14. Funkce několika proměnných

V této kapitole se budeme zabývat některými základními pojmy teorie funkcí několika proměnných; funkce jedné proměnné budeme přitom považovat za zvláštní případ funkcí „několika proměnných“. [1])

Prostory $\mathbb{R}^p$ s $p > 1$ jsme nerozšířili o žádné „nevlastní body“ odpovídající $\pm\infty$ v $\mathbb{R}^*$; mají-li mít další výsledky stejný tvar pro všechny dimenze $p \in \mathbb{N}$, je nutné vyhnout se nekonečným limitám skalárních funkcí. Zavedeme proto tuto úmluvu:

Úmluva. V dalším bude slovo „*limita*“ znamenat vždy „*konečnou limitu*“. [2]) □

Body z obecného $\mathbb{R}^p$ budeme značit

(1) $$x = (x_1, \ldots, x_p), \; y = (y_1, \ldots, y_p), \; a = (a_1, \ldots, a_p), \; b = (b_1, \ldots, b_p)$$

apod.; je-li však $p = 2$ resp. $p = 3$, budeme užívat i jiné značení, např. (x, y) nebo (u, v) v $\mathbb{R}^2$ a (x, y, z) nebo (u, v, w) v $\mathbb{R}^3$. Nejčastější označení zobrazení do $\mathbb{R}^q$ bude

(2) $$f = (f_1, \ldots, f_q), \; g = (g_1, \ldots, g_q);$$

čtenáři je jistě známo, že zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ se nazývají **q-rozměrné vektorové funkce** p (reálných) **proměnných**. Je-li $q = 1$, mluvíme též o **skalárních funkcích**, ale *považujeme je za speciální případ funkcí vektorových.*

Cvičení 14.01. Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}^p$ a nechť f je zobrazení nějaké množiny tvaru $U(a) \cap M$ do $\mathbb{R}^q$. Uvažte, že konvergence v $\mathbb{R}^q$ je konvergencí po souřadnicích (sr. s Cv. 12.7), a dokažte, že

(3) *zobrazení f je spojité v bodě a vzhledem k M, právě když tuto vlastnost mají všechny jeho složky f_j, $j = 1, \ldots, q$.*

Dále: Za předpokladu, že $a \in \operatorname{der} M$ a že f je definováno na nějaké množině tvaru $P(a) \cap M$, dokažte, že

(4) $$\lim_{x \to a,\, x \in M} f(x) = A = (A_1, \ldots, A_q) \Leftrightarrow \lim_{x \to a,\, x \in M} f_j(x) = A_j \;\text{ pro }\; j = 1, \ldots, q.$$

Jinými slovy, *spojitost i existenci limity lze ověřovat „po složkách“, limitu lze navíc „po složkách“ i počítat.*

Poznámka 14.1. *Limitní přechod v $\mathbb{R}^p$ však nelze* (až na triviální případy) *„rozkládat“ na p limitních přechodů v jednotlivých proměnných!* Ani v $\mathbb{R}^2$ není totiž

[1]) Řada autorů mluví o funkcích *více* proměnných, ale ani při této terminologii nejsou funkce jedné proměnné vyloučeny. Jistě se však nelze divit, že se přesnější termín, např. „funkce libovolného kladného konečného počtu proměnných“, neužívá.

[2]) Má-li tedy některá skalární funkce nekonečnou limitu podle původní terminologie, budeme od tohoto okamžiku říkat, že *limitu nemá*.

žádná souvislost mezi *dvojnou limitou*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \tag{5}$$

a *dvojnásobnými limitami*

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{y\to b} f(x,y)\big), \quad \lim_{y\to b}\big(\lim_{x\to a} f(x,y)\big). \tag{6}$$

Příklad 14.1°. 1. Je-li

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{cc} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}\,, & \text{je-li } x \neq 0 \neq y \\ 0 & \text{jinak} \end{array} \right\}, \tag{7'}$$

je $|f(x,y)| \le x^2+y^2 \to 0$ pro $(x,y)\to(0,0)$, takže limita (5) (kde $(a,b)=(0,0)$) je nulová. Protože však ani $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ pro $x\neq 0$, ani $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ pro $y \neq 0$ neexistuje, neexistuje žádná z limit (6).

2. Obráceně, pro funkci f definovanou podmínkami

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \text{je-li } y = x \neq 0 \\ 0 \ \ \text{jinak} \end{array} \right\} \tag{7''}$$

je $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ pro každé $y \in \mathbb{R}$, takže i

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0.$$

Dvojná limita funkce f v počátku však neexistuje, protože její limita vzhledem k přímce o rovnici $y = x$ je rovna 1, zatímco limita např. vzhledem k oběma osám souřadnicovým je nulová.

3. Nechť g je Dirichletova funkce a nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definována podmínkami

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{je-li } y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ y\,g(x), & \text{je-li } y \in \mathbb{Q} \end{array} \right\}. \tag{7'''}$$

Pak je $|f(x,y)| \le |y|$ pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a v důsledku toho je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

(protože $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$). Protože však $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ neexistuje pro žádné racionální číslo $y \neq 0$, dvojnásobná limita

$$\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) \text{ neexistuje}.$$

Jedna z limit (6) tedy neexistuje, druhá je – stejně jako limita (5) – rovna nule.

Poznámka 14.2. Připomeňme v této souvislosti tato jednoduchá tvrzení z teorie metrických prostorů:

(8) $$a \in N \subset M,\ a \in \operatorname{der} N,\ \lim_{x\to a,\ x\in M} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to a,\ x\in N} f(x) = A.$$

Obráceně tedy:

(8′) *Je-li* $N_1 \cup N_2 \subset M$, $a \in \operatorname{der} N_1 \cap \operatorname{der} N_2$ *a má-li* f *vzhledem k množinám* N_1, N_2 *různé limity, limita* f *vzhledem k* M *neexistuje.*

Často se však hodí i toto tvrzení:

(9) *Je-li* $N_1 \cup N_2 = M$, $a \in \operatorname{der} N_1 \cap \operatorname{der} N_2$ *a má-li* f *vzhledem k oběma množinám* N_1, N_2 *touž limitu* A*, existuje i její limita vzhledem k* M *a rovná se* A.

Cvičení 14.02. Dokažte, že pro každé dvě q-rozměrné vektorové funkce f a g (definované v nějakém m. p. (X,ρ)) platí:

1. *Jsou-li obě funkce* f, g *spojité v bodě* a (*resp. na množině* M), *platí totéž o funkcích* $f \pm g$ *a* $(f \cdot g)$.

2. *Je-li navíc* $q = 1$ (*takže* f, g *jsou skalární funkce*), *je v bodě* a *spojitý i součin* fg, *a pokud je* $g(a) \neq 0$, *i podíl* f/g.

Podobně: *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, *platí tato tvrzení*:

1′. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, $\lim_{x\to a}(f \cdot g) = (A \cdot B)$.

2′. *Je-li navíc* $q = 1$, *je* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *a v případě, že* $B \neq 0$, *platí i rovnost* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$. □

Definujeme-li hodnoty $f(x)$ funkce f nějakým „vzorcem“ neboli „výrazem závislým na x“, považujeme za definiční obor funkce f množinu všech x, pro něž má „výraz“ smysl – pokud se z nějakých důvodů nerozhodneme, že definiční obor má být menší. [3]) Před cvičením uveďme tři příklady, které problém ilustrují:

Příklad 14.2°. 1. Řekneme-li, že funkci f dvou proměnných definujeme předpisem $f(x,y) := x/y$, rozumíme tím, že jejím definičním oborem má být maximální podmnožina M roviny $\mathbb{R}^2$, v jejímž každém bodě (x,y) má pravá strana smysl. V našem případě je tedy $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 0\}$, tj. rovina bez osy x. Tato množina je otevřená a funkce f je v ní zřejmě spojitá.

2. Funkce f tří proměnných definovaná rovností $f(x,y,z) := \lg(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ má definiční obor $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, což je otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^3$. I tato funkce f je ve svém definičním oboru spojitá.

3. Definičním oborem funkce

$$f(x,y) := \operatorname{sgn} \frac{x}{x^2+y^2}$$

[3]) Omlouvám se za užívání nedefinovaných slov „vzorec“ resp. „výraz“, které nezbývá než chápat jen intuitivně. Úlohy, které čtenář najde v následujícím cvičení, se však v literatuře poměrně často vyskytují, a nebylo by proto namístě vyhýbat se jim.

je množina $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, tedy rovina bez počátku; funkce f není spojitá v žádném bodě osy y, zatímco v množině $\mathbb{R}^2 - \{(x,y);\ x \neq 0\}$ je spojitá.

