies \min(f,a) \in Z$,

II/ $f \in \mathcal{L} \implies \min(f,1) \in \mathcal{L}$,

III/ $f \in \Lambda \implies \min(f,1) \in \Lambda$.

8,12.* Buď (Z,A) základní prostor. Dokažte, že

$$f \in \mathcal{L} \iff \text{existují } g,h \in Z^R \text{ tak, že}$$

$$Ag < +\infty \,, \quad Ah < +\infty \,, \quad f = g - h \text{ sk. vš.}$$

Potom zřejmě $Af = Ag - Ah$.

/Opět jeden ze způsobů, jak by bylo možno definovat integrál a vyhnout se přitom definici horního a dolního integrálu/.

8,13. Ukažte na příkladě, že nemusí vždy být $Z = Z^R \cap Z^K$.

‖ Viz např. 8,3 či prostor Z z př. 7,37 v případě jednoduchých funkcí v E_1 . Srovnejte též s větou 47 . ‖

8,14.** Buď $Z = \left\{ f \in S(\langle 0,1\rangle) \; ; \; \frac{f(x)}{x} \text{ je spojitá v intervalu } (0,1\rangle, f(0) \in E_1 \text{ a existuje vlastní } \lim_{x\to 0_+} x^{-1} \cdot f(x) \right\}$.

Ukažte, že pro libovolnou $f \in Z$ existuje $(N)\int_0^\infty f(e^{-t})\,dt$, definujeme tedy

$$Af = (N)\int_0^\infty f(e^{-t})\,dt \quad \text{pro } f \in Z .$$

Ukažte, že (Z,A) tvoří základní prostor a zkoumejte, jak vypadají systémy Z^* , $\mathcal{L}$, Λ , $\mathcal{M}$.

8,15.* Označme symbolem $\mathcal{F}$ systém všech funkcí $f \in S(P)$, pro něž

$$\tilde{A}\,|f| < +\infty \quad , \text{ tj.}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in S(P) \; ; \; \tilde{A}\,|f| < +\infty \right\} .$$

Pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{F}$ položme $Nf = \tilde{A}\, f^+ - \tilde{A}\, f^-$.

Dokažte, že

1/ $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset S(P)$,

2/ $\mathcal{L} = \Lambda \cap \mathcal{F}$,

3/ $f \in \mathcal{F}$, $g \sim f \Rightarrow g \in \mathcal{F}$,

4/ nemusí být $\mathcal{F} \subset \Lambda$ ani $\Lambda \subset \mathcal{F}$.

Uvažujme nyní množinu $\hat{S}(P)$, jejíž elementy jsou třídy ekvivalentních funkcí z $S(P)$; obdobně buďte $\hat{\mathcal{F}}$, $\hat{Z}$, $\hat{\mathcal{L}}$ množiny, jejichž elementy jsou třídy funkcí ze systémů $\mathcal{F}$, Z , $\mathcal{L}$. Tedy systém všech funkcí $S(P)$, (resp. systém $\mathcal{F}$, Z či $\mathcal{L}$) jsme rozdělili do tříd tak, že dvě funkce f,g patří do téže třídy, právě když $f \sim g$ (v P). /Ukažte, že vztah $f \sim g$ je skutečně ekvivalence/. Pro libovolné třídy Φ , $\Psi \in \hat{\mathcal{F}}$ definujme

$$\varrho_1(\Phi, \Psi) = \tilde{A}\,|\varphi - \psi| \text{ kde } \varphi \in \Phi,\ \psi \in \Psi .$$

Obdobně definujeme

$$\sigma_1(\varphi, \psi) = \tilde{A}\,|\varphi - \psi| \text{ pro } \varphi, \psi \in \mathcal{F} .$$

Dokažte, že

1/ číslo $\rho_1(\Phi, \Psi)$ nezávisí na výběru funkcí φ, ψ ze tříd Φ, Ψ, tj. je-li $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$, potom $\tilde{A}\,|\varphi_1 - \psi_1| = \tilde{A}\,|\varphi_2 - \psi_2|$,

2/ $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$ je metrický prostor,

3/** $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$ je úplný metrický prostor,

4/ σ_1 není metrika na $\mathcal{F}$,

5/** σ_1 je pseudometrika na $\mathcal{F}$,

6/* funkcionál N je spojitý na $\mathcal{F}$, tj. pro libovolnou funkci $f \in \mathcal{F}$ platí :

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{\delta>0} \; \forall_{g\in\mathcal{F}} \quad \sigma(f,g) < \delta \Rightarrow |Nf - Ng| \leq \varepsilon\,)$$

7/ $f \in Z \Rightarrow Nf = Af$,

8/ $\mathcal{L} = \left\{ f \in \mathcal{F} \; ; \; \forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{g\in Z} \quad \sigma_1(f,g) < \varepsilon \right\}$

‖ viz též lemma v odstavci 2,9 skript I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I ‖

9/ uzávěr množiny $\hat{Z}$ v prostoru $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$ je roven $\hat{\mathcal{L}}$,

10/** $(\hat{\mathcal{L}}, \rho_1)$ je úplný metrický prostor,

11/ $(\hat{\mathcal{L}}, \rho_1)$ je uzavřeným podprostorem $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$.

Dodatek**:

charakterisujte konvergenci v prostoru $(\hat{\mathcal{F}}, \rho_1)$, tj. udejte nutné či postačující podmínky, aby $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ v metrice ρ_1 /či $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ v pseudometrice σ_1 /.

8,16.* Buď $\mathcal{H} = \{ A \in \mathcal{M}, \; \mu A < +\infty \}$.

Řekneme, že dvě množiny $A,B \subset P$ jsou ekvivalentní /píšeme $A \sim B$/, právě když množina $(A - B) \cup (B - A)$ je nulová. Buď $\hat{\mathcal{H}}$ množina, jejíž elementy jsou třídy ekvivalentních množin z $\mathcal{H}$ /ukažte, že vztah $A \sim B$ je skutečně ekvivalence !/.

Pro libovolné dva prvky $\hat{A}$, $\hat{B}$ z množiny $\hat{\mathcal{H}}$ /tj. pro libovolné dvě třídy ekvivalentních množin/ položme $\rho_2(\hat{A},\hat{B}) = \mu(A-B) + \mu(B-A) = \mu\left[(A-B) \cup (B-A)\right]$, kde $A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$.

Dále položme

$$\sigma_2(A,B) = \mu(A-B) + \mu(B-A) = \mu\left[(A-B) \cup (B-A)\right] \quad \text{pro libovolné}$$
$A,B \in \mathcal{H}$.

Dokažte, že

1/ číslo $\rho_2(\hat{A},\hat{B})$ nezávisí na výběru množin A,B ze tříd $\hat{A}$, $\hat{B}$,

2/ $(\hat{\mathcal{H}}, \rho_2)$ je metrický prostor,

3/* $(\hat{\mathcal{H}}, \rho_2)$ je úplný metrický prostor,

4/ pro $A \in \hat{A}$, $B \in \hat{B}$, $\hat{A},\hat{B} \in \hat{\mathcal{H}}$ jest

$$|\mu A - \mu B| \leq \sigma_2(A,B)$$

/tj. - zhruba řečeno - μ je spojitá funkce na prostoru $(\hat{\mathcal{H}}, \rho_2)$ /,

5/* $(\mathcal{H}, \sigma_2)$ je pseudometrický prostor,

6/** posloupnost množin $A_n \in \mathcal{H}$ konverguje k množině $A \in \mathcal{H}$ v pseudometrice σ_2 /tj. $\lim_{n\to\infty} \sigma_2(A_n, A) = 0$ /, právě když je splněna následující podmínka:

pro každé $\varepsilon > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in P;$

$$|c_{A_n}(x) - c_A(x)| \geq \varepsilon\} = 0$$

/c_M je charakteristická funkce množiny M /.

8,17.* /viz př. 2,18/.

Buď P spočetná množina, nechť $P = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
Nechť $Z = \{f \in S(P);\ f$ je omezená na $P\}$. Pro libovolnou $f \in Z$ definujme $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_n)}{2^n}$.

Dokažte, že

1/ (Z,A) tvoří základní prostor,

2/ každá podmnožina P je měřitelná,

3/ $\mu\{x_n\} = \frac{1}{2^n}$,

4/ $\mu P = 1$,

5/ metrický prostor $(\hat{\mathcal{H}}, \rho_2)$ - definici viz v cvičení 8,16 - je kompaktní

[ukažte, že prostor $(\hat{\mathcal{H}}, \rho_2)$ je homeomorfní s Cantorovým diskontinuem C / viz př. 5,7/ - pro $A \subset P$, $A = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$, $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ položte

$$h(A) = \frac{2}{3^{n_1}} + \frac{2}{3^{n_2}} + \frac{2}{3^{n_3}} + \ldots \in C\ ].$$

$\boxed{8,18.^*}$ V tomto cvičení předpokládejme, že $P \in \mathfrak{M}$.

Potom platí

1/ $f \in \Lambda \iff$ pro každé $c \in E_1^*$ je $\{x \in P ;\ f(x) < c\} \in \mathfrak{M}$ - viz př. 8,30 ,

2/ $f,g \in \Lambda \implies f.g \in \Lambda$ - viz př. 8,41 .

Dokažte, že potom také platí následující tvrzení:

3/ $f,g \in \Lambda \implies \dfrac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^{R}$,

4/ $M \in \mathfrak{M}$, $\mu M < +\infty$, $f,g \in \Lambda_M \implies \dfrac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}_M$.

Buď nyní $M \in \mathfrak{M}$, $\mu M < +\infty$ /stále předpokládáme $P \in \mathfrak{M}$ /. Definujme množinu $\hat{\Lambda}_M$ obdobně jako v př. 8,15, tj. $\hat{\Lambda}_M$ je množina, jejímiž prvky jsou třídy ekvivalentních funkcí (na M). Pro $\Phi, \Psi \in \hat{\Lambda}_M$ položme

$$\rho_3(\Phi, \Psi) = A_M\left(\frac{|f-g|}{1+|f-g|}\right) , \text{ kde } f \in \Phi , \quad g \in \Psi .$$

Dokažte dále, že

5/ číslo $\rho_3(\Phi, \Psi)$ nezávisí na výběru funkcí f,g ze tříd Φ , Ψ ,

$\overset{*}{4}$/ $(\hat{\Lambda}_M , \rho_3)$ je metrický úplný prostor ,

$\overset{**}{5}$/ jsou-li $f_n \in \Phi_n$, $f \in \Phi$, potom $\Phi_n \longrightarrow \Phi$ v metrice ρ_3 /tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_3(\Phi_n, \Phi) = 0$ / $\iff$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ jest $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in M ;\ |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} = 0$ /viz též př. 8,16/.

Změnila by se nějak situace, kdybychom nepředpokládali $P \in \mathfrak{M}$?

$\boxed{8,19.^*}$ Označme symbolem $\hat{\mathfrak{M}}$ systém všech tříd ekvivalentních množin z $\mathfrak{M}$ /dvě množiny A,B jsou ekvivalentní, jestliže množina $(A-B) \cup (B-A)$ je nulová - viz též př. 8,16/.

Definujme funkci φ takto:

$$t \in \langle 0,+\infty) \implies \varphi(t) = 1 - e^{-t} ,$$

položme navíc $\varphi(+\infty) = 1$.

Pro $\hat{A},\hat{B} \in \hat{\mathfrak{M}}$ položme

$$\rho_4(\hat{A},\hat{B}) = \varphi\left(\mu\left[(A-B) \cup (B-A)\right]\right) , \text{ kde } A \in \hat{A} , \quad B \in \hat{B} .$$

Dokažte, že

1/ číslo $\rho_4(\hat{A},\hat{B})$ nezávisí na výběru množin A,B ze tříd $\hat{A},\hat{B}$,

2/ $(\widehat{\mathfrak{M}}, \rho_4)$ je úplný metrický prostor.

Pro libovolnou množinu $M \in \mathfrak{M}$ označme symbolem $e(M)$ třídu všech množin ekvivalentních s množinou M .

Potom platí

3/ $A,B \in \mathfrak{M} \implies$

a/ $e(A \cup B) = e(A) \cup e(B)$,

b/ $e(A \cap B) = e(A) \cap e(B)$,

c/ $e(A-B) = e(A) - e(B)$,

4/ definujeme-li zobrazení F_1, F_2, F_3 z $\widehat{\mathfrak{M}} \times \widehat{\mathfrak{M}}$ do $\widehat{\mathfrak{M}}$ předpisem

$F_1(\hat{A},\hat{B}) = \hat{A} \cup \hat{B} = \widehat{A \cup B}$,

$F_2(\hat{A},\hat{B}) = \hat{A} \cap \hat{B} = \widehat{A \cap B}$,

$F_3(\hat{A},\hat{B}) = \hat{A} - \hat{B} = \widehat{A-B}$,

jsou zobrazení F_1 , F_2 , F_3 na $\widehat{\mathfrak{M}} \times \widehat{\mathfrak{M}}$ /s obvyklou metrikou/ spojitá,

5/ předpokládáme-li navíc $P \in \mathfrak{M}$ a definujeme-li zobrazení F_4 z $\widehat{\mathfrak{M}}$ do $\widehat{\mathfrak{M}}$ předpisem

$$F_4(\hat{A}) = \hat{P} - \hat{A} = \widehat{P-A} ,$$

je F_4 spojité na $\widehat{\mathfrak{M}}$ /vše s metrikou ρ_4 ! /.

8,20.** Studujte vzájemný vztah jednotlivých metrik z příkladů 8,15 - 8,19 /tj. je-li např. pravda, že $\rho_2(E,F) = \rho_1(c_E , c_F)$ aj./. Studujte též konvergenci v jednotlivých prostorech !

8,21.* Buď dána matice reálných čísel /nekonečná/, $(u_{n,m})_{n,m=1}^{+\infty}$

Předpokládejme, že

1/ pro každé $n \in N$ řada $\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$ konverguje absolutně, označme $v_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m}$,

2/ pro každé $m \in N$ existuje $\lim_{n\to\infty} u_{n,m}$, označme $u_m = \lim_{n\to\infty} u_{n,m}$,

3/ buďto a/ $u_{n,m} \leq u_{n+1,m}$ pro každé m,n anebo

b/ $|u_{n,m}| \leq s_m$ pro každé $n \in N$ a všechna $m \in N$, přičemž řada $\sum_{m=1}^{\infty} s_m$ konverguje .

