12. Metrické prostory

Je-li každému α z jisté množiny A přiřazena podmnožina M_α jisté množiny X, mluvíme o **systému** $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ **podmnožin množiny** X.

Sjednocení a **průnik** takového systému jsou definovány rovnostmi

$$\text{(S)} \qquad \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha := \{x \in X\,;\ \text{existuje } \alpha \in A \text{ tak, že } x \in M_\alpha\},$$

$$\text{(P)} \qquad \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha := \{x \in X\,;\ x \in M_\alpha \ \text{ pro všechna } \ \alpha \in A\}.$$

Podobně jako se prázdný součet a součin čísel rovná 0 a 1, je

$$\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \emptyset \quad \text{a} \quad \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = X\,, \quad \text{je-li} \ \ A = \emptyset.$$

Rozdíl dvou (libovolných) množin X, Y je definován jako množina

$$\text{(R)} \qquad X - Y := \{x \in X\,;\ x \notin Y\}.$$

Cvičení 12.01. Dokažte platnost tzv. **de Morganových vzorců**:

$$\text{(1)} \qquad X - \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (X - M_\alpha)\,, \quad X - \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (X - M_\alpha)\,. \quad \square$$

Jsou-li X, Y libovolné množiny, $M \subset X$, $N \subset Y$ libovolné jejich podmnožiny a je-li $f : X \to Y$ libovolné zobrazení, je

$$\text{(2)} \qquad f(M) := \{f(x)\,;\ x \in M\} \ \ \text{resp.} \ \ f_{-1}(N) := \{x \in X\,;\ f(x) \in N\}$$

obraz množiny M resp. **vzor** množiny N při zobrazení f.

Zobrazení f se nazývá **prosté** (v X), platí-li implikace

$$\text{(3)} \qquad x' \in X,\ x'' \in X,\ x' \neq x'' \ \Rightarrow\ f(x') \neq f(x'')\,.$$

Je-li $f : X \to Y$ prosté zobrazení, existuje pro každé $y \in f(X)$ právě jedno $x \in X$ tak, že $f(x) = y$. Jestliže toto x označíme $f_{-1}(y)$, definovali jsme tím zobrazení $f_{-1} : f(X) \to X$ **inverzní k** f.

Je-li $N \subset f(X)$ a je-li zobrazení f prosté, je obraz množiny N při zobrazení f_{-1} zřejmě identický s druhou z množin (2); není-li f prosté zobrazení nebo není-li splněna podmínka $N \subset f(X)$, nelze obraz množiny N při zobrazení f_{-1} vytvořit.

Ke kolizi označení tedy v žádném případě nedochází.

Cvičení 12.02. Nechť X, Y, A jsou libovolné množiny, nechť pro každé $\alpha \in A$ je $M_\alpha \subset X$ a $N_\alpha \subset Y$ a nechť $f : X \to Y$ je libovolné zobrazení. Dokažte, že pak platí tyto relace:

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} f(M_\alpha), \qquad f\Big(\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in A} f(M_\alpha), \tag{4}$$

$$f_{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in A} N_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} f_{-1}(N_\alpha), \quad f_{-1}\Big(\bigcap_{\alpha\in A} N_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in A} f_{-1}(N_\alpha). \tag{5}$$

Ukažte dále, že z inkluzí $M_1 \subset X$, $M_2 \subset X$, $N_1 \subset Y$, $N_2 \subset Y$ plynou relace

$$f(M_1 - M_2) \supset f(M_1) - f(M_2), \tag{6}$$

$$f_{-1}(N_1 - N_2) = f_{-1}(N_1) - f_{-1}(N_2). \tag{7}$$

Jak ukazuje příklad zobrazení $\mathrm{Id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nelze v relacích (4) a (6) nahradit (pro obecné zobrazení f) inkluze rovnostmi; je totiž

$$\emptyset = \mathrm{Id}^2((-1,0) \cap (0,1)) \neq \mathrm{Id}^2((-1,0)) \cap \mathrm{Id}^2((0,1)) = (0,1),$$
$$(0,1) = \mathrm{Id}^2((0,1) - (-1,0)) \neq \mathrm{Id}^2((0,1)) - \mathrm{Id}^2((-1,0)) = \emptyset.$$

Dokažte však, že *inkluze* v (4) *a* v (6) *jsou ve skutečnosti rovnosti, je-li zobrazení* $f : X \to Y$ *prosté.*

Cvičení 12.03. Dokažte, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ platí implikace

$$M \subset X \;\Rightarrow\; M \subset f_{-1}(f(M)), \tag{8'}$$

$$N \subset Y \;\Rightarrow\; N = f(f_{-1}(N)). \tag{8''}$$

Najděte zobrazení f a množinu M tak, že v (8′) *neplatí rovnost*, a dokažte, že *v případě prostého zobrazení* f *tato rovnost platí.*

* * *

Nechť X je libovolná množina a nechť *nezáporná* funkce $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ tyto podmínky:

M1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

M3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Dvojici (X,ρ) pak nazýváme **metrický prostor** (zkratka: m.p.), v němž je ρ **metrikou**. Pro každé dva body x, y z X se číslo $\rho(x,y)$ nazývá **vzdálenost** bodů x, y (při metrice ρ). Podmínka M2 ukazuje, že ρ je *symetrickou* funkcí proměnných x, y, podmínka M3 je tak zvaná **trojúhelníková nerovnost**. Zavedení metriky (ρ) do množiny (X) se nazývá **metrizace** (množiny X metrikou ρ).

Je-li $X_1 \subset X$ a $\rho_1 := \rho|(X_1 \times X_1)$, říkáme, že (X_1, ρ_1) je **podprostor** prostoru (X, ρ). Často, ale méně přesně se pak píše $X_1 \subset (X, \rho)$ a říká se, že v X_1 je stejná metrika jako v X. $\square$

Je-li $M \subset (X, \rho)$, nazýváme číslo

$$\operatorname{diam} M := \begin{Bmatrix} \sup\{\rho(x,y);\, x \in M,\ y \in M\}, & \text{je-li } M \neq \emptyset \\ 0, & \text{je-li } M = \emptyset \end{Bmatrix} \tag{9}$$

průměr množiny M. Toto číslo je vždy nezáporné, ale nemusí být konečné; je-li $\operatorname{diam} M < +\infty$, říkáme, že množina M je **omezená**.

Je-li f zobrazení (libovolné) množiny Z do m.p. (X, ρ) a je-li množina $f(Z)$ omezená, říkáme, že zobrazení f je **omezené** (v Z). $\square$

Říkáme, že bod $x \in X$ je **limita** posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodů m.p. (X, ρ) a píšeme

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \text{nebo} \quad x_k \to x \quad (\text{pro} \quad k \to \infty), \tag{10}$$

je-li $\rho(x_k, x) \to 0$ (v $\mathbb{R}$). Je-li tato podmínka splněna, říkáme též, že posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ **konverguje k** x (nebo že *body* x_k *konvergují k* x). Říkáme, že posloupnost **konverguje** (nebo: je **konvergentní**) **v** X, má-li v X nějakou limitu; nemá-li v X žádnou limitu, říkáme, že **diverguje** (nebo: je **divergentní**) **v** X.[1])

Cvičení 12.04. Dokažte, že *každá konvergentní posloupnost je omezená.* $\square$

Jsou-li (X, ρ), (Y, σ) metrické prostory, říkáme, že **zobrazení** $f : X \to Y$ je **spojité v bodě** $x \in X$, platí-li implikace

$$x_k \in X,\ x_k \to x \ \Rightarrow\ f(x_k) \to f(x); \tag{11}$$

říkáme, že f je **spojité** (**v** X), je-li spojité v každém bodě $x \in X$.[2]) $\square$

Je-li x bod m.p. (X, ρ) a je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, nazýváme množinu

$$U(x, \varepsilon) := \{x' \in X;\, \rho(x', x) < \varepsilon\} \tag{12}$$

ε-**okolí** bodu x; x je jeho **střed**, ε jeho **poloměr**. V situacích, kdy na poloměru nezáleží, budeme okolí bodu x značit krátce $U(x)$.

Cvičení 12.05. Dokažte, že v každém m.p. (X, ρ) platí nerovnost

$$\operatorname{diam} U(x, \varepsilon) \leq 2\varepsilon \quad \textit{pro každé} \ \ x \in X \quad \textit{a každé} \ \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ . \tag{13}$$

---

[1]) I když většinou nehrozí nedorozumění a slova „v X“ lze bez obav vynechat, je vhodné uvědomit si, že posloupnost o členech $x_k := 1/k$ konverguje v prostoru $\mathbb{R}$, ale diverguje v jeho podprostoru $\mathbb{R} - \{0\}$. Komplikovanější příklad: Posloupnost o členech $x_k := (1 + 1/k)^k$ má v $\mathbb{R}$ limitu (rovnou e), ale je divergentní v $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, protože číslo e je iracionální.

[2]) Soustavněji se budeme spojitostí zabývat později v této kapitole.

Dále: Ověřte, že množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel se stane metrickým prostorem, zavedeme-li v ní vzdálenost rovností $\rho(x,y) := |x-y|$; ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{Z}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak

$$U(x,\varepsilon) = \{x-n+1, \dots, x-1, x, x+1, \dots, x+n-1\}, \text{ je-li } \varepsilon \in (n-1, n\rangle,$$

takže speciálně $U(x,1) = \{x\}$. Z toho je patrné, že v (13) *nemusí platit rovnost.*

Cvičení 12.06. Dokažte tato dvě tvrzení:

1. $x_k \to x \Leftrightarrow$ *pro každé* $U(x)$ *je* $x_k \in U(x)$ *pro* s. v. k.
2. $x_k \in U(x,\varepsilon_k)$ *pro* s. v. k, $\varepsilon_k \to 0 \Rightarrow x_k \to x$. □

Nechť X je *lineární* (= *vektorový*) *prostor* a nechť funkce $n : X \to \langle 0, +\infty)$ splňuje tyto tři podmínky:

N1. $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2. $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ a každé $x \in X$.

N3. $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$ pro každé dva vektory $x \in X$, $y \in X$.

Pak se funkce n nazývá **norma v** X. Lineární prostor, v němž je zavedena norma, se nazývá **normovaný lineární prostor**, krátce n. l. p.; prostor X s normou n můžeme značit např. (X,n). Vlastnost N3 je tzv. **trojúhelníková nerovnost** pro normu n.

Elementy lineárních prostorů budeme nazývat podle potřeby buď **vektory**, nebo **body**. Hodnota (předem definované) normy n v bodě $x \in X$ se většinou značí $\|x\|$.

Je-li X *n.l.p., je funkce* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, *definovaná podmínkou*

$$\rho(x,y) := \|x-y\| \text{ pro každé dva body } x \in X,\ y \in X, \tag{14}$$

metrika v X; podrobněji mluvíme o **metrice generované normou** n.

Úmluva. *Kdykoli budeme v n.l.p. mluvit o vzdálenosti, budeme mít na mysli vzdálenost při metrice generované příslušnou normou. V souvislosti s tím budeme každý n.l.p. považovat za prostor metrický.* □

Poznámka 12.1. V důsledku této úmluvy lze v každém n. l. p. X mluvit o konvergenci (posloupnosti bodů). Protože však X má i algebraickou strukturu, která dovoluje tvořit konečné součty resp. lineární kombinace vektorů z X, lze běžným způsobem zavést i konvergenci a součet řad:

Říkáme, že vektor $x \in X$ je **součet řady** $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ vektorů $x_k \in X$, je-li limitou jejích částečných součtů, tj. je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$ pro $n \to \infty$; to ovšem znamená, že

$$\rho\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k, x\Big) = \Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k - x\Big\| \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Je-li podmínka splněna, píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$. Má-li řada vektorů nějaký součet, říkáme, že **konverguje** (je **konvergentní**); v opačném případě říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**). □

Nechť X je lineární prostor a nechť funkce $ss : X \times X \to \mathbb{R}$ má tyto tři vlastnosti:

S1. $ss(0,0) = 0$; $0 \neq x \in X \Rightarrow ss(x,x) > 0$.

S2. $x \in X, y \in X \Rightarrow ss(x,y) = ss(y,x)$.

S3. $x \in X, y \in X, z \in X, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow ss(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\, ss(x,z) + \beta\, ss(y,z)$.

Pak říkáme, že funkce ss je **skalární součin** (v X); prostor X se skalárním součinem se nazývá **unitární** (zkratka u. p.).

Poznámka 12.2. Na rozdíl od situace, kdy dvojité linky $\| \dots \|$ většina autorů spojuje s (předem definovanou) normou, označení hodnot (předem daného) skalárního součinu v literatuře značně kolísá. Zde zvolíme označení, které připomíná součin čísel nebo funkcí a s ničím nekoliduje: Je-li v nějakém lineárním prostoru definován skalární součin ss, budeme jeho hodnoty $ss(x,y)$ značit také $(x \cdot y)$.

