20. Fourierovy řady

Úmluva. V této kapitole bude „funkce“ znamenat *konečnou reálnou funkci*. $\square$

Hlavním problémem této kapitoly je otázka, *za jakých podmínek lze konečnou 2π-periodickou funkci $f(x)$ rozvinout v (nekonečnou) řadu, jejímž k-tým členem je lineární kombinace funkcí* $\cos kx$, $\sin kx$. [1])

Abychom získali představu, jak by koeficienty těchto kombinací měly vypadat, řešme celý problém od konce: Předpokládejme, že (pro jistá čísla a_k, b_k) je

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

v celém $\mathbb{R}$ a že řada vpravo tam navíc konverguje stejnoměrně. Protože

(2) *součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce*,

může tato situace nastat jen v případě, že funkce f je spojitá (v $\mathbb{R}$).

V dalším kroku budeme potřebovat toto užitečné tvrzení (viz Důsledek věty 13.12):

(3) *Konverguje-li řada $\sum_k f_k$ stejnoměrně v M a je-li g funkce omezená v M, konverguje i řada $\sum_k f_k g$ stejnoměrně v M.*

Vynásobíme-li identitu (1) po řadě funkcemi $\cos jx$ a $\sin jx$, konverguje podle tohoto tvrzení řada vpravo opět stejnoměrně (v $\mathbb{R}$) a podle V.13.7 ji můžeme integrovat člen po členu např. přes interval $\langle 0, 2\pi \rangle$. (Protože *pro každou 2π-periodickou funkci h platí implikace*

$$\xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{2\pi} h = \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} h, \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl}, \tag{4}$$

dojdeme k témuž výsledku, integrujeme-li přes jakýkoli interval délky 2π.)

Uvážíme-li, že pro všechna celá nezáporná čísla j, k platí identity

$$\int_0^{2\pi} \cos kx\, dx = \left\{ \begin{matrix} 2\pi & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k \neq 0 \end{matrix} \right\}, \quad \int_0^{2\pi} \sin kx = \int_0^{2\pi} \sin jx \cos kx\, dx = 0\,, \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx\, dx = \pi\,, \text{ je-li } k > 0\,, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin jx \sin kx\, dx = 0, \text{ je-li } j \neq k\,, \tag{7}$$

[1]) Fyzikálně řečeno, periodický pohyb chceme rozložit na jednodušší periodické pohyby.

dostaneme z identity (1) násobené funkcemi $\cos jx$, $\sin jx$ integrací od 0 do 2π tyto hodnoty koeficientů a_k, b_k:

$$(8) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx\,;$$

první rovnost platí pro všechna $k \geq 0$, druhá pro všechna $k > 0$. [2]) Podle (4) však pro každé $\xi \in \mathbb{R}$ platí i rovnosti

$$(8') \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_\xi^{\xi+2\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_\xi^{\xi+2\pi} f(x)\sin kx\,dx\,.$$

<u>Résumé</u>: *Platí-li identita* (1) *v* $\mathbb{R}$ *a konverguje-li tam řada vpravo stejnoměrně, jsou koeficienty dány rovnostmi* (8) (*a také rovnostmi* (8′) *pro každé* $\xi \in \mathbb{R}$). □

Z toho samozřejmě neplyne, že když do (1) *dosadíme podle* (8), *bude řada konvergovat v* $\mathbb{R}$ *stejnoměrně a její součet bude* $f(x)$. Příklad (nepatřící k nejjednodušším), že takové tvrzení neplatí ani pro spojité funkce f, najde čtenář např. v [13], str. 516 − 517. V dalším budeme proto řešit problém, *kdy, kde a jak řada* (1) *s koeficienty* (8) *konverguje a jaká je pak souvislost jejího součtu s funkcí* f. □

Označení. $\mathcal{P}(2\pi)$ bude znamenat množinu všech 2π-periodických funkcí f, pro něž je $f\,|\,(0,2\pi) \in \mathcal{L}((0,2\pi))$. □

Pro funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ se čísla (8) a (8′) nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce f a řada (1) s těmito koeficienty je její **Fourierova řada**. *Tato řada nemusí konvergovat, a i když v jistém bodě* x *konverguje, nemusí být její součet roven* $f(x)$.

Je-li řada na pravé straně (1) Fourierovou řadou funkce vlevo, píšeme

$$(9) \qquad f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,. \quad \square$$

Nejdůležitější kritérium konvergence Fourierovy řady je založeno na pojmu *variace funkce*:

Definice. Variaci funkce $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ **v intervalu** $\langle a,b\rangle$ definujeme jako supremum množiny čísel

$$(10) \qquad v(f;D) := \sum_{k=1}^{p} |\,f(x_k) - f(x_{k-1})\,|\,,$$

kde $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ probíhá množinu všech dělení intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pro každou funkci $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je $0 \leq V(f;a,b) \leq +\infty$; je-li $V(f;a,b) < +\infty$, říkáme, že f je **funkce s konečnou variací** (v $\langle a,b\rangle$).

---

[2]) Nyní je patrné, proč jsme pravou stranu rovnosti (1) napsali v uvedeném tvaru: Mají-li být koeficienty a_k určeny stejným vzorcem pro všechna $k \geq 0$, je pro $k = 0$ nutné napsat $\frac{1}{2}a_0$; výraz $b_k \sin kx$ pro $k = 0$ nepíšeme, protože je identicky nulový.

Cvičení 20.01. Přímo z definice dokažte toto tvrzení:

(11) $\qquad$ *f je monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle \Rightarrow V(f; a, b) = |f(b) - f(a)| < +\infty$.*

Rada: Je-li f monotónní funkce, je součet (10) absolutních hodnot jejích přírůstků roven absolutní hodnotě součtu těchto přírůstků. $\diamond$

Cvičení 20.02. Dokažte, že *pro každé dvě funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ s konečnou variací a pro každá dvě čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ platí nerovnost*

(12) $$V(\alpha f \pm \beta g; a, b) \le |\alpha| V(f; a, b) + |\beta| V(g; a, b).$$

D ů s l e d e k : *Lineární kombinace funkcí s konečnou variací má konečnou variaci.*

Rada: Napište součet (10) pro funkci $\alpha f \pm \beta g$, užijte trojúhelníkovou nerovnost a přejděte k supremům nejdříve vpravo, pak vlevo. $\diamond$

Cvičení 20.03. Dokažte, že *pro každou funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a pro každý interval $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$ platí nerovnosti*

(13) $$V(f; c, d) \le V(f; a, b), \quad V(|f|; a, b) \le V(f; a, b).$$

D ů s l e d e k : *Má-li funkce f konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$, mají konečnou variaci i funkce $f|\langle c, d\rangle$ a $|f|$.*

Rada: Uvažte, že přidáním bodů a, b k libovolnému dělení D intervalu $\langle c, d\rangle$ vznikne dělení D^* intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $v(f; D) \le v(f; D^*) \le V(f; a, b)$. Dále uvažte, že nerovnost $||u| - |v|| \le |u - v|$ platí pro každá dvě čísla u, v z $\mathbb{R}$. $\diamond$

Cvičení 20.04. Dokažte, že

(14) $\qquad$ *každá funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$ je $\langle a, b\rangle$ omezená.*

Rada: Je-li $x \in \langle a, b\rangle$ a je-li D dělení s dělicími body a, x, b, je

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + v(f; D) \le |f(a)| + V(f; a, b). \diamond$$

Cvičení 20.05. Dokažte, že

(15) $$V(f; a, b) < +\infty,\ V(g; a, b) < +\infty \Rightarrow V(fg; a, b) < +\infty.$$

Rada: Podle (14) jsou obě funkce f, g omezené; pro vhodnou konstantu $K \in \mathbb{R}_+$ je proto

$$|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \le K(|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})|). \diamond$$

Cvičení 20.06. Dokažte, že *pro každou funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a pro každé číslo $c \in (a, b)$ platí rovnost*

(16) $$V(f; a, b) = V(f; a, c) + V(f; c, b).$$

D ů s l e d e k : *Je-li* $V(f;a,b) < +\infty$, *je funkce* V_f *definovaná podmínkami*

$$V_f(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & \textit{pro } x = a \\ V(f;a,x) & \textit{pro } x \in (a,b\rangle \end{matrix} \right\} \tag{17}$$

neklesající v $\langle a,b\rangle$.

