Inteligentní kalkulus 2

1000 příkladů z pokročilejší analýzy

Ilja Černý

Praha 2012

K elektronickému vydání knihy

Ilja Černý: Inteligentní kalkulus 2

Kniha Ilja Černý: Úvod do inteligentního kalkulu 2 s podtitulem „1000 příkladů z pokročilejší analýzy“ byla vydána nakladatelstvím Academia v roce 2005 a má nyní kratší název uvedený nahoře. Je určena studentům a učitelům matematické analýzy všech typů vysokých škol, kterým nestačí seznámit se s bezduchou početní rutinou, ale kteří chtějí do základu pochopit teoretické principy, na nichž jsou výpočty založeny, kteří chtějí znát předpoklady, za nichž lze danou početní metodu užít, i obor, v němž získané výsledky platí.

Zásady, podle nichž byl sestaven 1. díl, se dodržují i v tomto 2. dílu: Nabídkám příkladů určitého typu předchází vždy stručný, ale přesný výklad potřebných pojmů a vět spolu s několika rozřešenými typickými příklady. Řešení předložených příkladů (event. doprovázené obrázky) jsou uvedena vždy na konci příslušné kapitoly.

* * *

Elektronické vydání se liší od knižního kromě několika malých změn v textu hlavně tím, že byla přidána řada ilustrací. Aby nebylo nutné měnit původní čísla stránek, byly ilustrace umístěny na konec knihy (od str. 331 počínaje); *nově ilustrované příklady a cvičení pozná čtenář podle toho, že je za nimi umístěna značka* **o**. (Např. **Cvičení 14.26o** upozorňuje, že k tomuto cvičení lze na konci knihy nalézt obrázek – v tomto případě graf funkce f pro $p = 2$.) Na samém konci přidané části knihy je rejstřík, který by měl hledání obrázků usnadnit.

* * *

Autor obou knih, prof. RNDr. Ilja Černý, DrSc., se narodil v roce 1929 v Praze. Po ukončení gymnázia začal v roce 1948 studovat na tehdejší Přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity v Praze, po absolutoriu se stal vědeckým aspirantem na tehdy vzniklé Matematickofyzikální fakultě UK, pak odborným asistentem postupně na katedře matematické analýzy a katedře aplikované matematiky, na níž v letech 1962 až 1968 zastupoval vedoucího katedry (a která z věcných důvodů změnila svůj název na katedru základů matematické analýzy). Od roku 1965 byl docentem, od roku 1989 je profesorem. Po odchodu do důchodu pracoval (do roku 2000) na Technické univerzitě v Liberci.

Během svého 49 let trvajícího učitelského působení na vysokých školách vedl přednášky, semináře a cvičení nejen z reálné a komplexní analýzy, ale např. i z topologie a teorie množin. Jeho publikační činnost byla ve velké míře ovlivněna potřebami jeho činnosti učitelské. V polovině padesátých let napsal skriptum Integrální počet, založené na článku jeho o něco staršího učitele a přítele prof. Jana Maříka a umožňující nejen výklad Lebesgueova integrálu již ve druhém ročníku, ale majícího za následek i konec pokusů o přijatelný výklad teorie vícerozměrného Riemannova integrálu (který se, jak je dobře známo, k tomuto účelu vůbec nehodí).

Výklady komplexní analýzy trpěly ještě koncem padesátých let nepříjemným rozporem: v „matematické části“ měly již co do přesnosti skvělou úroveň reálné analýzy (o níž se u nás zasloužil především prof. Vojtěch Jarník, ale i o generaci mladší prof. Jan Mařík), která však byla znehodnocována její „topologickou částí“, která se studentům předkládala buď jako „evidentní“, nebo s odkazem, že např. Jordanovu nebo Eilenbergovu větu se studenti naučí (v tehdy neexistující) přednášce z topologie. I. Černý navrhl ve skriptu Stručný úvod do teorie funkcí komplexní proměnné způsob, jak názorné, ale poměrně těžko dokazatelné věty z topologie zařadit do výkladu komplexní analýzy. Obě citovaná skripta se dočkala řady vydání – snad i proto, že podle nich jako první nepřednášel jejich autor, ale jeho učitel prof. V. Jarník, jeden z nejlepších univerzitních pedagogů.

Snaha o proveditelný způsob jak exaktně vyložit věty o křivkovém a plošném integrálu vedly I. Černého k překladu knihy vynikajícího polského matematika Romana Sikorského, kterou nakladatelství Academia vydalo v roce 1973 pod názvem „Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných“ a která výborně doplňuje Jarníkův Integrální počet II. V dalších letech rozpracovával I. Černý i myšlenku těsného propojení komplexní analýzy s topologií roviny: V roce 1967 vyšla (v NČSAV) jeho kniha Základy analysy v komplexním oboru, v roce 1983 (v nakladatelství Academia) obsáhlá monografie Analýza v komplexním oboru, o niž projevilo zájem anglické nakladatelství Ellis Horwood a která byla nakonec ve zhuštěnější podobě vydána v roce 1992 pod názvem Foundations of Analysis in the Complex Domain. V posledně zmíněných třech knihách autor značně rozšířil výklad o (víceznačných) analytických funkcích a o konformních zobrazeních, aby umožnil exaktní aplikace komplexní analýzy např. v rovinných problémech aerodynamiky a hydrodynamiky.

I. Černý byl na MFF řadu let členem vědecké rady, vedoucím katedry a v letech 1966 až 1970 proděkanem. V letech 1955 až 1970 se aktivně účastnil prakticky všech studijních reforem, které tehdy na MFF probíhaly. Nebyl nikdy členem žádné politické strany, ale byl členem kolegia děkana (vedeného prof. A. Švecem), které v dobách represe a hromadného vyhazování učitelů i studentů vysokých škol po roce 1968 dovedlo své učitele i studenty před tímto osudem uchránit. Je nositelem dvou medailí fakulty a jedné medaile Univerzity Karlovy.

Elektronická verze

Autor uděluje souhlas k volnému šíření této elektronické knihy v nezměněném tvaru prostřednictvím elektronických médií.

Praha 2012 I. Černý

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval všem, kteří se o vydání této knihy (a také Úvodu do inteligentního kalkulu) zasloužili.