Vlastnost S3 je *linearita* skalárního součinu v první proměnné. Z podmínek S2 a S3 však snadno plyne tzv. **bilinearita** skalárního součinu, tj. platnost identity

$$((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cdot (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2)) = \alpha_1\beta_1(x_1 \cdot y_1) + \alpha_1\beta_2(x_1 \cdot y_2) + \alpha_2\beta_1(x_2 \cdot y_1) + \alpha_2\beta_2(x_2 \cdot y_2) \tag{15}$$

pro každé čtyři body x_1, x_2, y_1, y_2 z X a každá čtyři čísla α_1, α_2, β_1, β_2. $\square$

Poznamenejme, že v prostorech se skalárním součinem je automaticky zavedena i **ortogonalita** (neboli *kolmost*): Dva vektory x, y unitárního prostoru se nazývají **ortogonální** (nebo: *navzájem kolmé*), je-li $(x \cdot y) = 0$.

Poznámka 12.3. Je-li X u. p. a položíme-li

$$\| x \| := \sqrt{(x \cdot x)} \text{ pro každé } x \in X, \tag{16}$$

plyne z vlastností skalárního součinu, že pro každé dva vektory $x \in X$, $y \in X$ je kvadratická funkce

$$((\lambda x + y) \cdot (\lambda x + y)) = \| x \|^2 \lambda^2 + 2(x \cdot y)\lambda + \| y \|^2$$

proměnné $\lambda \in \mathbb{R}$ nezáporná, takže příslušný diskriminant $4((x \cdot y)^2 - \| x \|^2 \| y \|^2)$ je naopak nekladný. Platí proto tzv. **Schwarzova nerovnost**

$$|(x \cdot y)| \le \| x \| \, \| y \| \quad (\text{pro každé dva body } x \in X,\ y \in X). \tag{17}$$

Pomocí ní se snadno dokáže, že (16) *je norma v* X; říká se jí **norma indukovaná** příslušným **skalárním součinem**.

Úmluva. *Budeme mlčky předpokládat, že v každém unitárním prostoru je zavedena norma indukovaná příslušným skalárním součinem.* $\square$

Podle této úmluvy je tedy každý unitární prostor zároveň prostorem normovaným, a v důsledku toho i metrickým.

Příklad 12.1. Pro každé $p \in \mathbb{N}$ nazveme množinu A^p všech uspořádaných p-tic (konečných) reálných čísel **p-rozměrným aritmetickým prostorem**. Operace sčítání dvou prvků $x = (x_1, \dots, x_p) \in A^p$, $y = (y_1, \dots, y_p) \in A^p$ a násobení prvku x číslem $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme rovnostmi

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p), \quad \lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p). \tag{18}$$

Snadno nahlédneme, že A^p s těmito dvěma operacemi je *lineární prostor*. Číslo x_k ($1 \le k \le p$) je **k-tá souřadnice** (nebo: **složka**) **bodu** (nebo: **vektoru**) x; v souvislosti s tím o (18) mluvíme jako o **sčítání** a **násobení číslem po souřadnicích** (nebo: **po složkách**).

Stejně snadné je dokázat, že

$$(x \cdot y) := \sum_{k=1}^{p} x_k y_k \tag{19}$$

je skalární součin v A^p; jeho zavedením se A^p stává unitárním prostorem a indukovaná norma a metrika jsou dány rovnostmi

$$\| x \|_p := \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2}, \quad \rho_p(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x_k - y_k)^2}. \tag{20}$$

Unitární prostor A^p (s normou a metrikou (20)) se nazývá **p-rozměrný eukleidovský prostor** a značí se $\mathbb{R}^p$; p je jeho **dimenze**, (20) se podrobněji nazývá **eukleidovská norma** resp. **metrika**. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme místo $\| x \|_p$ jen $\| x \|$.

Poznamenejme ještě, že $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ a že *jednorozměrná eukleidovská norma je totéž co absolutní hodnota*, takže

$$\rho_1(x, y) = \| x - y \|_1 = | x - y | \ \text{ pro všechna } \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Příklad 12.2. *Metrika a norma jsou spojité funkce, násobení vektoru číslem, sčítání (odčítání) vektorů a skalární násobení jsou spojité operace*, protože platí:

A. *V každém m.p. (X, ρ) platí implikace $x_k \to x,\ y_k \to y \Rightarrow \rho(x_k, y_k) \to \rho(x, y)$.*

B. *V každém n.l.p. platí implikace*

B1. $x_k \to x \Rightarrow \| x_k \| \to \| x \|$.

B2. $\lambda_k \to \lambda,\ x_k \to x \Rightarrow \lambda_k x_k \to \lambda x$.

B3. $x_k \to x,\ y_k \to y \Rightarrow x_k \pm y_k \to x \pm y$.

C. *V každém u.p. platí implikace $x_k \to x,\ y_k \to y \Rightarrow (x_k \cdot y_k) \to (x \cdot y)$.*

D ů k a z . Ad A. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že

$$\rho(x_k, y_k) \le \rho(x_k, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_k),$$
$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, y);$$

v důsledku toho je $| \rho(x_k, y_k) - \rho(x, y) | \le \rho(x_k, x) + \rho(y_k, y)$.

Ad B1. Důkaz tvrzení B je zcela obdobný; z relací

$$\|x_k\| = \|(x_k - x) + x\| \le \|x_k - x\| + \|x\|, \ \|x\| = \|x_k - (x_k - x)\| \le \|x_k\| + \|x_k - x\|$$

ihned plyne, že $|\,\|x_k\| - \|x\|\,| \le \|x_k - x\|$.

Ad B2. Nyní je $\|\lambda_k x_k - \lambda x\| = \|\lambda_k(x_k - x) + (\lambda_k - \lambda)x\| \le |\lambda_k|\,\|x_k - x\| + |\lambda_k - \lambda|\,\|x\|$, přičemž posloupnost $\{\lambda_k\}$ je omezená.

Ad B3. Podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$\|(x_k \pm y_k) - (x \pm y)\| = \|(x_k - x) \pm (y_k - y)\| \le \|x_k - x\| + \|y_k - y\|.$$

Ad C. Protože je $\|x - y\|^2 = ((x - y)\cdot(x - y)) = \|x\|^2 - 2(x \cdot y) + \|y\|^2$, platí identita

$$(x \cdot y) = \tfrac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\big) \tag{22}$$

pro každé dva body $x \in X$, $y \in X$. Tvrzení C plyne tedy ihned z tvrzení B.

Cvičení 12.07. Nechť ρ_p je (jako dosud) eukleidovská metrika v A^p a nechť

$$\overline{\rho}_p(x, y) := \max\{|x_k - y_k|;\ 1 \le k \le p\}, \tag{23}$$

$$\tilde{\rho}_p(x, y) := \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|. \tag{24}$$

Dokažte, že *funkce $\overline{\rho}_p$ a $\tilde{\rho}_p$ jsou metriky v A^p, pro něž platí nerovnosti*

$$\overline{\rho}_p \le \rho_p \le \sqrt{p}\,\overline{\rho}_p, \quad \rho_p \le \tilde{\rho}_p \le p\,\rho_p, \quad \overline{\rho}_p \le \tilde{\rho}_p \le p\,\overline{\rho}_p. \tag{25}$$

Odvoďte z toho, že pro každou posloupnost bodů $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{np}) \in A^p$, pro každý bod $x = (x_1, \ldots, x_p) \in A^p$ a pro $n \to \infty$ je

$$\rho_p(x_n, x) \to 0 \ \Leftrightarrow\ \overline{\rho}_p(x_n, x) \to 0 \ \Leftrightarrow\ \tilde{\rho}_p(x_n, x) \to 0. \tag{26}$$

V důsledku toho je konvergence $x_n \to x$ při každé z metrik ρ_p, $\overline{\rho}_p$, $\tilde{\rho}_p$ ekvivalentní s tzv. **konvergencí po souřadnicích**, *tj. s podmínkou*

$$x_{nk} \to x_k \ \text{ pro } n \to \infty \text{ a pro každé } \ k = 1, \ldots, p. \quad \square \tag{27}$$

Zobecněním konvergence po souřadnicích je tzv. **bodová konvergence**:

Je-li X libovolná množina a je-li (Y, σ) metrický prostor, říkáme, že posloupnost zobrazení $f_k : X \to Y$ **konverguje v** X **bodově k zobrazení** $f : X \to Y$, je-li $f_k(x) \to f(x)$ (při metrice σ) pro každé $x \in X$. To znamená, že

(28) *pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a pro každé $x \in X$ existuje k_0 tak, že nerovnost $\sigma(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ platí pro všechna $k > k_0$.*

V podmínce (28) závisí index k_0 obecně jak na ε, tak na x; je-li možné volit jej nezávisle na $x \in X$, říkáme, že **konvergence** $f_k \to f$ je v X **stejnoměrná**.

Říkáme tedy, že posloupnost zobrazení $f_k : X \to Y$ **konverguje** k zobrazení $f : X \to Y$ **stejnoměrně** (**v** X), jestliže

(29) *pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* k_0 *tak, že nerovnost* $\sigma(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ *platí pro všechna* $k > k_0$ *a všechna* $x \in X$.

Je zřejmé, že *ze stejnoměrné konvergence plyne konvergence bodová*; v následujícím příkladě ukážeme, že existují jednoduché posloupnosti funkcí, které konvergují bodově, nikoli však stejnoměrně. [3])

Poznamenejme předtím, že *posloupnost zobrazení* f_k*, konvergující k zobrazení* f *v* X *bodově, nekonverguje k* f *stejnoměrně, právě když*

(30) *existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $k_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $k > k_0$ *a* $x \in X$ *tak, že* $\sigma(f_k(x), f(x)) \geq \varepsilon$.

Příklad 12.3. Je-li $f_k(x) := x/k$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, konvergují funkce f_k v $\mathbb{R}$ k nulové funkci *bodově*. *Konvergence* $f_k \to 0$ však *není v* $\mathbb{R}$ *stejnoměrná*, protože např. pro $\varepsilon = 1$ a pro každé $k_0 \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $|f_k(x)| = |x/k| \geq \varepsilon = 1$ např. pro $k = x = 2k_0$. Konvergence $f_k \to 0$ je v našem případě stejnoměrná na každé *omezené* množině $X \subset \mathbb{R}$. Je-li totiž $K \in \mathbb{R}_+$ zvoleno tak, že $x \in X \Rightarrow |x| < K$, je-li dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a položíme-li $k_0 = K/\varepsilon$, je $|f_k(x)| \leq K/k < K/k_0 = \varepsilon$ pro všechna $x \in X$ a všechna $k > k_0$.

Podmínka omezenosti množiny $X \subset \mathbb{R}$ *je v našem případě pro stejnoměrnou konvergenci* $f_k \to 0$ *v* X *nejen postačující, ale zřejmě i nutná.* Obecně však mohou být vztahy mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí daleko složitější, protože *existují posloupnosti (spojitých) funkcí* $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, které v* $\mathbb{R}$ *konvergují bodově, ale konvergence není stejnoměrná v žádném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$. (Srov. s [2], str. 166.)

* * *

Než přejdeme ke cvičením, zopakujeme některé pojmy lineární algebry. Ve cvičeních budou často vystupovat prostory funkcí $f : X \to Y$, kde Y je lineární prostor. Součet funkcí f, g bude pak vždy definován rovností $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ (pro všechna $x \in X$), součin konstanty $c \in \mathbb{R}$ s funkcí f rovností $(cf)(x) := cf(x)$. Budeme respektovat i obecnou terminologii, v níž se prvky lineárních prostorů nazývají *vektory*, a budeme o funkcích mluvit též jako o vektorech.

Říkáme, že neprázdná *konečná* podmnožina $M = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ lineárního prostoru X je *lineárně nezávislá*, je-li lineární kombinace $\lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n$ nulový vektor *jen* v případě, že $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. [4]) *Nekonečná* množina M vektorů se nazývá *lineárně nezávislá*, je-li lineárně nezávislá každá její neprázdná konečná

---

[3]) Stejnoměrná konvergence je velmi důležitý pojem matematické analýzy; je mu proto věnována celá následující kapitola. Zde se o stejnoměrné konvergenci zmiňujeme jen proto, že konvergence v některých prostorech funkcí je právě tato konvergence.

[4]) Je zřejmé, že vektory V_k jsou pak navzájem různé a že žádný z nich není nulový.

podmnožina. Není-li množina M vektorů lineárně nezávislá, říkáme, že je *lineárně závislá*. Je-li M lineárně nezávislá (resp. lineárně závislá) množina, říkáme též, že *vektory $V \in M$ jsou lineárně nezávislé* (resp. *lineárně závislé*).

Lineárním obalem množiny $M \subset X$ nazýváme množinu všech lineárních kombinací prvků z M. Má-li lineárně nezávislá množina M lineární obal rovný X, nazýváme ji *bází* prostoru X.

Dimenzi (podrobněji: *algebraickou dimenzi*) lineárního prostoru L složeného jen z nulového vektoru definujeme jako 0 a píšeme $\dim L = 0$. Existuje-li v lineárním prostoru L lineárně nezávislá množina složená z $n \in \mathbb{N}$ vektorů, zatímco každá množina $M \subset L$ složená z více než n vektorů je lineárně závislá, říkáme, že L má *dimenzi n* a píšeme $\dim L = n$. Říkáme, že lineární prostor má *nekonečnou dimenzi* a píšeme $\dim L = \infty$, nemá-li dimenzi n pro žádné celé číslo $n \geq 0$, tj. existuje-li v něm pro každé $n \in \mathbb{N}$ lineárně nezávislá množina obsahující (aspoň) n vektorů.