Rada: Označme PS a LS pravou a levou stranu rovnosti (16) a místo $v(f,D)$ pišme jen $v(D)$. Jsou-li D_1 a D_2 dělení intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a je-li dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ složeno právě ze všech bodů dělení D_1 a D_2, je $v(D_1) + v(D_2) = v(D) \le LS$; z toho plyne nerovnost $PS \le LS$. Je-li D libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a označíme-li D' dělení, které z něj vznikne přidáním bodu c, bude podle trojúhelníkové nerovnosti $v(D) \le v(D')$. Označíme-li D_1 a D_2 dělení intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ složené právě ze všech bodů dělení D' ležících v $\langle a,c\rangle$ a v $\langle c,b\rangle$, bude $v(D) \le v(D') = v(D_1) + v(D_2) \le PS$; z toho plyne, že $LS \le PS$. $\diamond$

Je-li $V(f;a,b) < +\infty$, platí pro každé dva body $x_1 < x_2$ z $\langle a,b\rangle$ relace

$$f(x_2) - f(x_1) \le |f(x_2) - f(x_1)| \le V(f;x_1,x_2) = V_f(x_2) - V_f(x_1);$$

z toho je patrné, že funkce $V_f - f$ je neklesající v $\langle a,b\rangle$. Funkce $f = V_f - (V_f - f)$ je tedy rozdílem dvou neklesajících funkcí. Z toho a ze Cv. 20.2 plyne tato charakteristika funkcí s konečnou variací:

Věta 20.1. *Funkce f má konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$, právě když je rozdílem dvou funkcí neklesajících v $\langle a,b\rangle$.*

Důsledek 1. *Pro každou funkci f s konečnou variací v $\langle a,b\rangle$ existuje konečná limita $f(x-)$ pro každé $x \in (a,b\rangle$ a konečná limita $f(x+)$ pro každé $x \in \langle a,b)$.*

Důsledek 2. $V(f;a,b) < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}((a,b))$. $\square$

Dodejme, že *ze spojitosti funkce f* (a *z podmínky* $V(f;a,b) < +\infty$) *plyne spojitost funkce V_f* (viz [13], věta 121). *Spojitá funkce s konečnou variací je tedy rozdílem dvou spojitých neklesajících funkcí.*

POZOR VŠAK! *Ze spojitosti funkce f, a dokonce ani z existence konečné derivace f' všude v $\langle a,b\rangle$, neplyne konečnost její variace*:

Příklad 20.1. *Funkce f definovaná v $\mathbb{R}$ předpisem*

$$f(x) := \left\{ \begin{matrix} x^2 \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{matrix} \right\} \tag{18}$$

má konečnou derivaci všude v $\mathbb{R}$, ale $V(f;0,1) = +\infty$.

Konečnost funkce f' v $\mathbb{R}$ je jistě zřejmá. Označíme-li $x_k = \sqrt{1/k\pi}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a je-li $D_n : 0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0 := 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je

$$v(f;D_n) \ge \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{\cos k\pi}{k\pi} - \frac{\cos (k-1)\pi}{(k-1)\pi} \right| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) \text{ pro každé } n \ge 2,$$

protože $\cos k\pi = (-1)^k = -(-1)^{k-1} = -\cos(k-1)\pi$. Protože poslední součet má pro $n \to \infty$ limitu $+\infty$, je $V(f; a, b) \geq \sup\{v(f; D_n);\, n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. $\square$

V předcházejícím příkladu měla funkce f sice konečnou, ale (v každém okolí nuly) *neomezenou* derivaci; následující cvičení ukáže, že jen proto mohla mít nekonečnou variaci.

Cvičení 20.07. Dokažte toto tvrzení:

(19) *Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je-li f' omezená v (a, b), je $V(f; a, b) < +\infty$.*

Rada: Přírůstky $f(x_k) - f(x_{k-1})$ přepište pomocí věty o přírůstku funkce. $\diamond$

Patrně nejdůležitějším kritériem [3]) konvergence Fourierových řad je tato věta:

Věta 20.2. (Dirichlet–Jordanovo kritérium.) *Má-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ konečnou variaci v jistém intervalu $\langle a, b\rangle$, platí tato tvrzení:*

1. *Pro každé $x \in (a, b)$ je součet $s(x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x roven $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$; je-li f v bodě x spojitá, je $s(x) = f(x)$.*

S p e c i á l n ě : Je-li $b - a \geq 2\pi$, má Fourierova řada funkce f uvedený součet v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

2. *Je-li f v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, konverguje její Fourierova řada v (a, b) lokálně stejnoměrně.*

S p e c i á l n ě : Je-li $b - a \geq 2\pi$, konverguje Fourierova řada funkce f stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$. $\square$

Konečnost variace zaručují např. (dosti silné) předpoklady tvrzení (19). Následující tvrzení, podle něhož lze variaci v některých případech i vypočítat, nepředpokládá (na rozdíl od tvrzení (19)) spojitost dané funkce.

Věta 20.3. *Má-li funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (konečné nebo nekonečné) limity $f(a+)$ a $f(b-)$, je*

$$V(f; a, b) = |f(a) - f(a+)| + \lim_{\substack{a' \to a+ \\ b' \to b-}} V(f; a', b') + |f(b) - f(b-)|. \tag{20}$$

Důsledek. *Je-li funkce $V(f; a', b')$ omezenou funkcí intervalu $\langle a', b'\rangle \subset (a, b)$ a existují-li konečné limity $f(a+)$, $f(b-)$, má funkce f v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci.*

S p e c i á l n ě : Je-li $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ v intervalu (a, b) monotónní, je

$$V(f; a, b) = |f(a) - f(a+)| + |f(b-) - f(a+)| + |f(b) - f(b-)|. \quad \square \tag{20'}$$

Příklad 20.2. Je-li např. $f(x) := x$ v $(-\pi, \pi)$ a $f(\pm\pi) := 0$, je $V(f; -\pi, \pi) = \pi + 2\pi + \pi = 4\pi$.

[3]) Vystačíme s ním jak v příkladech vyřešených v textu, tak i v příkladech, jejichž řešení je přenecháno čtenářům jako cvičení.