4. Popišme geometricky definiční obor funkce

$$f(x,y,z) := \frac{\arcsin xy}{z^2-1}\,.$$

Hranici množiny $M := \{(x,y);\ -1 \le xy \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$, která obsahuje obě souřadnicové osy, tvoří 4 větve hyperbol $y = \pm 1/x$. Definičním oborem funkce f je množina $M \times \mathbb{R}$, která obsahuje roviny xz a yz a jejíž hranici tvoří hyperbolické válce s popisem $y = \pm 1/x$, tedy sjednocení všech přímek rovnoběžných s osou z a procházejících body $(x,y,0)$, kde $xy = \pm 1$, z něhož byly odstraněny všechny body (x,y,z), pro něž je $z = \pm 1$. Funkce f je v této množině spojitá.

Cvičení

U každé z následujících funkcí „definovaných vzorcem" najděte maximální množinu M, na níž má pravá strana smysl, považujte ji za definiční obor příslušné funkce f a dokažte, že je v něm spojitá. Definiční obor popište geometricky.

14.03$^{\mathrm{o}}$. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

14.04$^{\mathrm{o}}$. $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x^2-y^2}$

14.05$^{\mathrm{o}}$. $f(x,y) = x^{\lg y}$

14.06$^{\mathrm{o}}$. $f(x,y) = \arcsin(\sqrt{x^2+y^2} - 2)$

14.07. $f(x,y,z) = \lg(x+y+z-1)$

14.08. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^y + y^z + z^x)$

14.09. $f(x,y,z) = \arccos(|x| + |y| + |z|)$

14.10. $f(x,y) = (\lg(x^2+y^2-1)\,,\ \lg(4-x^2-y^2))$

14.11. $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2-1}\,,\ \dfrac{x-y}{(x+y)^2-1}\right)$

14.12. $f(x,y,z) = \left(xyz \sin\dfrac{1}{xyz}\,,\ \dfrac{\cos xyz}{xyz}\right)$

14.13. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{yz}{\sin x}\,,\ \dfrac{xz}{\sin y}\,,\ \dfrac{xy}{\sin z}\right)$

14.14. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{e^x - e^{y+z}}\,,\ \dfrac{1}{e^y - e^{z+x}}\,,\ \dfrac{1}{e^z - e^{x+y}}\right)$

14.15. $f(x,y,z,u) = \dfrac{x^2+y^2+z^2+u^2+1}{x^2+y^2+z^2+u^2-1}$

Dokažte tato tvrzení o limitách v počátku prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$:

14.16$^{\mathbf{o}}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje

14.17$^{\mathbf{o}}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

14.18$^{\mathbf{o}}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = +\infty$

14.19$^{\mathbf{o}}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{|xy|+|x-y|}$ neexistuje

14.20$^{\mathbf{o}}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in K} \frac{\sin xy}{xy} = 1$, je-li $K := \mathbb{R}_+^2$

14.21$^{\mathbf{o}}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \lg(x^2+y^2) = 0$

14.22. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{1-\cos(x+y)}$ neexistuje

14.23. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = 0$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$

14.24. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\exp(-1/(x^2+y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} = 0$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}_+$

14.25. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|xyz|}{|xyz|+|x^2-yz|+|y^2-xz|+|z^2-xy|}$ neexistuje

* * *

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a je-li f zobrazení nějakého okolí $U(a) \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^q$, definujeme **derivaci** funkce f v bodě a rovností

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{10}$$

má-li její pravá strana smysl.

Poznámka 14.3. Definice derivace vektorové funkce zobecňuje pojem derivace skalární funkce (reálné proměnné), protože zavedená úmluva vylučuje nekonečné derivace skalárních funkcí. Dodejme, že ve vektorové analýze by nekonečné derivace složek vektorových funkcí vedly většinou jen ke komplikacím.

Poznámka 14.4. Je jistě zřejmé, že *derivace $f'(a)$ funkce $f = (f_1, \ldots, f_q)$ existuje, právě když existují derivace $f_j'(a)$ pro všechna $j = 1, \ldots, q$, načež*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_q'(a)). \tag{11}$$

Jinými slovy: *Existenci i hodnotu derivace vektorové funkce reálné proměnné lze ověřit a počítat „po složkách“.* $\square$

Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$, nechť $a \in \mathbb{R}^p$ a $v \in \mathbb{R}^p$; **derivace funkce f v bodě a ve směru vektoru v** je pak definována rovností

$$\partial_{(v)} f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}\,, \tag{12}$$

má-li její pravá strana smysl. Pro všechny takové derivace se užívá souhrnný název **směrové derivace**.

Poznámka 14.5. Klademe-li $p = 1$, $v = 1$, přejde (12) v (10); *směrové derivace jsou tedy zobecněním derivací ve smyslu definice* (10). V definici směrové derivace není vyloučen případ, že v je nulový vektor (i když podle běžné terminologie takový vektor žádný směr nemá). Situace je však velmi jednoduchá: *Je-li $v = 0$, je $\partial_{(v)} f(a) = 0$, právě když je funkce f v bodě a definována.*

Směrová derivace je *homogenní* v tomto smyslu: *Je-li $v \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, je*

$$\partial_{(\lambda v)} f(a) = \lambda \partial_{(v)} f(a)\,, \text{ má-li pravá strana rovnosti smysl.} \tag{13}$$

Jak však ukáže následující příklad, *směrová derivace není obecně aditivní* (*tedy obecně ani lineární*) *funkcí vektoru v.*

Příklad 14.3$^{\mathbf{o}}$. Nechť

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{array} \right\} \tag{14}$$

a nechť $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$; pak je

$$\partial_{(v)} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 v_1^2 \cdot t v_2}{t \cdot t^2 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\,,$$

což jistě není aditivní vzhledem k v. (Derivace ve směrech $(1,0)$ a $(0,1)$ jsou nulové, zatímco derivace ve směru $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ je rovna $\frac{1}{2}$.) $\square$

Označení. *Jednotkový vektor i-té souřadnicové osy*, tedy vektor, který má i-tou složku rovnou 1, zatímco ostatní složky jsou nulové, budeme v dalším značit e_i.[4])

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$, nechť $a \in \mathbb{R}^p$ a nechť $1 \le i \le p$; **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme rovností

$$\partial_i f(a) := \partial_{(e_i)} f(a)\,, \tag{15}$$

má-li její pravá strana smysl. $\square$

Má-li i-tá proměnná nějaký název, např. x_i, $y_i, \ldots$, užíváme pro právě zavedenou parciální derivaci i označení

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\,, \; \frac{\partial f(a)}{\partial y_i}\,, \; \ldots\,.$$

[4]) V označení chybí dimenze příslušného prostoru, protože bude vždy zřejmá ze souvislosti.

Značíme-li v $\mathbb{R}^3$ proměnné x, y, z a je-li $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, můžeme příslušné parciální derivace zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z}\,.$$

Poznámka 14.6. Podle definice je parciální derivace $\partial_i f(a)$ rovna

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\cdots,a_p) - f(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_p)}{t}\,; \tag{16}$$

v čitateli se mění pouze i-tá souřadnice, ostatní souřadnice jsou konstantní. Položíme-li tedy

$$\varphi_i(t) := f(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_p)\,, \tag{17}$$

je patrné, že

$$\partial_i f(a) = \varphi_i'(a_i)\,. \tag{18}$$

Parciální derivování podle i-té proměnné se tedy redukuje na „obyčejné“ derivování podle této proměnné, při němž se ostatní proměnné chovají jako konstanty.

Čtenář snadno ověří, že pro *vektorové* funkce f, g platí rovnost

$$\partial_i(f \pm g)(a) = \partial_i f(a) \pm \partial_i g(a)\,, \tag{19}$$

má-li pravá strana smysl; pro *skalární* funkce je navíc

$$\partial_i(fg)(a) = \partial_i f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot \partial_i g(a)\,, \tag{20}$$

má-li pravá strana smysl, a

$$\partial_i\Big(\frac{f}{g}\Big)(a) = \frac{\partial_i f(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot\partial_i g(a)}{g^2(a)}\,, \tag{21}$$

má-li pravá strana smysl.