Potom $\lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} u_{n,m} .$$

Dokažte !

Vyjděte ze základního prostoru ve cvičení 2,21 a použijte Leviho a Lebesgueovu větu !

8,22.* Buď P základní množina, (Z,A) základní prostor, nechť $\mathcal{L}$ je systém všech funkcí na P s konečným abstraktním integrálem.
Definujme nyní systém funkcí $\mathcal{W}$ s definičním oborem P :

$f \in \mathcal{W} \iff$ pro libovolné funkce $g,h \in \mathcal{L}$

takové, že $g \leq 0 \leq h$, jest $\max(g; \min(f,h)) \in \mathcal{L}$.

Poznámka: velmi mnoho autorů definuje systém měřitelných funkcí právě tímto způsobem; v dalším uvidíme, jaký je vztah systémů Λ a $\mathcal{W}$. Funkce ze systému $\mathcal{W}$ nazývejme pseudoměřitelné.

Dokažte následující tvrzení:

1/ $f_1 \in \mathcal{W}$, $f_1 \sim f_2 \implies f_2 \in \mathcal{W}$,

2/ $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$,

3/ $f \in \mathcal{W}$, $h \in \mathcal{L}$, $|f| \leq h \implies f \in \mathcal{L}$,

4/ $f_n \in \mathcal{W}$, $f_n \longrightarrow f$ sk.vš. $\implies f \in \mathcal{W}$,

použijte Lebesgueovu větu ,

5/ $\Lambda \subset \mathcal{W}$, na příkladě 2,10 ukažte, že nemusí být $\Lambda = \mathcal{W}$,

6/ $f \in \mathcal{W}$, $a \in E_1 \implies af \in \mathcal{W}$,

7/ $f_1 , f_2 \in \mathcal{W} \implies$

a/ $\max(f_1 , f_2) \in \mathcal{W}$,

b/ $\min(f_1 , f_2) \in \mathcal{W}$,

c/ $f_1 + f_2 \in \mathcal{W}$, má-li součet smysl sk.vš.,

8/ $f \in \mathcal{W} \implies f^+ , f^- \in \mathcal{W}$,

$9^*/$ $f_n \in \mathcal{W} \Rightarrow \sup_n f_n \in \mathcal{W}$, $\inf_n f_n \in \mathcal{W}$,

$\lim_{n\to\infty} \sup f_n \in \mathcal{W}$, $\lim_{n\to\infty} \inf f_n \in \mathcal{W}$,

10/ $f \in \mathcal{W}$, $g,h \in \mathcal{L}$, $g \leq f \leq h \Rightarrow f \in \mathcal{L}$,

11/ $f \in \mathcal{W}$, $g,h \in \mathcal{L} \Rightarrow \max(g; \min(f,h)) \in \mathcal{L}$

⌈ položte $g_1 = \min(g,0)$, $h_1 = \max(h,0)$ a ukažte, že $\min(g_1,h) \leq \max(g; \min(f,h)) \leq \max(g,h_1)$ ⌋ .

8,23.* Definujme nyní systém množin $\mathcal{M}$ takto :

$A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow c_A \in \mathcal{W}$ /viz předchozí cv. 8,22/.

Množiny ze systému $\mathcal{M}$ nazývejme <u>pseudoměřitelné</u>.

Dokažte, že

1/ systém $\mathcal{M}$ tvoří σ - okruh podmnožin množiny P /viz definice 7,2/

⌈ použijte výsledků předchozího odstavce ⌋ ,

2/ $\mathcal{M}$ nemusí být σ-algebra /viz 7,2/, tj. nemusí být $P \in \mathcal{M}$,

⌈ viz např. 2,5 ⌋ ,

3/ $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$, na příkladě ukažte, že nemusí být $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$.

8,24.* Předpokládejme, že Daniellovo rozšíření splňuje ještě další axiom,

<u>axiom 9</u> : existuje funkce $g \in \mathcal{L}$ taková, že

$0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$,

tj. k axiomům $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ přidáme ještě axiom 9 .

Ukažte, že

1/ axiom 9 nemusí být vždy splněn , tj. přesněji - existují prostory, splňující 1_Z-3_Z , 4_A-7_A a nesplňující axiom 9

⌈ viz např. 2,10 ⌋ ,

2/ platí-li axiom 9 , potom $\Lambda = \mathcal{W}$ /viz 8,22/

⌈ buď $g \in \mathcal{L}$ taková, že $0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$, buď $f \in \mathcal{W}$; položte $f_n = \max(-ng , \min(f,ng))$ a ukažte, že $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \longrightarrow f$ ⌋ ,

3/ platí-li axiom 9, potom $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /viz 8,23/,

4/ viz též př. 8,25 .

8,25. Buď $P \in \mathcal{M}$. Potom je axiom 9 /viz 8,24/ splněn.
Dokažte!

‖ Je-li $\mu P = 0$, je tvrzení zřejmé. Buď tedy $\mu P > 0$.
Podle definice existuje posloupnost $f_n \in \mathcal{L}$, $f_n \nearrow c_P$.
Můžeme předpokládat, že $f_n \geq 0$ /proč?/ a že $Af_n > 0$ pro všechna n /proč?/. Položíme-li

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n . Af_n} \quad , \quad g(x) = \min(G(x) \ ; \ 1)$$

/viz též 8,28!/ , vyhovuje funkce g požadavkům axiomu 9 . ‖

8,26. Na konkrétních příkladech jsme viděli, že některé obecné vlastnosti různých systémů mohou být v Daniellově rozšíření splněny, ale také nemusí být splněny. Kupříkladu může, ale nemusí být $P \in \mathcal{M}$ /př. 2,5/; může, ale nemusí být splněn Stoneův axiom 8_S /viz př. 8,11/ či axiom 9 /viz př. 8,24/, systémy Λ a $\mathcal{W}$ všech měřitelných a pseudoměřitelných funkcí /viz 8,22/ se mohou, ale nemusí shodovat aj. Budeme se zabývat nyní těmito problémy trochu podrobněji - položíme tedy kromě axiomů $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ na celou teorii ještě další axiomy a budeme zkoumat jejich vzájemný vztah. V dalších příkladech proto vždy předpokládáme, že původní axiomy $1_Z - 3_Z$, $4_A - 7_A$ jsou splněny.

8,27. Kromě Stoneova axiomu 8_S /viz cv. 8,11/ uvažujme ještě další axiom 8_S^* /jakýsi "zeslabený" Stoneův axiom/

axiom 8_S^* : $f \in \mathcal{L}$, $f \geq 0 \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$

/aby na tomto místě nedošlo k nedorozumění, umluvme se, že symbolem 1 budeme značit funkci, která na množině P nabývá všude hodnoty 1 / .

1/ Ukažte, že z platnosti axiomu 8_S plyne:

a/ $f \in Z \Rightarrow \max(f,-1) \in Z$,

b/ $f \in Z$, $a > 0 \Rightarrow \min(f,a) \in Z$,

c/ $f \in Z^R \Rightarrow \min(f,1) \in Z^R$, $\max(f,-1) \in Z^R$,

d/ axiom 8_S^* ,

e/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L}$,

f/ $f \in \Lambda \Rightarrow \min(f,1) \in \Lambda$.

2/ Na příkladě 2,8 ukažte, že axiom 8_S^* může být splněn a axiom 8_S nikoliv, tj. z axiomu 8_S^* neplyne axiom 8_S .

3/ Dále ukažte, že z platnosti axiomu 8_s^* plyne:

a/ celý prostor je pseudoměřitelná množina, tj. $P \in \mathcal{M}$ /viz 8,23/

‖ máte ukázat, že $c_P \in \mathcal{W}$ - k tomu je nutné a stačí dokázat /viz definice 8,22/, že

$\max(g\,;\,\min(c_P;\,h)) \in \mathcal{L}$, kdykoliv $g,h \in \mathcal{L}$,

$g \leq 0 \leq h$, což jest již snadné ‖,

b/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{L}$

‖ $\min(f;1) = \min(f^+;1) - f^-$ ‖,

c/ $f \in \Lambda \Rightarrow \min(f;1) \in \Lambda$,

d/ $f \in \mathcal{W} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{W}$.

4/ Na příkladě 2,8 ukažte, že z axiomu 8_s^* neplyne ještě $P \in \mathfrak{M}$.

8,28. Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ /viz 8,23/. Potom platí:

a/ $f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{L}$

‖ z definice systému $\mathcal{W}$ - viz 8,22 - lehko ukážete, že $\min(f^+;1) \in \mathcal{L}$ a dále použijete vztahu

$\min(f;1) = \min(f^+;1) - f^-$ ‖,

b/ axiom 8_s^* ,

c/ $f \in \mathcal{W} \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{W}$

‖ plyne přímo z př. 8,22 - 7b a ze vztahu $c_P \in \mathcal{W}$, tj. ze vztahu $1 \in \mathcal{W}$ /viz úmluvu v 8,27/ ‖,

d/ $f \in \Lambda \Rightarrow \min(f;1) \in \Lambda$

‖ plyne z definice systému měřitelných funkcí Λ a ze vztahu

$f_n \longrightarrow f \Rightarrow \min(f_n;1) \longrightarrow \min(f;1)$ ‖ .

Ukažte, že tvrzení a/ - d/ zůstanou v platnosti i tehdy, předpokládáme-li $P \in \mathfrak{M}$

‖ plyne okamžitě ze vztahu $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ - viz 8,23 ‖ .

8,29. Ukažte, že platí následující ekvivalence:

$$P \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \left[f \in \mathcal{L} \;,\; f \geq 0 \Rightarrow \min(f;1) \in \mathcal{L} \right]$$

‖ viz 8,27 a 8,28 . ‖

8,30.* Podle cvičení 7,13 - 8/ má míra $\tilde{\mu}$ / $= \tilde{A}c_M$ / definovaná na systému všech podmnožin množiny P vlastnosti vnější míry /viz 7,12/. Můžeme tedy definovat systém $\mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ všech $\tilde{\mu}$ - měřitelných množin podle 7,15. V Daniellově rozšíření máme nyní tři systémy - systém $\mathfrak{M}$ všech měřitelných množin, systém $\mathcal{M}$ všech pseudoměřitelných množin /viz 8,23/ a nyní i systém $\mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ všech $\tilde{\mu}$ - měřitelných množin. Ptáme se, jaký je vztah těchto jednotlivých systémů.

Dokažte následující:

1/ $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M}$ /viz př. 8,23/

2/ $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$.

Máte dokázat následující implikaci:

$A \in \mathcal{M} \implies$ pro libovolnou množinu T s $\tilde{\mu}T < +\infty$ jest $\tilde{\mu}(T \cap A) + \tilde{\mu}(T - A) \leq \tilde{\mu}T$ /rozmyslete !/.

Buď tedy $A \in \mathcal{M}$, $\tilde{\mu}T < +\infty$. Ukažte, že existuje funkce $h \in \mathcal{L}$ taková, že $c_T \leq h$, $Ah = \tilde{\mu}T$. Položte $h_n = \min(n.c_A;h)$. Protože $h_n \longrightarrow c_A.h$, plyne odtud, že $c_A.h \in \mathcal{W}$, ze vztahu $0 \leq c_A.h \leq h$ plyne dokonce, že $c_A.h \in \mathcal{L}$ /viz 8,22 - 3/ /. Odtud již lehko odvodíte, že

$$\tilde{\mu}(A \cap T) \leq A(c_A.h),$$

$$\tilde{\mu}(T - A) \leq \tilde{\mu}T - A(c_A.h)\ .$$

Z dokázaných vztahů nám nyní plyne, že vždy $\mathfrak{M} \subset \mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$. Na příkladech ukažte, že mezi těmito systémy nemusí nastat rovnost. Pro další pouze ještě poznamenejme, že každý ze systémů $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ tvoří σ - okruh podmnožin množiny P /viz 7,2 / a že vždy $P \in \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$ /viz 7,16/.

Dokažte dále, že

3/ platí-li axiom 9 $\implies \mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /viz 8,24/,

4/ je-li $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$, nemusí ještě platit axiom 9

za základní systém funkcí Z vezměte systém všech funkcí tvaru $f(x) = kx$ na intervalu $(0,+\infty)$, pro $f \in Z$, $f(x) = kx$ položte $Af = k$,

5/** $\mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mu}) \iff P \in \mathcal{M}$

⟦a/ Je-li $\mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$, je $P \in \mathcal{M}$ podle předchozí poznámky.

b/ Buď tedy $P \in \mathcal{M}$ a $E \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$. Máte ukázat, že $c_E \in \mathcal{W}$. K tomu musíte ukázat, že $\min(c_E;h) \in \mathcal{L}$, kdykoliv $h \in \mathcal{L}$, $h \geq 0$ ⟧,

6/ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}) \iff P \in \mathfrak{M}$

⟦a/ Opět je $P \in \mathfrak{M}$, je-li $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$.

b/ Buď $P \in \mathfrak{M}$. Podle 8,25 je splněn axiom 9, tedy $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /viz 8,24/ a podle předchozí části - jelikož je $P \in \mathcal{M}$ je i $\mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ ⟧.

Z právě dokázaných výsledků tedy plyne, že

7/ $\mathfrak{M} = \mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}) \iff P \in \mathfrak{M}$.

8,31.* Obdobně jako jsme definovali různé systémy "měřitelných" množin - totiž systémy $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M}$ a $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ - můžeme definovat i různé systémy "měřitelných" funkcí. Předně máme definován systém Λ všech měřitelných funkcí a systém $\mathcal{W}$ všech pseudoměřitelných funkcí /viz 8,22/. Vzhledem k tomu, že systémy $\mathfrak{M}$, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ tvoří σ - okruhy podmnožin množiny P, můžeme dále definovat systémy $\Lambda(\mathfrak{M})$, $\Lambda(\mathcal{M})$, $\Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}))$ všech $\mathfrak{M}$ - měřitelných, $\mathcal{M}$ - měřitelných a $\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}})$ - měřitelných funkcí podle 7,23 a podle poznámky v odstavci 7,25 /uvědomte si, že nemusí být $P \in \mathfrak{M}$ ani $P \in \mathcal{M}$!/. Jaký bude nyní vztah těchto systémů ?