Jak víme, lze člen po členu integrovat jen některé řady funkcí; je proto jistě pozoruhodné, že *integrovat člen po členu lze každou* (*tedy i divergentní!*) *Fourierovu řadu*. Vysvětleme, co se tím míní:

Věta 20.4. (O integraci Fourierovy řady člen po členu.) *Nechť* $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ *a nechť*

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \tag{9}$$

Pak má funkce F*, definovaná pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *rovností*

$$F(x) := \int_0^x f \;-\; \tfrac{1}{2}a_0 x\,, \tag{21}$$

periodu 2π*, její Fourierova řada*

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}\,, \quad \textit{kde} \;\; \tfrac{1}{2}A_0 := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\,, \tag{22}$$

konverguje stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ *a má tam součet* $F(x)$*.*

Poznámka 20.1. Aby integrací relace (9) vznikla 2π-periodická funkce, je třeba před integrací převést konstantu $\frac{1}{2}a_0$ na levou stranu; periodicita funkce F je pak důsledkem rovnosti

$$F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} f - \pi a_0 = 0\,,$$

která plyne z definice čísla a_0. Integrujeme-li pak od 0 do x zbylý součet na pravé straně (9) člen po členu, dostaneme výraz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\frac{\sin kx}{k} + b_k\Big(\frac{1}{k} - \frac{\cos kx}{k}\Big)\Big),$$

z něhož je patrné, že číslo $\frac{1}{2}A_0$ je dáno vzorcem uvedeným v (22).

Přestože se konvergence řady v (9) *nepředpokládá, vznikne právě popsaným postupem řada* (22) *se součtem* $F(x)$*, konvergující stejnoměrně v celém* $\mathbb{R}$*.* $\square$

Zmiňme se ještě o jednom velmi důležitém důsledku V. 20.4: Ve větě 93 v [13] je uvedeno, že *pro každý interval* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a*

(23) *pro každou funkci* $f \in \mathcal{L}((a, b))$ *má funkce* $F(x) := \int_a^x f$*, kde* $x \in (a, b)$*, derivaci rovnou* $f(x)$ *pro skoro všechna* $x \in (a, b)$*.*

Jsou-li za situace a označení z V. 20.4 všechny Fourierovy koeficienty funkce f nulové, platí vzhledem k (22) totéž o Fourierových koeficientech funkce $F(x) = \int_0^x f$; její Fourierova řada má tedy součet 0, ale podle V. 20.4 i součet $F(x)$. Z toho a z tvrzení (23) vyplývá, že $f(x) = 0$ skoro všude v $(0, 2\pi)$, a v důsledku periodicity skoro všude v $\mathbb{R}$.

Provedeme-li analogickou úvahu s funkcí $f - g$, vidíme, že platí tato *věta o jednoznačnosti*:

Věta 20.5. *Jsou-li Fourierovy koeficienty funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ identické s Fourierovými koeficienty funkce $g \in \mathcal{P}(2\pi)$, je $f(x) = g(x)$ skoro všude v $\mathbb{R}$.* $\square$

Platnost (neplatnost) rovnosti $f(x) = g(x)$ skoro všude v $\mathbb{R}$ lze tedy zjistit pomocí Fourierových řad těchto funkcí, a to i v případě, že (někde nebo všude) divergují.

Poznámka 20.2. Je-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ lichá (resp. sudá), platí totéž o každé z funkcí $f(x)\cos kx$, zatímco všechny funkce $f(x)\sin kx$ jsou sudé (resp. liché). Uvážíme-li, že Fourierovy koeficienty lze získat i integrací přes interval $(-\pi,\pi)$ (sr. s (8′)) a že pro sudé funkce je integrál přes tento interval dvojnásobkem integrálu od 0 do π, zatímco pro liché funkce je nulový, vidíme, že platí tato dvě tvrzení:

Je-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ lichá, je $a_k = 0$ pro všechna $k \ge 0$, zatímco

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx \quad \text{pro každé} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Je-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ sudá, je naopak $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, zatímco

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx \quad \text{pro každé} \quad k \ge 0. \quad \square \tag{25}$$

Je-li

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad \left(\text{resp. } f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\right), \tag{9′}$$

tj. je-li $a_k = 0$ pro všechna $k \ge 0$ (resp. $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$), mluvíme o **liché** neboli **sinové** (resp. o **sudé** neboli **kosinové**) Fourierově řadě funkce f.

Poznámka 20.3. Každou funkci $f \in \mathcal{L}((c, c+2\pi))$, kde $c \in \mathbb{R}$, lze 2π-periodicky rozšířit na celé $\mathbb{R}$; Fourierovu řadu takto rozšířené funkce nazýváme **Fourierovou řadou funkce f v intervalu** $(c, c+2\pi)$. Koeficienty této řady jsou dány vzorci

$$a_k = \int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad \text{pro} \quad k \ge 0, \quad b_k = \int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad \text{pro} \quad k > 0. \tag{26}$$

Podle V. 20.2 platí: *Je-li $f : \langle c, c+2\pi\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá funkce s konečnou variací, konverguje její Fourierova řada lokálně stejnoměrně v $(c, c+2\pi)$ a její součet se v $(c, c+2\pi)$ rovná $f(x)$, zatímco v bodech c a $c+2\pi$ je roven $\frac{1}{2}(f(c) + f(c+2\pi))$.*

Podobně lze každou funkci f definovanou (skoro všude) v intervalu $(0,\pi)$ (resp. v intervalu $(-\pi, 0)$) rozšířit jak na lichou, tak i na sudou 2π-periodickou funkci definovanou v celém $\mathbb{R}$. Je-li navíc integrál $\int_0^\pi f$ (resp. integrál $\int_{-\pi}^0 f$) konečný, nazýváme příslušnou Fourierovu řadu **lichou** resp. **sudou Fourierovou řadou** původní funkce f.

Poznámka 20.4. Protože za situace z V. 20.2 můžeme součet s_f Fourierovy řady funkce f napsat bez znalosti jejích koeficientů, budeme tak v konkrétních případech skutečně postupovat:

1. Má-li f konečnou variaci v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$, je (2π-periodický) součet $s_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ příslušné Fourierovy řady definován v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ podmínkami

$$s_f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{pro } x \in (c, c+2\pi) \\ \frac{1}{2}(f(c+) + f(c+2\pi-)) & \text{pro } x = c \text{ a } x = c+2\pi \end{array} \right\}. \tag{27}$$

2. Sudá Fourierova řada funkce f s konečnou variací v $\langle 0, \pi\rangle$ má (2π-periodický) součet s_f, definovaný v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$s_f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} f(0+) & \text{pro } x = 0 \\ \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{pro } x \in (0, \pi) \\ f(\pi-) & \text{pro } x = \pi \\ s_f(-x) & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0\rangle \end{array} \right\}. \tag{27'))}$$

(Podobně pro funkci $f : \langle -\pi, 0\rangle \to \mathbb{R}$.)

3. Lichá Fourierova řada funkce f s konečnou variací v $\langle 0, \pi\rangle$ má (2π-periodický) součet s_f, definovaný v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$s_f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro } x = 0 \text{ a } x = \pm\pi \\ \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{pro } x \in (0, \pi) \\ -\,s_f(-x) & \text{pro } x \in (-\pi, 0) \end{array} \right\}. \tag{27''}$$

(Podobně pro funkci $f : \langle -\pi, 0\rangle \to \mathbb{R}$.)