Příklad 14.4$^\mathbf{o}$. 1. Definičním oborem funkce $f(x,y) := x^y$ $(= \exp(y \lg x))$ je otevřená polorovina $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; v každém jejím bodě (x,y) je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \lg x\,.$$

2. Vektorová funkce $f(x,y,z) := \big(e^{xyz},\ z\sin(x/y)\big)$ má ve svém definičním oboru $\{(x,y,z);\ y \neq 0\}$ (geometricky: $\mathbb{R}^3$ bez roviny xz) tyto parciální derivace:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \Big(yz\,e^{xyz},\ \frac{z}{y}\cos\frac{x}{y}\Big),\quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \Big(xz\,e^{xyz},\ -\frac{xz}{y^2}\cos\frac{x}{y}\Big),$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \Big(xy\,e^{xyz},\ \sin\frac{x}{y}\Big).$$

3. Funkce $f(x,y)$ definovaná v $\mathbb{R}^2$ předpisem $f(x,y) := 1$, je-li y racionální, a $f(x,y) := 0$, je-li y iracionální, má parciální derivaci podle x rovnou 0 všude v $\mathbb{R}^2$, zatímco její parciální derivace podle y neexistuje nikde. □

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ a nechť $a \in \mathbb{R}^p$; říkáme, že lineární forma $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ je **diferenciál funkce f v bodě** a, je-li

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\| h \|} = 0 . \tag{22}$$

Tento diferenciál (tedy formu L) budeme značit $Df(a)$, jeho hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^p$ (tj. q-rozměrný vektor $L(h)$) zapíšeme ve tvaru $Df(a;h)$. Existuje-li $Df(a)$, říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a. □

Je zřejmé, že *funkce $f = (f_1, \dots, f_q)$ je diferencovatelná v bodě a, právě když jsou v bodě a diferencovatelné všechny funkce f_j, kde $j = 1, \dots, q$; je-li podmínka splněna, je*

$$Df(a) = (Df_1(a), \dots, Df_q(a)) . \quad \square \tag{23}$$

Poznámka 14.7. Jak je dobře známo z algebry, existuje pro každou lineární formu $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ právě jedna matice

$$\Lambda = (\lambda_{ji})_{1\le j\le q,\, 1\le i\le p} \tag{24}$$

typu $q \times p$ tak, že rovnost $y = L(x)$ je ekvivalentní s maticovou rovností

$$y = \Lambda x , \tag{25}$$

kde vpravo je maticový součin matice Λ s vektorem x, který je třeba v této souvislosti považovat za vektor *sloupcový*, tedy za matici typu $p \times 1$; vlevo je sloupcový vektor y, tentokrát ovšem matice typu $q \times 1$. (Chceme-li zdůraznit, že y a x jsou sloupcové vektory, můžeme psát např. $y^{sl} = \Lambda x^{sl}$.)

Rovnost (25) lze podrobněji napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{q1} & \lambda_{q2} & \dots & \lambda_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} , \tag{25'}$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p , \\ y_2 &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ y_q &= \lambda_{q1}x_1 + \lambda_{q2}x_2 + \ldots + \lambda_{qp}x_p . \end{aligned} \tag{26}$$

Λ se nazývá **matice lineární formy** L, L je obráceně **lineární forma daná maticí** Λ. Je-li $L = (L_1, \dots, L_q)$ a jsou-li e_i jednotkové vektory souřadnicových os v $\mathbb{R}^p$, je

$$\lambda_{ji} = L_j(e_i) \text{ pro } i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, q. \quad \Box \tag{27}$$

Definice. Je-li zobrazení f z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ diferencovatelné v bodě a, definujeme **derivaci** f **v bodě** a jako matici lineární formy $Df(a)$ a značíme ji $f'(a)$.

Poznámka 14.8. Jak snadno nahlédneme, je právě zavedená derivace zobecněním derivace (10); ztotožníme-li jednoelementovou matici s jejím jediným elementem, je právě zavedená derivace také zobecněním derivace reálné funkce reálné proměnné podle běžné definice – nezapomeňme, že připouštíme jen konečné derivace.

Věta 14.1. *Každá funkce f má v daném bodě a nejvýše jeden diferenciál.*

Věta 14.2. *Je-li funkce f v bodě a diferencovatelná, je v něm spojitá.*

Věta 14.3. *Je-li zobrazení $f = (f_1, \dots, f_q)$ z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ diferencovatelné v bodě $a \in \mathbb{R}^p$, je*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_p f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_p f_2(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q(a) & \partial_2 f_q(a) & \dots & \partial_p f_q(a) \end{pmatrix}; \tag{28}$$

v bodě a pak existují všechny směrové derivace $\partial_{(v)} f(a)$ a je

$$\partial_{(v)} f(a) = Df(a; v) = f'(a)v \text{ pro každé } v \in \mathbb{R}^p. \tag{29}$$

Věta 14.4. *Jsou-li všechny parciální derivace $\partial_i f_j$, kde $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, spojité v bodě a, je funkce f v bodě a diferencovatelná.*

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená množina. Říkáme, že **funkce** $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ **je třídy** C_1 neboli **spojitě diferencovatelná v** Ω, jsou-li všechny její parciální derivace $\partial_i f$, $i = 1, \dots, p$, spojité v Ω. $\Box$

Věta 14.4 je sice nejdůležitějším praktickým kritériem diferencovatelnosti, čtenář se však v následujícím cvičení sám přesvědčí, že *podmínka v ní uvedená je jen postačující, nikoli nutná.*

Cvičení 14.26°. Dokažte, že reálná funkce f definovaná v $\mathbb{R}^p$ podmínkami

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \|x\|^2 \sin \dfrac{1}{\|x\|^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{Bmatrix} \tag{30}$$

je v počátku $0 \in \mathbb{R}^p$ diferencovatelná, zatímco všechny její parciální derivace jsou v tomto bodě nespojité. $\Box$

Věta 14.5. (Věta o diferencování superpozice.) *Je-li zobrazení f z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ diferencovatelné v bodě $a \in \mathbb{R}^p$ a je-li zobrazení g z $\mathbb{R}^q$ do $\mathbb{R}^r$ diferencovatelné v bodě $f(a)$, je superpozice $h := g \circ f$ diferencovatelná v bodě a, přičemž*

$$Dh(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a), \quad h'(a) = g'(f(a))\, f'(a). \tag{31}$$

Poznámka 14.9. Podle věty 14.3 lze druhou z rovností (31) rozepsat takto:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 h_1 & \dots & \partial_p h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 h_r & \dots & \partial_p h_r \end{pmatrix}(a) = \tag{32}$$
$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \dots & \partial_q g_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 g_r & \dots & \partial_q g_r \end{pmatrix}(f(a)) \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q & \dots & \partial_p f_q \end{pmatrix}(a).$$

Pro každé $i = 1, \dots, p$ a každé $k = 1, \dots, r$ je tedy

$$\partial_i h_k(a) = \sum_{j=1}^{q} \partial_j g_k(f(a)) \cdot \partial_i f_j(a). \tag{33}$$

Značíme-li $x = (x_1, \dots, x_p)$ a $y = (y_1, \dots, y_q)$ proměnné v $\mathbb{R}^p$ a v $\mathbb{R}^q$, získáme místo (33) tento dobře zapamatovatelný a velmi důležitý vzorec pro diferencování superpozice:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))\, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, p, \ k = 1, \dots, r, \tag{34}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a))\, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \quad \text{pro} \quad i = 1, \dots, p. \tag{35}$$

Příklad 14.5. Nechť $f = (f_1, f_2, f_3)$ je třírozměrná vektorová funkce dvou (reálných) proměnných u, v a nechť g je (skalární nebo vektorová) funkce tří proměnných x, y, z. Hodnoty jejich superpozice $h = g \circ f$ získáme z hodnot $g(x, y, z)$ funkce g tím, že x, y, z nahradíme po řadě výrazy $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$, $f_3(u, v)$. Jsou-li splněny předpoklady V. 14.5, je

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial v}, \tag{36}$$

přičemž parciální derivace funkcí h a f_j jsou v bodě $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, parciální derivace funkce g v bodě $f(u, v) \in \mathbb{R}^3$.

Příklad 14.6. Nechť f je čtyřrozměrná vektorová funkce reálné proměnné t, nechť g je funkce čtyř proměnných u_j, $1 \le j \le 4$, a nechť $h = g \circ f$. Za předpokladů V. 14.5 pak je

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial g}{\partial u_j}(f(t))\, f_j'(t)\,. \tag{37}$$

Protože h a f_j jsou funkce jedné proměnné, neužili jsme symbol pro parciální, ale pro „obyčejnou" derivaci; nebylo by samozřejmě chybné napsat znak parciální derivace (protože parciální derivace funkce jedné reálné proměnné je identická s její „obyčejnou" derivací), ale takto je na první pohled vidět, které funkce v (37) jsou funkcemi jen jedné proměnné.