Dokažte následující

a/ $\Lambda \subset \mathcal{W}$

⟦viz 8,22 ⟧,

b/ platí-li axiom 9, jest $\Lambda = \mathcal{W}$

⟦viz 8,24 ⟧,

c/ $\Lambda(\mathfrak{M}) \subset \Lambda(\mathcal{M}) \subset \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}))$,

d/ $P \in \mathfrak{M} \iff \Lambda(\mathfrak{M}) = \Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{U}}))$

⟦viz 8,30 - 7/ ⟧,

e/** $\Lambda(\mathcal{M}) \subset \mathcal{W}$,

f/** $P \in \mathcal{M} \Rightarrow \Lambda(\mathcal{M}) = \mathcal{W}$,

g/ $\left[f \in \mathcal{W} \Rightarrow \{x \in P;\ f(x) < c\} \in \mathcal{M} \text{ pro libovolné } c \in E_1\right]$
$\Rightarrow P \in \mathcal{M}$

‖ označíte-li f_0 funkci rovnou 0 na množině P, jest zřejmě $f_0 \in \mathcal{W}$ a např.

$$\{x \in P\,;\; f_0(x) < 5\} = P$$ ‖,

h/ $\left[f \in \Lambda \;\Rightarrow\; \{x \in P\,;\; f(x) < c\} \in \mathcal{M} \text{ pro libovolné } c \in E_1 \right] \;\Rightarrow\; P \in \mathcal{M}$

‖ postupujte stejně jako v g/ ‖ .

Odtud již lehko dokážete, že

i/ $P \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \Lambda = \mathcal{W} = \Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathcal{M}) = \Lambda(\mathcal{M}(\tilde{\mu}))$,

speciálně tedy

j/ $P \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \left[f \in \Lambda \;\Leftrightarrow\; \text{pro každé } c \in E_1 \text{ jest } \{x \in P\,;\; f(x) < c\} \in \mathcal{M} \right]$

V posledním tvrzení je obsažena velmi důležitá charakteristika měřitelných funkcí pomocí měřitelných množin.

8,32.* Nechť platí axiom 9 - viz 8,24 - potom

(1) : existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = +\infty \qquad \text{pro každé } x \in P .$$

‖ Buď $g \in \mathcal{L}$ taková funkce, že $0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$. Potom existuje funkce $h \in Z^R$ taková, že $h \geq g$. Dále použijte definici systému Z^R . ‖

8,33.* Nechť platí (1) v 8,32. Potom

(2) : existuje posloupnost funkcí $g_n \in Z$ taková, že

$$g_n \geq 0 \quad \text{a} \quad \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\Big) = 0 \,, \quad \text{kde}$$

$$G_n = \{x \in P\,;\; g_n(x) = 0\} .$$

‖ Stačí položit $g_n = |f_n|$. ‖

8,34.* Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ /viz definici 8,23/ a že platí (2) z cvičení 8,33. Potom platí axiom 9 /viz 8,24/.

‖ Je-li $\tilde{\mu} P = 0$, je tvrzení zřejmé. Buď tedy g_n posloupnost funkcí, jejíž existenci zaručuje (2) v 8,33.

Ukažte, že

a/ $Ag_n > 0$ alespoň pro jednu hodnotu n , b/ lze předpokládat, že $Ag_n > 0$ pro všechny hodnoty n .

Položte
$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n . Ag_n} , \quad g(x) = \begin{cases} \min(h(x);1) & \text{je-li } h(x) > 0 , \\ 1 & \text{je-li } h(x) = 0 . \end{cases}$$

Ukažte, že funkce g má vlastnosti potřebné v axiomu 9 . ||

8,35.* Předpokládejme, že $P \in \mathcal{M}$ a že platí axiom 9 /viz 8,24/.
Potom platí

(3) : existují množiny $E_n \in \mathfrak{M}$ takové, že

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{a} \quad \mu E_n < +\infty \quad \text{pro každé } n .$$

(Toto je vlastnost, vyjadřující tzv. σ - konečnost míry - viz 7,29/.

|| Uvědomte si předně, že podle 8,24 jest $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$.
Buď g funkce, jejíž existenci zaručuje axiom 9 . Položte $f_n =$ $= \min(1; ng)$, $E_n = \{ x \in P ; \ f_n(x) = 1 \}$. ||

8,36. Předpokládejme, že je splněna vlastnost

(3′) : existují množiny $E_n \in \mathcal{M}$ takové, že $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,
$\tilde{\mu} E_n < +\infty$ pro každé n

/uvědomte si, že míru μ máme definovánu pouze na systému $\mathfrak{M}$
a že z uvedených předpokladů není ihned zřejmé, že $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ /.
Potom $P \in \mathcal{M}$ a je splněn axiom 9 / a tedy $\mathfrak{M} = \mathcal{M}$ / .

|| $P \in \mathcal{M}$ plyne z toho, že systém $\mathcal{M}$ tvoří σ - okruh .
Je-li $\tilde{\mu} P = 0$, je tvrzení zřejmé. Ukažte dále, že množiny E_n
v (3′) lze volit dokonce disjunktní, položte potom

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n . \tilde{\mu}(E_n)} c_{E_n} , \quad g = \min(1;h)$$ ||

8,37. Ukažte, že

1/ axiom 9 a vlastnosti (1) , (2) , (3) jsou splněny v případě $\mu P = 0$,

2/ axiom 9 a jednotlivé vlastnosti (1) , (2) , (3) jsou ekvivalentní, jestliže $P \in \mathcal{M}$ a $\tilde{\mu} P > 0$.

8,38. Z předchozích výsledků odvoďte následující velmi zajímavou vlastnost:

$$P \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \text{ existují množiny } E_n \in \mathfrak{M}\ ,\ \mu E_n < +\infty\ ,\quad P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\ ,$$

tj. prostor P má σ - konečnou míru, právě když je měřitelný.

‖ Je-li $P \in \mathfrak{M}$, je splněn podle 8,25 axiom 9 a podle 8,30 - 7/ jest $\mathcal{M} = \mathfrak{M}$. Dále použijte 8,35. Ostatní je již snadné.

Dokažte ostatně toto tvrzení též přímo. Je-li $P \in \mathfrak{M}$, existují funkce $f_n \in \mathcal{L}$ tak, že $f_n \nearrow c_P$. Předpokládejme, že $\mu P > 0$ a uvažujme množiny $E_n = \{ x \in P\ ;\ f_n(x) \geq \frac{1}{2} \}$. Podle 8,31 - j/ jest $E_n \in \mathfrak{M}$ a zřejmě $\mu E_n < +\infty$. Obrácené tvrzení plyne z věty 13 . ‖

8,39.* Předpokládejme, že je splněna vlastnost (1) z 8,32. Buď $h \in \Lambda$, $h \geq 0$, $c = \sup \{ Af\ ;\ f \in \mathcal{L}\ ,\ 0 \leq f \leq h \} < +\infty$. Potom $h \in \mathcal{L}$ a $Ah = c$. Dokažte !

‖ Buď f_n posloupnost funkcí z vlastnosti (1) , položte

$$h_n = \min (|f_1| + \ldots + |f_n|\ ;\ h) \ .$$ ‖

Poznámka: tato věta platí i tehdy, předpokládáme-li pouze $h \in \mathcal{W}$.

8,40.* Projděte si ještě jednou cvičení 8,27 - 8,39 a snažte se přehledně a graficky si znázornit všechny implikace. Sepište si též, co lze všechno tvrdit v případě, že $P \in \mathfrak{M}$!

‖ $P \in \mathfrak{M} \Rightarrow$

a/ existuje funkce $g \in \mathcal{L}$ tak, že $0 < g(x) \leq 1$ pro každé $x \in P$ /axiom 9/, nelze obrátit,

b/ $\left[f \in \mathcal{L} \Rightarrow \min(f,1) \in \mathcal{L} \right]$ /zeslabený Stoneův axiom/, nelze obrátit,

c/ $\mathfrak{M} = \mathcal{M} = \mathfrak{M}(\tilde{\mu})$, lze obrátit

/speciálně: $E \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow$ pro každou množinu $T \subset P$ jest $\tilde{\mu} T = \tilde{\mu}(T \cap E) + \tilde{\mu}(T - E)$ /

d/ $\Lambda = \mathcal{W} = \Lambda(\mathfrak{M}(\tilde{\mu}))$, lze obrátit, tedy $f \in \Lambda \Leftrightarrow$ pro libovolné funkce $g,h \in \mathcal{L}$, $g \leq 0 \leq h$ jest $\max(g; \min(f,h)) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow$ pro libovolné $c \in E_1$ jest

$$\{ x \in P\ ;\ f(x) < c \} \in \mathfrak{M}\ ,$$

e/ množina P má σ - konečnou míru, tj. existují $E_n \in \mathcal{M}$, $\mu E_n < +\infty$, $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, lze obrátit,

f/ viz též ještě cvičení 8,41, 8,42. ‖

8,41.* Buď $P \in \mathcal{M}$. Potom

I/ $f \in \Lambda \implies \operatorname{sign} f \in \Lambda$. Dokažte !

Platí tato implikace i bez předpokladu $P \in \mathcal{M}$?

Plyne z platnosti této implikace již $P \in \mathcal{M}$?

II. $f,g \in \Lambda \implies f.g \in \Lambda$

‖ Podle 8,31 jest $\Lambda = \mathcal{M}(\tilde{\mu})$ a podle 7,24 je součin dvou $\tilde{\mu}$ - měřitelných funkcí opět $\tilde{\mu}$ - měřitelná funkce ‖.

Lze poslední tvrzení dokázat i bez předpokladu $P \in \mathcal{M}$?

Plyne z této implikace již $P \in \mathcal{M}$? /Viz též odstavec 4,3 ze skript I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I - co se v důkazu vlastně předpokládá ?/

8,42.** Uveďme ještě jeden abstraktní problém. Nejdříve si však dokažte následující jednoduchou, ale užitečnou větu.

"Buďte (Z_1, A_1) , (Z_2, A_2) dva základní prostory nad stejnou množinou P . Buďte $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ příslušné systémy funkcí s konečným abstraktním integrálem A_1 , A_2 . Potom platí:

$$\left[\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \quad \text{a} \quad A_1 f = A_2 f \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2\right] \Leftrightarrow \left[Z_1 \subset \mathcal{L}_2,\right.$$

$$\left. Z_2 \subset \mathcal{L}_1 \quad \text{a} \quad A_1 f = A_2 f \quad \text{pro} \quad f \in Z_1 \quad \text{i pro} \quad f \in Z_2\right] ."$$

Ve cvičení 7,38 jsme uvedli následující větu - buď (Z,A) základní prostor, proveďme Daniellovo rozšíření, dostaneme trojici $(P, \mathcal{M}, \mu)$. Označme symbolem $\bar{Z}$ systém všech jednoduchých funkcí na P s $\mu(N(f)) < +\infty$. Pro funkce ze systému $\bar{Z}$ můžeme definovat integrál $\bar{A}$ jako v př. 7,37 /vše si zopakujte!/. Získáme opět základní prostor $(\bar{Z}, \bar{A})$, můžeme opět provést Daniellovo rozšíření, dostaneme systém $\bar{\mathcal{L}}$ a integrál $\bar{A}$ na něm.

Ptali jsme se, je-li splněna podmínka

$$(LS) : \quad \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \quad \text{a} \quad Af = \bar{A}f \quad \text{pro} \quad f \in \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} .$$

Viděli jsme též, že odpověď na tuto otázku je positivní v případě, že $P \in \mathcal{M}$. To tedy znamená, že podmínka $P \in \mathcal{M}$ je postačující podmínkou pro platnost vztahu (LS). Hledejme nyní nějaké další postačující - či nutné - podmínky pro platnost vztahu (LS) .

25535 Z16

Dokažte následující:

1/ (LS) nemusí být vždy splněno

‖ viz př. 2,5 , kde jediná měřitelná množina je prázdná množina ‖,

2/ předpokládáme-li, že $\Lambda = \mathcal{W}$ /viz 8,22/, dokažte, že libovolná z následujících podmínek je postačující pro platnost (LS) :

a/ Stoneův axiom 8_s /viz 8,11/ ,

b/ zeslabený Stoneův axiom 8_s^* /viz 8,27/,

c/ $f,g \in Z \implies f.g \in Z$,

d/ $f \in Z$, $f \geq 0 \implies f^2 \in \Lambda$.

Je některá z těchto podmínek i podmínkou nutnou?
Jaká je situace v případě, že není $\Lambda = \mathcal{W}$?

**) V tomto případě je nutné trochu pozměnit definici jednoduchých funkcí vzhledem k systému $\mathcal{M}$.

V dalších několika příkladech se opět omezíme pouze na Lebesgueův integrál v eukleidovských prostorech /tj. předpokládáme, že základní systém $Z = C_r$ a Af je Riemannův integrál přes E_r /. Některá tvrzení by bylo možno též vyslovit obecněji, nebudeme se tím však zabývat - přenecháme toto čtenáři.

8,43.* Pro libovolnou množinu $A \subset E_1$ a pro libovolné $k > 0$ značme $A^{(k)} = A \cap \langle -k,+k \rangle$, pro libovolnou funkci f , $f \geq 0$ a pro libovolné $k > 0$ značme symbolem $f^{(k)}$ funkci /neplést s derivacemi!/ definovanou následovně

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro ta } x \text{, pro něž } f(x) \leq k \text{,} \\ k & \text{pro } x \text{ taková, že } f(x) > k \text{.} \end{cases}$$

Dokažte, že

1/ $A \in \mathfrak{M}_1$, $k > 0 \implies A^{(k)} \in \mathfrak{M}_1$,

2/ $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0$, $k > 0 \implies f^{(k)} \in \Lambda_M$.