Je to především Akademie věd České republiky, zastoupená p. PhDr. Martinem Steinerem, která vydání knihy velkoryse dotovala.

Za druhé je to nakladatelství Academia, které bylo ochotno tuto sbírku příkladů vydat. Vedoucí redakce přírodních věd, pí Ing. Jitka Zykánová, vydání knihy řídila, ve všech ohledech mi vycházela vstříc a s příkladnou ochotou se mnou řešila všechny problémy. Mnohokrát jí za to děkuji.

Stejně jako v případě Úvodu byla jazyková korektura a grafická úprava textu svěřena pí RNDr. Evě Leinerové a pí Běle Trpišovské; kniha se nemohla dostat do povolanějších a pečlivějších rukou. Oběma pracovnicím vřele děkuji za jejich obětavou práci a za všechny jejich připomínky. *)

Rád bych konečně s pocitem vděčnosti vzpomněl na dva vynikající učitele, kteří mé názory na kalkulus ovlivnili nejvíce: na Vojtěcha Jarníka a Jana Maříka, profesory Matematicko-fyzikální fakulty Karlova univerzity v Praze.

Praha, listopad 2004 I. Černý

Moje vřelé díky patří nyní i panu doc. Pavlu Pyrihovi z katedry matematické analýzy na MFF UK, který elektronické vydání této knihy inicioval a realizoval.

Praha, leden 2012 I. Černý

Sazba: $\mathcal{AMS}$-TEX

Obrázky a výpočty: Mathematica 2.2.1, 4.1 a 5.2 Stephena Wolframa

© Ilja Černý, 2005

ISBN 80-200-1314-8

*) Zodpovědnost za všechny nedostatky (stejně jako za některé odchylky od sporných norem a současného pravopisu) nesu pochopitelně já jako její autor a sazeč.

Obsah

Předmluva 7

Důležité upozornění. Označení, operace, zkratky 11

12. Metrické prostory 15

13. Posloupnosti a řady funkcí 48

14. Funkce několika proměnných 87

15. Geometrické interpretace 112

16. Lokální řešení rovnic 141

17. Extrémy funkcí několika proměnných 181

18. Lineární diferenciální rovnice 208

19. Lebesgueův integrál 243

20. Fourierovy řady 300

Literatura 323

Rejstřík 325

Obrázky ke kapitole 13 331

Obrázky ke kapitole 14 363

Obrázky ke kapitole 15 385

Obrázky ke kapitole 16 424

Obrázky ke kapitole 17 448

Obrázky ke kapitole 19 512

Obrázky ke kapitole 20 515

Rejstřík obrázků 528

Předmluva

Tato kniha je pokračováním Úvodu do inteligentního kalkulu (krátce „Úvodu"), který vydalo nakladatelství Academia v roce 2002. Úvod obsahuje 11 kapitol a tato kniha začíná proto kapitolou 12. [1]) V rejstříku je kromě hesel z této knihy zařazena i většina hesel z Úvodu. Za předmluvou je umístěn aktualizovaný seznam označení a zkratek.

Tato kniha obsahuje příklady k partiím, které bývají obsahem druhého ročníku přednášek z matematické analýzy na univerzitách; může však být užitečná všude tam, kde se přednáší teorie funkcí více proměnných, tedy např. na pedagogických fakultách a na některých fakultách vysokých školách technických a ekonomických.

Podobně jako v Úvodu se čtenář v této knize seznámí s příslušnými základními pojmy a najde zde (bez důkazů) všechny věty potřebné k racionálnímu a spolehlivému řešení příkladů. Důraz se opět klade na pochopení výpočetních metod a na postupy řešení založené na aplikaci obecných vět. Bylo by jistě zbytečné opakovat zde podrobněji zásady inteligentního kalkulu; čtenář je najde v předmluvě k Úvodu. Poznamenejme jen, že příklady obsažené v této knize jsou obtížnější a mnohdy méně přehledné než příklady pro první ročník. Protože např. grafy funkcí tří a více proměnných nejsou podmnožinami prostoru $\mathbb{R}^3$, v němž lze spojit některé pojmy s názornou představou, bude nyní nutné spoléhat v daleko větší míře na schopnost pracovat s abstraktními objekty podle přísných a přesných zákonů logiky. [2])

Abstraktní metrické prostory a základní topologické a metrické pojmy v nich jsou obsahem kapitoly 12. Při induktivním postupu bychom tak základní pojmy, jako je spojitost a limita zobrazení nebo otevřenost a uzavřenost množiny, studovali nejdříve v $\mathbb{R}$, pak v $\mathbb{R}^2$, v $\mathbb{R}^3$, v eukleidovských prostorech libovolné dimenze, a abstrakcí bychom nakonec došli k metrickým prostorům. I když by takový postup měl pro studenta nesporné výhody, na přednáškách jej zpravidla nelze realizovat pro jeho značnou časovou náročnost. Místo něj se volí postup deduktivní, v němž (po podrobném výkladu v $\mathbb{R}$) přeskočíme k metrickým prostorům a pojmy v nich zavedené ilustrujeme přiměřeným množstvím příkladů např. z roviny a z trojrozměrného prostoru.

Kapitola 13 se zabývá posloupnostmi a řadami funkcí, jejich stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergencí a podmínkami, za nichž je lze derivovat a integrovat „člen po členu". Integrací posloupností a řad funkcí se však zabývá později (a na vyšší úrovni) i kapitola 19. Vyšetřování tzv. mocninných řad jen v reálném oboru je zbytečným přepychem, protože vynaložená námaha je stejná jako v komplexním

[1]) Každá z těchto knih tvoří sice samostatný celek, ale ve druhé z nich se pokládají za známé pojmy a výsledky z Úvodu.