Příklad 14.7$^{\mathbf{o}}$. Pozor! *Rovnosti* (32) $-$ (35) *obecně neplatí za pouhého předpokladu, že jejich pravé strany mají smysl; diferencovatelnost je ve větě* 14.5 *podstatná!*

Je-li totiž např. $g(x,y) := \sqrt{|xy|}$ pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a $f(t) := (t,t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, není superpozice $h(t) := g(f(t)) = |t|$ diferencovatelná v bodě $t = 0$, ale výraz

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\, f_1'(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\, f_2'(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$$

má dobrý smysl. $\square$

Vztahy mezi spojitostí a diferencovatelností funkce a existencí resp. linearitou jejích směrových derivací nepatří mezi nejjednodušší; tím spíše je nutné vyvarovat se intuitivních soudů nepodložených exaktní argumentací. Následující cvičení dává možnost aspoň trochu nahlédnout do spleti možností na první pohled netušených.

Cvičení 14.27$^{\mathbf{o}}$. V počátku $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nechť jsou funkce f, g a h rovny nule, zatímco v bodech $(x,y) \ne (0,0)$ nechť je

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\,, \quad g(x,y) := \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}\,, \quad h(x,y) := \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4}\,. \tag{38}$$

Ověřte platnost těchto tvrzení:

1) Všechny tři funkce f, g, h jsou na obou souřadnicových osách (identicky) rovny 0 a jsou spojité na každé přímce v $\mathbb{R}^2$. [5])

2) Funkce f není v počátku spojitá, tedy ani diferencovatelná, ačkoli všechny její směrové derivace tam existují.

3) Funkce g není v počátku spojitá, tedy ani diferencovatelná, přestože se směrová derivace $\partial_{(v)}\, g(0,0)$ rovná 0 pro každé $v \in \mathbb{R}^2$, takže je lineární funkcí vektoru v.

4) Funkce h je v počátku spojitá, ale není tam diferencovatelná, přestože všechny její směrové derivace $\partial_{(v)}\, h(0,0)$ jsou rovny nule.

[5]) Jde zejména o přímky procházející počátkem, protože spojitost na jiných přímkách je zřejmá.

Rada: K důkazu nespojitosti funkcí f a g vyšetřujte tyto funkce na parabole s rovnicí $y = x^2$; spojitost funkce h dokážete užitím nerovnosti $x^4y^2 \le x^8 + y^4$. Kdyby byla funkce h diferencovatelná v počátku, byl by tam její diferenciál nulovou formou (proč?) a šlo by o to, zdali má výraz $h(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \to (0,0)$ limitu 0 – zkuste však opět dosadit $y = x^2$. $\diamond$

* * *

Je-li f diferencovatelná skalární funkce p proměnných, je její derivace matice typu $1 \times p$, takže ji lze považovat i za p-rozměrný vektor. Nazývá se pak **gradient** funkce f a značí se $\operatorname{grad} f$; je tedy

$$\operatorname{grad} f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_p f)\,. \tag{39}$$

Hodnotu funkce $\operatorname{grad} f$ v bodě $a \in \mathbb{R}^p$ budeme zpravidla značit $\operatorname{grad} f(a)$, i když bychom správně měli psát $(\operatorname{grad} f)(a)$.

Pro každou diferencovatelnou skalární funkci f lze hodnoty diferenciálu v bodě $a \in \mathbb{R}^p$ (tedy směrové derivace) napsat i jako skalární součin:

$$Df(a;v) = \partial_{(v)} f(a) = (\operatorname{grad} f(a) \cdot v) \quad \text{pro každé} \quad v \in \mathbb{R}^p\,. \tag{40}$$

V případě, že f je funkce jedné proměnné, měří $f'(a)$ rychlost změny této funkce v bodě a. Je-li f funkce p proměnných, měří rychlost změny funkce f v bodě a na přímce určené bodem a a jednotkovým vektorem e_i parciální derivace $\partial_i f(a)$, zatímco na obecné přímce určené bodem a a *jednotkovým* vektorem v hraje podobnou úlohu směrová derivace $\partial_{(v)} f(a)$.[6])

Následující cvičení ukazuje, ve kterých směrech se f mění nejrychleji.

Cvičení 14.28. Užijte (40) spolu s dobře známou identitou[7])

$$(V \cdot W) = \|V\| \cdot \|W\| \cdot \cos\alpha\,, \tag{41}$$

kde α je úhel sevřený vektory V, W, a dokažte, že *za předpokladu, že* $\operatorname{grad} f(a) \ne 0$, *platí toto tvrzení:*

(42) *Na jednotkové sféře* $\|v\| = 1$ *nabývá derivace* $\partial_{(v)} f(a)$ *svou maximální* (*resp. minimální*) *hodnotu pro* $v = \operatorname{grad} f(a)/\|\operatorname{grad} f(a)\|$ (*resp. pro* $v = -\operatorname{grad} f(a)/\|\operatorname{grad} f(a)\|$).

Je-li tedy $\operatorname{grad} f(a) \ne 0$, *má tento vektor směr největšího růstu funkce* f *v bodě* a, *zatímco ve směru* $-\operatorname{grad} f(a)$ *funkce* f *nejrychleji klesá.*

[6]) Podmínku $\|v\| = 1$ je nutné klást proto, že směrová derivace $\partial_{(v)} f(a)$ nezávisí jen na směru vektoru v, ale je přímo úměrná normě tohoto vektoru – sr. s (13). Máme-li srovnávat rychlosti růstu, je třeba užívat na každé přímce procházející bodem a stejné měřítko.

[7]) Viz např. [20].

Poznámka 14.10. Cílem Cv. 14.29–14.52 je procvičení parciálního derivování a nalezení bodů, v nichž je daná funkce spojitá, aniž má spojitou derivaci; cílem naopak *není* řešit problém, zdali do definičního oboru funkce tvaru $g(x)^{h(x)}$ máme započítat i některé body, v nichž g není kladná. [8]) V těchto cvičeních budeme v případě, že h je nekonstantní (reálná) funkce, definovat

$$g(x)^{h(x)} := \exp\left(h(x) \lg\left(g(x)\right)\right);$$

definičním oborem této funkce je pak množina $\{x \in \mathbb{R}^p;\ g(x) \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \in \mathbb{R}\}$.

Cvičení

Pro každou z následujících funkcí najděte definiční obor a dokažte, že je v něm spojitá; pak najděte maximální otevřenou množinu Ω, v níž je daná funkce třídy C_1, a vypočtěte tam její derivaci.

14.29$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4 - y^2}$

14.30$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

14.31$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

14.32$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

14.33$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \arcsin x^y$

14.34$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \arccos \dfrac{2(x+y)}{(x+y)^2 + 1}$

14.35$^{\text{o}}$. $f(x,y) = (\lg x)^{\lg y}$

14.36$^{\text{o}}$. $f(x,y) = \lg(x^2 + y^2 - 1)$

14.37. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

14.38. $f(x,y,z) = \sqrt{|xy^2z^3|}$

14.39. $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)/z^2}$

14.40. $f(x,y,z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

14.41. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(x \sin \dfrac{y}{z}\right)$

14.42. $f(x,y,z) = \arccos \dfrac{1}{\cosh(x^2 + y^2 + z^2)}$

14.43. $f(x,y) = \left(xy \sin \dfrac{x}{y},\ \dfrac{y}{x} \cos xy\right)$

---

[8]) Pro funkce jedné proměnné jsme definiční obor funkce dané „vzorcem“ definovali jako sjednocení všech intervalů, v nichž má vzorec všude smysl. Viz str. 53 a 85 Úvodu.