3/ je-li $M \in \mathfrak{M}_1$, $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0$ na M , potom

$f \in \mathcal{L}_M \iff f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$ a

$\lim\limits_{k \to \infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$ je konečná

/V tomto případě pak zřejmě $\int_M f = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$ /.

Návod k důkazu posledního tvrzení:

a/ je-li $f \in \mathcal{L}_M$, jest $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$ a použije se Lebesgueova věta,

b/ označme $a = \lim_{k\to\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$, pro libovolné celé r označte

$$Q_r = \left\{ x \in M ;\ 2^r \leq f(x) < 2^{r+1} \right\},$$

dále položte

$$Q_{-\infty} = \left\{ x \in M ;\ f(x) = 0 \right\},\quad Q_{+\infty} = \left\{ x \in M ;\ f(x) = +\infty \right\}$$

a definujte funkci F takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in Q_{-\infty}, \\ 2^{r+1} & \text{pro } x \in Q_r, \\ +\infty & \text{pro } x \in Q_{+\infty}, \end{cases}$$

lehko ukážete, že $F \in \mathcal{L}_M$ a $|f| \leq F$, odkud již vyplyne tvrzení.

Poznámky:

1/ Jak by bylo možno vyslovit uvedenou větu pro prostory vyšší dimense či pro abstraktní prostory ?

2/ Uvedenou větu by bylo možno zobecnit. Platí následující:

"buď $f \in \Lambda_M$, $f \geq 0$, $M \in \mathfrak{M}_1$. Potom

$f \in \mathcal{L}_M \iff f^{(q)} \in \mathcal{L}_{M(p)}$ pro všechny hodnoty p,q

a $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \int_{M(p)} f^{(q)}$ je konečná ".

Bylo by ovšem třeba vysvětlit, co se rozumí "dvojnou" limitou $\lim\limits_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}}$ - čtenáře je možno odkázat na knihu V.Jarník, Diferenciální počet II .

8,44. Dokažte následující tvrzení.

Buď f libovolná funkce na množině $M \subset E_r$. Pro libovolné $a,b \in E_1$, $a < b$ označme $f_{(a)}^{(b)}$ funkci definovanou předpisem

$$f_{(a)}^{(b)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro ta } x \in M \text{, pro něž } a \leq f(x) \leq b, \\ b & \text{pro } x \in M,\ f(x) > b, \\ a & \text{pro } x \in M \text{ taková, že } f(x) < a. \end{cases}$$

Je-li $f \in \Lambda_M$, potom je $f_{(a)}^{(b)} \in \Lambda_M$ pro libovolné $a,b \in E_1$, $a < b$.

‖ Při důkazu použijte větu 56. Je vidět, že věta zůstane v platnosti i obecně - stačí předpokládat - jak vyplyne z provedeného důkazu - že $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{M})$, tj. stačí pouze předpokládat, že $P \in \mathfrak{M}$ /viz 8,31/. ‖

8,45. Zobecněme nyní trochu tvrzení z 8,43. Buď opět f libovolná funkce na množině $M \in \mathfrak{M}_1$, ne nutně již nezáporná, buď $k > 0$. Podle předešlého cvičení 8,44 můžeme utvořit funkci $f_{(-k)}^{(k)}$, značme ji pro krátkost opět $f^{(k)}$/ ukažte, že toto označení není ve sporu s označením z př. 8,43/.

Potom platí:

je-li $f \in \mathcal{L}_M$, je i $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$

a $\int_M f = \lim_{k\to+\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$.

Dokažte !

‖ Použijte vztahů

a/ $f = f^+ - f^-$,

b/ $f^{(k)} = (f^+)^{(k)} + (-f^-)^{(k)}$,

a cvičení 8,43 . ‖

<u>Poznámka:</u>

Opět nebylo podstatné, že jsme uvažovali pouze Lebesgueovy integrály v E_1 , pokuste se uvedenou větu zobecnit.

8,46. Na tomto místě se dostáváme k teorii "zobecněných" integrálů. Věta z předchozího odstavce nám k tomu dává vhodnou příležitost. Viděli jsme totiž, že za předpokladu $f \in \mathcal{L}_M$ je i $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ pro každé $k > 0$ a platí rovnost $\int_M f = \lim_{k\to+\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$. Může se nyní stát /uveďte příklad !/, že poslední limita existuje, aniž existuje konečný Lebesgueův integrál $\int_M f$. V tomto případě limitu $\lim_{k\to+\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$ budeme nazývat Q-integrálem funkce f přes množinu M . Přesněji, buď $M \subset E_1$, f funkce na M , nechť pro každé $k > 0$ jest $f^{(k)} \in \mathcal{L}_{M(k)}$ a nechť existuje <u>vlastní</u> $\lim_{k\to+\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$. Potom hodnotu $\lim_{k\to+\infty} \int_{M(k)} f^{(k)}$ nazveme Q - integrálem funkce f přes množinu M , značme tento integrál symbolem $(Q) \int_M f$. Nechť dále symbol Q_M znamená systém všech funkcí na množině M , pro něž existuje $(Q) \int_M f$.

Ukažte, že

1/ (Q) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx = 0$ /v nule definujeme funkci libovolně/,

2/ (Q) $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existuje

‖ viz př. 3,4 ‖ ,

3/ $f \in Q_M$, $g \sim f \Rightarrow g \in Q_M$,

4/ $Q_M \subset \Lambda_M$,

5/ $f, g \in Q_M$, $f \leq g$ na $M \Rightarrow$ (Q) $\int_M f \leq$ (Q) $\int_M g$,

6/ $f \in Q_M$, $f \geq 0$ na $M \Rightarrow f \in \mathcal{L}_M$ a (L) $\int_M f =$ (Q) $\int_M f$

‖ viz cvičení 8,43 , viz též 8,50 - I / ‖ ,

7/ $f \in Q_M$, $a \in E_1 \Rightarrow af \in Q_M$, (Q) $\int_M af = a\,.$ (Q) $\int_M f$,

8/ $f \in Q_M$, $N \subset M$, $N \in \mathcal{M}_1$ $\not\Rightarrow$ $f \in Q_N$,

‖ viz kupříkladu (Q) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx$ ‖ ,

9/ $f, g \in Q_M$ $\not\Rightarrow$ $f + g \in Q_M$,

10/ $f, g \in Q_M$, $f + g \in Q_M$ $\not\Rightarrow$ (Q) $\int_M f +$ (Q) $\int_M g =$ (Q) $\int_M (f + g)$.

V důsledku posledních tří negativních výsledků je vidět, že Q - integrál nemá potřebné vlastnosti integrálu /tak, jak jsme je formulovali v úvodu první kapitoly/. Z toho důvodu zavedeme následující "zobecněný integrál".

8,47.* Buď f libovolná funkce na množině $M \in \mathcal{M}_1$. Funkci f nazveme B - integrovatelnou na množině M , jestliže

a/ $f \in Q_M$ /tj. je-li f Q - integrovatelná , viz 8,46 /,

b/ $\lim_{y \to +\infty} y \,.\, \mu_1 \{ x \in M ;\ f(x) > y \} = 0$.

Systém všech B - integrovatelných funkcí na množině M označme symbolem B_M , pro funkce $f \in B_M$ definujeme B - integrál vztahem

$$(B) \int_M f = (Q) \int_M f .$$

Dokažte, že

1/ $\mathcal{L}_M \subset B_M \subset Q_M$

‖ viz k tomuto př. 8,62 ‖ ,

2/ $B_M - \mathcal{L}_M \neq \emptyset$, 3/ $f \in B_M$, $f \geq 0 \implies f \in \mathcal{L}_M$

‖ viz př. 8,46 - 6/ či 8,50 - I/ ‖,

4/ (B) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx$ neexistuje ,

5/ $f \in B_M$, $g \sim f \implies g \in B_M$,

6/ $f \in B_M$, $a \in E_1 \implies af \in B_M$, (B) $\int_M af = a\,.\,$(B)$\int_M f$,

7/ $f,g \in B_M \implies (f+g) \in B_M$, (B) $\int_M (f+g) =$ (B)$\int_M f +$ (B)$\int_M g$,

8/ $f \in B_M$, $N \subset M$, $N \in \mathfrak{M}_1 \not\Longrightarrow f \in B_N$.

8,48. Ukážeme ještě jedno "zobecnění" Lebesgueova integrálu. Dokažte však nejdříve následující tvrzení.

Buď $0 \leq a < b \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom pro libovolné $y \in (0,+\infty)$ jest $e^{-xy}.f(x) \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a

$$\text{(L)} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y\to 0_+} \int_a^b e^{-xy}.f(x)\,dx \;.$$

‖ Ukažte, že

$$x \in (a,b)\;,\quad y \in \langle 0,+\infty) \implies \left|e^{-xy}.f(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \in \mathcal{L}_{(a,b)}$$

a použijte kupříkladu větu 60 . ‖

Buď nyní opět $0 \leq a < b \leq +\infty$, buď f funkce definovaná v intervalu (a,b) , nechť

a/ pro každé $y \in (0,+\infty)$ jest $e^{-xy}.f(x) \in \mathcal{L}_{(a,b)}$,

b/ existuje <u>vlastní</u> $\lim_{y\to 0_+} \int_a^b e^{-xy}.f(x)\,dx$.

Systém všech funkcí, vyhovujících oběma těmto podmínkám, značme symbolem $E_{(a,b)}$; pro libovolnou funkci $f \in E_{(a,b)}$ pak definujme její E - integrál přes interval (a,b) vztahem

$$\text{(E)} \int_a^b f = \lim_{y\to 0_+} \int_a^b e^{-xy}.f(x)\,dx \;.$$

Dokažte, že

1/ $\mathcal{L}_{(a,b)} \subset E_{(a,b)} \subset \Lambda_{(a,b)}$,

2/ $f,g \in E_{(a,b)}$, $\alpha,\beta \in E_1 \implies \alpha f + \beta g \in E_{(a,b)}$,

$$\text{(E)} \int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\text{(E)}\int_a^b f + \beta\text{(E)}\int_a^b g \;,$$

3/ $f \in E_{(a,b)} \quad \not\Rightarrow \quad |f| \in E_{(a,b)}$,

4/ $f \in E_{(a,b)}$, $f \geqq 0 \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$

‖ dokažte přímo či použijte 8,50 - I/ ‖ ,

5/ $(E) \int_0^\infty \sin x \, dx = 1$, $(E) \int_0^\infty \cos x \, dx = 0$

‖ viz 4,47 a 4,48 ‖ ,

6/ $(E) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$

‖ viz 6,22 ‖ ,

7/ $(E) \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x} \, dx$ neexistuje

‖ viz 6,72 ‖ ,

8/ $(E) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x \cdot \sqrt{x}} \, dx = \sqrt{2\pi}$, $(E) \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

‖ viz 6,75 ‖ .

8,49. O dalších "zobecněných" integrálech se zde nebudeme zmiňovat. O třech velmi důležitých případech je možno se dočíst v knihách V.Jarník, Integrální počet I /nevlastní Riemannův integrál/, V.Jarník, Integrální počet II /nevlastní Lebesgueův integrál, Perronův integrál/. Porovnejte navzájem jednotlivé "zobecněné" integrály !!

8,50.* Buď $M \in \mathcal{M}_1$, symbolem T_M označme systém všech funkcí na množině M takových, že

a/ $\mathcal{L}_M \subset T_M \subset \Lambda_M$.

Nechť každé funkci $f \in T_M$ je přiřazeno jisté reálné číslo - značme toto symbolem $(T) \int_M f$ - tak, že

b/ $f \in \mathcal{L}_M \Rightarrow (L) \int_M f = (T) \int_M f$,

c/ $f, g \in T_M$, $f \leqq g$ na $M \Rightarrow (T) \int_M f \leqq (T) \int_M g$

/lze tedy říci, že $(T) \int_M$ je jakýsi "zobecněný integrál", i když se nepředpokládá např. ani linearita/.

Potom platí

(I) $f \in T_M$, $f \geqq 0$ na $M \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{L}_M$.

Dokažte !

‖ Buď $f \in T_M$, $f \geq 0$. Potom $f \in \mathcal{L}_M^R$. Pro libovolné $k > 0$ funkce $f^{(k)}$ definovaná předpisem

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \cap \langle -k,k \rangle \text{ , je-li } f(x) \leq k \text{ ,} \\ k & \text{pro } x \in M \cap \langle -k,k \rangle \text{ , je-li } f(x) > k \text{ ,} \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in M \end{cases}$$

leží v systému $\mathcal{L}_M$ /ukažte ! , viz též 8,43 /, tedy podle předpokladu je $f^{(k)} \in T_M$. Ze vztahu $f^{(k)} \leq f$ pak plyne , že

$$(L) \int_M f^{(k)} = (T) \int_M f^{(k)} \leq (T) \int_M f \ .$$

Odtud např. podle Leviho věty $/f^{(k)} \nearrow f$ / plyne, že $f \in \mathcal{L}_M$ ‖.

Poznámky.

1/ Jelikož všechny zobecněné integrály /Q - , B - , E - / splňovaly vlastnosti a/, b/, c/, vyplývá odtud, že funkce, mající "nový zobecněný" integrál a nemající Lebesgueův integrál, mohou být pouze funkce, které mění svoje znaménko /viz 8,46 - 6/, 8,47 - 3/ , 8,48 - 4/, viz též obdobný příklad 3,22 - b/ /.

2/ Ukažte, že také platí:

(II) $f \in T_M - \mathcal{L}_M \implies |f| \notin T_M$

‖ kdyby $|f| \in T_M$, bylo by podle I též $|f| \in \mathcal{L}_M$ a podle věty 44 též $f \in \mathcal{L}_M$ ‖ ,

(III) $f \in T_M - \mathcal{L}_M \implies (L) \int_M |f| = +\infty$

‖ plyne okamžitě z předchozího, srovnej pro zajímavost se cvičením 3,22 - c/ ‖.

Je tedy vidět, že zobecněné integrály, které nejsou Lebesgueovými integrály, jsou vlastně "neabsolutně" konvergentní integrály. Lebesgueův integrál je pak podle věty 44 "absolutně" konvergentní. /Srovnejte též s teorií řad a s teorií zobecněných součtů !/.