* * *

V následujících příkladech se konečnost variace zúčastněných funkcí snadno ověří podle (19) nebo podle V. 20.3; přenecháme to proto čtenáři a soustředíme se na aplikaci Dirichlet−Jordanova kritéria a na numerickou stránku příkladů.

Příklad 20.3. 1. Nejdříve najdeme *Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x$ *v intervalu* $(0, 2\pi)$. Funkce s_f z Po. 20.4 bude v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ definována podmínkami

$$s_f(x) = x \ \text{ pro všechna } \ x \in (0, 2\pi), \quad s_f(0) = s_f(2\pi) = \pi;$$

bude součtem hledané Fourierovy řady, jejíž koeficienty jsou

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{k}, \ \text{ je-li } \ k \in \mathbb{N}.$$

Podle V.20.2 je tedy

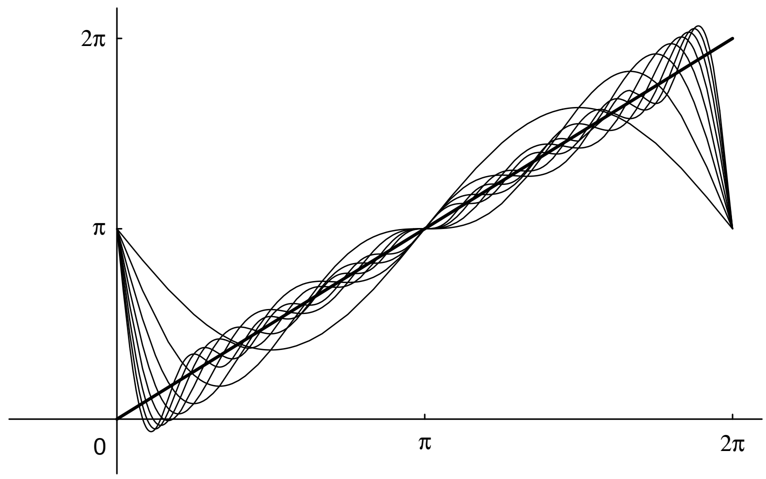
$$s_f(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

z čehož ihned plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \textit{pro všechna} \quad x \in (0, 2\pi); \tag{29}$$

v bodech 0 a 2π je součet řady vlevo roven 0.

Vzhledem k periodicitě je konvergence řad v (28) a (29) *lokálně stejnoměrná* v intervalu $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a *nestejnoměrná* v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$, protože funkce s_f je v těchto bodech nespojitá.



Grafy funkce x a prvních 8 částečných součtů

její Fourierovy řady v $(0, 2\pi)$

2. Nyní najdeme *sudou a lichou Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x$, $x \in (0, \pi)$. Funkce $s_f(x)$ je v případě sudého rozvoje rovna $|x|$ v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$; protože

$$\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\pi} x\cos(2k+1)x\,dx = -\frac{2}{(2k-1)^2} \quad \text{pro všechna} \quad k \in \mathbb{N},$$

je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad \text{v} \quad \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{30}$$

Řada vpravo konverguje přitom stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ a její součet je tam roven funkci $s_f(x)$, která je 2π-periodickým rozšířením funkce $|x|$ z $\langle -\pi, \pi \rangle$ na $\mathbb{R}$.

V případě lichého rozvoje je $s_f(x) = x$ v $(-\pi, \pi)$ a $s_f(\pm\pi) = 0$, přičemž

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = (-1)^{k-1} \frac{2}{k} \,,$$

takže

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\pi, \pi) \,. \tag{31}$$

Řada vpravo konverguje v každém intervalu $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně, konvergence však není stejnoměrná v žádném levém ani pravém prstencovém okolí žádného lichého násobku čísla π; všude v $\mathbb{R}$ řada součet $s_f(x)$.

3. Jestliže v (30) položíme $x = \pi$, dostaneme po evidentní úpravě rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \,. \tag{32}$$

Poznámka 20.5. U řad z (29) a (31) jsme byli dosud schopni vyšetřit jen (neabsolutní, lokálně stejnoměrnou) konvergenci; nyní jsme našli jejich součty a podařilo se nám sečíst i číselnou řadu (32). V dalších příkladech (řešených i ponechaných čtenáři jako cvičení) sečteme další řady čísel a funkcí; *nezodpovězena však bohužel zůstane otázka, kterou funkci máme rozvinout, abychom získali součet předem dané číselné řady.* Nezbývá asi nic jiného než rozvinout co nejvíce funkcí a hledat mezi výsledky řadu, jejíž součet bychom rádi znali.

Příklad 20.4. *Fourierova řada funkce* $f(x) = x^2$ *v intervalu* $I := (0, 2\pi)$ má, jak zjistíme standardním výpočtem, tyto koeficienty:

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3} \,, \quad a_k = \frac{4}{k^2} \,, \quad b_k = -\frac{4\pi}{k} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N};$$

2π-periodická funkce $s_f(x)$ se přitom rovná x^2 v I a $\frac{1}{2}(f(0)+f(2\pi)) = 2\pi^2$ v bodech 0 a 2π. Podle V.20.2 je

$$s_f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}; \tag{33}$$

první řada vpravo konverguje (podle srovnávacího kritéria) stejnoměrně v $\mathbb{R}$, druhá lokálně stejnoměrně v každém intervalu $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně ve všech levých i pravých prstencových okolích bodů $2n\pi$.

Dosadíme-li $x = 0$, bude vlevo $s_f(0) = 2\pi^2$ a jednoduchou úpravou získáme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \,. \tag{34}$$

Odečteme-li od (32) rovnost (34) dělenou čtyřmi, dostaneme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{35}$$

Dosadíme-li do (33) podle (29), dostaneme (po jednoduché úpravě) identitu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad \textit{v intervalu} \;\; (0, 2\pi) \tag{36}$$

a dosazením se přesvědčíme, že tato identita platí i v bodech 0 a 2π. Integrujeme-li obě strany od 0 do $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ podle V. 20.4, získáme identitu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \tag{37}$$

Integrujeme-li znovu a uvážíme-li, že $\int_0^x \sin kx \, dx = (1 - \cos kx)/k$, dojdeme k rovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k^4} = \frac{x^4 - 4\pi x^3 + 4\pi^2 x^2}{48} \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,; \tag{38}$$

dosadíme-li $x = \pi$ a uvážíme-li, že $1 - \cos k\pi = 1 - (-1)^k$ je rovno 0 pro sudá k a 2 pro lichá k, dostaneme další součet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,. \tag{39}$$

Protože

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}\,, \quad \text{tedy} \quad \frac{15}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}\,,$$

je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}\,, \tag{40$'$}$$

takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{16}\,\frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{720}\,. \tag{40$''$}$$

Dosadíme-li (40) do (38), snadno zjistíme, že je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4} = \frac{8\pi^4 - 60\pi^2 x^2 + 60\pi x^3 - 15x^4}{720} \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \tag{41}$$

Příklad 20.5. Rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\lg\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \mathbb{R} - \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\} \tag{42}$$

dokážeme tím, že *funkci* $f(x) := \lg|2\sin(\frac{1}{2}x)|$ *rozvedeme ve Fourierovu řadu*.