14.44. $f(x,y) = \left(y^{\sin x}, x^{\sin y}\right)$

14.45. $f(x,y) = \left(\lg xy\,,\ \lg \dfrac{x}{y},\ \lg \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$

14.46. $f(x,y,z) = \left(\arcsin\sqrt{x^2+z^2}\,,\ \arccos\sqrt{y^2+z^2}\,\right)$

14.47. $f(x,y,z) = \left(xe^{yz}, ye^{zx}, ze^{xy}\right)$

14.48. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y^2+z^2}\,,\ \dfrac{y}{z^2+x^2}\,,\ \dfrac{z}{x^2+y^2}\right)$

14.49. $f(x,y,z,u) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy^2}{zu^2}$

14.50. $f(x,u,z,u) = (x^{yz/u},\ u^{x/yz})$

14.51. $f(x,y,z,u) = \left(\lg(1+x^2y^2+z^2u^2),\ \operatorname{arctg}(xy+zu),\ \operatorname{arccotg}\dfrac{xy}{zu}\right)$

14.52. $f(x,y,z,u) = (\sqrt[4]{xy}\,,\ \sqrt[4]{yz}\,,\ \sqrt[4]{zu}\,,\ \sqrt[4]{ux}\,)$

* * *

Je-li f dvojrozměrná vektorová funkce třídy C_1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jsou její **divergence** a **rotace** definovány (v Ω) rovnostmi

(43) $$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\,;$$

značíme-li proměnné x, y, je tedy

(43′) $$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} f := \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\,.$$

Divergence a rotace trojrozměrné vektorové funkce f třídy C_1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se definuje takto:

(44) $$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3\,,$$

(45) $$\operatorname{rot} f := \left(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\right);$$

značíme-li proměnné x, y, z, je tedy

(44′) $$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\,,$$

(45′) $$\operatorname{rot} f := \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Cvičení

Pro úsporu místa budeme v dalších cvičeních této kapitoly značit

(46) $$r := \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad R := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,;$$

úkolem Cv. 14.53 –14.66 je najít u každé z funkcí f maximální otevřenou množinu Ω, v níž je f třídy C_1, a v Ω pak vypočítat $\operatorname{div} f$ a $\operatorname{rot} f$.

14.53. $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{r}$

14.54. $f(x,y) = \dfrac{(-y,x)}{r}$

14.55. $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{r^2}$

14.56. $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{r^3}$

14.57. $f(x,y) = (x,y) \cdot \lg r^2$

14.58. $f(x,y) = (x,y) \cdot \operatorname{arctg} r$

14.59. $f(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{R}$

14.60. $f(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{R^2}$

14.61. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \lg R$

14.62. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{R}$

14.63. $f(x,y,z) = \dfrac{(yz, zx, xy)}{R}$

14.64. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right) \cdot \lg R$

14.65. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot xyz$

14.66. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot e^R$

* * *

Pro každou z dále uvedených funkcí f dokažte, že má v daném bodě a diferenciál, a pro uvedený vektor v vypočtěte $Df(a;v)$ (neboli $\partial_{(v)} f(a)$).

14.67^O. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $a = (1,1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.68^O. $f(x,y) = \lg(x + y^2 - 4)$, $a = (1,-2)$, $v = (v_1, v_2)$

14.69^O. $f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y)$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi)$, $v = (v_1, v_2)$

14.70^O. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $a = (1,-1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.71. $f(x,y,z) = xy^2z^3 \exp(-(x+y^2+z^3))$, $a = (1,1,-1)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.72. $f(x,y,z) = \arccos \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$, $a = (0,0,-2)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.73. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $a = (x,y,z) \neq (0,0,0)$,
$v = \operatorname{grad} f(a) / \| \operatorname{grad} f(a) \|$

14.74. $f(x,y) = (\lg(x+y), \lg(x-y))$, $a = (2,-1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.75. $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, $a = (-1,3)$, $v = (1,3)$

14.76. $f(x,y) = \left(x^y, y^x, (xy)^{xy}\right)$, $a = (1,1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.77. $f(x,y) = (x \sin y, y \sin x, xy)$, $a = (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$, $v = (v_1, v_2)$

14.78. $f(x,y,z) = (x^2z, y^2z)$, $a = (1,2,3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.79. $f(x,y,z) = \left(\lg \dfrac{xy}{z}, \lg \dfrac{yz}{x}, \lg \dfrac{zx}{y}\right)$, $a = (2,2,2)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.80. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \exp(x^2+y^2+z^2)$, $a = (1,-1,0)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.81. $f(x,y,z,u) = (x^2y, z^2u)$, $a = (1,-1,1,-1)$, $v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$

14.82. $f(x,y,z,u) = (xyz, xyu, xzu, yzu)$, $a = (1,0,1,0)$, $v = (v_1,v_2,v_3,v_4)$

* * *

Parciální derivace $\partial_i f$, $i = 1,\dots,p$, zobrazení f z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ se podrobněji nazývají **parciální derivace prvního řádu** nebo **řádu** 1. Parciální derivace vyšších řádů se definují indukcí: Předpokládejme, že pro některé $n \in \mathbb{N}$ a pro jistou n-tici čísel $i_1,\dots,i_n$, z nichž každé leží v množině $\{1,\dots,p\}$, je definována **parciální derivace**

$$\partial_{i_1\dots i_n} f \tag{47}$$

n-**tého řádu** (neboli **řádu** n) podle i_1-ní, ... , i_n-té proměnné. Je-li $1 \le i_{n+1} \le p$, položíme

$$\partial_{i_1\dots i_n i_{n+1}} f := \partial_{i_{n+1}}(\partial_{i_1\dots i_n} f)\,, \tag{48}$$

má-li pravá strana smysl. Funkci f je výhodné prohlásit za **derivaci nultého řádu** neboli **řádu** 0.

Jmenují-li se proměnné např. $x_1,\dots,x_p$, značíme derivaci (47) také

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}\,; \tag{49}$$

jsou-li $k_1,\dots,k_r$ *přirozená* čísla, jejichž součet je n, a je-li

$$\begin{aligned}
&m_1 := i_1 = \dots = i_{k_1}\,,\\
&m_2 := i_{k_1+1} = \dots = i_{k_1+k_2}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&m_r := i_{k_1+\dots+k_{r-1}+1} = \dots = i_{k_1+\dots+k_r}\,,
\end{aligned}$$

píše se (49) zpravidla ve tvaru

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{m_1}^{k_1}\,\partial x_{m_2}^{k_2}\dots\partial x_{m_r}^{k_r}}\,. \tag{50}$$

Obecněji lze v zápisu (50) předpokládat jen *nezápornost* celých čísel k_j (spolu s rovností $k_1 + \dots + k_r = n$); je-li $k_j = 0$ (pro některé j), znamená to, že se podle m_j-té proměnné nederivuje.

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina a jsou-li všechny parciální derivace funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně spojité v Ω, říkáme, že f je n-**krát spojitě diferencovatelná** neboli **třídy** C_n **v** Ω. Je-li f třídy C_n pro každé $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že f je **třídy** C_∞ (nebo že je **nekonečněkrát spojitě diferencovatelná**). Je-li f spojitá v Ω, říkáme, že je **třídy** C_0.

Poznámka 14.10. Při tvorbě n-té parciální derivace (47) (kde $n \geq 2$) *záleží obecně na pořadí indexů* i_m neboli *na pořadí, v němž funkci f podle jednotlivých proměnných derivujeme.*

Je-li f např. funkce dvou proměnných x, y, jsou její „smíšené“ [9]) derivace druhého řádu definovány rovnostmi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big). \tag{51}$$

I když obě existují, nemusí mít touž hodnotu, jak ukazuje tento příklad:

Příklad 14.8$^{\mathbf{O}}$. Vypočtěme v počátku $(0,0)$ smíšené parciální derivace (51) funkce f definované v $\mathbb{R}^2$ předpisem

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{l} xy\,, \text{ je-li } |x| \geq |y| \\ \;0\,, \text{ je-li } |x| < |y| \end{array} \right\}. \tag{52}$$

Je-li $y \neq 0$, je $f(x,y) = 0$ ve všech bodech (x,y), pro něž je $|x| < |y|$, takže i $\partial f(0,y)/\partial x = 0$; protože $f = 0$ na celé ose x, platí výsledek i pro $y = 0$. Na ose y je tedy $\partial f/\partial x \equiv 0$ a v důsledku toho $\partial^2 f(0,0)/\partial x \partial y = 0$.

Je-li $x \neq 0$, je $f(x,y) = xy$ ve všech bodech (x,y), pro něž je $|y| \leq |x|$, takže $\partial f(x,0)/\partial y = x$; protože $f = 0$ na celé ose y, výsledek platí i pro $x = 0$. Na ose x, tedy speciálně i v počátku, je v důsledku toho $\partial^2 f/\partial y \partial x \equiv 1$. $\square$

Za velmi jednoduchých a zpravidla snadno ověřitelných předpokladů se však to, co jsme viděli v právě uvedeném příkladu, stát nemůže:

Věta 14.6. (Záměnnost parciálních derivací vyšších řádů.) *Je-li $n \geq 2$, je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina, je-li $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ funkce třídy C_n v Ω a je-li pořadí $(j_1, \ldots, j_n)$ permutací pořadí $(i_1, \ldots, i_n)$, platí v Ω identita*

$$\partial_{j_1,\ldots,j_n} f = \partial_{i_1,\ldots,i_n} f\,. \tag{53}$$

Za této situace tedy záleží jen na tom, kolikrát podle té které proměnné derivujeme; na pořadí nezáleží. V důsledku toho např. u funkce dvou proměnných x, y stačí místo $2^{10} = 1024$ parciálních derivací desátého řádu počítat jen 11 derivací

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10}}\,, \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial x^9 \partial y}\,, \;\ldots\,, \; \frac{\partial^{10} f}{\partial x \partial y^9}\,, \quad \frac{\partial^{10} f}{\partial y^{10}}\,, \tag{54}$$

neboli derivací

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10-i} \partial y^i}\,, \text{ kde } i = 0, 1, \ldots, 10\,. \tag{54'}$$

* * *

[9]) Tento název se užívá pro parciální derivace řádů ≥ 2, v nichž se nederivuje stále podle téže proměnné.