8,51.* Uvedeme nyní příklad omezené funkce f na intervalu $\langle 0,1 \rangle$ takové, že existuje $(N) \int_0^1 f$ a neexistuje $(R) \int_0^1 f$.

Protože Riemannův integrál $(R) \int_0^1 f$ nemá existovat, musí mít množina bodů nespojitosti funkce f v intervalu $\langle 0,1 \rangle$ /podle věty 57/ kladnou míru. Na druhé straně musí existovat primitivní funkce F k funkci f

na intervalu $\langle 0,1\rangle$, tudíž množina bodů spojitosti funkce f musí být hustá v intervalu $\langle 0,1\rangle$ /viz větu v př. 3,3/. Podáme tzv. Volterrův příklad takové funkce f; nejdříve ovšem musíme sestrojit množinu v intervalu $\langle 0,1\rangle$, která by měla kladnou míru a jejíž doplněk by byl hustý v $\langle 0,1\rangle$. Uveďme následující příklady - konstrukce množin s uvedenými vlastnostmi je sama o sobě zajímavá.

8,52.* /Zobecněné Cantorovo diskontinuum/.

V příkladu 5,7 jsme sestrojili množinu C v intervalu $\langle 0,1\rangle$, tzv. Cantorovo diskontinuum. Ukažte, že $C = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, kde E_n je sjednocení disjunktních otevřených intervalů $E_{n,i}$ $/i = 1,2,\dots,2^{n-1}/$, délka každého intervalu $E_{n,i}$ je 3^{-n} a každý interval $E_{n,i}$ je "umístěn v prostřední třetině" některého z n disjunktních uzavřených intervalů, které tvoří množinu $\langle 0,1\rangle - \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j$ /precizujte !, zřejmě $E_n = \langle 0,1\rangle - R_n$, kde množiny R_n jsou definovány jako v 5,7/.

Buď nyní $k \geq 3$ a proveďme obdobnou konstrukci. Buď $C_k = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n je sjednocení otevřených disjunktních intervalů $F_{n,i}$ $/i = 1,2,\dots,2^{n-1}/$, každý z intervalů $F_{n,i}$ má délku k^{-n}. Je-li $F_{n,i} = (a_{n,i}, b_{n,i})$, předpokládáme, že $b_{n,i} < a_{n,j}$, kdykoliv $i < j$ /podejte precizní definici pomocí matematické indukce !/.

Dokažte, že

1/ $C_k \in \mathfrak{M}_1$ pro libovolné $k \geq 3$, $\mu_1 C_k = \frac{k-3}{k-2}$,

2/ C_k je uzavřená množina,

3/ C_k je řídká množina /tj. má prázdný vnitřek/ - anebo jinak řečeno, její doplněk v $\langle 0,1\rangle$ je hustá množina v $\langle 0,1\rangle$,

**4/ $C_k = C_k'$ (kde C_k' je množina všech hromadných bodů množiny C_k),

**5/ jaký bude Jordan - Peanův objem množiny C_k ?

/definici viz v dodatku D III /.

8,53.* Buď $\{x_1, x_2, \dots\}$ množina všech racionálních čísel v intervalu $(0,1)$. Zvolme posloupnost reálných čísel δ_k tak, aby

1/ $(x_k - \delta_k, x_k + \delta_k) \subset (0,1)$ pro každé k,

2/ $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \frac{1}{2}$.

Položme

$$F = \langle 0,1\rangle - \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \delta_k, x_k + \delta_k) .$$

Potom

a/ množina F je uzavřená ,

b/ $F \in \mathfrak{M}_1$ a $\mu_1 F > 0$,

c/ F je řídká množina, tj. množina $\langle 0,1\rangle - F =$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \delta_k ,\ x_k + \delta_k) \text{ je hustá v } \langle 0,1\rangle .$$

**) Jaký bude Jordan - Peanův objem množiny F ? /viz D III /.

8,54.* Buď nyní $A \subset \langle 0,1\rangle$ libovolná uzavřená, řídká množina kladné míry /viz př. 8,52, 8,53/. Potom množina $\langle 0,1\rangle - A$ je otevřená, existuje tedy spočetně mnoho disjunktních otevřených intervalů (a_n, b_n) tak, že

$$\langle 0,1\rangle - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) .$$

Definujme funkci F v intervalu $\langle 0,1\rangle$ takto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in A , \\ (x-a_n)^2 (x-b_n)^2 \sin \dfrac{1}{(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)} & \text{pro } x \in (a_n, b_n) . \end{cases}$$

Dokažte, že

1/ F je spojitá v intervalu $\langle 0,1\rangle$,

2/ existuje vlastní derivace F' v $\langle 0,1\rangle$,

3/ $F'(x) = 0$ pro $x \in A$,

4/ F' je spojitá ve všech bodech množiny $\langle 0,1\rangle - A$,

5/ F' je nespojitá ve všech bodech množiny A ,

6/ neexistuje $(R) \int_0^1 F'(x)\, dx$,

7/ existuje $(N) \int_0^1 F'(x)\, dx = 0$.

Existuje $(L) \int_0^1 F'(x)\, dx$?

8,55.* Definujte funkci G obdobně jako v minulém př. 8,54 předpisem

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in A , \\ (x-a_n)^2 (b_n-x)^2 \sin \dfrac{1}{(x-a_n)^2 (b_n-x)^2} & \text{pro } x \in (a_n, b_n) . \end{cases}$$

Dokažte, že

1/ G je spojitá v $\langle 0,1 \rangle$,

2/ existuje vlastní derivace G' v $\langle 0,1 \rangle$,

3/ G' je spojitá ve všech bodech množiny $\langle 0,1 \rangle - A$ a nespojitá ve všech bodech množiny A ,

4/ neexistuje $(R)\int_0^1 G'(x)\,dx$,

5/ $(N)\int_0^1 G'(x)\,dx = 0$,

6/ je-li $x \in A$, je $G'(x) = 0$ a funkce G' je neomezená v libovolném okolí bodu x .

Existuje $(L)\int_0^1 G'(x)\,dx$?

$\boxed{8{,}56.^*}$ Buď $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ množina všech racionálních čísel v intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ označme

$$F_i(\varepsilon) = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} , x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) , \quad i=1,2,\dots .$$

Položme dále

$$F(\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\varepsilon) ,$$

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dokažte, že

1/ $F(\varepsilon)$ je otevřená množina pro každé $\varepsilon > 0$,

2/ $\mu_1(F(\varepsilon)) \leq \varepsilon$,

3/ F je nespočetná množina ,

4/ $F \in \mathfrak{M}_1$ a $\mu_1 F = 0$.

$\boxed{8{,}57.^*}$ Buď $E \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r E < +\infty$, $f \in \Lambda_E$, $f \geq 0$; označme $E_k = \{x \in E ;\ k \leq f(x) < k+1\}$ pro libovolné k .

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mu_r E_k \text{ konverguje .}$$

Dokažte !

1/ Ukažte nejdříve, že $E_k \in \mathfrak{M}_r$ pro každé $k \in E_1$.

2/ Platí

$$k \cdot \mu_r E_k \leqq \int_{E_k} f \leqq (k+1) \cdot \mu_r E_k .$$

3/ Dále ukažte, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mu_r E_k \leqq \int_E f \leqq \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \mu_r E_k . \|$$

Co lze tvrdit v případě, že $\mu_r E = +\infty$? Lze uvedenou větu zobecnit i na obecnější prostory ? Kdy ?

$\boxed{8{,}58.^*}$ Buď $E \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r E < +\infty$, $f \geq 0$, $f \in \Lambda_E$; označme $F_k = \{x \in E ;\ f(x) \geq k\}$ pro $k \in E_1$.

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{k=1}^{\infty} \mu_r F_k \text{ konverguje .}$$

‖ Ukažte, že $F_k = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_{k+i}$, kde množiny E_j jsou definovány stejně jako v předchozí úloze 8,57. Poté použijte 8,57 . ‖

$\boxed{8{,}59.}$ Buď $E \in \mathfrak{M}_r$, $f \in \mathcal{L}_E$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ je $\mu_r\{x \in E ;\ f(x) \geq \varepsilon\} < +\infty$. Dokažte !

‖ Buď $\varepsilon > 0$, označte $M_\varepsilon = \{x \in E ;\ f(x) \geq \varepsilon\}$.

Použijte vztahu

$$\int_E |f| = \int_{M_\varepsilon} |f| + \int_{E-M_\varepsilon} |f| \geqq \int_{M_\varepsilon} |f| \geqq \varepsilon \cdot \mu_r M_\varepsilon$$

a věty 44 . ‖

$\boxed{8{,}60.^*}$ Buď $f \in \Lambda_E$, $E \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r E < +\infty$.

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mu_r\{x \in E ;\ |f(x)| \geq n\} \text{ konverguje .}$$

$\boxed{8{,}61.^*}$ Buď $f \in \Lambda_E$, $E \in \mathfrak{M}_r$, $H_n = \{x \in E ;\ n-1 \leq f(x) < n\}$.

Potom

$$f \in \mathcal{L}_E \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \ \mu_r H_n \text{ konverguje .}$$

$\boxed{8{,}62.^*}$ Buď $f \in \mathcal{L}_E$, $E \in \mathfrak{M}_r$, $K_n = \{x \in E ;\ |f(x)| \geq n\}$.

Potom $\lim_{n\to+\infty} n \cdot \mu_r K_n = 0$. Dokažte !

$\boxed{8{,}63.}$ Gamma funkce.

Funkci Γ jsme definovali předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \cdot e^{-x}\, dx$$

a ukázali jsme, že funkce Γ je definována pro $s \in (0,+\infty)$, je na tomto intervalu spojitá a má zde derivace všech řádů. Dále jsme dokázali, že $\lim_{s\to 0+} \Gamma(s) = \lim_{s\to +\infty} \Gamma(s) = +\infty$

/viz příklady 3,43, 4,18, 6,24 /.

Ukažte dále, že

1/ $\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$ pro $s \in (0,+\infty)$,

2/ $\Gamma(n+1) = n\,!$ pro n přirozené ,

3/ $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$,

4/ existuje bod $x_0 \in (1,2)$ tak, že $\Gamma'(x_0) = 0$

⌈ použijte Rolleovu větu na interval $(1,2)$ ⌋ ,

5/ v intervalu $(0,x_0)$ je funkce Γ klesající,

v intervalu $(x_0,+\infty)$ rostoucí, v bodě x_0 nabývá svého minima

⌈ ukažte, že $\Gamma'' > 0$ v intervalu $(0,+\infty)$, tedy že funkce Γ' je v intervalu $(0,+\infty)$ rostoucí a využijte toho, že $\Gamma'(x_0) = 0$ ⌋ ,

6/ $\lim_{y\to 0_+} y \cdot \Gamma(y) = 1$

⌈ ukažte, že $\int_0^{\infty} e^{-x^n}\, dx = \frac{1}{n}\, \Gamma(\frac{1}{n})$

a že $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^n}\, dx = 1$ - viz př. 4,22 ⌋ ,

7/ $\int_0^{1} \log \Gamma(x)\, dx$ konverguje

⌈ využijte předchozího výsledku 6/ ⌋

O mnoha dalších zajímavých vlastnostech funkce Γ se lze dočíst v knize V.Jarník, Integrální počet II, kap. XVIII .

8,64. Vyšetřujte integrál $I(a) = \int_0^{\pi} \log(1-2a\cos x + a^2)\, dx$!

Ukažte, že

1/ $a \in E_1 \Rightarrow I(a)$ konverguje ,

2/ I je spojitá funkce v E_1 ,

3/ I je funkce sudá v E_1 ,

4/ označíte-li pro každé přirozené $n \in N$

$$P_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\ ,\quad P_n(1) = P_n(-1) = n\ ,$$

jest $(R)\int_0^{\pi} \log(1-2a\cos x + a^2)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\log P_n(a)$

⌈ nejdříve ukažte, že

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} = (1-2t\cos\frac{\pi}{n}+t^2)\,.(1-2t\cos\frac{2\pi}{n}+t^2)\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ (1-2t\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+t^2) \quad \text{pro} \quad t \neq \pm 1$$

a poté použijte definici Riemannova integrálu ,

$$(R)\int_0^{\pi} \log(1-2a\cos x + a^2)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\,.\,\sum_{i=1}^{n-1} \log(1-2a\cos\frac{\pi i}{n}+a^2)$$ ⌋ ,

5/ $$I(a) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad a \in \langle -1,+1\rangle\ , \\ 2\pi\ \log|a| & \text{pro} \quad |a| > 1 \end{cases}$$

⌈ použijte vztahu 4/ , limitu lehko spočtete ⌋ ,

6/ $I(a) = \frac{1}{2}\,I(a^2) = \frac{1}{4}\,I(a^4) = \ldots\ldots$

⌈ $2.I(a) = I(a) + I(-a) = \frac{1}{2}\,I(a^2) + \frac{1}{2}\,I(-a^2) = I(a^2)$

a dále třeba indukce ⌋ ,

7/ $I(\frac{1}{a}) = I(a) - 2\pi\ .\log|a|$

⌈ přímý výpočet ⌋ ,

8/ $I(a) = 0$ pro $a \in \langle -1,+1\rangle$,

⌈ funkce I je spojitá v intervalu $\langle -1,+1\rangle$,

buď $M = \max_{a\in\langle -1,+1\rangle} I(a)$,

potom z 6/ plyne, že

$$|I(a)| = \left|\frac{1}{2^n}\,I(a^{2^n})\right| \leq \frac{M}{2^n} \qquad \text{pro každé } n \in N\ ,$$

odtud již lehko plyne tvrzení ⌋ ,

9/ $I(a) = 2\pi\ .\log|a|$ pro $|a| > 1$

⌈ plyne snadno z 7/ a 8/ ⌋

10/ $I(1) = \pi\,.\log 4 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,dt$, 11/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt = -\frac{\pi}{2} \log 2$

$\Big\|$ plyne z 10/ vzhledem k podmínce $I(1) = 0$,

viz též př. 5,87, 6,30 $\Big\|$,

12/ $a \in (-1,+1) \Rightarrow I'(a) = \int_0^{\pi} \frac{-2\cos x + a^2}{1-2a\cos x + a^2} \, dx = 0$

$\Big\|$ substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\Big\|$,

13/ $I(a) = 0$ pro $a \in \langle -1,+1 \rangle$

$\Big\|$ plyne okamžitě z 12/ vzhledem k podmínce $I(0) = 0$ $\Big\|$.