V n.l.p. L nazýváme *jednotkovým vektorem* každý vektor s normou 1. Množina všech jednotkových vektorů prostoru L je jeho *jednotková sféra*, množina všech vektorů s normou < 1 resp. ≤ 1 jeho *otevřená* resp. *uzavřená jednotková koule*.

Cvičení 12.08. 1. Ověřte, že *pro každou množinu $Z \neq \emptyset$ je množina*

$$M(Z) := \{f : Z \to \mathbb{R};\ \text{funkce } f \text{ je omezená v } Z\} \tag{31}$$

lineární prostor, v němž je funkce

$$\|f\| := \sup\{|f(z)|;\ z \in Z\} \tag{32}$$

normou.

Rada k důkazu trojúhelníkové nerovnosti: Pro každé $z \in Z$ je $|f(z) + g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$; nejdříve přejdeme k supremům na pravé straně, pak k supremu vlevo. $\diamond$

2. Ověřte, že

(33) *konvergence při normě* (32) *je totožná se stejnoměrnou konvergencí v Z.*

3. Dokažte, že *pro každou konečnou* (*resp. nekonečnou*) *množinu Z je algebraická dimenze prostoru $M(Z)$ také konečná* (*resp. nekonečná*).

Podrobněji: *Množina všech funkcí*

$$f_a(z) := \left\{\begin{matrix} 1 & \text{pro} & z = a \\ 0 & \text{pro} & z \neq a \end{matrix}\right\}, \ \text{kde } a \in Z, \tag{34}$$

je lineárně nezávislá; v případě konečné množiny Z je bází prostoru $M(Z)$.

Navíc je $\|f_a\| = 1$ *pro každé $a \in Z$* a $\|f_a - f_b\| = 1$ *pro každé dva různé body $a \in Z$, $b \in Z$.* $\square$

Definice. (32) je tzv. **supremová norma** (v $M(Z)$); podrobněji ji lze značit např. $\|\ldots\|_{\sup}$. Je-li Z konečná (neprázdná) množina, lze místo suprema psát maximum a v souvislosti s tím mluvit o **maximové normě** ($\|\ldots\|_{\max}$). $\square$

Cvičení 12.09. Pro každý kompaktní interval $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ buď

$$C(a,b) := \{f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R};\ f \text{ je spojitá v } \langle a,b\rangle\}\,. \tag{35}$$

Spolu s f je i funkce $|f|$ spojitá na kompaktním intervalu $\langle a, b\rangle$, a nabývá tam tedy svého maxima; proto má dobrý smysl definice:

$$\|f\| := \max\{|f(x)|;\ x \in \langle a,b\rangle\}\,. \tag{36}$$

Dokažte, že (36) *je norma v prostoru* $C(a, b)$ a že *po jejím zavedení se tento prostor stane podprostorem prostoru* $M(a, b) := M(\langle a, b\rangle)$ (sr. s Cv. 12.08). *Konvergence při* **maximové normě** (36), kterou lze podrobněji značit např. $\|\ldots\|_{\max}$, *je opět konvergencí stejnoměrnou, a to v intervalu* $\langle a, b\rangle$.

Cvičení 12.10. Pro každé dvě funkce f a g z množiny (35) položte

$$(f \cdot g) := \int_a^b fg \tag{37}$$

a dokažte, že (37) *je skalární součin*; příslušná norma

$$\|f\|_2 := \Big(\int_a^b f^2\Big)^{1/2} \tag{38}$$

je jednou z „integrálních norem“. [5])

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak položte

$$f_n(x) := \sin\Big(n\pi\frac{x-a}{b-a}\Big)\,, \text{ je-li } a \le x \le a + \frac{b-a}{n}\,,\quad f_n(x) := 0 \text{ jinak}\,, \tag{39}$$

a dokažte, že $\|f_n\|_{\max} = 1$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ (takže *není* $\|f_n\|_{\max} \to 0$), zatímco

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{b-a}{2n}} \to 0\,. \tag{40}$$

Důsledek: *Integrální norma* (38) *není totožná s maximovou normou* (36).

Rady: 1. Při důkazu, že (37) je skalární součin, může činit potíže jen vlastnost S1, konkrétněji implikace $(f \cdot f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Není-li však $f \equiv 0$ (v $\langle a, b\rangle$), existuje bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A := f^2(x_0) > 0$; ze spojitosti plyne existence intervalu $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, v němž je všude $f^2 > \frac{1}{2}A$. Potom však je

$$\int_a^b f^2 = \int_a^c f^2 + \int_c^d f^2 + \int_d^b f^2 \ge \int_c^d f^2 \ge \int_c^d \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}A(d-c) > 0\,.$$

2. Každá z funkcí f_n je spojitá v $\mathbb{R}$ a svého maxima nabývá v bodě $a+(b-a)/2n$; doporučujeme načrtnout si grafy. ◇

---

[5]) Lze dokázat (sr. s [13], str. 542–543), že pro každé $p \in (1, +\infty)$ je i výraz $(\int_a^b |f|^p)^{1/p}$ normou; „integrálních norem“ je tedy nekonečně mnoho a index 2 v (38) odpovídá $p = 2$.

Příklad 12.4. *Funkce* (39) *konvergují k nulové funkci jak při integrální normě* (38)*, tak i bodově; konvergence není sice stejnoměrná v celém intervalu* $\langle a, b\rangle$*, ale je stejnoměrná v každém intervalu* $\langle a+\delta, b\rangle$*, kde* $\delta \in (0, b-a)$*.*

Abychom ukázali, jak málo má konvergence při normě (38) společného nejen s konvergencí stejnoměrnou, ale dokonce i s bodovou, modifikujme předcházející příklad. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $\delta_n := (b-a)/2n$ a buď

$$g_n(x) := \cos\left(n\pi\,\frac{x-a}{b-a}\right), \text{ je-li } x \in \langle a-\delta_n, a+\delta_n\rangle, \quad g_n(x) := 0 \text{ jinak;} \tag{41}$$

snadno zjistíme, že

$$\int_{a-\delta_n}^{a+\delta_n} g_n^2 = \delta_n\,, \quad \int_{a-\delta_n}^{a} g_n^2 = \int_{a}^{a+\delta_n} g_n^2 = \tfrac{1}{2}\,\delta_n\,. \tag{42}$$

Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $k = 0, 1, \ldots, 2n$ funkci $h_{nk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podmínkou

$$h_{nk}(x) := g_n(x - k\delta_n)\,; \tag{43}$$

protože hodnota integrálu se při translaci nemění, je

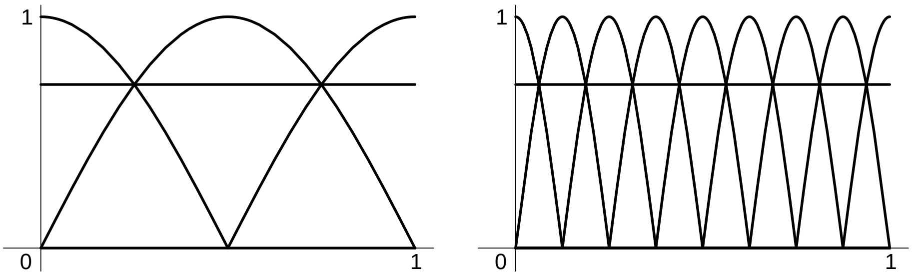
$$\int_a^b h_{nk}^2 = \left\{\begin{array}{ll} \tfrac{1}{2}\,\delta_n & \text{pro } k = 0 \text{ a } k = 2n \\ \delta_n & \text{pro } k = 1, \ldots, 2n-1 \end{array}\right\}. \tag{44}$$

Z toho ihned plyne, že *posloupnost*

$$h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, \ldots, h_{n0}, h_{n1}, \ldots, h_{n,2n}, \ldots \tag{45}$$

konverguje při integrální normě k nulové funkci.

Podrobnějším vyšetřením funkcí h_{nk} zjistíme, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují celá čísla j, k ležící mezi 0 a $2n$ tak, že $h_{nj}(x) = 0$, $h_{nk}(x) \geq 1/\sqrt{2}$. V posloupnosti hodnot funkcí (45) v bodě x bude proto na nekonečně mnoha místech 0 a na nekonečně mnoha (jiných) místech hodnota $\geq 1/\sqrt{2}$; *posloupnost* (45) *proto nemá limitu v žádném bodě* $x \in \langle a, b\rangle$.



Funkce h_{nk} pro $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$ a pro $n = 1$ a $n = 4$

Cvičení 12.11. Při označení z (35) dokažte, že

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f| \tag{46}$$

je norma v množině $C(a,b)$, *pro niž platí implikace*

$$f_k \in C(a,b),\ \|f_k\|_{\max} \to 0 \Rightarrow \|f_k\|_1 \to 0\,. \tag{47}$$

Najděte posloupnost funkcí $f_k \in C(0,1)$, pro něž platí tyto 4 podmínky: $f_k \to 0$ bodově v $\langle 0,1\rangle$, $\|f_k\|_{\max} \to +\infty$, $\|f_k\|_1 \to 0$, $\|f_k\|_2 \to +\infty$. [6])

Cvičení 12.12. Množina

$$\ell^2 := \Big\{x\,;\, x = \{x_k\}_{k=1}^\infty,\ x_k \in \mathbb{R} \text{ pro každé } k \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^\infty x_k^2 < +\infty\Big\} \tag{48}$$

(čte se „malé el kvadrát“) je jedním z tzv. **Hilbertových prostorů**.

A. Dokažte, že

$$x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2,\ y = \{y_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \ \textit{konverguje absolutně}, \tag{49}$$

a odvoďte z toho, že i *řada* $\sum_{k=1}^\infty (x_k + y_k)^2$ *konverguje.*

Definuje-li se tedy sčítání posloupností x a y a násobení posloupnosti x číslem $c \in \mathbb{R}$ *po souřadnicích*, tj. klade-li se

$$x + y := \{x_k + y_k\}_{k=1}^\infty\,, \quad cx := \{cx_k\}_{k=1}^\infty\,, \tag{50}$$

stane se z ℓ^2 *lineární prostor*; dokažte dále, že *výraz*

$$(x \cdot y) := \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \tag{51}$$

je skalární součin, takže jeho zavedením do ℓ^2 se tento prostor stane *unitárním prostorem* s normou a metrikou

$$\|x\|_\infty = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty x_k^2} \quad \text{a} \quad \rho_\infty(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty (x_k - y_k)^2}\,. \tag{52}$$

Rada: Závěr implikace (49) plyne ihned z nerovnosti $2|ab| \le a^2 + b^2$ platné pro každá dvě čísla $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ a ze srovnávacího kritéria pro řady. ◇

B. Ukažte, že *pro každou posloupnost vektorů* $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^\infty \in \ell^2$ *a pro každý vektor* $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^2$ *platí implikace*

---

[6]) Několik možných řešení najde čtenář na konci kapitoly.

$$(53) \qquad x^n \to x \ \ pro \ \ n \to \infty \ \Rightarrow \ x_k^n \to x_k \ \ pro \ \ n \to \infty \ \ a\ každé \ \ k \in \mathbb{N},$$

která znamená, že *z konvergence v ℓ^2 plyne konvergence po souřadnicích.*

Tzv. **Kroneckerovo delta** δ_{ij} je pro celá čísla i, j definováno podmínkami

$$(54) \qquad \delta_{ij} := \left\{ \begin{array}{l} 1\,, \text{ je-li } i = j \\ 0\,, \text{ je-li } i \neq j \end{array} \right\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ se vektor $e_n := \{\delta_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$, tj. posloupnost, jejíž n-tý člen se rovná 1 a všechny ostatní členy jsou nulové, nazývá **jednotkový vektor n-té souřadnicové osy v ℓ^2**. Vektory e_n jsou zřejmě *navzájem ortogonální* (a nenulové, tedy *lineárně nezávislé*); z toho plyne, že $\dim \ell^2 = \infty$.

Ověřte, že *posloupnost $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje po souřadnicích k nulovému vektoru 0 prostoru ℓ^2 (tj. k nulové posloupnosti), přičemž $\| e_n \| = 1 \not\to 0$. Implikaci* (53) *nelze tedy obrátit*!

C. Dokažte, že *pro každé $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ je $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, kde $x_k = (x \cdot e_k)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.*

Rada: Rovnosti $(x \cdot e_k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \cdot e_k) = x_k$ plynou z linearity a ze spojitosti skalárního součinu (viz Př. 12.2). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je proto

$$\Big(\big(x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\big) \cdot \big(x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\big)\Big) = \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k (x \cdot e_k) + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

a protože rozdíl vpravo konverguje pro $n \to \infty$ k 0, platí totéž o čtverci normy vektoru $x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ vlevo. $\diamond$

Poznámka 12.4. Nekonečná posloupnost jednotkových, navzájem ortogonálních vektorů e_k určuje v ℓ^2 nekonečně mnoho souřadnicových os $\{t e_k;\, t \in \mathbb{R}\}$. Podobně jako je tomu v eukleidovských prostorech, lze každý vektor $x \in \ell^2$ rozložit do složek $x_k e_k$ ve směru jednotlivých souřadnicových os a jejich „orientované délky“ $x_k = (x \cdot e_k)$ se vypočtou podle stejného vzorce jako v prostorech eukleidovských. Délka vektoru x je s délkami $|x_k|$ průmětů do os vázána rovností $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$, což připomíná Pythagorovu větu.