V dalších cvičeních této kapitoly budeme opět užívat označení

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad R := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{46}$$

Cvičení 14.83. Užijte V. 14.6 a najděte všechny parciální derivace 2. řádu funkcí

$$f(x, y) := e^{x-y} \sin(x - y)\,, \; g(x, y, z) := \frac{1}{R^2}\,. \tag{55}$$

Cvičení 14.84. Užijte V. 14.6 a najděte všechny parciální derivace 3. řádu funkcí

$$f(x, y) := x^2 y^4\,, \; g(x, y, z) := x^2 y^3 z^4\,. \tag{56}$$

Cvičení 14.85. Užijte V. 14.6 a najděte všechny parciální derivace 4. řádu funkce

$$f(x, y) := \lg(1 + xy) \tag{57}$$

v jejím definičním oboru.

* * *

Je-li funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ třídy C_2 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, definujeme

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{p} \partial_{ii} f\,. \tag{58}$$

Symbol Δ je tzv. **Laplaceův operátor**, v (58) jej aplikujeme na funkci f. Značíme-li x, y resp. x, y, z proměnné v $\mathbb{R}^2$ resp. v $\mathbb{R}^3$, bude mít (58) tvar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{resp.} \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{59}$$

Funkce f splňující v Ω identitu $\Delta f \equiv 0$ se nazývá **harmonická** (v Ω).

Cvičení 14.86. Pomocí V. 14.6 dokažte, že pro každou skalární funkci f dvou nebo tří proměnných a třídy C_2 v otevřené množině Ω platí (v Ω) identity

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f\,, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv 0\,. \tag{60}$$

Cvičení 14.87. Najděte maximální otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v nichž platí identity

$$\Delta(x^3 y^3) = 6xyr^2\,, \; \Delta\Big(\frac{xy}{r}\Big) = -\frac{3xy}{r^3}\,, \; \Delta\Big(\frac{x + y}{r^2}\Big) = 0\,, \; \Delta(x^4 + y^4) = 12r^2\,, \tag{61}$$

$$\Delta(\sin xy) = -r^2 \sin xy\,, \quad \Delta(\cosh xy) = r^2 \cosh xy\,, \tag{62}$$

a ověřte jejich platnost.

Cvičení 14.88. Najděte maximální otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v nichž platí identity

$$\Delta\,(x^2y^2z^2) = 2\,(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,, \quad \Delta\Big(\frac{xy}{z}\Big) = \frac{2xy}{z^3}\,, \tag{63}$$

$$\Delta\Big(\frac{x^2y^2}{z^2}\Big) = \frac{2\,(3x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)}{z^4}\,, \quad \Delta\Big(\frac{xyz}{R^3}\Big) = -\frac{12xyz}{R^5}\,, \tag{64}$$

$$\Delta\Big(\frac{x+y+z}{R}\Big) = -\frac{2\,(x+y+z)}{R^3}\,, \quad \Delta\,(x^4+y^4+z^4) = 12R^2\,, \tag{65}$$

a ověřte jejich platnost.

Cvičení 14.89. Dokažte, že funkce

$$xy\,,\ x^2 - y^2\,,\ x\,(x^2 - 3y^2)\,,\ y\,(3x^2 - y^2) \tag{66}$$

jsou harmonické v $\mathbb{R}^2$.

Cvičení 14.90. Nechť je $f(x)$ rovno buď $\sin x$, nebo $\cos x$ a $g(y)$ buď $\sinh y$, nebo $\cosh y$. Dokažte, že pak je $f(x)\,g(y)$ funkce harmonická v $\mathbb{R}^2$.

Cvičení 14.91. Dokažte, že funkce

$$\lg r\,,\ \operatorname{div}((\lg r,\, \lg r))\,,\ \operatorname{div}((x \lg r, y \lg r)) \tag{67}$$

jsou harmonické v $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Cvičení 14.92. Dokažte, že funkce

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \quad x \lg r - y \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{68}$$

jsou harmonické v množině $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \neq 0\}$.

Cvičení 14.93. Dokažte, že funkce

$$xyz\,,\ 5\,(x^4 + y^4 + z^4) - 3R^4\,,\ x^2(x - 3y) + y^2(y - 3z) + z^2(z - 3x) \tag{69}$$

jsou harmonické v $\mathbb{R}^3$.

Cvičení 14.94. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\Delta\Big(\frac{1}{r^\alpha}\Big) = \frac{\alpha^2}{r^{2+\alpha}} \ \text{ v } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,, \quad \Delta\Big(\frac{1}{R^\alpha}\Big) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{R^{2+\alpha}} \ \text{ v } \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}\,. \tag{70}$$

Cvičení 14.95. Dokažte, že

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}((x \lg r^2,\, y \lg r^2))) = \frac{4\,(x,y)}{r^2} \ \text{ v } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,. \tag{71}$$

Cvičení 14.96. Dokažte, že pro funkce definované v $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ rovnostmi

$$f(x,y) := \Big(\frac{x}{r}\,,\,\frac{y}{r}\Big),\;\; f^*(x,y) := \Big(\frac{-y}{r}\,,\,\frac{x}{r}\Big), \tag{72}$$

$$g(x,y) := \Big(\frac{x}{r^2}\,,\,\frac{y}{r^2}\Big),\;\; g^*(x,y) := \Big(\frac{-y}{r^2}\,,\,\frac{x}{r^2}\Big) \tag{73}$$

platí v Ω identity

$$\operatorname{div} f(x,y) = \operatorname{rot} f^*(x,y) = \frac{1}{r}\,,\;\; \operatorname{rot} f(x,y) = \operatorname{div} f^*(x,y) \equiv 0\,, \tag{74}$$

$$\operatorname{div} g(x,y) = \operatorname{rot} g(x,y) = \operatorname{div} g^*(x,y) = \operatorname{rot} g^*(x,y) \equiv 0\,. \tag{75}$$

Cvičení 14.97. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí v $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ rovnost

$$\Delta\Big(\operatorname{div}\Big(\frac{x}{r^\alpha}\,,\,\frac{y}{r^\alpha}\Big)\Big) = \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{r^{2+\alpha}}\,. \tag{76}$$

Cvičení 14.98. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí v $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ rovnosti

$$\Delta(\lg R) = \frac{1}{R^2}\,,\;\; \Delta\Big(\frac{\lg R}{R}\Big) = -\frac{1}{R^3}\,. \tag{77}$$

Cvičení 14.99. Dokažte, že funkce

$$f(x,y,z) := \frac{(x,y,z)}{R}\,,\;\; g(x,y,z) := \frac{(x,y,z)}{R^2}\,,\;\; h(x,y,z) := \frac{(x,y,z)}{R^3} \tag{78}$$

splňují v $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ identity

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \frac{2}{R}\,,\quad \operatorname{grad}(\operatorname{div} f(x,y,z)) = -\frac{2\,(x,y,z)}{R^3}\,, \tag{79}$$

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = \frac{1}{R^2}\,,\;\; \operatorname{grad}(\operatorname{div} g(x,y,z)) = -\frac{2\,(x,y,z)}{R^4}\,, \tag{80}$$

$$\operatorname{div} h(x,y,z) = 0\,,\quad \operatorname{grad}(\operatorname{div} h(x,y,z)) = (0,0,0)\,. \tag{81}$$

Cvičení 14.100. Dokažte, že v $\mathbb{R}^3$ platí identity

$$\operatorname{div}(e^{xyz}, e^{xyz}, e^{xyz}) = e^{xyz}(xy + xz + yz)\,, \tag{82}$$

$$\operatorname{rot}(e^{xyz}, e^{xyz}, e^{xyz}) = e^{xyz}(x(z-y), y(x-z), z(y-x))\,, \tag{83}$$

$$\Delta(e^{xyz}) = e^{xyz}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,. \tag{84}$$

Řešení

Následující poznámky k řešení Cv. 14.03 – 14.15 obsahují hlavně geometrický popis definičních oborů funkcí z jednotlivých cvičení.