[2]) Studiu prostorů, z nichž některé mají i nekonečnou dimenzi, se nelze vyhnout např. proto, že mnohé aplikace se bez nich neobejdou: Pohyb n hmotných bodů lze i v klasické mechanice studovat jako pohyb jednoho bodu v $3n$-rozměrném prostoru; v obecné teorii relativity se setkáme s křivými prostory dimenze 4, moderní fyzikální teorie studují variety dimenzí ještě vyšších, „klasická" kvantová fyzika dvacátých let dvacátého století pracuje v prostorech nekonečné dimenze.

oboru, ale např. základní věta o rozvoji funkce v mocninnou (Taylorovu) řadu má v komplexním oboru nesrovnatelně jednodušší předpoklady. Mnohdy je teprve po přechodu do komplexního oboru patrné, proč funkci (jako je např.$1/(x^2+1)$), která má v $\mathbb{R}$ derivace všech řádů, nelze rozvést v mocninnou řadu s poloměrem konvergence $+\infty$ a proč jiné funkce (mající také derivace všech řádů všude v $\mathbb{R}$) nelze v mocninnou řadu o daném středu rozvést vůbec. V kapitole 13 je naznačena i myšlenka hledat řešení (lineární) diferenciální rovnice ve tvaru mocninné řady; tato idea je pak dále rozvedena v kapitole 18. To však je jediný exkurs do komplexní analýzy, která má svou vlastní problematiku a jejíž metody i výsledky jsou značně odlišné od metod reálné analýzy.

Kapitoly 14 − 17 jsou věnovány některým základním pojmům a větám teorie funkcí několika proměnných. Jsou to např. směrové a parciální derivace (vč. záměnnosti parciálních derivací vyšších řádů) a diferenciál (který zde není žádnou „nekonečně malou veličinou“, ale lineární formou). Následují některé elementární geometrické pojmy založené na derivacích 1. řádu (tečná a normálová nadrovina), na nichž si čtenář procvičí nejen své znalosti z analýzy, ale i z geometrických aplikací lineární algebry.

Kapitola 16 se zabývá tzv. implicitními funkcemi neboli lokálním řešením soustav (obecně nelineárních) rovnic, kterých je buď méně, nebo stejně jako neznámých funkcí. Seznámení se s varietami dovolí lépe pochopit problém tzv. vázaných extrémů, které se vyšetřují v kapitole 17, difeomorfismy hrají v analýze podobnou roli jako homeomorfismy v obecné topologii. Operuje s nimi např. věta o substituci ve vícerozměrných integrálech.

Studium extrémů funkcí více než jedné proměnné se značně liší od podobné problematiky pro jednu proměnnou, protože do značné míry odpadají úvahy o monotonii, která byla v Úvodu při vyšetřování průběhu funkcí naopak v centru pozornosti. V kapitole 17 se hledají většinou jen „globální“ extrémy, protože „lokální“ extrémy funkcí více proměnných jsou (na rozdíl od tzv. stacionárních bodů) stejně bezvýznamné jako v teorii funkcí jedné proměnné. Derivace ani diferenciály vyšších řádů se při hledání extrémů neužívají.

V kapitole 18 jsou vyloženy principy řešení lineárních diferenciálních rovnic (libovolného řádu), speciálně i rovnic s konstantními koeficienty, u nichž se problém řešení často redukuje na problém čistě algebraický. Zvýšená pozornost je věnována řešením (obecných lineárních) rovnic druhého řádu, které jsou důležité nejen ve fyzice, ale např. i v teorii tzv. speciálních funkcí. Čtenář má možnost seznámit se se základními principy řešení rovnic ve tvaru mocninných (a ještě poněkud obecnějších) řad; protože se k napsání obecného řešení rovnice druhého řádu potřebují dvě lineárně nezávislá řešení, je jistě namístě trvat na jejich nalezení i v případech, kdy to není zrovna jednoduché. Informace uvedené v knize na toto téma jsou však přesto kusé, protože tato problematika patří spíše do komplexní analýzy, kde navazuje na její nepříliš elementární partie a předpokládá znalost tzv. analytických (mnohoznačných) funkcí (viz [14]).

Nejdelší ze všech kapitol je kapitola 19, v níž se vysvětluje integrace přes podmnožiny eukleidovského prostoru libovolné dimenze, přičemž konkrétní výpočty se omezují převážně na $\mathbb{R}^2$ a na $\mathbb{R}^3$. Kalkulus pracuje tradičně s Riemannovým integrálem (případně nějak zobecněným, aby bylo možné integrovat i některé neomezené funkce a přes některé neomezené množiny); výběr Riemannova integrálu se odůvodňuje jeho celkem jednoduchou definicí. Tento argument je podle mého názoru nepatřičný, protože v aplikacích nerozhoduje, jak rychle jsme vyslovili definici, ale jaké má náš výtvor vlastnosti, jak je obecný, jak snadno se s ním zachází. [3])

Riemannův integrál má nepěkné vlastnosti již v $\mathbb{R}$; budeme-li chtít integrovat něco jiného než spojitou funkci přes kompaktní interval, *budeme mít potíže*: Ani funkce identicky rovná 1 nemusí mít integrál přes každou kompaktní množinu. (Má-li hranice této množiny kladnou míru, integrál neexistuje.) Budeme-li chtít provést limitní přechod za znamením (Riemannova) integrálu, *budeme mít potíže* s existencí integrálu z limitní funkce i v případě, že jde o monotónní posloupnost funkcí stejně omezených v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, z nichž každá má jen konečný počet bodů nespojitosti, neboť její limitou může být Dirichletova funkce. Budeme-li chtít např. dvojrozměrnou integraci převést na sled dvou integrací jednorozměrných, *budeme mít potíže*, protože není žádná souvislost mezi existencí (Riemannova) dvojného integrálu a příslušných integrálů dvojnásobných. Budeme-li chtít např. ve dvojném (Riemannově) integrálu provést substituci, *budeme mít potíže*, protože žádná uspokojivá věta o substituci pro tento integrál neexistuje. (I jednoduchá substituce může převést omezený obor na neomezený, omezenou funkci na neomezenou; Riemannův integrál je však definován jen pro (některé) omezené funkce a integrační obor musí být také omezený. A již definice Riemannova integrálu přes rovinu nebo trojrozměrný prostor je přitom problematická. $\mathbb{R}$ je sjednocením všech intervalů s krajními body v $\mathbb{R}$ a tím je dána i „přirozená“ definice Riemannova integrálu od $-\infty$ do $+\infty$ jako limity integrálu od a do b pro $a \to -\infty$ a $b \to +\infty$. Rovina je však sjednocením nejen všech čtverců nebo obdélníků, ale také kruhů, elips, trojúhelníků, atd. Který z těchto útvarů vybereme pro definici integrálu přes celou rovinu? Je „přirozenější“ zvolit čtverce, nebo kruhy? Je to jedno, nebo na tom záleží? Jsem jednoznačně toho názoru, že tudy rozumná cesta nevede.)