Funkce f je zřejmě definována v množině uvedené v (42), je sudá a má periodu 2π. Kromě toho je $f \in \mathcal{L}((0,2\pi))$, protože pro $x \to 0+$ je $f(x) \asymp \lg x \in \mathcal{L}((0,\pi))$ a protože vzhledem k identitě $f(2\pi - x) = f(x)$ je $\int_\pi^{2\pi} f = \int_0^\pi f$. Funkce f má Fourierovu řadu (protože patří do $\mathcal{L}((0,2\pi))$), ale větu 20.2 nebude možné užít v celém intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ (protože f není v $(0,2\pi)$ omezená), ale jen v intervalech $\langle a,b\rangle \subset (0,2\pi)$ (protože v nich má konečnou variaci).

Koeficienty b_k jsou všechny rovny 0, protože f je sudá funkce; zbývá proto najít koeficienty a_k. Začneme výpočtem koeficientu

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f = \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^\pi f + \int_\pi^{2\pi} f\Big) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \lg(2\sin(\tfrac{1}{2}x))\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^\pi \lg 2\,dx + \int_0^\pi \lg(\sin(\tfrac{1}{2}x)\,dx\Big) = 2\lg 2 + \frac{2I}{\pi}, \end{aligned} \tag{43}$$

kde

$$\begin{aligned} I :&= \int_0^\pi \lg(\sin(\tfrac{1}{2}x))\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \lg(\sin u)\,du = 2\int_0^{\pi/2} \lg(2\sin(\tfrac{1}{2}u)\cos(\tfrac{1}{2}u))\,du \\ &= \pi\lg 2 + 2\int_0^{\pi/2} \lg(\sin(\tfrac{1}{2}u))\,du + 2\int_0^{\pi/2} \lg(\cos(\tfrac{1}{2}u))\,du \\ &= \pi\lg 2 + 2\int_0^\pi \lg(\sin(\tfrac{1}{2}x))\,dx = \pi\lg 2 + 2I; \end{aligned} \tag{44}$$

druhý integrál jsme získali z prvního substitucí $x = 2u$, ve druhém integrálu ve druhé řádce jsme provedli substituci $u = \pi - x$. Porovnáme-li začátek a konec (44), vidíme, že $I = -\pi\lg 2$, tedy $2I/\pi = -2\lg 2$; podle (43) je v důsledku toho $a_0 = 0$.

Než začneme počítat koeficienty a_k pro $k \in \mathbb{N}$, uvažme, že

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \quad \text{pro všechna} \;\; \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ (a každé $x \in \mathbb{R}$) je

$$\begin{aligned} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)\Big(\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx\Big) &= \sin(\tfrac{1}{2}x) + \sum_{k=1}^n \big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x - \sin(k-\tfrac{1}{2})x\big) \\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x. \end{aligned}$$

Protože první výraz je roven poslednímu i pro $n = 0$ a protože $\int_0^\pi \cos kx\,dx = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, plyne z této identity dělením výrazem $2\sin(\frac{1}{2}x)$ a integrací, že

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(\frac{1}{2}x)}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \quad \textit{pro všechna celá čísla} \;\; n \ge 0. \tag{46}$$

Integrací per partes a užitím vzorce (46) získáme pro každé $k \in \mathbb{N}$ tento výsledek:

$$(47)\qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \lg\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\cos kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\lg\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\frac{\sin kx}{k}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\sin kx\,dx$$

$$= 0 - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\,dx = -\frac{1}{k}\,.$$

(První integrál v prvním řádku jsme rozložili na integrál od 0 do π a od π do 2π a v druhém z takto získaných integrálů jsme substituovali $x = 2\pi - t$. Druhý z integrálů v první řádce jsme integrovali per partes, v posledním řádku jsme užili identitu (46).)

Résumé. Fourierovy koeficienty b_k a a_0 funkce f jsou rovny 0, zatímco $a_k = -1/k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože funkce f je spojitá v intervalu $(0, 2\pi)$ a má konečnou variaci v každém intervalu $\langle a, b\rangle \subset (0, 2\pi)$, je podle V. 20.2 součet její Fourierovy řady roven $f(x)$ v každém bodě $x \in (0, 2\pi)$ a řada konverguje lokálně stejnoměrně v $(0, 2\pi)$.[4]) Tvrzení (42) odtud plyne v důsledku 2π-periodicity obou stran.

Příklad 20.6. *Fourierova řada funkce* $f(x) := e^{-x/2}$ *v intervalu* $I := (\pi, 3\pi)$ má koeficienty

$$(48)\qquad a_k = \frac{4(-1)^k\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi e^{\pi}(4k^2+1)}\,,\quad b_k = \frac{8(-1)^k k\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi e^{\pi}(4k^2+1)}$$

a řada

$$(49)\qquad \frac{4\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi e^{\pi}}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1}(\cos kx + 2k\sin kx)\Big)$$

konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí každého lichého násobku π. Její součet je 2π-periodická funkce $s_f(x)$ rovná $f(x)$ v I a

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{-3\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) = e^{-\pi}\cosh\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \doteq 0.11$$

v krajních bodech tohoto intervalu.

Dosadíme-li tedy do (49) po řadě $x = \pi$ a $x = 2\pi$, dostaneme součty $s_f(\pi) = e^{-\pi}\cosh\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ a $s_f(2\pi) = e^{-\pi}$. Z toho snadno plyne, že

$$(50)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2+1} = \frac{\pi\,\mathrm{cotgh}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{4} - \frac{1}{2}\,,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\,;$$

přibližné numerické hodnoty těchto součtů jsou 0.3563 a 0.1587.

[4]) Každé $x \in (0, 2\pi)$ leží uvnitř nějakého intervalu $\langle a, b\rangle \subset (0, \pi)$.

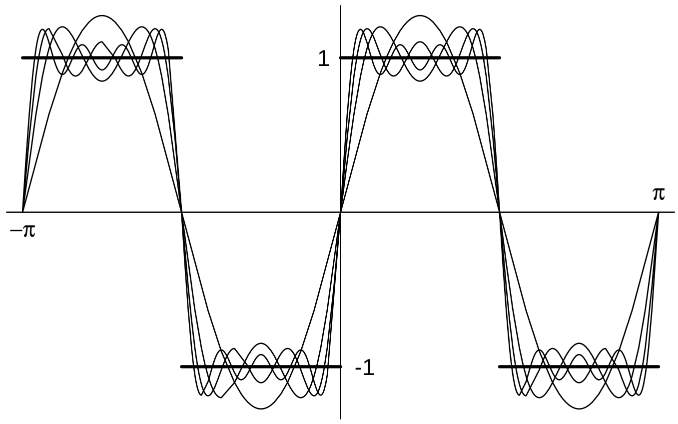
Příklad 20.7. Hledejme *sudou a lichou Fourierovu řadu funkce*

$$f(x) := \operatorname{sgn}(\sin 2x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{v intervalu } (0, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1 & \text{v intervalu } (\tfrac{1}{2}\pi, \pi) \end{array} \right\}. \tag{51}$$

Označíme-li $s_{f,s}$ a $s_{f,l}$ funkce (27′) a (27″) z Po. 20.4, bude

$$s_{f,s}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{je-li } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1, & \text{je-li } x \in (\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \\ 0, & \text{je-li } x \in \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\} \end{array} \right\}, \quad s_{f,l}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{je-li } x \in (0, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1, & \text{je-li } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, 0) \\ 0, & \text{je-li } x \in \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, 0\} \end{array} \right\};$$

první z těchto funkcí je přitom 2π-periodická, druhá π-periodická.