14.03. Rovina bez přímky $y = x$, tj. bez osy 1. a 3. kvadrantu.

14.04. Rovina bez os $y = \pm x$ kvadrantů.

14.05. Definičním oborem funkce $x^{\lg y} \equiv \exp(\lg x \lg y)$ je otevřený 1. kvadrant $\mathbb{R}^2_+ \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, x > 0,\, y > 0\}$.

14.06. Uzavřené mezikruží $M := \overline{U((0,0), 3)} - U((0,0), 1)$.

14.07. Otevřený poloprostor, který neobsahuje počátek a jehož hranicí je rovina $x + y + z = 1$ procházející body $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

14.08. Otevřený 1. oktant, tj. množina $\mathbb{R}^3_+$.

14.09. Uzavřený osmistěn s vrcholy $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.

14.10. Otevřené mezikruží $U((0,0), 2) - \overline{U((0,0), 1)}$.

14.11. Rovina bez přímek $y = x \pm 1$ a $y = -x \pm 1$.

14.12. Prostor $\mathbb{R}^3$ bez souřadnicových rovin xy, yz, zx.

14.13. Sjednocení nekonečně mnoha otevřených krychlí s délkou hrany π, které vzniknou z $\mathbb{R}^3$ vynecháním všech rovin $x \equiv 0 \bmod \pi$, $y \equiv 0 \bmod \pi$ a $z \equiv 0 \bmod \pi$.

14.14. $\mathbb{R}^3$ bez rovin $x = y + z$, $y = z + x$ a $z = x + y$ (procházejících počátkem).

14.15. Prostor $\mathbb{R}^4$ bez příslušné jednotkové sféry $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$.

V poznámkách k řešení Cv. 14.16 – 14.25 znamená f funkci za znamením limity v příslušném cvičení; neexistence limity se dokazuje pomocí tvrzení z Po. 14.2.

14.16. S výjimkou počátku je f rovna 0 na osách a $\frac{1}{2}$ na přímce $y = x$.

14.17. Z odhadu $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (platného pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) plyne, že $|f(x, y)| \le |y|$.

14.18. V polárních souřadnicích je $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 1/(r^2 g(\varphi))$ a všechny hodnoty funkce $g(\varphi) := \cos^4\varphi + \sin^4\varphi = \frac{1}{4}(3 + \cos 4\varphi)$ leží mezi $\frac{1}{2}$ a 1.

14.19. S výjimkou počátku je $f = 0$ na osách a $f = 1$ na přímce $y = x$.

14.20. Protože $x \to 0+$, $y \to 0+ \;\Rightarrow\; z := xy \to 0+$ a $z \to 0 \;\Rightarrow\; (\sin z)/z \to 1$, stačí aplikovat větu o limitě superpozice.

14.21. Je $|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \le r^2 |\lg r^2|$, což pro $r \to 0+$ konverguje k 0.

14.22. Je-li $y = -x$, je ve jmenovateli 0, takže není splněna nutná podmínka pro existenci limity, totiž že daná funkce je definována v jistém prstencovém okolí daného bodu. (Limity vzhledem k 1. a k 3. kvadrantu by však byly rovny 2.)

14.23. Je-li $R := \|(x, y, z)\|$, je $0 \le f(x, y, z) \le R^{2\alpha} \to 0$ pro $R \to 0+$.

14.24. Je-li $R := \|(x, y, z)\|$, je $f(x, y, z)$ rovno $R^{-2\alpha}\exp(-R^{-2})$, což má pro $R \to 0+$ limitu 0, protože substitucí $s = 1/R$ dostaneme $\lim_{s\to+\infty} s^{2\alpha} e^{-s^2} = 0$.

14.25. S výjimkou počátku je $f = 0$ ve všech souřadnicových rovinách a $f = 1$ na přímce $x = y = z$.

V řešení Cv. 14.29 – 14.52 uvádíme nejdříve definiční obor a množinu Ω, za středníkem je derivace funkce f v Ω; z typografických důvodů však někdy místo matice f' píšeme její řádky, tedy derivace (neboli gradienty) složek f_j funkce f.

14.29. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,y);\, y = \pm x^2\};\ \dfrac{(-y^2(3x^4+y^2),\ 2x^5y)}{(x^4-y^2)^2}$

14.30. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\};\ \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

14.31. $\mathcal{D}(f) = \{(x,y);\, xy \ge 0\}$, $\Omega = \{(x,y);\, xy > 0\};\ \dfrac{(y,x)}{2\sqrt{xy}}$

14.32. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{(x,y);\, xy \ne 0\};\ \dfrac{\operatorname{sgn}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \cdot (y,x)$

14.33. $\mathcal{D}(f) = (0,1\rangle \times \langle 0,+\infty) \cup \langle 1,+\infty) \times (-\infty,0\rangle$,

$$\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}_+ \cup (1,+\infty) \times \mathbb{R}_-;\ \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}} \cdot (y, x\lg x)$$

14.34. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{(x,y);\, x+y \ne \pm 1\};\ \dfrac{2\operatorname{sgn}((x+y)^2-1)}{(x+y)^2+1} \cdot (1,1)$

14.35. $\mathcal{D}(f) = \Omega = (1,+\infty) \times \mathbb{R}_+;\ (\lg x)^{\lg y - 1} \cdot \Big(\dfrac{\lg y}{x},\ \dfrac{\lg x\ \lg(\lg x)}{y}\Big)$

14.36. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y);\, x^2+y^2 > 1\};\ \dfrac{2(x,y)}{x^2+y^2-1}$

14.37. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\ x^{y^z-1} y^{z-1} \cdot (y,\ xz\lg x,\ xy\lg x\lg y)$

14.38. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$, $\Omega = \{(x,y,z);\, xyz \ne 0\};\ \dfrac{(yz^3, 2xz^3, 3xyz^2)\operatorname{sgn}(xyz)}{2\sqrt{|xz^3|}}$

14.39. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y,z);\, z \ne 0\};\ 2z^{-3} e^{-(x^2+y^2)/z^2} \cdot (-xz,\ -yz,\ x^2+y^2)$

14.40. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^3$;

$$\cos(x\sin(y\sin z)) \cdot (\sin(y\sin z),\ x\cos(y\sin z)\sin z,\ xy\cos(y\sin z)\cos z)$$

14.41. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y,z);\, z \ne 0\};\ \dfrac{\Big(z^2\sin\dfrac{y}{z},\ xz\cos\dfrac{y}{z},\ -xy\cos\dfrac{y}{z}\Big)}{z^2\Big(1+x^2\sin^2\dfrac{y}{z}\Big)}$

14.42. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^3;\ \dfrac{2(x,y,z)}{\cosh(x^2+y^2+z^2)}$

14.43. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y);\, xy \ne 0\}$;

$$\begin{pmatrix} y\sin\dfrac{x}{y} + x\cos\dfrac{x}{y} & x\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{x^2}{y}\cos\dfrac{x}{y} \\ -\dfrac{y\cos xy + xy\sin xy}{x^2} & \dfrac{\cos xy}{x} - y\sin xy \end{pmatrix}$$

14.44. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^2_+$; $\begin{pmatrix} y^{\sin x}\cos x\ \lg y & y^{\sin x-1}\sin x \\ x^{\sin y-1}\sin y & x^{\sin y}\cos y\ \lg x\end{pmatrix}$

14.45. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^2_+$; $f_1'\,:\,\Big(\dfrac{1}{x}\,,\,\dfrac{1}{y}\Big)$; $f_2'\,:\,\Big(\dfrac{1}{x}\,,\,-\dfrac{1}{y}\Big)$;

$f_3'\,:\Big(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\Big)$

14.46. $\mathcal{D}(f)=\{(x,y,z);\,x^2+z^2\le 1,\,y^2+z^2\le 1\}$,

$\Omega=\{(x,y,z);\,0<x^2+z^2<1,\,0<y^2+z^2<1\}$;

$f_1'\,:\,\dfrac{(x,0,z)}{\sqrt{(1-x^2-z^2)(x^2+z^2)}}$; $f_2'\,:\,\dfrac{-(0,y,z)}{\sqrt{(1-y^2-z^2)(y^2+z^2)}}$

14.47. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^3$; $f_1'\,:\,e^{yz}\cdot(1,xz,xy)$; $f_2'\,:\,e^{zx}\cdot(yz,1,xy)$;