Uvedené analogie nejsou zdaleka jediné; v Hilbertově prostoru ℓ^2 lze úspěšně rozvíjet geometrii, která v některých ohledech připomíná geometrii eukleidovských prostorů, ale liší se od ní např. tím, že se i u jednoduchých pojmů (skalární součin, norma) musíme vyrovnávat s otázkami konvergence.

Každý eukleidovský prostor $\mathbb{R}^p$ lze snadno zobrazit do ℓ^2 tak, aby se zachovala jak jeho algebraická, tak i jeho metrická „struktura“: Označíme-li φ zobrazení $\mathbb{R}^p$ do ℓ^2, které bodu $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ přiřazuje bod $\{x_1, \dots, x_p, 0, 0, \dots\} \in \ell^2$, je zřejmé, že φ zachovává algebraické operace, tj. že

1) $x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^p \ \Rightarrow\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

2) $x \in \mathbb{R}^p,\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;

protože

3) $x \in \mathbb{R}^p \Rightarrow \|x\| = \|\varphi(x)\|$ (kde vlevo je norma v $\mathbb{R}^p$, vpravo norma v ℓ^2), *zachovává* φ *i vzdálenost.*

Zobrazení s vlastnostmi 1) a 2) se nazývají **izomorfní** (krátce: **izomorfismy**), zobrazení s vlastností 3) jsou **izometrická**; φ je tedy **izometrický izomorfismus**, prostory $\mathbb{R}^p$ a $\varphi(\mathbb{R}^p) \subset \ell^2$ jsou **izometricky izomorfní**. Všechny vlastnosti, které plynou z toho, že $\mathbb{R}^p$ i $\varphi(\mathbb{R}^p)$ jsou normované lineární prostory, si v těchto dvou prostorech vzájemně odpovídají, prostory jsou z algebraického i z metrického hlediska „nerozeznatelné“.

Nekonečná dimenze prostoru ℓ^2 přináší v porovnání s konečněrozměrnými prostory řadu netušených možností; přes jisté analogie jsou však mezi geometrií prostorů $\mathbb{R}^p$ a ℓ^2 i zásadní rozdíly. Příklad: Zatímco v ℓ^2 je konvergence podmínkou *značně silnější* než konvergence po souřadnicích, je v každém $\mathbb{R}^p$ konvergence *totožná* s konvergencí po souřadnicích.

Cvičení 12.13. Znakem ℓ (nebo podrobněji ℓ^1) se ve funkcionální analýze značí prostor všech (nekonečných) posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ reálných čísel, pro něž řada $\sum_{k=1}^\infty |x_k|$ konverguje. Sčítání dvou vektorů a násobení vektoru číslem je opět definováno jako sčítání resp. násobení po souřadnicích.

A. Dokažte, že

$$\|x\| := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \tag{55}$$

je norma v ℓ.

B. Ukažte dále, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty, \tag{56}$$

takže každá posloupnost ležící v ℓ *leží i v* ℓ^2. Pozor však! *Prostor* ℓ *s normou* (55) *není podprostorem prostoru* ℓ^2 *s normou* (52), protože tyto normy nejsou totožné.

C. *Najděte posloupnost* $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, *pro niž je součet na levé straně* (56) *nekonečný, součet vpravo konečný.* Dokažte konečně, že

$$x^n \to x \ \text{ při normě (55)} \ \Rightarrow x^n \to x \ \text{ při normě (52)}. \tag{57}$$

Cvičení 12.14. Nechť $X \neq \emptyset$ je libovolná množina, $c \in \mathbb{R}_+$ libovolné číslo. Pro každé dva body x, y z X položte

$$d_c(x,y) := \left\{ \begin{array}{l} c, \ \text{je-li } x \neq y \\ 0, \ \text{je-li } x = y \end{array} \right\} \tag{58}$$

a dokažte, že d_c *je metrika.*

Poznamenejme, že prostor (X, d_c) i metrika d_c se nazývají **diskrétní** (podrobněji: *diskrétní s konstantou* c).

Ověřte, že v (X, d_c) platí tato tvrzení:

A. *Pro každý bod $x \in X$ je*

$$U(x,\varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \{x\},\ \text{je-li } \varepsilon \in (0,c\rangle \\ X,\ \ \text{je-li } \varepsilon \in (c,+\infty) \end{array} \right\}. \tag{59}$$

Důsledek: *Každé okolí má průměr rovný buď* 0, *nebo c.*

B. *Posloupnost bodů $x_k \in X$ je konvergentní, právě když je stacionární.*

Ověřte dále správnost těchto tvrzení:

C. *Množina $\{e_n\,;\,n \in \mathbb{N}\}$ všech jednotkových vektorů v ℓ^2 je diskrétní prostor s $c = \sqrt{2}$. Táž množina, považovaná za podprostor prostoru ℓ, je také diskrétní prostor, ale s konstantou $c = 2$.*

D. *Každá z funkcí $\cos 2^k \pi x$, kde $k \in \mathbb{N}$, je jednotkový vektor prostoru $C(0,1)$ s maximovou normou a množina všech těchto vektorů je diskrétní podprostor prostoru $C(0,1)$ s konstantou $c = 2$.*

E. *Množina všech funkcí* (34) *ze* Cv. 12.08 *je diskrétní podprostor s konstantou $c = 1$ prostoru $M(0,1)$ se supremovou normou; každá z uvedených funkcí má přitom normu také rovnou* 1.

F. *Definujeme-li v prostoru $C(-\pi,\pi)$ skalární součin podle* Cv. 12.10, *získáme unitární prostor, v němž funkce $f_k(x) := \sin kx$, kde $k \in \mathbb{N}$, tvoří diskrétní podprostor s konstantou $c = \sqrt{2\pi}$; uvedené funkce jsou přitom navzájem ortogonální vektory s normou $\sqrt{\pi}$.*

G. *V prostoru $C(0,1)$ se skalárním součinem z* Cv. 12.10 *tvoří funkce*

$$g_k(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 2^{k/2} \sin(2^k \pi x) & \text{v } \langle 2^{-k}, 2^{-k+1}\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{array} \right\}, \ \textit{kde } k \in \mathbb{N}, \tag{60}$$

diskrétní množinu s konstantou $c = 1$; funkce g_k jsou navzájem ortogonální a každá z nich má normu $1/\sqrt{2}$.

Cvičení 12.15. Nechť X je množina všech komplexních čísel a nechť pro každá dvě komplexní čísla $z = |z|e^{is}$, $\zeta = |\zeta|e^{it}$, kde $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, je

$$\rho_{\text{zvl}}(z,\zeta) := \left\{ \begin{array}{ll} |z-\zeta|, & \text{je-li buď } z\zeta = 0, \text{ nebo } s \equiv t \bmod \pi \\ |z| + |\zeta| & \text{jinak} \end{array} \right\}. \tag{61}$$

(Vzdálenost dvou bodů se tedy na každé přímce procházející počátkem měří „normálně“ (=„eukleidovsky“); leží-li však body $z \neq 0$, $\zeta \neq 0$ na dvou různých polopřímkách vycházejících z počátku a netvořících dohromady přímku, je jejich vzdálenost rovna eukleidovské vzdálenosti, kterou by měly, kdyby obě polopřímky dohromady přímku tvořily, tj. kdyby jedna z nich byla prodloužením druhé. Názornou představu o „metrických poměrech“ v celém prostoru (X, ρ_{zvl}) komplikuje skutečnost, že by se *každá* polopřímka vycházející z počátku v tomto smyslu jevila jako prodloužení *každé jiné* takové polopřímky.)

Dokažte, že

1) *funkce* ρ_{zvl} *je metrika v množině* X *všech komplexních čísel.*

Dokažte dále, že v prostoru (X, ρ_{zvl}) platí:

2) $z_k \to 0 \Leftrightarrow |z_k| \to 0$;

3) $z_k \to z = |z|e^{is} \neq 0$, *právě když je* $z_k = |z_k|e^{is}$ *pro s. v.* k a $|z_k - z| \to 0$.

Cvičení 12.16. Nechť X je množina všech posloupností přirozených čísel, tj. všech zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Je-li $f \in X$, $g \in X$, $f \neq g$, položme $\rho_{BP}(f, g) = 1/n$, kde n je nejmenší přirozené číslo, pro něž je $f(n) \neq g(n)$; je-li $f = g$, buď $\rho_{BP}(f, g) = 0$.

Dokažte tato tvrzení:

A. ρ_{BP} *je metrika v* X. (Dvojice (X, ρ_{BP}) se nazývá **Bairův prostor**.)

B. *Je-li* $f_k \in X$, $f \in X$, *je* $f_k \to f$ *při metrice* ρ_{BP}, *právě když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje* $k(n) \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $k \geq k(n)$ *je* $f_k(1) = f(1), \ldots, f_k(n) = f(n)$. (Utvoříme-li „dvakrát nekonečnou" matici, jejíž k-tý řádek tvoří členy posloupnosti f_k, je první člen k-tého řádku s $k \geq k(1)$ číslo $f(1)$, první dva členy k-tého řádku s $k \geq k(2)$ jsou čísla $f(1), f(2)$, atd. Sloupce matice jsou tedy stacionární posloupnosti, přičemž v n-tém sloupci je od $k(n)$-tého členu číslo $f(n)$.)

C. *Nechť* $f_k(k) := k$ *pro všechna* k *a* $f_k(j) := 1$, *je-li* $j \neq k$; *pak* $f_k \to f$, *kde* f *je konstantní posloupnost* f, *pro niž je* $f(j) = 1$ *pro všechna* j.

Cvičení 12.17. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť $\varphi : \mathbb{R} \to_{\text{na}} (a, b)$ je spojitá rostoucí funkce; rozšiřme její definiční obor na celé $\mathbb{R}^*$ tím, že položíme $\varphi(-\infty) := a$, $\varphi(+\infty) := b$. Dokažte, že *funkce definovaná podmínkou*

$$(62) \qquad \rho_{\text{red}}(x, y) := |\varphi(y) - \varphi(x)| \quad \textit{pro každé dva body } x \in \mathbb{R}^*,\ y \in \mathbb{R}^*$$

je metrika. (Můžeme jí říkat **redukovaná metrika v** $\mathbb{R}^*$ generovaná funkcí φ; body x, y na ose x zobrazíme funkcí φ a najdeme (eukleidovskou) vzdálenost jejich obrazů $\varphi(x), \varphi(y)$ na ose y.)

Dokažte dále, že *pro každou posloupnost* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konečných reálných čísel a pro každé* $x \in \mathbb{R}^*$ *je* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, [7]) *právě když* $\rho_{\text{red}}(x_k, x) \to 0$.

Ověřte konečně, že např. *funkce* $\varphi(x) := x/(1 + |x|)$ $(x \in \mathbb{R})$ *splňuje nahoře uvedené podmínky*, přičemž $(a, b) = (-1, 1)$.

* * *

Jsou-li z_1, z_2 dvě komplexní čísla, označme $x_j := \operatorname{Re} z_j$, $y_j := \operatorname{Im} z_j$ pro $j = 1, 2$ a položme

$$(63) \qquad \rho(z_1, z_2) := |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Funkce ρ je podle toho, co jsme řekli v Př. 12.01, metrika v množině $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel; není-li řečeno nic jiného, předpokládá se automaticky, že $\mathbb{C}$ *je metrický prostor právě s touto metrikou.*

[7]) podle běžné definice

V analýze v komplexním oboru se m.p. $\mathbb{C}$ nazývá **otevřená Gaussova rovina**; podobně jako bylo z mnoha důvodů výhodné přidat k $\mathbb{R}$ *dvě* nekonečná čísla $\pm\infty$, je v komplexní analýze vhodné rozšířit množinu $\mathbb{C}$ o *jediné* **nekonečno** ∞. Vznikne tak množina $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Algebraické operace s ∞ se zavádějí takto:

1. Součet: $z + \infty = \infty + z := \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$; součet $\infty + \infty$ není definován.

2. Součin: $z \cdot \infty = \infty \cdot z := \infty$ pro každé *nenulové* $z \in \mathbb{S}$; součiny $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ nejsou definovány.

3. Podíl: $z/0 := \infty$ pro každé *nenulové* $z \in \mathbb{S}$ a $z/\infty := 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$; podíly $0/0$ a ∞/∞ nejsou definovány.

4. Celočíselná mocnina: $\infty^0 := 1$, $\infty^n := \infty$, $\infty^{-n} := 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Do množiny $\mathbb{S}$ se zavádí metrika ρ^* takto: Označme $A := (0, 0, 1)$ „severní pól" jednotkové sféry

$$\tilde{\mathbb{S}} := \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 ;\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\} \tag{64}$$

v $\mathbb{R}^3$ a pro každé $X = (\xi, \eta, \zeta) \in \tilde{\mathbb{S}} - \{A\}$ buď $(x, y, 0)$ průsečík souřadnicové roviny $\zeta = 0$ s polopřímkou vycházející z bodu A a procházející bodem X. Položíme-li

$$\Phi(X) := \left\{ \begin{array}{ll} x + iy\,, & \text{je-li } X \neq A \\ \infty\,, & \text{je-li } X = A \end{array} \right\}, \tag{65}$$

je Φ zřejmě prosté zobrazení množiny $\tilde{\mathbb{S}}$ na množinu $\mathbb{S}$, takže $\Psi := \Phi_{-1}$ zobrazuje $\mathbb{S}$ prostě na $\tilde{\mathbb{S}}$. Pro každé dva body z_1, z_2 z $\mathbb{S}$ pak definujeme

$$\rho^*(z_1, z_2) := \rho_3(\Psi(z_1), \Psi(z_2))\,, \tag{66}$$

kde ρ_3 je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^3$. Zobrazení Φ se nazývá **stereografická projekce**, ρ^* je tzv. **redukovaná metrika v** $\mathbb{S}$ [8]), m.p. $(\mathbb{S}, \rho^*)$ je **uzavřená Gaussova rovina**.