GRAFY FUNKCE $\operatorname{sgn}(\sin 2x)$ A PRVNÍCH 4 ČÁSTEČNÝCH SOUČTŮ JEJÍ LICHÉ FOURIEROVY ŘADY

Koeficienty a_k resp. b_k sudého resp. lichého rozvoje jsou

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{4}{k\pi} \sin(\tfrac{1}{2}k\pi) \text{ pro } k \in \mathbb{N} \tag{52}$$

resp.

$$b_k = \frac{2(1 + (-1)^k) - 4\cos(\tfrac{1}{2}k\pi)}{k\pi} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}, \tag{53}$$

takže

$$a_{2k-1} = (-1)^k \frac{4}{(2k-1)\pi}, \quad b_{4k-2} = \frac{4}{(2k-1)\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}, \tag{54}$$

zatímco všechny koeficienty a_{2k}, b_{4k-3}, b_{4k-1} a b_{4k} jsou nulové. Příslušné Fourierovy řady jsou

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \quad \text{a} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(4k-2)x}{2k-1}; \tag{55}$$

první konverguje lokálně stejnoměrně v intervalech $I_n := (\frac{1}{2}(2n-1)\pi, \frac{1}{2}(2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí krajních bodů těchto intervalů, druhá konverguje lokálně stejnoměrně v intervalech $J_n := (\frac{1}{2}n\pi, \frac{1}{2}(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí krajních bodů těchto intervalů.

Uvážíme-li, že součet první řady v bodě 0 je 1, získáme pozoruhodnou rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4}\,; \tag{56}$$

poznamenejme však, že alternující řada vlevo se k přibližnému výpočtu čísla π příliš nehodí, protože konverguje velmi pomalu. (Rozdíl $\frac{1}{4}\pi$ a jejího pětistého částečného součtu je přibližně 0.0005.)

Poznámka 20.7. Integrací člen po členu levé strany identity (42) bychom získali řadu o členech $\sin kx/k^2$ a další integrací řadu o členech $\cos kx/k^3$; pro $x = 0$ bychom tak získali řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,, \tag{57}$$

o jejíž sečtení se marně usiluje celá staletí. Zde naznačený postup samozřejmě též selhává, protože funkce primitivní k pravé straně identity (42) nepatří mezi elementární funkce, a právě tak tam nepatří ani funkce k ní primitivní.

Zatímco součty řad o členech $1/k^n$ se sudým $n \in \mathbb{N}$ lze vypočítat podle celkem jednoduchého vzorce (viz např. kap. XVI knihy [13] nebo str. 286 knihy [6]), *nalezení vzorců pro součty obdobných řad s lichým $n \in \mathbb{N}$ by nepochybně svého řešitele rázem proslavilo.*

Poznámka 20.8. Dosud jsme mluvili jen o rozvojích 2π-periodických funkcí; všechny vyložené postupy však lze (po evidentních modifikacích) opakovat s obecnějšími q-periodickými funkcemi, kde $q \in \mathbb{R}_+$.

Má-li q-periodická funkce f konečný integrál $\int_0^q f$, můžeme vytvořit obecnější **Fourierovu řadu s periodou** q a psát

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos \frac{2k\pi x}{q} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{q} \Big), \tag{58}$$

kde čísla a_k $(k \geq 0)$ a b_k $(k \in \mathbb{N})$ jsou nyní dána rovnostmi

$$a_k := \frac{2}{q} \int_{\xi}^{\xi+q} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{q}\, dx\,, \quad b_k := \frac{2}{q} \int_{\xi}^{\xi+q} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{q}\, dx \tag{59}$$

s libovolným $\xi \in \mathbb{R}$. Funkce $\cos(2k\pi x/q)$, $\sin(2k\pi x/q)$ mají periodu q a splňují podmínky (5) – (7), nahradíme-li na jejich pravých stranách číslo π číslem $\frac{1}{2}q$.

Příklad 20.8. Máme-li např. funkci $f(x) := x$ rozvést ve Fourierovu řadu v intervalu $(1,3)$, bude mít součet s_f této řady periodu $q = 2$ a v intervalu $\langle 1,3\rangle$ bude definován podmínkami

$$s_f(x) = x \text{ pro } x \in (1,3), \quad s_f(x) = \tfrac{1}{2}(f(1)+f(3)) = 2 \text{ pro } x \in \{1,3\}. \tag{60}$$

Snadno zjistíme, že

$$a_0 = 4, \ a_k = 0, \ b_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}, \tag{61$'$}$$

takže je

$$s_f(x) = 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin k\pi x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}; \tag{61$''$}$$

řada vpravo přitom konverguje v každém intervalu $(2k-1, 2k+1)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně a konvergence je nestejnoměrná v každém levém i v každém pravém prstencovém okolí každého lichého čísla (sr. s (31)).

Cvičení

Kromě konkrétní úlohy uvedené v každém z následujících cvičení najděte vždy a) funkci $s_f(x)$, tj. součet příslušné Fourierovy řady v $\mathbb{R}$, b) všechny maximální otevřené intervaly, v nichž daná řada konverguje lokálně stejnoměrně, c) všechny body, v jejichž žádném okolí není konvergence stejnoměrná. (Sr. s Po. 20.4.)

20.08$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := x$ v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

20.09$^{\mathbf{o}}$. Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi \operatorname{sgn} x \quad \text{v intervalu } (-\pi,\pi), \tag{62}$$

a odvoďte z toho, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi. \tag{63}$$

20.10$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := |\sin x|$ v intervalu $(-\pi,\pi)$ a pomocí ní dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \tfrac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} = \tfrac{1}{4}(\pi - 2); \tag{64}$$

uvažte, že první z těchto řad lze snadno sečíst i bez užití Fourierových řad.

20.11$^{\mathbf{o}}$. Najděte lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x) := \cos x$, $x \in (0, \pi)$.

20.12$^{\mathbf{o}}$. Za předpokladu, že $\alpha \neq 0$, najděte Fourierovu řadu funkce $e^{\alpha x}$ v intervalu $(0, 2\pi)$ a pomocí ní dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + k^2} = \frac{\pi\alpha \operatorname{cotgh}(\pi\alpha) - 1}{2\alpha^2}. \tag{65}$$

20.13$^{\mathbf{o}}$. Najděte sudou i lichou Fourierovu řadu funkce $f(x) := e^{-x}$ v intervalu $(0, \pi)$.

20.14$^{\mathbf{o}}$. Ověřte, že podle Př. 20.3 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \tfrac{1}{8}(\pi^2 - 2\pi|x|) \quad \text{v intervalu} \quad \langle -\pi, \pi \rangle, \tag{66}$$

a pak tuto identitu užijte k důkazu rovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} = \tfrac{1}{8}\pi x(\pi - |x|) \quad \text{v intervalu} \quad \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{67}$$

Pak dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \tfrac{1}{32}\pi^3. \tag{68}$$

20.15$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := |x-1|$ v intervalu $(0, 2)$ a sečtěte pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty}(1/(2k-1)^2)$.

20.16$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := \arcsin(\sin 2x)$.