Důvodů, proč nepracovat s Riemannovým integrálem, je ještě více; přitom je již 100 let k dispozici integrál daleko obecnější a navíc s nesrovnatelně jednoduššími vlastnostmi. Jeho autorem je francouzský matematik Henri Lebesgue a metodika výkladu jeho integrálu je nyní již propracována a vyzkoušena v kurzovních přednáškách pro různé specializace studentů tak, že obavy před ním jsou zcela zbytečné. Námitka, že Riemannův integrál je vhodný mj. proto, že souvisí se známými konečnými součty (z nichž se pak téměř zázračně stane integrál prostou výměnou Σ za $\int$ a $\Delta x \Delta y \Delta z$ za $dx dy dz$), je zcela neopodstatněná, protože Lebesgueův integrál je zobecněním integrálu Riemannova, a má proto tuto vlastnost také. Užíváme-li však

[3]) Pochopitelně, budeme-li jen bezhlavě počítat (třeba i integrál, který neexistuje), nepotřebujeme žádné věty. Budeme-li počítat jen to, co před námi již někdo správně spočítal, nebudeme příliš riskovat. Běda však, budeme-li chtít objevit něco nového; pak nám podobný postup nezaručí správnost výsledku. Nespoléhejme ani na počítače vybavené příslušným matematickým programem; zatím jsou jejich postupy stejné jako v běžném (bezmyšlenkovitém) kalkulu, se všemi nedostatky, které z toho vyplývají. Dvojné integrály se např. počítají jako dvojnásobné, takže se občas „vypočte“ i integrál, který neexistuje. Zdá se, že jejich autoři jsou sice výborní programátoři, ale špatní znalci matematické analýzy. Bude asi ještě dlouho trvat, než podobné programy začnou produkovat výsledky splňující kritéria exaktní matematiky.

Lebesgueův integrál, nemusíme se snažit např. kruh rozložit na čtverce, protože konečné součty, kterými lze Lebesgueův integrál aproximovat, pracují s obecnějšími (tzv. měřitelnými) množinami.

V kapitole 19 je velmi stručně popsán postup zavedení Lebesgueova integrálu na základě (tzv. Lebesgueovy) míry, která je zobecněním délky, obsahu a objemu elementárních geometrických útvarů, a uvedeny jsou i jeho nejdůležitější vlastnosti. Řada příkladů pak ukáže, jak snadno se s Lebesgueovým integrálem zachází v kombinaci s integrálem Newtonovým, který nepřestává být hlavním nástrojem jednorozměrné integrace. [4])

Poslední, dvacátá kapitola je věnována základům tzv. harmonické analýzy, tj. rozkladu periodické funkce na nekonečnou řadu jednoduchých periodických funkcí. I zde je výhodné pracovat s Lebesgueovým integrálem a v běžných situacích vystačíme s jediným kritériem konvergence (založeným na konečnosti variace).

Praha, listopad 2004 I. Černý

---

[4]) Doporučuji čtenáři seznámit se i s obsahem kapitoly VII vynikající Jarníkovy knihy [13]; kapitola je věnována „početní technice Lebesgueova integrálu“.

Důležité upozornění

Příklady a cvičení, za nimiž je značka „**o**“, jsou v tomto elektronickém vydání ilustrovány obrázky umístěnými na str. 331 – 527; rejstřík na str. 529 – 530 by měl usnadnit jejich vyhledávání.

Označení, operace, zkratky

Množiny

$\{a_1, \ldots, a_p\}$, kde $p \in \mathbb{N}$	množina složená z bodů $a_1, \ldots, a_p$
$\{a\}$	množina obsahující jediný bod a
$\{x \in X;\ V(x)\}$	množina všech $x \in X$, pro něž platí $V(x)$
$M_1 \times \ldots \times M_p$	kartézský součin množin $M_1, \ldots, M_p$
M^p	kartézský součin p množin M
A^p	aritmetický p-rozměrný prostor
$\mathbb{R}\ (= \mathbb{R}^1)$	množina všech konečných reálných čísel
$\mathbb{R}^p$	p-rozměrný eukleidovský prostor
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$
$\mathbb{R}_+^0$	$\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_-$	$\{x \in \mathbb{R};\ x < 0\}$
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{N}(N)$, kde $N \in \mathbb{Z}$	$\{n \in \mathbb{Z};\ n \geq N\}$
$\mathbb{Q}$	množina všech racionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina všech konečných komplexních čísel
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C};\ \lvert z \rvert < 1\}$ (jednotkový kruh v $\mathbb{C}$)
(X, ρ)	(metrický) prostor s metrikou ρ
m.p.	metrický prostor
$\rho_p,\ \overline{\rho}_p,\ \tilde{\rho}_p$	metriky v A^p
$\lVert \ldots \rVert$	norma
n.l.p.	normovaný lineární prostor
$(x \cdot y)$	skalární součin (vektorů) x, y

u.p.	unitární prostor
$M(Z)$	prostor všech funkcí omezených v Z
$C(a,b)$	prostor všech funkcí spojitých v $\langle a,b\rangle$
ℓ^2	Hilbertův prostor
C_n ($n \geq 0$ celé nebo ∞)	užívá se ve vazbě „f je třídy C_n“
$\operatorname{diam} M$	průměr množiny M
$\operatorname{int} M$, $\operatorname{ext} M$	vnitřek, vnějšek množiny M
$\overline{M}$, $\partial M, \operatorname{der} M$	uzávěr, hranice, derivace množiny M
Intervaly v $\mathbb{R}^*$	viz rejstřík Úvodu
Okolí v $\mathbb{R}$	viz rejstřík Úvodu
Okolí v (X,ρ)	za předpokladu, že $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$
$U(a,\varepsilon)$	$\{x \in X\,;\ \rho(x,a) < \varepsilon\}$
$P(a,\varepsilon)$	$= U(a,\varepsilon) - \{a\}$
Okolí v $\mathbb{C}$	
$U(\zeta,R)$ $(0 < R < +\infty)$	$= \{z \in \mathbb{C};\ \lvert z-\zeta\rvert < R\}$
$K(\zeta,R)$ $(0 < R \leq +\infty)$	$= \{z \in \mathbb{C};\ \lvert z-\zeta\rvert < R\}$
Operace s $\pm\infty$	viz rejstřík Úvodu, POZOR VŠAK:
$0 \cdot \pm\infty$, $\pm\infty \cdot 0$	$:= 0$ v kapitole 19
Kongruence	pro komplexní čísla $a,b,c \neq 0$
$a \equiv b \mod c$	$a - b = kc$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$
Symboly	
$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$	posloupnost o členech a_k
$a_k \to a$ (pro $k \to \infty$)	$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$
$a < a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k < a)$ pro s.v. k
$a \leq a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k \leq a)$ pro s.v. k
$a > a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k > a)$ pro s.v. k
$a \geq a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k \geq a)$ pro s.v. k
$a \neq a_k \to a$	$(a_k \to a) \wedge (a_k \neq a)$ pro s.v. k
$a_k \nearrow a$ $(a_k \searrow a)$	$a_k \to a$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající (nerostoucí)
$f_k \nearrow f$ $(f_k \searrow f)$ v X	$f_k(x) \to f(x)$, $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesající (nerostoucí) pro každé $x \in X$