Cvičení 12.18. Dokažte toto jednoduché obecné tvrzení, z něhož ihned plyne, že *ρ^* je opravdu metrika v $\mathbb{S}$:*

Věta 12.1. *Je-li (Y, σ) metrický prostor, je-li $\omega : Y \to_{\text{na}} W$ prosté zobrazení a definujeme-li*

$$\tau(w_1, w_2) := \sigma(\omega_{-1}(w_1), \omega_{-1}(w_2)) \quad \textit{pro každé dva body} \ \ w_1 \in W\,,\ w_2 \in W\,, \tag{67}$$

je (W, τ) metrický prostor. $\square$

V souladu s tím, co jsme řekli v Po. 12.4 pro jeden speciální případ, nazývá se **zobrazení** $\omega : Y \to W$ prostoru (Y, σ) do prostoru (W, τ) **izometrické**, jestliže

$$y_1 \in Y\,,\ y_2 \in Y \ \Rightarrow\ \tau(\omega(y_1), \omega(y_2)) = \sigma(y_1, y_2)\,. \tag{68}$$

---

[8]) ρ^* je metrika podle V. 12.1, která následuje a jejíž snadný důkaz přenecháme čtenáři.

Existuje-li izometrické zobrazení $\omega : Y \to_{\text{na}} W$, říkáme, že **prostory** Y a W jsou **izometrické**.[9] $\square$

Jistě jsou zřejmá tato dvě tvrzení:

$$\text{(69)} \qquad \textit{Roviny } \mathbb{R}^2 \textit{ a } \mathbb{C} \textit{ jsou izometrické;}$$

$$\text{(70)} \qquad \textit{rovina } (\mathbb{S}, \rho^*) \textit{ je izometrická s jednotkovou sférou } \tilde{\mathbb{S}} \textit{ v } \mathbb{R}^3 .$$

Cvičení 12.19. Dokažte tato tvrzení:

1. *Je-li* $(0,0,1) = A \neq X = (\xi, \eta, \zeta) \in \tilde{\mathbb{S}}$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, *je*

$$\text{(71)} \qquad \Phi(X) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta},$$

$$\text{(72)} \qquad \xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

2. *Je-li* ρ *metrika* (63), *je-li* $z_k \in \mathbb{C}$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a je-li* $z \in \mathbb{S}$, *platí tyto implikace*:

$$\text{(73)} \qquad z \in \mathbb{C} \Rightarrow (\rho^*(z_k, z) \to 0 \Leftrightarrow \rho(z_k, z) \to 0),$$

$$\text{(74)} \qquad z = \infty \Rightarrow (\rho^*(z_k, z) \to 0 \Leftrightarrow |z_k| \to +\infty).$$

Cvičení 12.20. Nechť (X, ρ) je metrický prostor; dokažte, že *funkce* ρ^* *definovaná rovností*

$$\text{(75)} \qquad \rho^*(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)} \quad \textit{pro každé dva body } x \in X,\, y \in X$$

je metrika v X *splňující ekvivalenci*

$$\text{(76)} \qquad \rho(x_k, x) \to 0 \Leftrightarrow \rho^*(x_k, x) \to 0$$

pro každou posloupnost bodů $x_k \in X$ *a každý bod* $x \in X$.

Rada: Trojúhelníková nerovnost pro funkci (75) je ekvivalentní s nerovností, která z ní vznikne vynásobením všemi jmenovateli; stačí pak porovnat obě strany. $\diamond$

Všimněme si, že *všechny hodnoty funkce* ρ^* *leží v intervalu* $\langle 0, 1)$; z toho ihned plyne, že *každá podmnožina prostoru* X *s metrikou* ρ^* *je omezená – její průměr není větší než* 1.

Všimněme si dále, že když za prostor (X, ρ) zvolíme $\mathbb{R}$, bude mít (75) tvar

$$\text{(75*)} \qquad \rho^*(x,y) := \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} \quad \textit{pro každá dvě čísla } x, y \textit{ z } \mathbb{R};$$

[9]) Jde zřejmě o relaci reflexivní, symetrickou a tranzitivní, tedy o ekvivalenci ve smyslu obecné teorie množin.

i tato metrika v množině všech konečných reálných čísel se počítává mezi tzv. *redukované metriky*. $\square$

Definice. Dvě (libovolné) metriky ρ a ρ^* v témž prostoru X, pro něž platí (76), se nazývají **ekvivalentní**.

Cvičení 12.21. Nechť X je množina všech (nekonečných) posloupností (konečných) reálných čísel; jsou-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dvě takové posloupnosti, buď

$$\sigma(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|y_k - x_k|}{1 + |y_k - x_k|}. \tag{77}$$

Dokažte, že

1. *σ je metrika v X;*

2. *konvergence v prostoru (X, σ) je totožná s konvergencí po souřadnicích, tj. s podmínkou: Je-li $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in X$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a je-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$, je*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x \text{ v } (X, \sigma) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}. \tag{78}$$

Rada: Z výsledků Cv. 12.20 snadno plyne, že σ je metrika. Každý sčítanec na pravé straně (77) je nejvýše rovný levé straně; podle Cv. 12.20 proto $\sigma(x^n, x) \to 0 \Rightarrow |x_k^n - x_k| \to 0$ pro každé k. Je-li obráceně $|x_k^n - x_k| \to 0$ pro každé k a je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, zvolíme $K \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo $\sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{1}{2}\varepsilon$; pak najdeme $N \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo $|x_k^n - x_k| < \varepsilon/2K$ pro všechna $n > N$ a všechna $k \in \{1, \dots, K\}$. Pro každé $n > N$ je pak $\sigma(x^n, x) < \varepsilon$. $\diamond$

Cvičení 12.22. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a nechť $\langle a_m, b_m \rangle$ jsou kompaktní intervaly splňující podmínky

$$\langle a_m, b_m \rangle \subset (a_{m+1}, b_{m+1}) \text{ pro každé } m \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \langle a_m, b_m \rangle = (a, b). \tag{79}$$

Nechť X je množina všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ omezených na každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle \subset (a, b)$; pro každou funkci $f \in X$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$ označme

$$\sigma_m(f) := \sup\{|f(x)|;\ x \in \langle a_m, b_m \rangle\} \tag{80}$$

a pro každé dvě funkce $f \in X$, $g \in X$ položme

$$\sigma(f, g) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\sigma_m(f - g)}{1 + \sigma_m(f - g)}. \tag{81}$$

Dokažte, že

1. *σ_m není (pro žádné m) norma v X*, ale

2. *σ je metrika v X.*

Rada: σ_m není norma, protože pro dvě funkce f, g z X, pro něž je $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \langle a_m, b_m \rangle$, je $\sigma_m(f, g) = 0$ bez ohledu na to, jakých hodnot nabývají v $(a, b) - \langle a_m, b_m \rangle$; σ_m však splňuje nerovnost $\sigma_m(f + g) \leq \sigma_m(f) + \sigma_m(g)$, což stačí k tomu, aby funkce $\sigma_m(f)/(1 + \sigma_m(f))$ splňovala podobnou nerovnost. Z toho snadno plyne trojúhelníková nerovnost pro funkci σ. $\diamond$

Dokažte dále, že

3. *$\sigma(f_k, f) \to 0$, právě když je $f_k \to f$ stejnoměrně v každém $\langle a_m, b_m \rangle$.*

Rada: Postupujte podobně jako ve Cv. 12.21. $\diamond$

Nechť $\langle c_n, d_n \rangle$ splňují analogické podmínky jako intervaly $\langle a_m, b_m \rangle$, tj. nechť je

$$(79') \qquad \langle c_n, d_n \rangle \subset (c_{n+1}, d_{n+1}) \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle c_n, d_n \rangle = (a, b).$$

Analogicky buď

$$(80') \qquad \tau_n(f) := \sup\{|f(x)|;\, x \in \langle c_n, d_n \rangle\}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$(81') \qquad \tau(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\tau_n(f - g)}{1 + \tau_n(f - g)}.$$

Dokažte, že

4. *metriky σ a τ jsou ekvivalentní*, tj. že *konvergence v X nezávisí na způsobu, jak byl interval (a, b) rozložen na kompaktní intervaly $\langle a_m, b_m \rangle$ s vlastností* (79).

Rada: Dokažte, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\langle a_m, b_m \rangle \subset \langle c_n, d_n \rangle$, a že obráceně pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\langle c_n, d_n \rangle \subset \langle a_m, b_m \rangle$; využijte to pak v důkazu. $\diamond$

Cvičení 12.23. Buďte (X, ρ) a (Y, σ) dva libovolné metrické prostory; pro každé dva body $z' = (x', y') \in X \times Y$, $z'' = (x'', y'') \in X \times Y$ položme

$$(82) \qquad \rho_{XY}(z', z'') := \sqrt{\rho^2(x', x'') + \sigma^2(y', y'')},$$

$$(83) \qquad \overline{\rho}_{XY}(z', z'') := \max(\rho(x', x''), \sigma(y', y'')),$$

$$(84) \qquad \tilde{\rho}_{XY}(z', z'') := \rho(x', x'') + \sigma(y', y'').$$

Dokažte, že

1. *každá z funkcí* (82) $-$ (84) *je metrikou v kartézském součinu $X \times Y$*;

2. *každé dvě z těchto metrik jsou ekvivalentní a při každé z nich je konvergence v $X \times Y$ konvergencí po souřadnicích.*

3. *Metrizujte podobně obecný kartézský součin $X_1 \times \ldots \times X_p$, kde $p > 1$ je přirozené číslo a dokažte analogická tvrzení.*

4. *Proveďte předcházející úkol speciálně pro případ, že $X_1 = \ldots = X_p = \mathbb{R}$. Pak pro $p = 2$ a pro $p = 3$ popište, jak z hlediska eukleidovské geometrie vypadají okolí při všech třech zkonstruovaných metrikách.* $\square$

Říkáme, že podmnožina M metrického prostoru (X, ρ) je **otevřená**, má-li každý bod $x \in M$ okolí $U(x)$ obsažené v M. Říkáme, že množina $N \subset X$ je **uzavřená**, je-li její doplněk $X - N$ otevřený.

Cvičení 12.24. Dokažte tato tvrzení:

O1. *$\emptyset$ a X jsou otevřené množiny.*

O2. *Je-li A libovolná množina a je-li množina M_α otevřená pro každé $\alpha \in A$, je i sjednocení $\bigcup_{\alpha \in A}$ otevřené.*

O3. *Je-li A konečná množina a je-li množina M_α otevřená pro každé $\alpha \in A$, je i průnik $\bigcap_{\alpha \in A}$ otevřený.*

Cvičení 12.25. Dokažte tato tvrzení:

U1. *$\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny.*

U2. *Je-li A libovolná množina a je-li množina M_α uzavřená pro každé $\alpha \in A$, je i průnik $\bigcap_{\alpha \in A}$ uzavřený.*

U3. *Je-li A konečná množina a je-li množina M_α uzavřená pro každé $\alpha \in A$, je i sjednocení $\bigcup_{\alpha \in A}$ uzavřené.*

* * *

Pro každou podmnožinu M metrického prostoru (X, ρ) definujeme **vnitřek** $\operatorname{int} M$, **vnějšek** $\operatorname{ext} M$, **uzávěr** $\overline{M}$ a **hranici** ∂M množiny M takto:

1. $x \in \operatorname{int} M$ znamená, že existuje $U(x)$ obsažené v M.
2. $x \in \operatorname{ext} M$ znamená, že existuje $U(x)$ disjunktní s M.
3. $x \in \overline{M}$ znamená, že každé $U(x)$ má společné body s M.
4. $x \in \partial M$ znamená, že každé $U(x)$ má společné body jak M, tak i s $X - M$.

Bodům z $\operatorname{int} M$ resp. z $\operatorname{ext} M$ resp. z ∂M se říká **vnitřní** resp. **vnější** resp. **hraniční body** množiny M.