$f_3'\,:\,e^{xy}\cdot(yz,xz,1)$

14.48. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^3-(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}\cup\mathrm{Z})$, kde X, Y, Z jsou souřadnicové osy;

$f_1'\,:\,\dfrac{(y^2+z^2,-2xy,-2xz)}{(y^2+z^2)^2}$; $f_2'\,:\,\dfrac{(-2xy,x^2+z^2,-2yz)}{(x^2+z^2)^2}$;

$f_3'\,:\,\dfrac{(-2xz,-2yz,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

14.49. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\{(x,y,z,u);\,zu\ne 0\}$; $\dfrac{yu\cdot(yzu,2xzu,-xyu,-2xyz)}{x^2y^4+z^2u^4}$

14.50. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\{(x,y,z,u);\,x>0,\,y\ne 0\ne z,\,u>0\}$;

$f_1'\,:\,x^{yz/u}\cdot\Big(\dfrac{yz}{xu}\,,\dfrac{z}{u}\lg x,\,\dfrac{y}{u}\lg x,-\dfrac{yz}{u^2}\lg x\Big)$;

$f_2'\,:\,u^{x/yz}\cdot\Big(\dfrac{\lg u}{yz}\,,-\dfrac{x\lg u}{y^2z}\,,-\dfrac{x\lg u}{yz^2}\,,\dfrac{x}{yzu}\Big)$

14.51. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\{(x,y,z,u);\,z\ne 0\ne u\}$; $f_1'\,:\,\dfrac{2\,(xy^2,x^2y,zu^2,uz^2)}{1+x^2y^2+z^2u^2}$;

$f_2'\,:\,\dfrac{(y,x,u,z)}{1+(xy+zu)^2}$; $f_3'\,:\,\dfrac{(-yzu,-xzu,xyu,xyz)}{x^2y^2+z^2u^2}$

14.52. $\mathcal{D}(f)=\langle 0,+\infty)^4\cup(-\infty,0\rangle^4$, $\Omega=\mathbb{R}^4_+\cup\mathbb{R}^4_-$;

$f_1'\,:\,\dfrac{(y,x,0,0)}{4\sqrt[4]{(xy)^3}}$; $f_2'\,:\,\dfrac{(0,z,y,0)}{4\sqrt[4]{(yz)^3}}$; $f_3'\,:\,\dfrac{(0,0,u,z)}{4\sqrt[4]{(zu)^3}}$; $f_4'\,:\,\dfrac{(u,0,0,x)}{4\sqrt[4]{(ux)^3}}$

V seznamu řešení Cv. 14.53 – 14.66 užíváme tato označení:

(85) $\quad\Omega_1:=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, $\Omega_2:=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$, $\Omega_3:=\{(x,y,z);\,xyz\ne 0\}$.

Středníky oddělují množinu Ω, divergenci a rotaci.

14.53. $\Omega_1\,;\ \dfrac{1}{r}\,;\ 0$

14.54. $\Omega_1\,;\ 0;\ \dfrac{1}{r}$

14.55. $\Omega_1\,;\ 0;\ 0$

14.56. $\Omega_1\,;\ -\dfrac{1}{r^3}\,;\ 0$

14.57. $\Omega_1\,;\ 2\,(1+\lg r^2);\ 0$

14.58. $\mathbb{R}^2;\ \dfrac{r}{1+r^2}+2\,\mathrm{arctg}\,r;\ 0$

14.59. $\Omega_2\,;\ \dfrac{2}{R}\,;\ (0,0,0)$

14.60. $\Omega_2\,;\ \dfrac{1}{R^2}\,;\ (0,0,0)$

14.61. $\Omega_2\,;\ 1+3\lg R;\ (0,0,0)$

14.62. $\Omega_2\,;\ 3\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{R}-\dfrac{R}{1+R^2}\,;\ (0,0,0)$

14.63. $\Omega_2\,;\ -\dfrac{3xyz}{R^3}\,;\ \dfrac{(x\,(z^2-y^2),y\,(x^2-z^2),z\,(y^2-x^2))}{R^3}$

14.64. $\Omega_3\,;\ \dfrac{3}{R^2}-\Big(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\Big)\lg R;\ \dfrac{(x\,(y^2-z^2),y\,(z^2-x^2),z\,(x^2-y^2))}{R^2xyz}$

14.65. $\mathbb{R}^3;\ 6xyz;\ (x\,(z^2-y^2),y\,(x^2-z^2),z\,(y^2-x^2))$

14.66. $\mathbb{R}^3;\ e^R(R+3);\ (0,0,0)$

* * *

14.67. v_1-v_2

14.68. v_1-4v_2

14.69. $-\,v_1$

14.70. $\frac{1}{2}\,(v_1+v_2)$

14.71. $\dfrac{6v_3}{e}$

14.72. $-\dfrac{v_1+v_2-v_3}{2\sqrt{3}}$

14.73. $\dfrac{2}{R^3}$

14.74. $(v_1+v_2,\frac{1}{3}\,(v_1-v_2))$

14.75. $\left(\frac{13}{50},-\frac{9}{50}\right)$

14.76. (v_1,v_2,v_1+v_2)

14.77. $\dfrac{(4v_1+\pi v_2,\pi v_1+4v_2,\pi\sqrt{2}\,(v_1+v_2))}{4\sqrt{2}}$

14.78. $(6v_1+v_3,4\,(3v_2+v_3))$

14.79. $\frac{1}{2}\,(v_1+v_2-v_3,v_2+v_3-v_1,v_3+v_1-v_2)$

14.80. $e^2\,(3v_1-2v_2,3v_2-2v_1,v_3)$

14.81. $(v_2 - 2v_1, v_4 - 2v_3)$ **14.82.** $(v_2, 0, v_4, 0)$

V řešení Cv. 14.83 − 14.85 zapisujeme parciální derivace ve tvaru (47), přičemž x, y, z je po řadě první, druhá a třetí proměnná; pro úsporu místa přitom píšeme např. $\partial_{11} f$ místo $(\partial_{11} f)(x, y)$. Všechny funkce z těchto cvičení jsou třídy C_∞ (ve svém definičním oboru, kterým je v prvních dvou příkladech $\mathbb{R}^2$ u f a $\mathbb{R}^3$ u g, zatímco ve třetím příkladu je to množina $\{(x, y);\, 1 + xy > 0\}$); parciální derivace jsou záměnné, indexy u symbolu ∂ jsou uspořádány lexikograficky.

14.83. $\partial_{11} f = -\partial_{12} f = \partial_{22} f = 2e^{x-y}\cos(x-y)$;
$\partial_{11}\, g = 8x^2R^{-6} - 2R^{-4}$; $\partial_{12}\, g = 8xyR^{-6}$; $\partial_{13}\, g = 8xzR^{-6}$;
$\partial_{22}\, g = 8y^2R^{-6} - 2R^{-4}$; $\partial_{23}\, g = 8yzR^{-6}$; $\partial_{33}\, g = 8z^2R^{-6} - 2R^{-4}$

14.84. $\partial_{111} f = 0$; $\partial_{112} f = 8y^3$; $\partial_{122} f = 24xy^2$; $\partial_{222} f = 24x^2y$;
$\partial_{111}\, g = 0$; $\partial_{112}\, g = 6y^2z^4$; $\partial_{113}\, g = 8y^3z^3$; $\partial_{122}\, g = 12xyz^4$;
$\partial_{123}\, g = 24xy^2z^3$; $\partial_{133} = 24xy^3z^2$; $\partial_{222}\, g = 6x^2z^4$; $\partial_{223}\, g = 24x^2yz^3$;
$\partial_{233}\, g = 36x^2y^2z^2$; $\partial_{333}\, g = 24x^2y^3z$

14.85. $\partial_{1111} f = -\dfrac{6y^4}{(1+xy)^4}$; $\partial_{1112} f = \dfrac{6y^2}{(1+xy)^4}$; $\partial_{1122} f = \dfrac{2(2xy-1)}{(1+xy)^4}$;
$\partial_{1222} f = \dfrac{6x^2}{(1+xy)^4}$; $\partial_{2222} f = -\dfrac{6x^4}{(1+xy)^4}$

* * *

V řešení Cv. 14.87 − 14.88 jsou množiny Ω odpovídající jednotlivým funkcím cvičení odděleny středníkem; užíváme přitom označení (85) a navíc klademe

(86) $$\Omega_4 := \{(x, y, z);\, z \neq 0\}.$$

14.87. $\mathbb{R}^2$; Ω_1; Ω_1; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^2$

14.88. $\mathbb{R}^3$; Ω_4; Ω_4; Ω_2; Ω_2; $\mathbb{R}^3$