$\sum\limits_{\alpha\in A} a_\alpha$	zobecněná řada o členech a_α
$f : X \to Y$	zobrazení f, pro něž je $f(X) \subset Y$
$f : X \to_{\text{na}} Y$	zobrazení f, pro něž je $f(X) = Y$
$\mathcal{D}(f)$	definiční obor funkce f
$\operatorname{gr} f$	graf funkce f
$\langle f \rangle$	geometrický obraz (nadplochy) f
$g \circ f$	superpozice funkcí $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$
f_{-1}	funkce inverzní k f
A_{-1}	matice inverzní k regulární čtvercové matici A
$\partial_{(v)} f$	derivace funkce f ve směru vektoru v
$\partial_i f$	parciální derivace funkce f podle i-té proměnné
$\partial_{i_1 \dots i_n}$	parciální derivace řádu n
$Df(a),\ Df(a;h)$	diferenciál funkce f v bodě a, jeho hodnota v bodě h
$\operatorname{grad} f$	gradient funkce f
$\operatorname{div} f$	divergence funkce f
$\operatorname{rot} f$	rotace funkce f
Δf	Laplaceův operátor aplikovaný na funkci f
$V_1 \times \ldots \times V_n$	vektorový součin vektorů $V_1, \ldots, V_n$
$\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}$	jakobián funkcí F_i podle proměnných x_i
$\mathrm{Id},\ \mathrm{Id}^a$	identita, její a-tá mocnina
$\exp$	exponenciála ($\exp x = e^x$)
$\lg$	přirozený logaritmus
$\exp_a$ (kde $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$)	exponenciála o základu a ($\exp_a x = a^x$)
$\lg_a$ (kde $1 \neq a \in \mathbb{R}_+$)	logaritmus o základu a
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
e_n	n-tý jednotkový vektor v $\mathbb{R}^p$ nebo v ℓ^2
$f(x) \to A$ pro $x \to a$	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$
$a_k = O(b_k)$ (pro $k \to \infty$)	existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $\lvert a_k \rvert \le K \lvert b_k \rvert$ pro s. v. k
$a_k \asymp b_k$ (pro $k \to \infty$)	$(a_k = O(b_k)) \wedge (b_k = O(a_k))$
$f(x) = O(g(x))$ pro $x \to a$	existuje $K \in \mathbb{R}_+$ a $P(a)$ tak, že $\lvert f(x) \rvert \le K \lvert g(x) \rvert$ všude v $P(a)$

$f(x) \asymp g(x)$ pro $x \to a$	$(f(x) = O(g(x))) \wedge (g(x) = O(f(x)))$
$f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$	$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)/g(x)\big) = 0$
$f(x) \approx$ řada	vpravo je Fourierova řada funkce $f(x)$

Kapitola 19

v_p (krátce v)	p-rozměrný objem
$\exp(X)$	systém všech množin $M \subset X$
$\mathcal{T}_p$ (krátce $\mathcal{T}$)	systém všech otevřených množin $G \subset \mathbb{R}^p$
$\mathcal{B}$	systém všech borelovských množin
$\mathcal{M}$	systém všech lebesgueovsky měřitelných množin
μ^*	vnější Lebesgueova míra
μ (podrobněji μ_p)	(p-rozměrná) Lebesgueova míra
$M_k \nearrow M$	$M_k \subset M_{k+1}$ pro všechna $k, M = \bigcup\limits_k M_k$
$M_k \searrow M$	$M_{k+1} \subset M_k$ pro všechna $k, M = \bigcap\limits_k M_k$
χ_M	charakteristická funkce množiny M
$x^+,\ x^-,\ f^+,\ f^-$	kladná a záporná část čísla a funkce
$\Delta(A, B)$	symetrická diference množin A, B
$\mathcal{L}(M)$	$\{f$; integrál $\int_M f$ je konečný$\}$
$\mathcal{L}^*(M)$	$\{f$; integrál $\int_M f$ existuje$\}$
$f \sim g$	f je ekvivalentní s g
$M_{p\leftarrow},\ M_{\to q}$	průmět množiny $M \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ do prostoru prvních p a posledních q souřadnic
$M(\cdot, y),\ M(x, \cdot)$	$\{x \in \mathbb{R}^p;\ (x,y) \in M\},\ \{y \in \mathbb{R}^q;\ (x,y) \in M\}$

12. Metrické prostory

Je-li každému α z jisté množiny A přiřazena podmnožina M_α jisté množiny X, mluvíme o **systému** $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ **podmnožin množiny** X.