Je zřejmé, že $\operatorname{int} M \subset M$ a $\operatorname{ext} M \cap M = \emptyset$; *body $x \in \overline{M}$ a $x \in \partial M$ mohou, ale nemusí patřit do M.*

Cvičení 12.26. Dokažte, že pro každou podmnožinu M m.p. (X, ρ) platí:

1. *Je*

(85) $$X = \operatorname{int} M \cup \partial M \cup \operatorname{ext} M, \text{ přičemž množiny vpravo jsou disjunktní.}$$

2. $\operatorname{int}(X - M) = \operatorname{ext} M$, $\operatorname{ext}(X - M) = \operatorname{int} M$.
3. $\overline{M} = X - \operatorname{ext} M = \operatorname{int} M \cup \partial M = M \cup \partial M$.
4. $\partial M = \partial(X - M) = \overline{M} \cap \overline{X - M}$.
5. *Množiny* $\operatorname{int} M$ *a* $\operatorname{ext} M$ *jsou otevřené, množiny* $\overline{M}$ *a* ∂M *uzavřené.*
6. *Množina M je otevřená, právě když $M = \operatorname{int} M$.*
7. *Množina M je otevřená, právě když $M \cap \partial M = \emptyset$.*
8. *Množina M je uzavřená, právě když $M = \overline{M}$.*
9. *Množina M je uzavřená, právě když $\partial M \subset M$.*

Cvičení 12.27. Dokažte, že pro každou podmnožinu M m.p. (X,ρ) platí:

1. *M je otevřená, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in X$, pro niž je $x_k \to x \in M$, je $x_k \in M$ pro s.v. k.*

2. *M je uzavřená, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, která konverguje v X, je $\lim x_k \in M$.*

3. *$x \in \operatorname{int} M$, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in X$, pro niž je $x_k \to x \in M$, je $x_k \in M$ pro s.v. k.*

4. *$x \in \overline{M}$, právě když existuje posloupnost bodů $x_k \in M$ tak, že $x_k \to x$.*

5. *$x \in \partial M$, právě když existují dvě posloupnosti bodů $x'_k \in M$ a $x''_k \in X - M$ tak, že $\lim x'_k = \lim x''_k = x$.* □

Definice. Říkáme, že podmnožina M metrického prostoru (X,ρ) je **kompaktní**, je-li možné z každé posloupnosti bodů $x_k \in M$ vybrat posloupnost konvergentní v M. □

Ve větách 12.2 − 12.7 jsou shrnuty nejdůležitější vlastnosti kompaktních množin; důkazy prvních pěti nejsou nikterak obtížné a mohou sloužit čtenáři jako test, že příslušné pojmy myšlenkově dobře zvládl.

Věta 12.2. *Je-li množina $M \subset X$ kompaktní, je omezená a uzavřená (v X).*

Věta 12.3. *Je-li množina $M \subset X$ uzavřená a je-li prostor X kompaktní, je M kompaktní.*

Věta 12.4. *Je-li $p \in \mathbb{N}$, je množina $M \subset \mathbb{R}^p$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Cvičení 12.28. Dokažte, že *uzavřená jednotková koule $\{x \in \ell^2;\ \|x\| \le 1\}$ prostoru ℓ^2 není kompaktní, ačkoli je uzavřená a omezená.* [10])

Rada: Protože z konvergence $x_n \to x$ v ℓ^2 plyne jak konvergence po souřadnicích, tak i relace $\|x_n\| \to \|x\|$, nemůže mít žádná posloupnost vybraná z posloupnosti vektorů e_n souřadnicových os v ℓ^2 žádnou limitu; po souřadnicích totiž konverguje k nule, zatímco normy mají limitu 1. ⋄

Věta 12.5. *Jsou-li prostory (X,ρ) a (Y,σ) kompaktní, platí totéž pro jejich kartézský součin $X \times Y$ metrizovaný kteroukoli z metrik z* Př. 12.23. (*Analogické tvrzení platí pro kartézský součin libovolného konečného počtu kompaktních prostorů.*)

Věta 12.6. (Cantorova věta.) *Jsou-li M_k neprázdné kompaktní podmnožiny metrického prostoru (X,ρ) a je-li $M_k \supset M_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k \neq \emptyset$.* □

Definice. Říkáme, že systém $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ množin **pokrývá** množinu M (nebo že je **pokrytím** množiny M nebo že množiny $M_\alpha \in \mathcal{M}$ **pokrývají** množinu M), je-li $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$. O **otevřeném pokrytí** mluvíme v případě, že všechny množiny $M_\alpha \in \mathcal{M}$ jsou otevřené.

[10]) Podmínka $M \subset \mathbb{R}^p$ věty 12.5 je tedy *podstatná*. Ve funkcionální analýze se dokazuje, že *uzavřená jednotková koule v n.l.p. X je kompaktní, právě když má X konečnou dimenzi.*

Věta 12.7. (Borelova věta.) *Je-li* $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *otevřené pokrytí kompaktní podmnožiny* M *metrického prostoru* (X, ρ), *existuje konečná množina* $B \subset A$ *tak, že systém* $\mathcal{M}_1 := \{M_\alpha\,;\, \alpha \in B\}$ *je také pokrytím množiny* M.

* * *

Definice. Jsou-li (X, ρ) a (Y, σ) metrické prostory a je-li $M \subset X$, říkáme, že zobrazení $f : M \to Y$ je **spojité v bodě** $x \in M$ **vzhledem k** M, platí-li implikace

$$x_k \in M \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{N},\ x_k \to x \ \Rightarrow \ f(x_k) \to f(x)\,. \tag{86}$$

Je-li f spojité v každém bodě $x \in M$ *vzhledem k* M, říkáme, že je **spojité v** M. Pro spojitost vzhledem k X se obvykle užívá krátký název **spojitost**.

Cvičení 12.29. Uvažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako 1 v intervalu $I := \langle -1, 1 \rangle$ a jako 0 v $\mathbb{R} - I$, je spojitá v I, ale není spojitá (*vzhledem k* $\mathbb{R}$) v bodech ± 1.

Slova „vzhledem k M" jsou proto v definici spojitosti v M podstatná. Uvažte však také, že *v případě otevřené množiny* M *je spojitost vzhledem k* M *totéž co spojitost vzhledem k* X.

Cvičení 12.30. Dokažte ekvivalenci těchto tří výroků:

A. *f je spojitá v bodě x vzhledem k M.*

B. *Pro každé okolí* $U(f(x))$ (v *prostoru* Y) *existuje okolí* $U(x)$ (v *prostoru* X) *tak, že* $f(U(x) \cap M) \subset U(f(x))$.

C. *Pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* $\delta \in \mathbb{R}_+$ *tak, že*

$$x' \in M\,,\ \rho(x', x) < \delta \ \Rightarrow \ \sigma(f(x'), f(x)) < \varepsilon\,. \tag{87}$$

Dodatek. *Je-li* $M \subset X$ *otevřená množina, lze v podmínce* A *slova „vzhledem k* M*" vynechat, v podmínce* B *lze psát* $U(x)$ *místo* $U(x) \cap M$ *a v podmínce* C *nemusíme psát „*$x' \in M$*".*

Cvičení 12.31. Dokažte ekvivalenci těchto výroků:

A. *Zobrazení* $f : X \to Y$ *je spojité.*

B. *Pro každou množinu* M *otevřenou v* Y *je množina* $f_{-1}(M)$ *otevřená v* X.

C. *Pro každou množinu* N *uzavřenou v* Y *je množina* $f_{-1}(N)$ *uzavřená v* X.

D. *Pro každou množinu* $W \subset X$ *je* $f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$.

Věta 12.7. *Je-li* X *kompaktní prostor a je-li zobrazení* $f : X \to Y$ *spojité, je i množina* $f(X)$ *kompaktní.*

Důsledek. *Je-li* $X \neq \emptyset$ *kompaktní prostor, nabývá v něm každá spojitá funkce* $f : X \to \mathbb{R}$ *jak svého maxima, tak i svého minima.* $\square$

Následující tvrzení zobecňuje známou větu o spojitosti superpozice dvou reálných funkcí reálné proměnné; protože podprostor metrického prostoru je metrický prostor, vyslovíme je pro jednoduchost jen pro celé prostory s tím, že užívat je lze (po evidentní úpravě) i pro podprostory.

Věta 12.8. 1. *Je-li zobrazení f z m.p. X do m.p. Y spojité v bodě $a \in X$ a je-li zobrazení g z m.p. Y do m.p. Z spojité v bodě $f(a)$, je superpozice $g \circ f$ spojitá v bodě a.*

2. *Je-li $f : X \to Y$ spojité v X a je-li $g : Y \to Z$ spojité v Y, je superpozice $g \circ f$ spojitá v X.*

Důležitost stejnoměrné konvergence naznačuje např. tato věta:

Věta 12.9. *Nechť X, Y jsou metrické prostory, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost zobrazení z X do Y, f zobrazení z X do Y. Pak platí:*

1. *Jsou-li všechna zobrazení f_k spojitá v bodě $a \in X$ a je-li $f_k \to f$ stejnoměrně v jistém $U(a)$, je i zobrazení f spojité v bodě a.*

2. *Jsou-li všechna zobrazení f_k spojitá v X a je-li $f_k \to f$ stejnoměrně v X, je zobrazení f spojité v X.*

Cvičení 12.32. Dokažte, že *prostor $C(a, b)$ z* Cv. 12.09 *je uzavřený podprostor prostoru $M(a, b)$ z* Cv. 12.08 .

Rada: Jde jen o parafrázi 2. části věty 12.9. ◇

Definice. Jsou-li (X, ρ), (Y, σ) metrické prostory, říkáme, že zobrazení $f : X \to Y$ je **stejnoměrně spojité** (v X), jestliže

$$x' \in X\,,\ x'' \in X\,,\ \rho(x', x'') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon\,. \tag{88}$$

Poznámka 12.5. Spojitost zobrazení f v X je totéž jako jeho spojitost v každém bodě $x'' \in X$, tj. totéž jako platnost výroku: *Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a pro každý bod $x'' \in X$ existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ tak, že*

$$x' \in X,\ \rho(x', x'') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon\,. \tag{89}$$

V této podmínce závisí δ obecně jak na ε, tak i na bodu x''; f je stejnoměrně spojité, právě když lze δ volit nezávisle na bodu x''. Obecně je tedy stejnoměrná spojitost podmínkou *silnější* než pouhá spojitost (viz též Cv. 12.33); následující věta ukazuje, že v kompaktních prostorech je situace přehlednější.

Věta 12.10. *Každé spojité zobrazení kompaktního prostoru X (do libovolného metrického prostoru Y) je* (v X) *stejnoměrně spojité.*

Cvičení 12.33. Dokažte, že

1. *funkce $f(x) := x^2$ je spojitá v $\mathbb{R}$, ale není tam spojitá stejnoměrně*;

2. *funkce $f(x) := \cos(1/x)$ je spojitá a omezená v omezeném intervalu $(0, 1\rangle$, ale není v tomto intervalu spojitá stejnoměrně.*

Rady: Ad 1. Je-li dáno libovolné $\delta \in \mathbb{R}_+$ a položíme-li $x_n := n$, $y_n = n + 1/n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, bude $0 < y_n - x_n = 1/n < \delta$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, zatímco výraz $y_n^2 - x_n^2 = 2 + 1/n^2$ bude (pro všechna n) větší než 2.

Ad 2. Je-li $x_n := 1/n\pi$, je $|\,x_n - x_{n+1}\,| = 1/n(n+1)\pi \to 0$ pro $n \to \infty$, zatímco $|\,f(x_n) - f(x_{n+1})\,| = |\cos n\pi - \cos(n+1)\pi\,| = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. ◇

Definice. Jsou-li X, Y metrické prostory, říkáme, že **zobrazení** $f : X \to Y$ je **homeomorfní** (nebo že je to **homeomorfismus**), je-li f spojité a prosté v X a je-li zobrazení f_{-1} spojité v $f(X)$. Říkáme, že **prostory** X, Y jsou **homeomorfní**, existuje-li homeomorfní zobrazení $f : X \to_{\text{na}} Y$.

Příklad 12.5. Je zřejmé, že *každé izometrické zobrazení je homeomorfní.*

Příklad 12.6. Je dobře známo, že *reálná funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je prostá, právě když je ryze monotónní; množina $f(I)$ je pak interval a funkce f_{-1} inverzní k f je v něm spojitá. Takové zobrazení je tedy homeomorfní.*

Obecně ovšem není pravda, že každé prosté spojité zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je homeomorfismus; dokumentuje to tento p ř í k l a d : Funkce f definovaná v množině $M = (-\infty, -1\rangle \cup (0, +\infty)$ podmínkami

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x+1, & \text{je-li } x \in (-\infty, -1\rangle \\ x, & \text{je-li } x \in (0, +\infty) \end{array} \right\}$$

je spojitá a prostá v M, ale inverzní funkce $g := f_{-1} : \mathbb{R} \to_{\text{na}} M$ spojitá není, protože $g(0+) = 0$, $g(0-)$ $(= g(0)) = -1$.

Cvičení 12.34. Dokažte, že *pro každé dva otevřené intervaly $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, $I \neq \mathbb{R} \neq J$, existuje* **lineární lomená funkce**, tj. funkce tvaru

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\,, \quad \text{kde } \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbb{R} \text{ a } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\,, \tag{90}$$

která je homeomorfismem a zobrazuje I na J.

Dokažte dále, že *lineární lomenou funkcí lze množinu $\mathbb{R}$ homeomorfně zobrazit jen na $\mathbb{R}$, přičemž každá taková funkce je lineární.* (Uvažte, co by se stalo, kdyby bylo $\gamma \neq 0$.)

Najděte několik (svým typem pokud možno hodně odlišných) rostoucích homeomorfních zobrazení $\mathbb{R}$ na interval $(-1, 1)$.

Příklad 12.7. Zobrazení přiřazující číslu $z \in \mathbb{C}$ dvojici $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$ je izometrické, tedy homeomorfní; z toho plyne, že *otevřená Gaussova rovina $\mathbb{C}$ je homeomorfní s eukleidovskou rovinou $\mathbb{R}^2$.*

Uzavřená Gaussova rovina $\mathbb{S}$ je homeomorfní s jednotkovou sférou $\tilde{\mathbb{S}}$ v $\mathbb{R}^3$; stereografická projekce je příslušný homeomorfismus.

