

Předmluva

Kalkulus chápaný jako soubor výpočetních metod matematické analýzy může být bezduchý, nebo inteligentní. První z těchto verzí kalkulu je pouhé počítání, při němž není nutné přesně vědět, co se vlastně počítá, podle jakých pravidel se počítá a jaký je obor platnosti získaných výsledků. V inteligentní verzi kalkulu se nejdříve přesně definují pojmy a jednotlivé početní metody jsou založeny na přesně formulovaných větách; během počítání se stále kontroluje, za jakých podmínek a ve kterém oboru jsou splněny potřebné předpoklady. V důsledku toho je pak zcela přesně známo, jaký je smysl a obor platnosti výsledků; je plně zaručena i jejich správnost. Tato knížka má čtenáře uvést do inteligentního kalkulu.

Po čtyřicetidevítiletém působení na dvou univerzitách – na Karlově univerzitě v Praze a na Technické univerzitě v Liberci – jsem došel k pevnému přesvědčení, že jedním z nejdůležitějších úkolů výuky matematiky má být výcvik v logickém myšlení v tom nejširším slova smyslu: Student má prakticky poznat základní pravidla logického myšlení, naučit se správně užívat alternativy, konjunkce, implikace a ekvivalence spolu s jejich negacemi. Má vždy vědět, o čem mluví nebo píše; v matematice to např. znamená mít dobře rozmyšlené definice pojmů, které užívá. Má znát obecné zákonitosti oboru, v matematice tedy věty; důležité přitom je, aby spolehlivě věděl, za jakých předpokladů to či ono tvrzení platí. Má se naučit analyzovat danou situaci a naopak z dílčích poznatků, které k danému problému shromáždil, složit (tedy syntetizovat) rozumný celek. Má v praxi prokázat, že obecné věty a metody dovede aplikovat na konkrétních příkladech tak, aby zároveň využil všechny specifické vlastnosti příkladu ke zjednodušení postupu. Každý, kdo prohlašuje matematiku za svůj obor, by měl vždy mluvit srozumitelně, jednoznačně a stručně; správné rozhodnutí o tom, co je v dané situaci podstatné a co je podružné, by mělo zásadním způsobem ovlivnit jeho vyjadřování. Měl by se učit být kritický, a to zejména k sobě samému; říká-li sám sobě pravdu, může si ušetřit mnohé nesnáze.

Podle mých zkušeností poskytuje matematická analýza velmi mnoho příležitostí, jak se správnému logickému uvažování učit; čtenáře, který se rozhodl užít tuto sbírku při svém studiu, pravděpodobně nemusím přesvědčovat, že správné myšlení není lidem vrozeno. Jistě již při nejrůznějších příležitostech zpozoroval, jak nesprávně „necvičení“ lidé mnohdy uvažují a k jak paradoxním výsledkům docházejí. Elementární matematická analýza, do níž naše příklady patří, je zároveň názorná a zrádná. Názornost pomáhá zejména začátečníkovi, aby se v situaci orientoval; řeší-li však problémy skutečně poctivě, brzy zjistí, že pojmy jsou daleko hlubší, než se zdají být na první pohled, takže spoléhat jen na tzv. selský rozum nelze – brzy se dojde k nepravdivým závěrům. Jedině možnou metodou je užívat jen dokázané věty a algoritmy a soustavně ověřovat všechny předpoklady, za nichž je lze aplikovat.

Příklady do této sbírky jsem shromažďoval desítky let. Kromě standardních příkladů, které nemohou chybět v žádné podobné knížce, bylo třeba najít příklady, které čtenářům umožní co nejvšestranněji zvládnout příslušnou látku. Na cvičeních

k přednáškám z matematické analýzy jsem ověřoval, co je pro dobré studenty samozřejmé, co jim může činit potíže a co jim nejspíše poskytuje informace potřebné k pochopení tzv. teorie. Nepředpokládám, že by někdo (kromě autora) vyřešil všechny příklady. Je jich tak mnoho jen proto, aby nejen čtenáři, ale např. i vedoucí cvičení měli co největší výběr jak lehčích, tak i náročnějších příkladů.

Protože je mým cílem pomoci čtenáři v nesnadném procesu směřujícím ke spolehlivému myšlení, považoval jsem za nutné v každé kapitole vysvětlit všechny pojmy, věty a metody potřebné k vyřešení příslušných příkladů. (Nezabývám se ovšem např. tak základními pojmy, jako je výrok, množina, přirozené nebo reálné číslo, ani např. všeobecně známými zákony algebry.) V každé kapitole je několik podrobně vyřešených příkladů, které mají čtenáři naznačit, jak lze postupovat. Některé rozřešené příklady obsahují výsledky, které čtenář obvykle hledá ve sbírkách vzorců nebo v různých tabulkách; i na vzorce se samozřejmě vztahují přísná pravidla matematické logiky – jsou bezcenné, není-li např. uveden obor jejich platnosti. Číslované poznámky výklad doplňují a někdy upozorňují i na možná nedorozumění a z nich vyplývající nebezpečí nesprávných závěrů.

Matematika se vyvíjí nejen ve své „objevitelské“ části, ale i v metodice. Je politováníhodné, že vysokoškolské výklady někdy mnohé z toho, co bylo v průběhu vývoje překonáno a nahrazeno lepším, efektivnějším a obecnějším, nerespektují a drží se spíše „vyzkoušených cest“ – často jsou to cesty, po nichž před mnohými lety nynější učitelé, tehdejší studenti, sami kráčeli. Ve své pohodlnosti nedávají mladé generaci právě dobrý příklad svým nezdravým a nerozumným konzervatismem. Na řadě míst sbírky jsem se proto snažil uvést věci na správnou míru – aspoň tak, jak ji sám vidím. Jde např. o zbytečné hledání lokálních extrémů při vyšetřování průběhu funkce, o nedorozumění související s termínem „neurčité výrazy“ při výpočtu limit, o užívání záhadného a zcela zbytečného znaku \int a řadu dalších drobných detailů. Velmi prosím čtenáře, aby se nad těmito partiiemi dobře zamyslel a utvořil si svůj vlastní úsudek, podle něhož pak bude i jednat.

Bylo by jistě zbytečné snažit se zde charakterizovat tematiku této sbírky. Je patrná z obsahu a odpovídá zhruba sylabům matematické analýzy pro 1. ročník univerzitního studia; obdobnou sbírku příkladů k látce 2. ročníku analýzy připravuji do tisku. Z toho, že sbírka vychází z univerzitních sylabů, vůbec neplyne, že by z ní nemohli čerpat i studenti, pro něž je matematická analýza jen pomocným předmětem. Psal jsem ji zejména pro studenty, kteří se nechtějí spokojit jen s povrchním pochopením početních principů analýzy.

Na závěr bych rád znovu čtenáře – hlavně z řad učitelů – vyzval, aby odmítli bezduchý kalkulus, protože jde o systém, který funguje jen v případě, že výsledky jsou předem známy; objevit na základě něj něco nového není pravděpodobně možné. A hlavně: kdo podobným způsobem s matematikou zachází, okrádá ji navíc o jednu z jejích nejcennějších vlastností – učit správnému uvažování.