Sjednocení a **průnik** takového systému jsou definovány rovnostmi

$$\text{(S)}\qquad \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha := \{x\in X\,;\ \text{existuje } \alpha\in A \text{ tak, že } x\in M_\alpha\},$$

$$\text{(P)}\qquad \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha := \{x\in X\,;\ x\in M_\alpha \ \text{ pro všechna } \ \alpha\in A\}.$$

Podobně jako se prázdný součet a součin čísel rovná 0 a 1, je

$$\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha = \emptyset \quad \text{a} \quad \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha = X\,, \quad \text{je-li} \ \ A=\emptyset.$$

Rozdíl dvou (libovolných) množin X, Y je definován jako množina

$$\text{(R)}\qquad X - Y := \{x\in X\,;\ x\notin Y\}.$$

Cvičení 12.01. Dokažte platnost tzv. **de Morganových vzorců**:

$$(1)\qquad X - \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A}(X-M_\alpha)\,, \quad X - \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A}(X-M_\alpha)\,. \quad \square$$

Jsou-li X, Y libovolné množiny, $M\subset X$, $N\subset Y$ libovolné jejich podmnožiny a je-li $f: X\to Y$ libovolné zobrazení, je

$$(2)\qquad f(M) := \{f(x)\,;\ x\in M\} \ \text{ resp. } \ f_{-1}(N) := \{x\in X\,;\ f(x)\in N\}$$

obraz množiny M resp. **vzor** množiny N při zobrazení f.

Zobrazení f se nazývá **prosté** (v X), platí-li implikace

$$(3)\qquad x'\in X,\, x''\in X,\, x'\neq x'' \ \Rightarrow\ f(x')\neq f(x'').$$

Je-li $f: X\to Y$ prosté zobrazení, existuje pro každé $y\in f(X)$ právě jedno $x\in X$ tak, že $f(x)=y$. Jestliže toto x označíme $f_{-1}(y)$, definovali jsme tím zobrazení $f_{-1}: f(X)\to X$ **inverzní k** f.

Je-li $N\subset f(X)$ a je-li zobrazení f prosté, je obraz množiny N při zobrazení f_{-1} zřejmě identický s druhou z množin (2); není-li f prosté zobrazení nebo není-li splněna podmínka $N\subset f(X)$, nelze obraz množiny N při zobrazení f_{-1} vytvořit.

Ke kolizi označení tedy v žádném případě nedochází.

Cvičení 12.02. Nechť X, Y, A jsou libovolné množiny, nechť pro každé $\alpha \in A$ je $M_\alpha \subset X$ a $N_\alpha \subset Y$ a nechť $f : X \to Y$ je libovolné zobrazení. Dokažte, že pak platí tyto relace:

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} f(M_\alpha), \qquad f\Big(\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha\Big) \subset \bigcap_{\alpha\in A} f(M_\alpha), \tag{4}$$

$$f_{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in A} N_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha\in A} f_{-1}(N_\alpha), \quad f_{-1}\Big(\bigcap_{\alpha\in A} N_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in A} f_{-1}(N_\alpha). \tag{5}$$

Ukažte dále, že z inkluzí $M_1 \subset X$, $M_2 \subset X$, $N_1 \subset Y$, $N_2 \subset Y$ plynou relace

$$f(M_1 - M_2) \supset f(M_1) - f(M_2), \tag{6}$$

$$f_{-1}(N_1 - N_2) = f_{-1}(N_1) - f_{-1}(N_2). \tag{7}$$

Jak ukazuje příklad zobrazení $\mathrm{Id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nelze v relacích (4) a (6) nahradit (pro obecné zobrazení f) inkluze rovnostmi; je totiž

$$\emptyset = \mathrm{Id}^2((-1,0) \cap (0,1)) \neq \mathrm{Id}^2((-1,0)) \cap \mathrm{Id}^2((0,1)) = (0,1),$$
$$(0,1) = \mathrm{Id}^2((0,1) - (-1,0)) \neq \mathrm{Id}^2((0,1)) - \mathrm{Id}^2((-1,0)) = \emptyset.$$

Dokažte však, že *inkluze* v (4) a v (6) *jsou ve skutečnosti rovnosti, je-li zobrazení* $f : X \to Y$ *prosté.*

Cvičení 12.03. Dokažte, že pro každé zobrazení $f : X \to Y$ platí implikace

$$M \subset X \Rightarrow M \subset f_{-1}(f(M)), \tag{8'}$$

$$N \subset Y \Rightarrow N = f(f_{-1}(N)). \tag{8''}$$

Najděte zobrazení f a množinu M tak, že v (8′) *neplatí rovnost*, a dokažte, že *v případě prostého zobrazení f tato rovnost platí.*

* * *

Nechť X je libovolná množina a nechť *nezáporná* funkce $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ splňuje pro všechna $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$ tyto podmínky:

M1. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

M3. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Dvojici (X,ρ) pak nazýváme **metrický prostor** (zkratka: m.p.), v němž je ρ **metrikou**. Pro každé dva body x, y z X se číslo $\rho(x,y)$ nazývá **vzdálenost** bodů x, y (při metrice ρ). Podmínka M2 ukazuje, že ρ je *symetrickou* funkcí proměnných x, y, podmínka M3 je tak zvaná **trojúhelníková nerovnost**. Zavedení metriky (ρ) do množiny (X) se nazývá **metrizace** (množiny X metrikou ρ).

Je-li $X_1 \subset X$ a $\rho_1 := \rho|(X_1 \times X_1)$, říkáme, že (X_1, ρ_1) je **podprostor** prostoru (X, ρ). Často, ale méně přesně se pak píše $X_1 \subset (X, \rho)$ a říká se, že v X_1 je stejná metrika jako v X. $\square$

Je-li $M \subset (X, \rho)$, nazýváme číslo

$$
\text{(9)} \qquad \operatorname{diam} M := \left\{ \begin{array}{ll} \sup\{\rho(x,y);\, x \in M,\ y \in M\}, & \text{je-li } M \neq \emptyset \\ 0, & \text{je-li } M = \emptyset \end{array} \right\}
$$

průměr množiny M. Toto číslo je vždy nezáporné, ale nemusí být konečné; je-li $\operatorname{diam} M < +\infty$, říkáme, že množina M je **omezená**.