Cvičení 12.35. Najděte homeomorfní zobrazení h otevřeného jednotkového kruhu $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ tak, aby platila implikace

$$z \in \mathcal{U},\ z = |z|e^{it},\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow h(z) = |h(z)|e^{it}$$

a rovnost $h(\mathcal{U}) = X$, kde

1. $X = \mathbb{C}$ (celá rovina);

2. $X = \{z \in \mathbb{C};\ |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ (otevřený čtverec o středu 0 a délce strany 2);

3. $X = \{x + iy \in \mathbb{C};\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$, kde $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ (otevřená elipsa o středu 0 a poloosách délek a, b).

Rada: Protože h má zachovávat argument (= polární úhel), pište čísla $z \in \mathbb{C}$ v „polárním“ tvaru $z = r\,e^{it}$, kde $r \in \langle 0, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$, a homeomorfismy h hledejte ve tvaru $h(r\,e^{it}) = g(r,t)\,e^{it}$, kde g je vhodná nezáporná funkce. ◇

Cvičení 12.36. Dokažte, že *lineární lomená funkce* $f(z) := (z-i)/(z+i)$ *zobrazuje otevřenou horní polorovinu* $X := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ *homeomorfně na jednotkový kruh* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

Rada: Porovnáním absolutní hodnoty čitatele a jmenovatele zjistíte, že pro každé $z \in X$ je $|f(z)| < 1$; je tedy $f(X) \subset \mathcal{U}$. Rovnice $w = f(z)$ má pro $w \in \mathcal{U}$ právě jedno řešení $z = i(1+w)/(1-w)$ a imaginární část tohoto z, rovná $(1-|w|^2)/(|1-w|^2))$, je kladná. ◇

Cvičení 12.37. Nechť

$$f(x,y,z) := \left\{ \begin{array}{ll} (x,y,0), & \text{je-li } x > 0, y > 0, z = 0 \\ (z,0,0), & \text{je-li } x = y = 0, z \geq 0 \\ (0,-z,0), & \text{je-li } x = y = 0, z \leq 0 \end{array} \right\}. \tag{91}$$

Dokažte, že f *je prosté spojité zobrazení množiny* $X \subset \mathbb{R}^3$, *která je sjednocením prvního otevřeného kvadrantu roviny* xy *s osou* z, *na první uzavřený kvadrant roviny* xy. Dokažte dále, že *zobrazení* f *není homeomorfní.* $\square$

Poznamenejme, že nic podobného situaci z Cv. 12.37 nemůže nastat, je-li množina X kompaktní; platí totiž toto tvrzení:

Věta 12.11. *Je-li* f *prosté spojité zobrazení kompaktního m. p.* X *do* (*libovolného*) *m. p.* Y, *je* f *homeomorfismus.*

Příklad 12.8. Nechť $p \in \mathbb{N}$ a matice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2p} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \ldots & \lambda_{pp} \end{pmatrix} \tag{92}$$

nechť je *regulární*, tj. nechť $\det \Lambda \neq 0$. *Označíme-li*

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p\,, \\ L_2(x) &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_p(x) &= \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \ldots + \lambda_{pp}x_p\,, \end{aligned} \tag{93}$$

je lineární zobrazení $L = (L_1, L_2, \ldots, L_p)$ *homeomorfismus prostoru* $\mathbb{R}^p$ *na* $\mathbb{R}^p$. (Spojitost zobrazení L je zřejmá. Z algebry je známo, že soustava rovnic (93) má právě jedno řešení, nahradíme-li p-tici $\{L_1(x), \ldots, L_p(x)\}$ jakoukoli p-ticí $\{y_1, \ldots, y_p\}$

reálných čísel, protože determinant soustavy není nulový. Z toho plyne, že $L(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p$; protože řešení je lineární funkcí levých stran, je inverzní zobrazení L_{-1} spojité.)

Považujeme-li x a $L(x)$ za *sloupcové vektory* (tj. za matice typu $p \times 1$, v jejichž k-tém řádku je číslo x_k resp. $L_k(x)$), lze „transformační rovnosti" (93) zapsat ve tvaru

$$L(x) = \Lambda x, \tag{93'}$$

kde vpravo je maticový součin. Znamená-li Λ_{-1} matici inverzní k Λ, popisuje maticová rovnost

$$L_{-1}(y) = \Lambda_{-1} y \tag{94}$$

zobrazení inverzní k L; y a $L_{-1}(y)$ je třeba opět považovat za sloupcové vektory.

Zobrazení L je izomerické, právě když je matice Λ **ortogonální**, což znamená, že její řádky $r_j := (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{jp})$, $j = 1, \dots, p$, splňují podmínku

$$(r_j \cdot r_k) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}\lambda_{ki} = \delta_{jk} \ \text{ pro } \ j = 1, \dots, p,\ k = 1, \dots, p. \tag{95}$$

Je-li podmínka splněna, platí nejen rovnost $\| L(x) \| = \| x \|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^p$, ale dokonce obecnější rovnost

$$(L(x) \cdot L(y)) = (x \cdot y) \ \ \textit{pro každé dva body} \ \ x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^p. \tag{96}$$

Z toho ihned plyne, že souřadnicové osy se zobrazí na soustavu navzájem ortogonálních přímek, tedy nových souřadnicových os, na nichž je stejné měřítko jako na osách původních.

Cvičení 12.38. Nechť X, Y jsou metrické prostory, $f : X \to_{\text{na}} Y$ prosté zobrazení; dokažte ekvivalenci těchto podmínek:

A. *Zobrazení f je homeomorfní.*

A$'$. *Zobrazení f_{-1} je homeomorfní.*

B. *Množina M je otevřená v X, právě když je množina $f(M)$ otevřená v Y.*

B$'$. *Množina N je otevřená v Y, právě když je množina $f_{-1}(N)$ otevřená v X.*

C. *Množina M je uzavřená v X, právě když je množina $f(M)$ uzavřená v Y.*

C$'$. *Množina N je uzavřená v Y, právě když je množina $f_{-1}(N)$ uzavřená v X.*

D. *Pro každou množinu $M \subset X$ je $\overline{f(M)} = f(\overline{M})$.*

D$'$. *Pro každou množinu $N \subset Y$ je $\overline{f_{-1}(N)} = f_{-1}(\overline{N})$.*

Rada: Je zřejmé, že A $\Leftrightarrow$ A$'$; jinak viz Cv. 12.31. $\diamond$

* * *

Označení. Je-li $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost bodů nějakého m. p. X a je-li $x \in X$, píšeme $x \neq x_k \to x$, je-li $x \neq x_k$ pro s. v. k a $x_k \to x$.

Definice. Je-li $M \subset X$, kde X je m.p., říkáme, že $x \in X$ je **hromadný bod** množiny M, existuje-li posloupnost bodů $x_k \in M$, pro niž je $x \neq x_k \to x$. Říkáme, že bod $x \in M$ je **izolovaný bod** množiny M, není-li jejím hromadným bodem. [11])

Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá **derivace** množiny M; značíme ji $\operatorname{der} M$.

Definice. Je-li X m.p., $x \in X$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, nazýváme množinu

$$P(x, \varepsilon) := U(x, \varepsilon) - \{x\} \tag{97}$$

prstencové okolí bodu x o **poloměru** ε; x je jeho **střed**. Je-li ρ metrika v X (pomocí níž byla vytvořena okolí $U(x, \varepsilon)$), je zřejmě

$$P(x, \varepsilon) = \{x' \in X\,;\, 0 < \rho(x', x) < \varepsilon\}. \tag{97'}$$

Nezáleží-li na poloměru, značíme prstencová okolí krátce $P(x)$. Okolí $U(x)$ se pro zdůraznění nazývají **kruhová**.

Cvičení 12.39. Dokažte tato tvrzení:

1. *$x \in X$ je hromadný bod množiny $M \subset X$, právě když je množina $M \cap U(x)$ nekonečná pro každé okolí $U(x)$ bodu x.*

2. *$x \in X$ je hromadný bod množiny $M \subset X$, právě když je množina $M \cap P(x)$ nekonečná pro každé okolí $P(x)$ bodu x.*

3. *$x \in X$ je hromadný bod množiny $M \subset X$, právě když je $M \cap P(x) \neq \emptyset$ pro každé okolí $P(x)$ bodu x.*

4. *$x \in M$ je izolovaný bod množiny $M \subset X$, právě když pro každou posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodů z M platí implikace: $x_k \to x \Rightarrow x_k = x$ pro s. v. k.*

Rada k implikaci 3 $\Rightarrow$ 2: Existuje-li $P(x)$ tak, že $M \cap P(x)$ je neprázdná konečná množina, a jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ všechny její prvky, neobsahuje okolí $P(x, \delta)$, kde $\delta := \min\{\rho(x_k, x)\,;\, 1 \leq k \leq n\}$, žádný bod množiny M. $\diamond$

Definice. Nechť X je m.p., nechť $M \subset X$, $a \in \operatorname{der} M$, nechť f je zobrazení nějaké množiny tvaru $P(a) \cap M$ do m.p. Y a nechť $A \in Y$; píšeme pak

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} f(x) = A, \tag{98}$$

platí-li pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$ implikace

$$a \neq x_k \to a \Rightarrow f(x_k) \to A. \tag{99}$$

Bod $A \in Y$ se pak nazývá **limita zobrazení f v bodě a vzhledem k M**. Je-li $M = X$, píšeme pod znamením limity zpravidla jen „$x \to a$“ a mluvíme krátce o „limitě zobrazení f v bodě a“.

[11]) Všimněme si, že zatímco izolovaný bod množiny M je bodem této množiny, hromadný bod množiny M v M ležet nemusí.

Poznámka 12.6. Limitu vzhledem k M definujeme jen v bodech $a \in \operatorname{der} M$, abychom zajistili její jednoznačnost; pro body $a \in X - \operatorname{der} M$ totiž žádné posloupnosti bodů $x_k \in M$, pro něž by bylo $a \neq x_k \to a$, neexistují, a implikace (99) by byla v důsledku toho pravdivá pro každé A.

Jistě je zřejmé, že platí toto jednoduché, ale užitečné tvrzení:

(100) *Je-li* $N \subset M \subset X$, $a \in \operatorname{der} N$, *je* $\lim_{x \to a,\, x \in N} f(x) = \lim_{x \to a,\, x \in M} f(x)$, *existuje-li limita vpravo.*

Tvrzení (100) se často užívá k důkazu, že limita (98) *neexistuje*; abychom neexistenci limity dokázali, *stačí najít dvě množiny* $N_1 \subset M$, $N_2 \subset M$ *tak, že*

$$a \in \operatorname{der} N_1 \cap \operatorname{der} N_2, \quad \lim_{x \to a,\, x \in N_1} f(x) \neq \lim_{x \to a,\, x \in N_2} f(x).$$

P ř í k l a d . Je-li $f(x) := 1$ v $\mathbb{R}_-$ a $f(x) := 0$ v $\mathbb{R}_+$, nemá funkce f v bodě 0 limitu (vzhledem k $\mathbb{R}$), protože její limita vzhledem k $\mathbb{R}_-$ je rovna 1 a limita vzhledem k $\mathbb{R}_+$ se rovná 0.

Poznámka 12.7. K tomu, abychom dokázali existenci limity na levé straně (98), stačí ověřit, že pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, pro niž je $a \neq x_k \to a$, má posloupnost $\{f(x_k)\}$ příslušných hodnot *nějakou* limitu v Y, protože *pak má každá taková posloupnost stejnou limitu*. Jsou-li totiž $\{x'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x''_k\}_{k=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti s uvedenými vlastnostmi, má uvedenou vlastnost i posloupnost $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots,$ $x'_k, x''_k, \ldots$; podle předpokladu má tedy posloupnost příslušných hodnot jistou limitu $A \in Y$ a posloupnosti $\{f(x'_k)\}$, $\{f(x''_k)\}$ z ní vybrané mají touž limitu A.