8,65.* Ukážeme nyní jednu velmi zajímavou vlastnost systému C_r /systém C_r jsme definovali jako systém všech spojitých funkcí v E_r , jejichž nosič je omezená množina v E_r /.

Dokažte následující větu.

Buď A libovolný funkcionál na systému C_r , který splňuje axiomy $4_A - 6_A$ (někdy se říká, že A je positivní lineární funkcionál na C_r). Potom funkcionál A splňuje i axiom 7_A .

$\Big\|$ Ukažte nejdříve, že ke každé kompaktní množině $K \subset E_r$ existuje konstanta M_K taková, že

$$|Af| \leq M_K \cdot \sup \{ |f(x)| ; \; x \in E_r \}$$

pro všechny funkce $f \in C_r$ pro něž $N(f) \subset K$

/$N(f)$ je nosič funkce f/.

Odtud již tvrzení vyplyne s pomocí Diniho věty $\Big\|$.

8,66.** Cvičení 8,65 je možno ještě zobecnit.

Buď S libovolný lokálně kompaktní Hausdorffův prostor, symbolem $C(S)$ označme systém všech spojitých reálných funkcí na S /tj. zobrazení S do E_1/, nosič každé z nichž /viz definice 7,25/ je obsažen v nějaké kompaktní podmnožině S . Lehko ukážete, že systém funkcí $C(S)$ splňuje axiomy $1_Z - 3_Z$. Buď A libovolný funkcionál na systému $C(S)$, který splňuje axiomy $4_A - 6_A$.

Potom funkcionál A splňuje i axiom 7_A . Ukažte, že je též splněn Stoneův axiom 8_S /viz 8,11/.

8,67.* Dokažte následující zajímavou charakteristiku nulových množin /definici viz před větou 11 /.

Množina $M \subset P$ je nulová, právě když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$ s vlastnostmi

a/ $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots\ldots$ na P ,

b/ $Af_n < \varepsilon$ pro všechna $n \in N$,

c/ $\sup_{n \in N} f_n(x) \geq 1$ pro všechna $x \in M$.

$\boxed{8,68.^*}$ Buď $A \subset P$; předpokládejme, že množina A není měřitelná, tj. $A \notin \mathcal{M}$. Buď f taková funkce, že $f = 0$ na A, $f \neq 0$ na $P - A$. Může být $f \in \mathcal{L}$, resp. $f \in \Lambda$? Kdy ?

$\boxed{8,69.^*}$ Dokažte následující věty.

I/ Ke každému $\varepsilon > 0$ a každé funkci $f \in \mathcal{L}$ existuje funkce $g \in Z$ tak, že $A\,|f - g| < \varepsilon$.

II/ Buď $P \in \mathcal{M}$, potom ke každému $\varepsilon > 0$ a každé funkci $f \in \mathcal{L}$ existuje <u>jednoduchá</u> funkce g /viz 7,27/, pro niž $\mu(N(g)) < +\infty$ /definici viz v 7,25/ a $A\,|f - g| < \varepsilon$.

I/ Viz skripta I. Černý - J.Mařík, Integrální počet I , odstavec 2,9 . Viz též cvičení 8,15 - 8/.

II/ Dokažte pomocí cvičení 8,42 /či 7,38/ a předchozí části I/ .

$\boxed{8,70.^*}$ V tomto cvičení předpokládejme, že $Z = C_1$, Af = Riemannův integrál přes E_1 . Dokažte následující větu.

Buď $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$ a funkce φ taková, že

a/ φ je <u>elementární jednoduchá</u> funkce v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ /viz 7,43/,

b/ $\varphi = 0$ vně intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,

c/ $\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon$.

1/ Použijte 8,69 - I/, definici systémů $\mathcal{L}_{(a,b)}$ a C_1 a poznatku, že libovolná funkce ze systému C_1 je stejnoměrně spojitá v E_1 .

2/ Použijte též 8,69 - II/ ; stačí potom ukázat, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ a k libovolné omezené měřitelné množině $E \subset E_1$ existuje konečně mnoho disjunktních intervalů $J_1, \ldots, J_n$ takových, že

$$\int_a^b \left| c_E(x) - c_J(x) \right| dx < \varepsilon \quad , \text{ kde } J = \bigcup_{i=1}^{n} J_i \, .$$

K důkazu posledního tvrzení použijte cv. 5,5 .

8,71.* Podejme ještě jeden zajímavý příklad tzv. Cantorovy funkce. Buď C Cantorovo diskontinuum /viz př. 5,7/. Ponechme označení $E_{n,i}$ /to jsou vlastně "styčné intervaly" množiny C/, E_n z příkladu 8,52 ; je-li $E_{n,i} = (a_{n,i} \, ; \, b_{n,i})$, předpokládejme navíc, že $b_{n,i} < a_{n,j}$ kdykoliv $i < j$.

Definujme nyní funkci f na intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Položme

$$f(x) = \frac{2i - 1}{2^n} \quad \text{pro } x \in E_{n,i} \, , \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1} \, , \quad n \in N \, .$$

Tím je funkce f definována na $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ukažte, že

α / $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Dále definujeme $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Je-li $x \in (0,1)$ a není-li ještě $f(x)$ definováno /v jakých bodech ještě není funkce f definována ?/, existuje rostoucí posloupnost $x_n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $x_n \nearrow x$. Ukažte, že

β / $\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$ existuje ,

γ / je-li $x_n , y_n \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow x$,
jest $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(y_n)$.

Definujeme tedy $f(x)$ jako hodnotu limity $\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$.
Ukažte dále, že

δ / funkce f je neklesající a spojitá v $\langle 0,1 \rangle$,

ε / $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, tj. $f' = 0$ skoro všude v intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Podali jsme tedy příklad spojité nekonstantní funkce v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, pro kterou $f' = 0$ sk. vš. v $\langle 0,1 \rangle$.
Viz též dodatek D IV.5.

25535 Z17

Dodatek.

V tomto dodatku jsou uvedeny ve formě cvičení některé důležité věty, které doplňují získané znalosti o Lebesgueově integrálu a míře. Důkazy jsou většinou pouze naznačeny; při studiu je provádějte podrobně. Všechny výsledky jsou formulovány pro Lebesgueův integrál v eukleidovském r - rozměrném prostoru E_r . V celém dodatku bude proto stále $Z = C_r$ a pro $f \in Z$ je Af Riemannův integrál z funkce f přes E_r ; symbolem ϱ značíme eukleidovskou /či jinou s ní ekvivalentní/ metriku v E_r .

D I . Charakteristika některých tříd funkcí, Baireovy funkce.

Připomeňme nejprve známou definici: množina $G \subset E_r$ se nazývá otevřená, jestliže pro každé $x \in G$ existuje takové $\varepsilon > 0$, že $y \in G$ kdykoliv $y \in E_r$ a $\varrho(x,y) < \varepsilon$, tj. jestliže množina G obsahuje s každým svým bodem i některé jeho okolí. Množinu $F \subset E_r$ nazveme uzavřenou, je-li množina $E_r - F$ otevřená. Jak známo, sjednocení libovolného systému otevřených množin a průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina ; sjednocení konečného počtu uzavřených množin a průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina ; E_r a prázdná množina jsou současně uzavřené i otevřené množiny.

Zaveďme nyní malé zobecnění. Je-li $M \subset E_r$ libovolná množina, nazveme množinu $G \subset M$ otevřenou v množině M /krátce : v M /, jestliže ke každému $x \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že je-li $y \in M$, $\varrho(x,y) < \varepsilon$, je také $y \in G$. Množinu $F \subset M$ nazveme uzavřenou v množině M , je-li množina $M - F$ otevřená v množině M . Množina otevřená je tedy množina otevřená v E_r ; obdobně pro uzavřené množiny.

D I. 1.

Buď $M \subset E_r$.

a/ Množina $G_1 \subset M$ je otevřená v M , právě když existuje množina $G \subset E_r$ otevřená v E_r taková, že $G_1 = G \cap M$. Obdobné tvrzení platí pro množiny uzavřené v M . Dokažte !

b/ Sjednocení libovolného systému a průnik konečného systému množin otevřených v M je množina otevřená v M . Sjednocení konečného systému a průnik libovolného systému množin uzavřených v M je množina uzavřená v M . Dokažte !

c/ Prázdná množina a množina M jsou současně otevřené i uzavřené v M.

Pomocí uzavřených a otevřených množin lze zajímavým způsobem charakterisovat spojité a polospojité /viz definici na str. 23 / funkce. Dokažte následující tvrzení.

D I. 2.

Buď $M \subset E_r$, f buď funkce definovaná na množině M a konečná.
Potom platí:

a/ f je spojitá v množině M /tj. f je spojitá v každém bodě množiny M vzhledem k této množině / $\Longleftrightarrow$ pro libovolnou otevřenou množinu $G \subset E_1$ je množina $\{x \in M ;\ f(x) \in G\} = M \cap f^{-1}(G)$ otevřená v množině M,

b/ f je spojitá v M $\Longleftrightarrow$ pro každé $a \in E_1$ jsou množiny
$\{x \in M ;\ f(x) > a\}$, $\{x \in M ;\ f(x) < a\}$
otevřené v M,

c/ f je spojitá v M $\Longleftrightarrow$ pro každé $c \in E_1$ jsou množiny
$\{x \in M ;\ f(x) \geq c\}$, $\{x \in M ;\ f(x) \leq c\}$
uzavřené v M.

D I. 3.

Buď $M \subset E_r$, f buď funkce definovaná na množině M.
Potom platí:

a/ f je polospojitá zdola /resp. shora/ v množině M $\Longleftrightarrow$ pro každé $a \in E_1$ je množina $\{y \in M ;\ f(y) > a\}$ /resp. množina $\{y \in M ;\ f(y) < a\}$/ otevřená v M,

b/ f je polospojitá zdola /resp. shora/ v M $\Longleftrightarrow$ pro každé $c \in E_1$ je množina $\{y \in M ;\ f(y) \leq c\}$ /resp. množina $\{y \in M ;\ f(y) \geq c\}$ / uzavřená v M.

D I. 4.

Tvrzení, která jsou uvedena v D I.2 a D I.3 zůstanou v platnosti, omezíme-li se pouze na racionální hodnoty a či c.
Dokažte !
Obecněji, buď $N \subset E_1$, $E_1 = \overline{N}$ /uzávěr množiny N /, tj. buď N hustá v E_1. Potom v tvrzeních uvedených v D I.2 a v D I.3 stačí uvažovat

pouze hodnoty $a \in N$ či $c \in N$.

Dokažte !

‖ Použijte vztahů

$$\{ y \in M ; \ f(y) \geq \alpha \} = \bigcap_{\substack{\beta \in N \\ \beta < \alpha}} \{ y \in M ; \ f(y) \geq \beta \}$$

a pod. ‖

Buď nyní $N \subset E_r$, $N \neq \emptyset$ a buď f funkce definovaná na množině N. Pro každé $x \in N$ a každé $\delta > 0$ položme

$$\varphi_\delta(x) = \sup_{\substack{\rho(x,y) < \delta \\ y \in N}} f(y) , \qquad \psi_\delta(x) = \inf_{\substack{\rho(x,y) < \delta \\ y \in N}} f(y) .$$

Pro pevné $x \in N$ je funkce $\varphi_\delta(x)$ neklesající, funkce $\psi_\delta(x)$ nerostoucí pro $\delta \in (0,+\infty)$. Pro každé $x \in N$ existují tedy limity

$$M_{f,N}(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \varphi_\delta(x) , \quad m_{f,N}(x) = \lim_{\delta \to 0_+} \psi_\delta(x) .$$

Funkce $M_{f,N}$, resp. $m_{f,N}$ se nazývá horní, resp. dolní <u>Baireova funkce</u> /příslušná k funkci f a množině N/.

Dokažte následující tvrzení.

D I.6.

Buď f funkce definovaná na množině $N \subset E_r$, $N \neq \emptyset$, buďte $M = M_{f,N}$, $m = m_{f,N}$ příslušné Baireovy funkce.

Potom pro každé $x \in N$ platí:

a/ $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$,

b/ funkce M je polospojitá shora v bodě x /vzhledem k N/, funkce m je polospojitá zdola v bodě x /vzhledem k N/ ‖ použijte definici polospojitosti na str. 23 ‖ ,

c/ f je shora polospojitá v bodě x /vzhledem k N/, právě když $f(x) = M(x)$; f je zdola polospojitá v bodě x /vzhledem k N/, právě když $f(x) = m(x)$,

d/ je-li f konečná v bodě x, je f spojitá v bodě x /vzhledem k N/, právě když $m(x) = M(x)$ / $= f(x)$ / ,

e/ buď g polospojitá shora v N /vzhledem k N/, $f \leq g \leq M \Rightarrow g = M$; buď g polospojitá zdola v N /vzhledem k N/ , $m \leq g \leq f \Rightarrow g = m$.

Uveďme ještě výslovně důležitou charakterisaci měřitelných funkcí.

D I.7.

Buď $M \in \mathfrak{M}_r$. Potom $f \in \Lambda_M$, právě když pro každé $a \in E_1$ jest $\{x \in M ;\ f(x) > a\} \in \mathfrak{M}_r$.

‖ Důkaz viz ve skriptech I.Černý - J.Mařík, Integrální počet I, 4. kapitola či proveďte podle 8,31. Viz též 7,35 a 8,40. ‖

Na základě této důležité věty lze snadno dokázat následující vztahy /viz též 7,24 a 7,23/.