Je-li f zobrazení (libovolné) množiny Z do m.p. (X, ρ) a je-li množina $f(Z)$ omezená, říkáme, že zobrazení f je **omezené** (v Z). $\square$

Říkáme, že bod $x \in X$ je **limita** posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodů m.p. (X, ρ) a píšeme

$$
\text{(10)} \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \text{nebo} \quad x_k \to x \quad (\text{pro} \quad k \to \infty),
$$

je-li $\rho(x_k, x) \to 0$ (v $\mathbb{R}$). Je-li tato podmínka splněna, říkáme též, že posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ **konverguje k** x (nebo že *body* x_k *konvergují k* x). Říkáme, že posloupnost **konverguje** (nebo: je **konvergentní**) **v** X, má-li v X nějakou limitu; nemá-li v X žádnou limitu, říkáme, že **diverguje** (nebo: je **divergentní**) **v** X. [1])

Cvičení 12.04. Dokažte, že *každá konvergentní posloupnost je omezená.* $\square$

Jsou-li (X, ρ), (Y, σ) metrické prostory, říkáme, že **zobrazení** $f : X \to Y$ je **spojité v bodě** $x \in X$, platí-li implikace

$$
\text{(11)} \qquad x_k \in X,\ x_k \to x \ \Rightarrow\ f(x_k) \to f(x);
$$

říkáme, že f je **spojité** (**v** X), je-li spojité v každém bodě $x \in X$. [2]) $\square$

Je-li x bod m.p. (X, ρ) a je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, nazýváme množinu

$$
\text{(12)} \qquad U(x, \varepsilon) := \{x' \in X;\, \rho(x', x) < \varepsilon\}
$$

ε-**okolí** bodu x; x je jeho **střed**, ε jeho **poloměr**. V situacích, kdy na poloměru nezáleží, budeme okolí bodu x značit krátce $U(x)$.

Cvičení 12.05. Dokažte, že v každém m.p. (X, ρ) platí nerovnost

$$
\text{(13)} \qquad \operatorname{diam} U(x, \varepsilon) \le 2\varepsilon \quad \textit{pro každé} \ \ x \in X \quad \textit{a každé} \ \ \varepsilon \in \mathbb{R}_+ .
$$

---

[1]) I když většinou nehrozí nedorozumění a slova „v X“ lze bez obav vynechat, je vhodné uvědomit si, že posloupnost o členech $x_k := 1/k$ konverguje v prostoru $\mathbb{R}$, ale diverguje v jeho podprostoru $\mathbb{R} - \{0\}$. Komplikovanější příklad: Posloupnost o členech $x_k := (1 + 1/k)^k$ má v $\mathbb{R}$ limitu (rovnou e), ale je divergentní v $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, protože číslo e je iracionální.

[2]) Soustavněji se budeme spojitostí zabývat později v této kapitole.

Dále: Ověřte, že množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel se stane metrickým prostorem, zavedeme-li v ní vzdálenost rovností $\rho(x,y) := |x-y|$; ukažte, že pro každé $x \in \mathbb{Z}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak

$$U(x,\varepsilon) = \{x-n+1, \ldots, x-1, x, x+1, \ldots, x+n-1\}, \text{ je-li } \varepsilon \in (n-1, n\rangle,$$

takže speciálně $U(x,1) = \{x\}$. Z toho je patrné, že v (13) *nemusí platit rovnost.*

Cvičení 12.06. Dokažte tato dvě tvrzení:

1. $x_k \to x \Leftrightarrow$ *pro každé* $U(x)$ *je* $x_k \in U(x)$ *pro s. v.* k.
2. $x_k \in U(x, \varepsilon_k)$ *pro s. v.* k, $\varepsilon_k \to 0 \Rightarrow x_k \to x$. □

Nechť X je *lineární* (= *vektorový*) *prostor* a nechť funkce $n : X \to \langle 0, +\infty)$ splňuje tyto tři podmínky:

N1. $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

N2. $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$ pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ a každé $x \in X$.

N3. $n(x+y) \leq n(x) + n(y)$ pro každé dva vektory $x \in X$, $y \in X$.

Pak se funkce n nazývá **norma v** X. Lineární prostor, v němž je zavedena norma, se nazývá **normovaný lineární prostor**, krátce n. l. p.; prostor X s normou n můžeme značit např. (X, n). Vlastnost N3 je tzv. **trojúhelníková nerovnost** pro normu n.

Elementy lineárních prostorů budeme nazývat podle potřeby buď **vektory**, nebo **body**. Hodnota (předem definované) normy n v bodě $x \in X$ se většinou značí $\|x\|$.

Je-li X *n.l.p., je funkce* $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, *definovaná podmínkou*

$$\rho(x,y) := \|x-y\| \text{ pro každé dva body } x \in X,\ y \in X, \tag{14}$$

metrika v X; podrobněji mluvíme o **metrice generované normou** n.

Úmluva. *Kdykoli budeme v n.l.p. mluvit o vzdálenosti, budeme mít na mysli vzdálenost při metrice generované příslušnou normou. V souvislosti s tím budeme každý n.l.p. považovat za prostor metrický.* □

Poznámka 12.1. V důsledku této úmluvy lze v každém n. l. p. X mluvit o konvergenci (posloupnosti bodů). Protože však X má i algebraickou strukturu, která dovoluje tvořit konečné součty resp. lineární kombinace vektorů z X, lze běžným způsobem zavést i konvergenci a součet řad:

Říkáme, že vektor $x \in X$ je **součet řady** $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ vektorů $x_k \in X$, je-li limitou jejích částečných součtů, tj. je-li $\sum_{k=1}^{n} x_k \to x$ pro $n \to \infty$; to ovšem znamená, že

$$\rho\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k, x\Big) = \Big\|\sum_{k=1}^{n} x_k - x\Big\| \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Je-li podmínka splněna, píšeme $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x$. Má-li řada vektorů nějaký součet, říkáme, že **konverguje** (je **konvergentní**); v opačném případě říkáme, že **diverguje** (je **divergentní**). □

Nechť X je lineární prostor a nechť funkce $ss : X \times X \to \mathbb{R}$ má tyto tři vlastnosti:

S1. $ss(0,0) = 0$; $0 \neq x \in X \Rightarrow ss(x,x) > 0$.

S2. $x \in X, y \in X \Rightarrow ss(x,y) = ss(y,x)$.

S3. $x \in X, y \in X, z \in X, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow ss(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\, ss(x,z) + \beta\, ss(y,z)$.

Pak říkáme, že funkce ss je **skalární součin** (v X); prostor X se skalárním součinem se nazývá **unitární** (zkratka u.p.).