20.17$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := \arcsin(\cos \pi x)$.

20.18$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := \operatorname{sgn}(\cos 2\pi x)$.

20.19$^{\mathbf{o}}$. Najděte sudý i lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x)$ rovné $\frac{1}{2}\pi$ v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ a $\pi - x$ v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle$.

20.20$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x)$, která má periodu 3 a v intervalech $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ se po řadě rovná $1, -1, 0$.

20.21$^{\mathbf{o}}$. Najděte sudou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) := \left\{ \begin{matrix} x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{3}\pi) \\ 0 & \text{pro } x \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{2}{3}\pi - x & \text{pro } x \in \langle \frac{2}{3}\pi, \pi \rangle \end{matrix} \right\}. \tag{69}$$

20.22$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce f, určené těmito podmínkami: Je lichá, má periodu 8, v intervalu $(0, 1)$ je rovna $1 - x$, v intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ nule.

20.23$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce, která periodu 4 a v intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ je definována podmínkami

$$f(x) := 1 - x^2, \ \text{je-li} \ |x| \leq 1, \quad f(x) := 0, \ \text{je-li} \ 1 \leq |x| \leq 2. \tag{70}$$

20.24°. Najděte sudou i lichou Fourierovu řadu funkce $\cos x$ v intervalu $(0, 2)$.

20.25°. Najděte sudou i lichou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} \sin 2x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle \end{array} \right\} \tag{71}$$

v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ označme

$$I_n = (n\pi, (n+1)\pi), \quad J_n = (2n\pi, 2(n+1)\pi); \tag{72}$$

v příkladech, v nichž se daná funkce má rozvinout jak v sudou, tak i lichou řadu, pišme místo s_f podrobněji $s_{f,s}$ a $s_{f,l}$.

20.08. s_f je 2π-periodická funkce, která se rovná x v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ a $\alpha + \pi$ v bodech α, $\alpha + 2\pi$. Všude v $\mathbb{R}$ je

$$s_f(x) = \alpha + \pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha \cos kx - \cos k\alpha \sin kx}{k}; \tag{73}$$

v intervalech $(\alpha + 2n\pi, \alpha + 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $\alpha + 2n\pi$ nestejnoměrná.

20.09. V každém intervalu I_n, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence řady lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $n\pi$ nestejnoměrná; součet uvedené číselné řady získáme dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$.

20.10. Funkce f je sudá, spojitá, 2π-periodická a má v $\langle -\pi, \pi \rangle$ konečnou variaci; její Fourierova řada

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \tag{74}$$

konverguje proto stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ a má tam součet $f(x)$. První z řad (64) lze sečíst elementárně, protože $2/(4k^2 - 1) = 1/(2k - 1) - 1/(2k + 1)$; součet druhé z nich získáme dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$ do (70).

20.11. s_f je 2π-periodická funkce, $0 < |x| < \pi \Rightarrow s_f(x) = \operatorname{sgn} x \cos x$, zatímco $s_f(0) = s_f(\pm\pi) = 0$; rovnost

$$s_f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2kx}{4k^2 - 1} \tag{75}$$

platí v celém $\mathbb{R}$, v intervalech I_n, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $n\pi$ nestejnoměrná.

20.12. Je

$$s_f(x) = \frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\pi}\Big(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha\cos kx - k\sin kx}{\alpha^2+k^2}\Big) \text{ v } \mathbb{R}, \tag{76}$$

přičemž $s_f(x) = e^{\alpha x}$ v $(0, 2\pi)$, $s_f(0) = s_f(2\pi) = \frac{1}{2}(e^{2\pi\alpha}+1)$; v intervalech J_n, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$ nestejnoměrná. Rovnost (65) získáme dosazením $x = 0$ do (76) a snadnou úpravou.

20.13. Funkce $s_{f,s}$ je v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ definována rovností $s_{f,s}(x) = e^{-|x|}$,

$$s_{f,s}(x) = \frac{1}{\pi}(1-e^{-\pi}) + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{k^2+1} \cos kx \text{ v } \mathbb{R}, \tag{77}$$

přičemž řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

Funkce $s_{f,l}$ je v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ definována podmínkami $s_{f,l}(x) = e^{-|x|} \operatorname{sgn} x$, je-li $0 < |x| < \pi$, $s_{f,l}(0) = s_{f,l}(\pm\pi) = 0$, přičemž

$$s_{f,l}(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}(1-(-1)^k e^{-\pi}) \sin kx \text{ v } \mathbb{R}; \tag{78}$$

řada vpravo konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu I_n, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí každého bodu $n\pi$.

20.14. Řady v (66) a (67) konvergují stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$, (67) získáme z (66) integrací, (68) z (67) dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$.

20.15. Je $s_f(x) = f(x)$ v $\langle 0, 2\pi \rangle$ a

$$s_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2} \text{ v } \mathbb{R}, \tag{79}$$

přičemž řada vpravo konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně. Dosazením $x = 1$ získáme rovnost $\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2} = \frac{1}{8}\pi^2$.

20.16. Je $s_f = f$ v $\mathbb{R}$, rovnost

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin(2(2k-1)x) \tag{80}$$

platí všude v $\mathbb{R}$, řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

20.17. Funkce $s_f \equiv f$ je sudá, rovnost

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^2} \tag{81}$$

platí v celém $\mathbb{R}$, řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

20.18. Funkce s_f je sudá, má periodu 1 a

$$(82)\qquad s_f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{pro } x \in (-\frac14, \frac14) \\ -1 & \text{pro } x \in (\frac14, \frac34) \\ 0 & \text{pro } x \in \{\pm\frac14, \pm\frac34\} \end{array}\right\} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2(2k-1)\pi x);$$

řada konverguje v intervalech $\big(\frac14(2n-1), \frac14(2n+1)\big)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně, v každém levém i pravém okolí každého bodu $\frac14(2n-1)$ nestejnoměrně.

20.19. 2π-periodická funkce $s_{f,s}$ definovaná v $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$(83)\qquad s_{f,s}(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac12\pi, & \text{je-li } |x| \le \frac12\pi \\ \pi - |x|, & \text{je-li } \frac12\pi \le |x| \le \pi \end{array}\right\}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$; v $\mathbb{R}$ platí rovnost

$$(84)\qquad s_{f,s}(x) = \tfrac38\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^2} \cos kx,$$

přičemž řada vpravo konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$ a

$$(84')\qquad \alpha_k := 2(-1)^{k-1} \sin^2(\tfrac14 k\pi) \ \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

takže $\alpha_{4k-3} = \alpha_{4k-1} = 1$, $\alpha_{4k-2} = -2$, $\alpha_{4k} = 0$.

2π-periodická funkce $s_{f,l}$ definovaná v $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$(85)\qquad s_{f,l}(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac12\pi \operatorname{sgn} x, & \text{je-li } 0 < |x| \le \frac12\pi \\ (\pi - |x|) \operatorname{sgn} x, & \text{je-li } \frac12\pi \le |x| < \pi \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \vee x = \pm\pi \end{array}\right\}$$

je spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, právě když je $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$; všude v $\mathbb{R}$ je

$$(86)\qquad s_{f,l}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac1k + \frac{\beta_k}{k^2\pi}\Big) \sin kx, \ \text{ kde } \beta_k := 2\sin(\tfrac12 k\pi) \ \text{ pro každé } k \in \mathbb{N},$$

takže $\beta_{2k} = 0$ a $\beta_{2k-1} = 2(-1)^{k-1}$; řada konverguje lokálně stejnoměrně v každém J_n, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$.