Věta 12.12. *Je-li* $a \in M \cap \operatorname{der} M$, *je zobrazení* f *spojité v bodě* a *vzhledem k* M, *právě když je*

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} f(x) = f(a). \tag{101}$$

Je-li a *izolovaný bod množiny* M, *je* f *spojité v bodě* a *vzhledem k* M, *právě když je v bodě* a *definováno.*

Věta 12.13. (Věta o limitě superpozice.) *Nechť* X, Y, Z *jsou metrické prostory, nechť* $M \subset X$, $a \in \operatorname{der} M$ *a nechť zobrazení* $f : M \to Y$ *má v bodě* a *vzhledem k* M *limitu* $A \in Y$. *Pak platí:*

1. *Je-li* $A \in \operatorname{der} f(M)$, *má-li zobrazení* $g : f(M) \to Z$ *v bodě* A *vzhledem k* $f(M)$ *limitu* $B \in Z$ *a existuje-li okolí* $P(a) \subset X$ *tak, že* $x \in P(a) \cap M \Rightarrow f(x) \neq A$, *je*

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} g(f(x)) = B. \tag{102}$$

2. *Je-li* $N := f(M) \cup \{A\}$ *a je-li zobrazení* $g : N \to Z$ *spojité v bodě* A *vzhledem k* N, *je*

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} g(f(x)) = g(A). \tag{103}$$

Cvičení 12.40. Ukažte, že *není-li splněna podmínka* $x \in P(a) \cap M \Rightarrow f(x) \neq A$ *v první části* V.12.14, *nemusí platit* (102), *i když jsou ostatní podmínky splněny.*

Rada: Limity v bodě 0 funkcí $f(x) := x \sin(1/x)$ a $g(x) := 1 - |\operatorname{sgn} x|$ existují, jejich superpozice $g \circ f$ limitu v bodě 0 nemá. ⋄

Cvičení 12.41. Dokažte toto tvrzení: *Jsou-li množiny $M \subset X$ a $N \subset X$ buď obě otevřené, nebo obě uzavřené, a je-li zobrazení $f : (M \cup N) \to Y$ spojité v bodě $a \in M \cap N$ vzhledem k M i vzhledem k N, je v bodě a spojité i vzhledem k $M \cup N$.*

Na příkladě pak ukažte, že *podmínka, že množiny M, N jsou buď obě otevřené, nebo obě uzavřené, je podstatná.*

Rada: Jsou-li M, N otevřené množiny, užijte definici spojitosti založenou na okolích; jsou-li uzavřené, užijte raději definici založenou na posloupnostech a uvažte, že když je $x_k \in M \cup N$ pro s.v. k, mohou nastat jen tyto tři případy: 1) $x_k \in M$ pro s.v. k, 2) $x_k \in N$ pro s.v. k, 3) existují dvě nekonečné posloupnosti indexů k'_m a k''_n tak, že skoro každé $k \in \mathbb{N}$ se rovná buď některému k'_m, nebo některému k''_n a že $x_{k'_m} \in M$ pro všechna m, $x_{k''_n} \in N$ pro všechna n.

Uvažte pak, že Dirichletova funkce f (rovná 1 v $\mathbb{Q}$ a 0 v $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) je spojitá v $\mathbb{Q}$ i v $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ale není spojitá v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$. ⋄

Cvičení 12.42. Dokažte, že

(104) *množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, právě když je $M = \bigcup_{k \in K} I_k$, kde K je nějaká spočetná množina a kde I_k jsou disjunktní otevřené intervaly.*

Rada: Definujte v otevřené množině M relaci R tak, že xRy znamená, že existuje interval $J \subset M$ obsahující body x, y. Ukažte, že jde o ekvivalenci a že třídy I_k generované touto ekvivalencí splňují všechny podmínky tvrzení (104). ⋄

* * *

Definice. Leží-li množiny M, N v m.p. X, říkáme, že množina $M \subset N$ je **hustá** v N, je-li $N \subset \overline{M}$. Říkáme, že množina M je **řídká** (v X), je-li $\operatorname{int} \overline{M} = \emptyset$. □

Snadno nahlédneme, že platí tato tvrzení:

(105) *$M \subset N$ je hustá v N, právě když je každý bod $x \in N$ buď bodem množiny M, nebo jejím hromadným bodem.*

(106) *$M \subset N$ je hustá v N, právě když každé okolí $U(x)$ každého bodu $x \in N$ protíná M.*

(107) *$M \subset N$ je hustá v N, existuje-li pro každé $x \in N$ posloupnost bodů $x_k \in M$ tak, že $x_k \to x$.*

(108) *Je-li množina M řídká (v X), platí totéž o $\overline{M}$ i o každé množině $M_1 \subset M$.*

Cvičení 12.43. Dokažte tato tvrzení:

1. *V $\mathbb{R}$ je hustá jak množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel, tak i množina $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel. Průnik každé z těchto množin s intervalem (a, b) (kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) je hustý v intervalu $\langle a, b \rangle \cap \mathbb{R}$.*

2. *Je-li každá z množin $X_1, \dots, X_p$ hustá v $\mathbb{R}$, je kartézský součin $X := X_1 \times \dots \times X_p$ hustý v $\mathbb{R}^p$ a pro každou otevřenou množinu $M \subset \mathbb{R}^p$ je množina $X \cap M$ hustá v $\overline{M}$.*

Cvičení 12.44. Dokažte, že *v Hilbertově prostoru ℓ^2 je hustá množina $\mathbb{Q}^\omega$ všech bodů $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, kde $x_k \in \mathbb{Q}$ pro všechna k a $x_k = 0$ pro skoro všechna k.*

Rada: Je-li $y \in \ell^2$, řada $\sum_{k=1}^\infty y_k^2$ konverguje, takže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{k=p+1}^\infty y_k^2 < \varepsilon^2/2$; jsou-li $x_k \in \mathbb{Q}$ zvolena tak, že $(y_k - x_k)^2 < \varepsilon^2/2p$ pro $k = 1, \dots, p$, je vzdálenost bodu $\{x_1, \dots, x_p, 0, 0, 0, \dots\}$ od bodu y menší než ε.

Poznámka 12.8. Slavnou *Weierstrassovu větu* [12]) o stejnoměrné aproximaci spojité funkce polynomy najdeme v literatuře zpravidla v jednom z těchto tvarů:

(109′) *Pro každou funkci f spojitou v $\langle a, b\rangle$ a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje polynom g tak, že $\max\{|f(x) - g(x)|;\ x \in \langle a, b\rangle\} < \varepsilon$.*

(109″) *Pro každou funkci f spojitou v $\langle a, b\rangle$ existuje posloupnost polynomů g_k tak, že $g_k \to f$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$.*

Větu však lze vyslovit i takto:

(109) *Pro každý interval $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ je množina všech polynomů (restringovaných na $\langle a, b\rangle$) hustá v prostoru $C(a, b)$ všech funkcí spojitých v $\langle a, b\rangle$ s maximovou normou.*

Poznámka 12.9. Jednoduchými příklady řídkých podmnožin prostoru $\mathbb{R}$ jsou množiny $\mathbb{Z}$, $\{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{1/n + 1/m;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$. V kapitole 19 (Př. 19.2) se seznámíme s daleko složitějšími řídkými množinami, s tzv. *Cantorovým diskontinuem* a dalšími diskontinuy; tyto množiny nemají na rozdíl od uvedených tří množin žádné izolované body a jsou kompaktní a nespočetné.

Řídkost množiny M je definována podmínkou, že *uzávěr množiny M nemá vnitřní body*; podmínka $\operatorname{int} M = \emptyset$ má zcela jiný význam a s řídkostí přímo nesouvisí: Splňuje ji např. množina $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, která není řídká, ale hustá (v $\mathbb{R}$).

Podobně jako množina, která není otevřená, nemusí být uzavřená, nemusí množina, která není řídká, být hustá. (Příklad: Množina $\langle 0, 1\rangle$ není ani řídká, ani hustá v $\mathbb{R}$.) Platí však toto tvrzení:

Věta 12.14. *Uzavřená množina $M \subset X$ je řídká v X, právě když je (otevřená) množina $X - M$ hustá v X.*

* * *

Podprostor metrického prostoru (X, ρ) jsme definovali jako množinu $Y \subset X$ s metrikou $\rho | Y \times Y$. Z toho plyne, že okolí $U_Y(y)$ bodů $y \in Y$ v podprostoru Y mají tvar $U(y) \cap Y$, kde $U(y)$ je okolí bodu y v X. Protože Y je metrický prostor, mají v něm smysl všechny pojmy, které jsme v metrických prostorech zavedli; přenesení těchto pojmů z prostoru X do jeho podprostorů Y se říká *relativizace*.

[12]) Klasický Bernštejnův důkaz této důležité věty najde čtenář např. v [2].

Pracujeme-li současně v prostoru X i v jeho podprostoru Y, mohly by vést k nedorozumění výroky typu „$M \subset Y$ je otevřená množina", protože není jasné, zdali jde o množinu otevřenou v X, nebo v Y. *V podobných situacích je proto na místě zvýšená přesnost vyjadřování; tam, kde je to možné, vyznačujeme např. indexem* (*jako jsme to udělali v případě okolí*), *ke kterému prostoru je daný pojem vztažen.*

Snadno nahlédneme, že platí např. tato tvrzení:

(110) *Množina $M \subset Y$ je otevřená* (*uzavřená*) *v Y, právě když má tvar $M^* \cap Y$, kde M^* je množina otevřená* (*uzavřená*) *v X.*

(111) *Uzávěr $\overline{M}^Y$ množiny M v Y je roven $\overline{M} \cap Y$* (*kde $\overline{M}$ je uzávěr v X*).

Pozor však! *Není pravda, že* $\operatorname{int}_Y M = \operatorname{int} M \cap Y$, *a není ani pravda, že* $\partial_Y M = \partial M \cap Y$. (Je-li $X = \mathbb{R}$, $M = Y = \mathbb{Q}$, je $\operatorname{int}_Y M = \mathbb{Q}$, $\operatorname{int} M = \emptyset$, $\partial_Y M = \emptyset$, $\partial M = \mathbb{R}$.)

Řešení

12.11. Položíme-li

$$f_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2k^5 x, & \text{je-li } 0 \le x \le \frac{1}{2}k^{-3} \\ 2k^2(1 - k^3 x), & \text{je-li } \frac{1}{2}k^{-3} \le x \le k^{-3} \\ 0, & \text{je-li } k^{-3} \le x \le 1 \end{array} \right\}, \tag{112}$$

je f_k po částech lineární a nezáporná v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, má maximum v bodě $\frac{1}{2}k^{-3}$ rovné k^2 a zřejmě je $f_k \to 0$ bodově v $\langle 0, 1\rangle$; snadno zjistíme, že $\int_0^1 f_k = 1/2k$ a $\int_0^1 f_k^2 = k/3$.

Obdobné vlastnosti mají nezáporné funkce

$$g_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k^2 \sin(k^3 \pi x), & \text{je-li } 0 \le x \le k^{-3} \\ 0, & \text{je-li } k^{-3} \le x \le 1 \end{array} \right\}; \tag{113}$$

v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ bodově konvergují k 0, každá z funkcí g_k je v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spojitá, má maximum rovné k^2 v bodě $\frac{1}{2}k^{-3}$, $\int_0^1 g_k = 2/k\pi$, $\int_0^1 g_k^2 = \frac{1}{2}k$.

Každá z nezáporných funkcí

$$h_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k^2 \sin^2(k^3 \pi x), & \text{je-li } 0 \le x \le k^{-3} \\ 0, & \text{je-li } k^{-3} \le x \le 1 \end{array} \right\} \tag{114}$$

má v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spojitou derivaci, $h_k \to 0$ bodově, $\max h_k = h_k(\frac{1}{2}k^{-3}) = k^2$, $\int_0^1 h_k = 1/2k$, $\int_0^1 h_k^2 = \frac{3}{8}k$.

12.13. $x_k = 1/k$.

12.23. Pro $p = 2$ jsou to kruhy, čtverce o stranách rovnoběžných se souřadnicovými osami a čtverce „postavené na vrchol"; pro $p = 3$ se jedná o koule, o krychle o hranách rovnoběžných se souřadnicovými osami a o osmistěny „postavené na vrchol".

12.34. Omezený interval (a, b) zobrazuje na omezený interval (c, d) např. (rostoucí) funkce $((d-c)x - (ad - bc))/(b-a)$. Následující tabulka podává příklady funkcí zobrazujících homeomorfně otevřený interval na otevřený interval, přičemž $-\infty < a < b < +\infty$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$:

Zobrazuje se	na (a, b)	na $(A, +\infty)$	na $(-\infty, B)$
(a, b)	x	$\dfrac{x(1-A) + Ab - a}{b-x}$	$\dfrac{x(B+1) - aB - b}{x-a}$
$(A, +\infty)$	$\dfrac{a + b(x-A)}{x+1-A}$	x	$A + B - x$
$(-\infty, B)$	$\dfrac{a(x-B) - b}{x-B-1}$	$A + B - x$	x

Ani když odhlédneme od toho, že koeficienty $\alpha, \dots, \delta$ lze násobit týmž nenulovým číslem, aniž se funkce $f(x) = (\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$ změní, neurčují intervaly I, J tyto koeficienty jednoznačně; čtenářovy výsledky proto nemusí souhlasit s výsledky uvedenými v tabulce. Až na $A + B - x$ jsou všechny funkce uvedené v tabulce rostoucí, funkce ležící symetricky vzhledem k diagonále jsou vzájemně inverzní. Klesající funkci $A + B - x$ lze nahradit (složitější) funkcí rostoucí – např. funkcí $(B(x-A) - 1)/(x-A)$, která také zobrazuje $(A, +\infty)$ na $(-\infty, B)$; funkci k ní inverzní dostaneme záměnou čísel A, B.

Rostoucími homeomorfními zobrazeními $\mathbb{R}$ na $(-1, 1)$ jsou např. funkce

$$\frac{x}{1+|x|}, \quad \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x, \quad \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

12.35. V úlohách $1-3$ lze funkci $g(r, t)$ volit např. takto:

Ad 1. $g(r, t) = -\lg(1-r)$.

Ad 2. $g(r, t) = r/f(t)$, kde $f(t)$ je v intervalech $\langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi \rangle$, $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, $\langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$, $\langle \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$ po řadě rovno $\cos t$, $\sin t$, $-\cos t$, $-\sin t$.

Ad 3. $g(r, t) = rab/(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2}$.