D I.8.

a/ Nechť $f_n \in \Lambda_M$, kde $M \in \mathfrak{M}_r$. Potom pro funkce

$$\varphi_1(x) = \sup_{n=1,2,\dots} f_n(x) \quad , \qquad \varphi_2(x) = \inf_{n=1,2,\dots} f_n(x) \ ,$$

$$\varphi_3(x) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m=n,n+1,\dots} f_m(x) \right) ,$$

$$\varphi_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m=n,n+1,\dots} f_m\, x \right)$$

platí $\varphi_j \in \Lambda_M$ / $j = 1,2,3,4$ /,

b/ je-li $f(x) = a \in E_1$ pro všechna $x \in M$, jest $f \in \Lambda_M$,

c/ je-li $f,g,h \in \Lambda_M$, f a g konečné, je

$$\{ x \in M ;\ |f(x) - g(x)| > h(x) \} \in \mathfrak{M}_r .$$

Všechny důkazy proveďte podrobně.

D I.9.

Buď $N \in \mathfrak{M}_r$, nechť f je funkce definovaná na množině N.
Potom $M_{f,N} \in \Lambda_N$, $m_{f,N} \in \Lambda_N$. Dokažte !

‖ Použijte D I.6, D I.7, D I.3 a toho, že množiny otevřené v N jsou měřitelné ‖.

<u>**Poznámka.**</u>

Uvědomte si překvapivost tvrzení D I.9 a D I.6b. O funkci f nepředpokládáme totiž vůbec nic /může tedy být i neměřitelná ! /.
Jiný překvapující výsledek tohoto druhu je uveden v knize V.Jarník, Integrální počet II, věta 87.

D II. Jegorovova a Luzinova věta.

Zajímavou vlastnost měřitelných funkcí uvádí Jegorovova věta /viz také V. Jarník, Integrální počet II, kap. II, § 2/:

D II.1.

Nechť $M \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r M < +\infty$. Buď $f_n \in \Lambda_M$ posloupnost funkcí konečných skoro všude v M, nechť $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ existuje skoro všude v M a funkce f je skoro všude v M konečná.
Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina $N \subset M$ taková, že $\mu_r N < \varepsilon$ a $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ stejnoměrně v množině $M - N$. Dokažte !

⟦ Návod k důkazu:

a/ existuje $N_1 \subset M$, $\mu_r N_1 = 0$ tak, že pro $x \in M - N_1$ jsou $f(x)$, $f_n(x)$ $/n = 1,2,\ldots/$ konečná čísla a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,

b/ pro přirozená m a k buď

$$N_{m,k} = \left\{ x \in M - N_1 \,;\, \sup_{n \ge m} |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\},$$

jest

$$N_{m,k} \in \mathfrak{M}_r, \quad N_{m,k} \supset N_{m+1,k}$$

pro všechna přirozená m,k /použijte D I.8 /,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} N_{m,k} = \emptyset$$

pro každé přirozené k, a tedy i $\lim_{m\to\infty} \mu_r(N_{m,k}) = 0$,

c/ je-li $\varepsilon > 0$, zvolme pro každé přirozené k přirozené číslo m_k tak, že

$$\mu_r(N_{m_k,k}) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad ;$$

položíme-li $N = N_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{m_k,k}$, jest

$\mu_r N < \varepsilon$ a $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ stejnoměrně v $M - N$. ⟧

D II.2.

Buďte splněny předpoklady Jegorovovy věty. Potom lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt otevřenou množinu N tak, že $\mu_r N < \varepsilon$ a $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ stejnoměrně v $M - N$.

⟦ použijte 7,19 - 2/ či 7,20 ⟧ .

Jegorovova věta tedy říká, že posloupnosti měřitelných funkcí, které konvergují skoro všude ke konečné funkci, se chovají "velmi rozumně", odhlédneme-li od množin, jejichž míru lze volit libovolně malou. Tvrzení Jegorovovy věty nelze podstatně zesílit.

D II.3.

Pro libovolné přirozené n buď $f_n(0) = f_n(\frac{1}{n}) = f_n(1) = 0$, $f_n(\frac{1}{2n}) = n$ a f_n buď lineární v intervalech $\langle 0, \frac{1}{2n} \rangle$, $\langle \frac{1}{2n} , \frac{1}{n} \rangle$, $\langle \frac{1}{n} ,1\rangle$.
Zřejmě $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0$ v $\langle 0,1 \rangle$. Ověřte na tomto příkladě Jegorovovu větu a ukažte, že pro žádnou množinu $N \subset \langle 0,1 \rangle$, $\mu_r N = 0$ není konvergence posloupnosti f_n k funkci identicky rovné nule stejnoměrná na množině $\langle 0,1 \rangle - N$.

D II.4.

Ukažte, že předpoklad $\mu_r M < + \infty$ nelze v Jegorovově větě vynechat.
Jegorovova věta napovídá, že může být užitečné vyšetřovat měřitelné funkce s odhlédnutím množin, jejichž míra je malá. Skutečně, lze dokázat následující Luzinovu větu.

D II.5.

Buď $M \in \mathfrak{M}_r$, $f \in \Lambda_M$, f konečná skoro všude v M . Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje měřitelná množina $N \subset M$, $\mu_r N < \varepsilon$ taková, že f je spojitá na množině $M - N$ /vzhledem k $M - N$ /.

Návod k důkazu :

1/ Buď nejprve $\mu_r M < + \infty$,

a/ existuje posloupnost funkcí $f_n \in Z$, $f_n \longrightarrow f$ sk.vš. v M , $f_n \longrightarrow 0$ sk.vš. v $E_r - M$ /věta 34/,

b/ k danému $\varepsilon > 0$ existuje dle Jegorovovy věty měřitelná množina $N \subset M$, $\mu_r N < \varepsilon$ taková, že $f_n \longrightarrow f$ stejnoměrně v $M - N$,

c/ funkce f je spojitá na množině $M - N$ /vzhledem k $M - N$ /.

2/ Je-li $\mu_r M = + \infty$, $0 < \varepsilon < 1$, buď pro každé přirozené n M_n , resp. H_n množina všech $x = [x_1,\dots,x_r] \in M$ takových, že

$$|x_j| \leq n \quad \text{pro všechna} \quad j = 1,2,\dots,r ,$$
$$\text{resp.} \quad |x_j| = n \quad \text{pro alespoň jedno} \quad j = 1,2,\dots,r .$$

Zřejmě $\mu_r M_n < +\infty$, $\mu_r H_n = 0$

/nakreslete si uvedené množiny např. pro $n = 1,2,3$ /.

Použijeme nyní dokázanou část tvrzení na funkci f , množinu M_n a číslo $\frac{\varepsilon}{2^n}$. Existuje tedy pro každé přirozené n měřitelná množina $N_n \subset M_n$, $\mu_r N_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$ taková, že funkce f je spojitá na množině $M_n - N_n$ /vzhledem k této množině/. Položíme-li nyní $N = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) \cap M$, je $N \subset M$ měřitelná množina, $\mu_r N < \varepsilon$ a snadno zjistíme, že f je spojitá na množině $M - N$ /vzhledem k této množině /. ⟧

D II.6.

V Luzinově větě lze požadovat, aby množina N byla otevřená.
Dokažte !

⟦ Použijte 7,19 - 2/ či 7,20 . ⟧

D II.7.

Jiný důkaz Luzinovy věty /bez použití Jegorovovy věty, proveďte podrobně!/.
Buďte splněny předpoklady D II.5 , nechť $\mu_r M < +\infty$.

a/ Buď $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost všech racionálních čísel ; množiny

$$A_n = \{x \in M ;\ f(x) \geq r_n\} , \quad B_n = \{x \in M ;\ f(x) \leq r_n\}$$

jsou měřitelné /D I.8 /.

b/ Buď $\varepsilon > 0$; existují uzavřené množiny F_n a G_n tak, že

$$\mu_r(A_n - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} , \qquad \mu_r(B_n - G_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

použijte 7,20c/.

c/ Buď $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - F_n)$, $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - G_n)$; je $\mu_r P < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu_r Q < \frac{\varepsilon}{2}$.

d/ Položme $N = P \cup Q$, je $\mu_r N < \varepsilon$; pro každé n je

$$\{x \in M - N ;\ f(x) \leq r_n\} = (M - N) \cap B_n = G_n \cap (M - N) ,$$

$$\{x \in M - N ;\ f(x) \geq r_n\} = (M - N) \cap A_n = F_n \cap (M - N) .$$

e/ Funkce F je spojitá na množině $M - N$ /D I.4/.

f/ Je-li $\mu_r M = +\infty$, postupujeme jako v D II.5.

D III. Existenční věta pro Riemannův integrál. Jordan-Peanův objem.

V přednášce o Lebesgueově integrálu byla bez důkazu uvedena následující důležitá věta /viz věty 49 a 57/, která pochází od Lebesguea.

D III.1.

Buď f omezená funkce na kompaktním intervalu $I \subset E_r$. Potom Riemannův integrál $(R)\int_I f$ existuje, právě když množina bodů nespojitosti funkce f v intervalu I /spojitost chápeme vzhledem k I/ má r - rozměrnou Lebesgueovu míru nula.

<u>Dodatek</u> : existuje-li $(R)\int_I f$, existuje i $(L)\int_I f$ a platí

$$(R)\int_I f = (L)\int_I f .$$

Důkaz lze provést následujícím způsobem /proveďte podrobně všechny kroky!/:

a/ pro $x \in I$ buď $M(x) = M_{f,I}(x)$, $m(x) = m_{f,I}(x)$ /viz Baierovy funkce v D I /,

b/ jest $m \leq f \leq M$; $m \in \Lambda_I$, $M \in \Lambda_I$ /viz D I.6 , D I.9 / ,

c/ je-li $D = \{J_k\}_{k=1}^{n}$ dělení intervalu I , definujme funkce Φ_D a φ_D vztahy:

$$\Phi_D(x) = \sup_{y\in J_k} f(y) , \quad \varphi_D(x) = \inf_{y\in J_k} f(y) \qquad \text{je-li } x \in J_k^0 = \operatorname{Int} J_k ,$$

$$\Phi_D(x) = \varphi_D(x) = 0 \qquad \text{je-li } x \in I - \bigcup_{k=1}^{n} J_k^0 ,$$

d/ $\Phi_D \in \Lambda_I$, $\varphi_D \in \Lambda_I$ /např. dle D I.7 /

e/ je-li $|f(x)| \leq K$ pro všechna $x \in I$, kde $K \in E_1$, je $|m(x)| \leq K$, $|M(x)| \leq K$, $|\Phi_D(x)| \leq K$, $|\varphi_D(x)| \leq K$, tedy $m , M , \varphi_D , \Phi_D \in \mathcal{L}_I$

f/ $\varphi_D \leq m$, $\Phi_D \geq M$ skoro všude v I ,

g/ $$(L)\int_I \Phi_D = \sum_{k=1}^{n} \sup_{y\in J_k} f(y) \,.\, \mu_r(J_k) = S(f,D) ,$$

$$(L)\int_I \varphi_D = \sum_{k=1}^{n} \inf_{y\in J_k} f(y) \,.\, \mu_r(J_k) = s(f,D)$$

/horní a dolní součet příslušný k funkci f a dělení D / ,

h/ je-li D_n posloupnost dělení intervalu I , jejichž norma konverguje k nule pro $n \longrightarrow +\infty$ a

$$\lim_{n\to\infty} S(D_n,f) = (R)\overline{\int_I} f ,$$

je $\lim_{n\to\infty} \Phi_{D_n} = M$ skoro všude v I /odtud dostáváme znovu, že $M \in \mathcal{L}_I$ /, tedy podle Lebesgueovy věty

$$\lim (L)\int_I \Phi_{D_n} = (L)\int_I M ,$$

i/ podle g/ a h/ dostaneme

$$(R)\overline{\int_I} f = (L)\int_I M$$

a obdobným způsobem dokážeme také

$$(R)\underline{\int_I} f = (L)\int_I m ,$$

j/ protože $m \leq f \leq M$, je

$$(R)\underline{\int_I} f = (L)\int_I m \leq (L)\underline{\int_I} f \leq (L)\overline{\int_I} f \leq (L)\int_I M = (R)\overline{\int_I} f ,$$

z této nerovnosti dostaneme ihned tvrzení dodatku,

k/ $(R)\underline{\int_I} f = (R)\overline{\int_I} f$ nastane dle j/, právě když $(L)\int_I (M - m) = 0$ a odtud dostáváme vzhledem k nerovnosti $m \leq M$ a vzhledem k D I.6d tvrzení.

Poznámka. Buď $M \subset E_r$, M omezená množina. Protože nosič funkce c_M /podle definice v 7,25 !!/ je množina M, existuje kompaktní interval $I \subset E_r$ takový, že pro $x \in E_r - I$ je $c_M(x) = 0$. Snadno zjistíme, že hodnoty

$$(R)\overline{\int_I} c_M , \qquad \text{resp.} \quad (R)\underline{\int_I} c_M$$

nezávisí na volbě intervalu I. Tato čísla obvykle nazýváme vnější, resp. vnitřní Jordan - Peanův objem množiny M. Jsou-li stejná /tj. je-li charakteristická funkce množiny M Riemannovsky integrovatelná/, hovoříme také o Jordan - Peanově objemu množiny M.

D III.2.

Množina $M \subset E_r$ má Jordan - Peanův objem, právě když je omezená a její hranice má Lebesgueovu míru nula. Dokažte !

/Použijte D III.1./ Jordan-Peanův objem je v tomto případě roven $\mu_r M$, tj. speciálně $M \in \mathfrak{M}_r$.

/Viz též př. 8,52 a 8,53 !/.

D III.3.

Buď $M \subset E_r$ omezená množina. Potom vnější Jordan - Peanův objem množiny M je roven infimu všech čísel tvaru $\sum_{j=1}^{n} \mu_r(I_j)$, kde $I_1, I_2, \dots, I_n$ je libovolný konečný systém kompaktních intervalů, pro něž platí $\bigcup_{j=1}^{n} I_j \supset M$.

Dokažte !

Formulujte a dokažte příslušné tvrzení pro vnitřní Jordan - Peanův objem !

D III.4.

Buď $M \subset E_r$. Potom vnější Lebesgueova míra $\tilde{\mu}_r M$ množiny M je rovna infimu všech čísel tvaru $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_r(I_j)$, kde $I_1, I_2, \dots\dots$ je libovolná posloupnost kompaktních intervalů, pro niž platí $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset M$. Dokažte !