20.20. Funkce $s_f(x)$ má periodu 3 a rovná se $f(x)$ v každém z intervalů $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$; kromě toho je $s_f(0) = s_f(3) = \frac12$, $s_f(1) = 0$, $s_f(2) = -\frac12$. Rovnost

$$(87)\qquad s_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \big(\alpha_k \cos(\tfrac23 k\pi x) + \beta_k \sin(\tfrac23 k\pi x)\big),$$

kde

$$(87')\qquad \alpha_k := 3\sin(\tfrac23 k\pi), \ \beta_k := 2\sin^2(\tfrac23 k\pi) \ \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

platí všude v $\mathbb{R}$, řada vpravo konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $(n, n+1)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i v každém pravém okolí každého celého čísla.

Čísla α_k a β_k splňují (pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $n \in \mathbb{N}$) podmínku $\alpha_{3n+k} = \alpha_k$, $\beta_{3n+k} = \beta_k$, přičemž

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\ \alpha_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\ \alpha_3 = 0\,,\quad \beta_1 = \beta_2 = \tfrac{3}{2}\,,\ \beta_3 = 0. \tag{88}$$

20.21. Funkce $s_f(x)$ je rovna $f(x)$ pro všechna $x \in \langle 0, \pi\rangle - \{\frac{1}{3}\pi\}$, $f(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{6}\pi$; tyto podmínky spolu se sudostí a 2π-periodicitou definují s_f v celém $\mathbb{R}$. Koeficienty a_0 a b_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou rovny nule, pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je

$$a_k = \frac{1}{k\sqrt{3}}\,\operatorname{sgn}(\sin(\tfrac{1}{3}\,k\pi)) - \frac{3}{k^2\pi}\,(1 + (-1)^k)\operatorname{sgn}(\sin^2(\tfrac{1}{3}\,k\pi))\,; \tag{89}$$

posloupnosti

$$\{\operatorname{sgn}(\sin(\tfrac{1}{3}\,k\pi))\}_{k=1}^{\infty} \ \text{ a } \ \{(1 + (-1)^k)\operatorname{sgn}(\sin^2(\tfrac{1}{3}\,k\pi))\}_{k=1}^{\infty}$$

mají periodu 6, přičemž $1, 1, 0, -1, -1, 0$ a $0, 2, 0, 2, 0, 0$ je prvních 6 členů první a druhé posloupnosti. Prvních 12 členů posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rovno

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \ \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\pi}\,,\ \ 0,\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{3}{8\pi}\,,\quad -\frac{1}{5\sqrt{3}}\,,\ \ 0,\\ \frac{1}{7\sqrt{3}}\,,\ \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{3}{32\pi}\,,\ 0,\ -\frac{1}{10\sqrt{3}} - \frac{3}{50\pi}\,,\ -\frac{1}{11\sqrt{3}}\,,\ 0.\end{gathered}$$

Fourierova řada funkce f konverguje pro každé $n \in \mathbb{Z}$ lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $((2n - \frac{1}{3})\pi, (2n + \frac{1}{3})\pi)$ a tvaru $((2n + \frac{1}{3})\pi, (2n + \frac{5}{3})\pi)$, nestejnoměrně v každém levém i v každém pravém okolí každého bodu tvaru $(2n \pm \frac{1}{3})\pi$.

20.22. Funkce s_f s periodou 8 je v intervalu $\langle -4, 4\rangle$ definována podmínkami

$$s_f(x) = \left\{\begin{array}{ll} (1 - |x|)\operatorname{sgn} x\,, & \text{je-li } 0 < |x| < 1 \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \text{ nebo } 1 \le |x| \le 4 \end{array}\right\}; \tag{90}$$

v $\mathbb{R}$ je

$$s_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\tfrac{1}{4}\,k\pi x)\,,\ \text{ kde } b_k := \frac{2}{k\pi} - \frac{8}{k^2\pi^2}\,\sin(\tfrac{1}{4}k\pi) \tag{91}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$, takže

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\,,\ \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\,,\ \frac{2}{3\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{9\pi^2}\,,\ \frac{1}{2\pi}\,,\ \frac{2}{5\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{25\pi^2}\,,\ \frac{1}{3\pi} + \frac{2}{9\pi^2}\,,\ \frac{2}{7\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{49\pi^2}\,,\ \frac{1}{4\pi}$$

je prvních 8 členů posloupnosti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Fourierova řada funkce f konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $(8n, 8(n+1))$, kde $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i v každém pravém okolí každého bodu $8n$.

20.23. Funkce s_f je 4-periodickým rozšířením funkce f, je sudá a spojitá v $\mathbb{R}$; příslušná Fourierova řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně a má koeficienty

$$a_0 = \frac{2}{3}\,,\;\; a_k = \frac{16}{k^3\pi^3}\,\sin\left(\tfrac{1}{2}k\pi\right) - \frac{8}{k^2\pi^2}\,\cos\left(\tfrac{1}{2}k\pi\right) \;\text{ pro }\; k \in \mathbb{N}.$$

20.24. Funkce $s_{f,s}$ vznikne 4-periodickým rozšířením funkce $\cos|\langle -2, 2\rangle$ na $\mathbb{R}$ a je v $\mathbb{R}$ spojitá; konvergence sudé Fourierovy řady je stejnoměrná v $\mathbb{R}$ a její koeficienty jsou

$$a_k = \frac{4(-1)^k}{4 - k^2\pi^2}\,\sin 2 \;\text{ pro }\; k \geq 0.$$

Pro všechna $x \in (-2, 2)$ je $s_{f,l}(x) = \cos x \operatorname{sgn} x$ a $s_{f,l}(\pm 2) = s_{f,l}(0) = 0$; funkce $s_{f,l}$ je lichá, 4-periodická, nespojitá ve všech sudých číslech, spojitá ve všech ostatních bodech.

Lichá Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $(2n, 2(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém $P^+(2n)$ a v každém $P^-(2n)$; její koeficienty jsou

$$b_k = \frac{2k\pi}{4 - k^2\pi^2}\,\left((-1)^k \cos 2 - 1\right),\;\; k \in \mathbb{N}.$$

20.25. Funkce $s_{f,s}$ (resp. $s_{f,l}$) je 2π-periodickým sudým (resp. lichým) rozšířením funkce $f|\langle 0, \pi\rangle$ na $\mathbb{R}$ a je v $\mathbb{R}$ spojitá. Koeficienty příslušných Fourierových řad jsou

$$a_2 = 0\,,\quad a_k = \frac{8}{(4 - k^2)\pi}\,\cos^2\left(\tfrac{1}{4}k\pi\right) \;\text{ pro }\; k \geq 0,\;\; k \neq 2\,,$$

a

$$b_2 = \frac{1}{2}\,,\quad b_k = \frac{4}{(4 - k^2)\pi}\,\sin\left(\tfrac{1}{4}k\pi\right) \;\text{ pro }\; k \in \mathbb{N},\;\; k \neq 2\,,$$

obě řady konvergují v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.