[Použijte větu 55 či 7,19 a toho, že každou otevřenou množinu lze vyjádřit jako sjednocení spočetného systému nepřekrývajících se kompaktních intervalů. Viz též 5,5 /.]

Poznámky.

1/ Tvrzení D III.3 a D III.4 názorně ukazují rozdíl mezi vnějším Jordan - Peanovým objemem a vnější Lebesgueovou mírou a tedy v podstatě také mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem.

2/ Jiný důkaz tvrzení D III.1 a podrobnější informaci o přilehlých otázkách lze nalézt v knize V.Jarník, Integrální počet II , kap. XI .

D IV. Absolutní spojitost Lebesgueova integrálu.

Z teorie Riemannova nebo Newtonova /případně zobecněného Newtonova/ integrálu je známé toto tvrzení :

" nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť existuje Riemannův /Newtonův nebo zobecněný Newtonův *)/ integrál

$$\int_a^b f(t)\,dt ,$$

potom funkce $\int_a^x f(t)\,dt$ a $\int_x^b f(t)\,dt$ jsou spojité funkce proměnné x v intervalu (a,b) /viz též věta 66, poznámka 3,14/.

Pro Lebesgueův integrál lze dokázat dokonce tzv. absolutní spojitost. Uveďme nejdříve následující tvrzení.

---

*) V případě zobecněného Newtonova nebo Newtonova integrálu můžeme připustit i hodnoty $a = -\infty$ či $b = +\infty$.

D IV.1.

Nechť $M \in \mathfrak{M}_r$, $f \in \mathcal{L}_M$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$N \subset M \,, \; N \in \mathfrak{M}_r \,, \quad \mu_r N < \delta \Rightarrow \left| \int_N f \right| < \varepsilon \,.$$

Návod k důkazu :

a/ $|f| \in \mathcal{L}_M$ /věta 44/,

b/ buď pro n přirozené $f_n = \min(|f|, n)$; potom $f_n \in \mathcal{L}_M$ /viz cvičení 8,27 , 8,28 / , $f_n \nearrow |f|$ a tedy /Leviho věta/

$$\int_M f_n \nearrow \int_M |f| \quad ,$$

c/ je-li $\varepsilon > 0$, existuje n_0 tak, že

$$\int_M (|f| - f_{n_0}) = \int_M |f| - \int_M f_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

d/ buď $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$, nechť $N \subset M$, $N \in \mathfrak{M}_r$, $\mu_r N < \delta$, potom je

$$\left| \int_N f \right| \le \int_N |f| = \int_N (|f| - f_{n_0}) + \int_N f_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2} + n_0 \, \mu_r N < \varepsilon \,.$$

D IV.2.

Dokažte tvrzení uvedené v D IV.1 sporem !

Existuje $\varepsilon > 0$ a množiny $N_k \subset M$, $N_k \in \mathfrak{M}_r$, $k = 1,2,\ldots$ tak, že $\mu_r N_k < \dfrac{1}{2^k}$ a $\displaystyle\int_{N_k} |f| \ge \varepsilon$.

Buď $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} N_k$. Je tedy $\mu_r N = 0$.

Označíme-li $P_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} N_k \supset N_n$,

je $P_n \in \mathfrak{M}_r$, $P_1 \supset P_2 \supset \ldots\ldots$, $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$.

Protože $\displaystyle\int_{P_1} |f| < +\infty$, je podle věty 29

$$0 = \int_N |f| = \lim_{n \to \infty} \int_{P_n} |f| \,,$$

což je spor s $\displaystyle\int_{P_n} |f| \ge \int_{N_n} |f| \ge \varepsilon$.

Buď nyní $-\infty < a < b < +\infty$ a buď F funkce definovaná na intervalu $\langle a,b \rangle$. Budeme říkat, že F je absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý konečný systém čísel

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b ,$$

pro nějž platí $\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta$,

platí také

$$\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon .$$

Funkce absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$ je zřejmě také stejnoměrně spojitá /stačí volit $n = 1$ / a tedy také spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$.

D IV.3.

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, $K \in E_1$.
Potom funkce F ,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt + K$$

/tzv. neurčitý Lebesgueův integrál funkce f /
je absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b \rangle$. Dokažte !

Zřejmě $f \in \mathcal{L}_{(a,x)}$ pro libovolné $x \in \langle a,b \rangle$,
pro $N = \bigcup_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle$, kde $a \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots$
$\dots \leq a_n \leq b_n \leq b$ je $\mu_1 N = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$
a pro $j = 1,2,\dots, n$ je

$$|F(b_j) - F(a_j)| = \left| \int_{a_j}^{b_j} f(t)\, dt \right| \leq \int_{a_j}^{b_j} |f(t)|\, dt ,$$

tj. $\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| \leq \int_N |f(t)|\, dt$,

stačí tedy použít D IV.1.

D IV.4.

Dokažte, že tvrzení D IV.1 neplatí, nahradíme-li Lebesgueův integrál Newtonovým neb zobecněným Newtonovým integrálem !

Buď $F(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^2}$ pro $x \in (0, \pi\rangle$, $F(0) = 0$.
Potom funkce F je primitivní funkcí k funkci $f = F'$ v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Pro každé přirozené K však je

$$\left| F\left(\frac{1}{\sqrt{K\pi}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{(K+1)\pi}}\right) \right| = \frac{1}{K\pi} + \frac{1}{(K+1)\pi} .$$

Pro libovolná přirozená čísla m a n , $m > n$ je tedy

$$\sum_{K=n}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{K\pi}}-\frac{1}{\sqrt{(K+1)\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}-\frac{1}{\sqrt{(m+1)\pi}}<\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

a

$$\sum_{K=n}^{m}\left|F\left(\frac{1}{\sqrt{K\pi}}\right)-F\left(\frac{1}{\sqrt{(K+1)\pi}}\right)\right|=\frac{1}{\pi}\sum_{K=n}^{m}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K+1}\right)>\frac{1}{\pi}\sum_{K=n}^{m}\frac{1}{K}.$$

Odtud ihned dostaneme /harmonická řada/, že F není absolutně spojitá v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. $\rfloor\!\!|$

Poznámka.

Tvrzení uvedené v D IV.3 lze formulovat také slovy: neurčitý Lebesgueův integrál je funkce absolutně spojitá. Naskýtá se přirozeně opačná otázka. Buď $-\infty < a < b < +\infty$ a buď F funkce absolutně spojitá v $\langle a,b\rangle$. Existuje potom funkce $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ tak, aby pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ platilo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + K,$$

kde K je vhodná konstanta ? Odpověď dává následující věta /viz V.Jarník, Integrální počet II, věta 94 /.

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť funkce F je absolutně spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom pro skoro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ existuje vlastní derivace $F'(x)$, jest $F' \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a existuje taková konstanta $K \in E_1$, že pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + K.$$

Na základě této věty dokažte následující větu.

D IV.5.

Buď $-\infty < a < b < +\infty$.

a/ Je-li F absolutně spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$, $F' = 0$ skoro všude v $\langle a,b\rangle$, potom F je konstantní v $\langle a,b\rangle$.

b/ Tvrzení uvedené v a/ neplatí, nahradíme-li slova absolutně spojitá slovy spojitá /viz cvičení 8,71 /.

D IV.6.

Buď $-\infty < a < b < +\infty$.

a/ Nechť $\varphi \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a nechť $\int_a^x \varphi(t)\,dt = 0$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$. Potom $\varphi = 0$ skoro všude v $\langle a,b\rangle$.

Buď $M = \{ x \in \langle a,b \rangle \ ; \quad \varphi(x) > 0 \}$, nechť $\mu M > 0$.
Podle 7,20 existuje uzavřená množina $F \subset M$, $\mu F > 0$.
Protože $(a,b) - F$ je sjednocení spočetného systému otevřených intervalů, je $\int_F \varphi = 0$, což je spor.

b/ Buď f funkce definovaná skoro všude v $\langle a,b \rangle$.
Potom $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, právě když existuje funkce F absolutně spojitá v $\langle a,b \rangle$ taková, že $F' = f$ skoro všude v $\langle a,b \rangle$.
Potom je
$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a) .$$
Použijte D IV.6a a větu uvedenou před D IV.5.

Poznámka.

Poslední tvrzení udává vlastně tzv. deskriptivní definici Lebesgueova integrálu pomocí jistého dalšího zobecnění pojmu primitivní funkce. Tvrzení D IV.5a zaručuje nezávislost této definice na volbě funkce F, tvrzení D IV.5b ukazuje, že předpoklad absolutní spojitosti nelze nahradit pouze spojitostí.

D V. Riemann - Lebesgueova věta o lokalisaci.

V třetím semestru studia je probírána elementární teorie Fourierových řad /viz skripta V.Jarník, Matematická analysa pro třetí semestr, kap. III, § 7/. Pomocí Lebesgueova integrálu lze zavést Fourierovy řady pro obecnější třídy funkcí.

Buď $0 < \ell < +\infty$ a nechť funkce f je definována v celém E_1 a má periodu ℓ /tj. $f(x + \ell) = f(x)$ pro každé $x \in E_1$ /. Nechť dále $f \in \mathcal{L}_{(0,\ell)}$/ je tedy také $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ pro libovolná $a,b \in E_1$, $a < b$; odůvodněte ! /. Funkci f můžeme přiřadit její Fourierovu řadu

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{\ell} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{\ell}\right) , \qquad (1_D)$$

kde čísla a_k a b_k jsou dána vztahy /c je libovolné reálné číslo /

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_c^{c+\ell} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{\ell}\, dx , \quad k = 0,1,2,\dots$$
$$(2_D)$$
$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_c^{c+\ell} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\ell}\, dx , \quad k = 1,2,\dots.$$

/ukažte, že integrály existují ! /.

Je nyní přirozené zajímat se o následující otázky: kdy řada (1_D) konverguje, kdy konverguje stejnoměrně a jaký je její součet. Vyhovující odpověď dává následující Dirichlet - Jordanova věta.

Buď $0 < \ell < +\infty$, buď f definovaná v celém E_1 a nechť f má periodu ℓ. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť f má v intervalu $\langle a,b\rangle$ konečnou variaci [x].

Potom platí:

1. V každém bodě $x \in (a,b)$ je Fourierova řada (1_D) funkce f konvergentní a má součet

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

/je-li tedy f spojitá v bodě x, je součet řady $f(x)$ /.

2. Je-li navíc f spojitá v $\langle a,b\rangle$, je její Fourierova řada stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset (a,b)$.

Důkaz této věty /a řadu dalších vět, které se týkají Fourierových řad/ lze nalézt v knize V.Jarník, Integrální počet II, kap. XIII. Celý text prvých šesti paragrafů této kapitoly lze studovat bez podrobné znalosti předchozích kapitol, tj. bez ohledu na to, známe-li Lebesgueův integrál zavedený na základě Daniellovy metody nebo jiným způsobem. Uveďme proto jen jednodušší důkaz tzv. Riemann - Lebesgueovy věty o lokalisaci.

D V.1.

Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Buď g_n /n = 1,2,... / posloupnost funkcí definovaných na intervalu (a,b), nechť

a/ $g_n \in \Lambda_{(a,b)}$ pro každé n,

b/ existuje konstanta $M \in E_1$ tak, že $|g_n(x)| \leq M$ pro všechna $x \in (a,b)$ a všechna n,

c/ pro každý interval $\langle\alpha,\beta\rangle$, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta g_n = 0 . \tag{3_D}$$

Potom pro každou funkci $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$ a každý interval $\langle\alpha,\beta\rangle \subset \langle a,b\rangle$ je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f \cdot g_n = 0 . \tag{4_D}$$

Je-li navíc konvergence v (3_D) stejnoměrná vzhledem k α, β /$a \leq \alpha \leq \beta \leq b$/, platí i (4_D) stejnoměrně v α, β /$a \leq \alpha \leq \beta \leq b$/.

---

[x] Viz V.Jarník, Diferenciální počet II, kap. V, §9; tento požadavek znamená totéž jako existence dvou konečných a neklesajících funkcí f_1, f_2 v $\langle a,b\rangle$ takových, že $f = f_1 - f_2$ v $\langle a,b\rangle$.

255 35

Návod k důkazu /provádějte podrobně/:

a/ Nechť $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$, nechť je dáno $\varepsilon > 0$.
Podle 8,70 existuje funkce g /elementární jednoduchá funkce/ tvaru $g = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot c_{I_j}$, kde $I_j \subset (a,b)$ jsou disjunktní intervaly, pro niž
$$\int_a^b |f - g| < \frac{\varepsilon}{2M} .$$

b/ Jsou-li α a β libovolná čísla, $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, je
$$\left| \int_\alpha^\beta (f - g) \cdot g_n \right| \leq \int_a^b |f - g| \cdot |g_n| \leq M \int_a^b |f - g| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

c/ Dále je
$$\left| \int_\alpha^\beta g \cdot g_n \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \int_{I_j} g_n \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \cdot \left| \int_{I_j} g_n \right| .$$

d/ Využijeme-li odhadu
$$\left| \int_\alpha^\beta f \cdot g_n \right| \leq \left| \int_\alpha^\beta (f - g) \cdot g_n \right| + \left| \int_\alpha^\beta g \cdot g_n \right|$$
dostaneme ihned tvrzení .

D V.2.

Buď $0 < \ell < +\infty$, buď f funkce definovaná v celém E_1 s periodou ℓ a nechť $f \in \mathcal{L}_{(0,\ell)}$. Definujme čísla a_k , b_k podle (2_D) .
Potom $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Použijte D V.1 .

D V.3.

Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in \mathcal{L}_{(a,b)}$. Potom pro $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ je
$$\lim_{t\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x) \cos tx \, dx = \lim_{t\to+\infty} \int_\alpha^\beta f(x) \sin tx \, dx = 0 ,$$
přičemž konvergence je stejnoměrná vzhledem k α , β pro $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Dokažte !

Použijte D V.1 .

25535 r

O B S A H

25535 r