Poznámka 12.2. Na rozdíl od situace, kdy dvojité linky $\| \dots \|$ většina autorů spojuje s (předem definovanou) normou, označení hodnot (předem daného) skalárního součinu v literatuře značně kolísá. Zde zvolíme označení, které připomíná součin čísel nebo funkcí a s ničím nekoliduje: Je-li v nějakém lineárním prostoru definován skalární součin ss, budeme jeho hodnoty $ss(x,y)$ značit také $(x \cdot y)$.

Vlastnost S3 je *linearita* skalárního součinu v první proměnné. Z podmínek S2 a S3 však snadno plyne tzv. **bilinearita** skalárního součinu, tj. platnost identity

$$((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cdot (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2)) = \alpha_1\beta_1(x_1 \cdot y_1) + \alpha_1\beta_2(x_1 \cdot y_2) + \alpha_2\beta_1(x_2 \cdot y_1) + \alpha_2\beta_2(x_2 \cdot y_2) \tag{15}$$

pro každé čtyři body x_1, x_2, y_1, y_2 z X a každá čtyři čísla α_1, α_2, β_1, β_2. $\square$

Poznamenejme, že v prostorech se skalárním součinem je automaticky zavedena i **ortogonalita** (neboli *kolmost*): Dva vektory x, y unitárního prostoru se nazývají **ortogonální** (nebo: *navzájem kolmé*), je-li $(x \cdot y) = 0$.

Poznámka 12.3. Je-li X u.p. a položíme-li

$$\|x\| := \sqrt{(x \cdot x)} \text{ pro každé } x \in X, \tag{16}$$

plyne z vlastností skalárního součinu, že pro každé dva vektory $x \in X$, $y \in X$ je kvadratická funkce

$$((\lambda x + y) \cdot (\lambda x + y)) = \|x\|^2 \lambda^2 + 2(x \cdot y)\lambda + \|y\|^2$$

proměnné $\lambda \in \mathbb{R}$ nezáporná, takže příslušný diskriminant $4((x \cdot y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2)$ je naopak nekladný. Platí proto tzv. **Schwarzova nerovnost**

$$|(x \cdot y)| \leq \|x\| \, \|y\| \quad (\text{pro každé dva body } x \in X,\ y \in X). \tag{17}$$

Pomocí ní se snadno dokáže, že (16) *je norma v* X; říká se jí **norma indukovaná** příslušným **skalárním součinem**.

Úmluva. *Budeme mlčky předpokládat, že v každém unitárním prostoru je zavedena norma indukovaná příslušným skalárním součinem.* $\square$

Podle této úmluvy je tedy každý unitární prostor zároveň prostorem normovaným, a v důsledku toho i metrickým.

Příklad 12.1. Pro každé $p \in \mathbb{N}$ nazveme množinu A^p všech uspořádaných p-tic (konečných) reálných čísel p-**rozměrným aritmetickým prostorem**. Operace sčítání dvou prvků $x = (x_1, \ldots, x_p) \in A^p$, $y = (y_1, \ldots, y_p) \in A^p$ a násobení prvku x číslem $\lambda \in \mathbb{R}$ definujeme rovnostmi

$$x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p), \quad \lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p). \tag{18}$$

Snadno nahlédneme, že A^p s těmito dvěma operacemi je *lineární prostor*. Číslo x_k ($1 \le k \le p$) je k-**tá souřadnice** (nebo: **složka**) **bodu** (nebo: **vektoru**) x; v souvislosti s tím o (18) mluvíme jako o **sčítání** a **násobení číslem po souřadnicích** (nebo: **po složkách**).

Stejně snadné je dokázat, že

$$(x \cdot y) := \sum_{k=1}^{p} x_k y_k \tag{19}$$

je skalární součin v A^p; jeho zavedením se A^p stává unitárním prostorem a indukovaná norma a metrika jsou dány rovnostmi

$$\|x\|_p := \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2}, \quad \rho_p(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (x_k - y_k)^2}. \tag{20}$$

Unitární prostor A^p (s normou a metrikou (20)) se nazývá p-**rozměrný eukleidovský prostor** a značí se $\mathbb{R}^p$; p je jeho **dimenze**, (20) se podrobněji nazývá **eukleidovská norma** resp. **metrika**. Nehrozí-li nedorozumění, píšeme místo $\|x\|_p$ jen $\|x\|$.

Poznamenejme ještě, že $\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$ a že *jednorozměrná eukleidovská norma je totéž co absolutní hodnota*, takže

$$\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1 = |x - y| \ \text{ pro všechna } \ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Příklad 12.2. *Metrika a norma jsou spojité funkce, násobení vektoru číslem, sčítání (odčítání) vektorů a skalární násobení jsou spojité operace*, protože platí:

A. *V každém m.p.* (X, ρ) *platí implikace* $x_k \to x,\ y_k \to y \ \Rightarrow\ \rho(x_k, y_k) \to \rho(x, y)$.

B. *V každém n.l.p. platí implikace*

B1. $x_k \to x \ \Rightarrow\ \|x_k\| \to \|x\|$.

B2. $\lambda_k \to \lambda,\ x_k \to x \ \Rightarrow\ \lambda_k x_k \to \lambda x$.

B3. $x_k \to x,\ y_k \to y \ \Rightarrow\ x_k \pm y_k \to x \pm y$.

C. *V každém u.p. platí implikace* $x_k \to x,\ y_k \to y \ \Rightarrow\ (x_k \cdot y_k) \to (x \cdot y)$.

D ů k a z . Ad A. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne, že

$$\rho(x_k, y_k) \le \rho(x_k, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_k),$$
$$\rho(x, y) \le \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, y);$$

v důsledku toho je $|\rho(x_k, y_k) - \rho(x, y)| \le \rho(x_k, x) + \rho(y_k, y)$.

Ad B1. Důkaz tvrzení B je zcela obdobný; z relací

$$\|x_k\| = \|(x_k - x) + x\| \le \|x_k - x\| + \|x\|, \ \|x\| = \|x_k - (x_k - x)\| \le \|x_k\| + \|x_k - x\|$$

ihned plyne, že $|\,\|x_k\| - \|x\|\,| \le \|x_k - x\|$.

Ad B2. Nyní je $\|\lambda_k x_k - \lambda x\| = \|\lambda_k(x_k - x) + (\lambda_k - \lambda)x\| \le |\lambda_k|\,\|x_k - x\| + |\lambda_k - \lambda|\,\|x\|$, přičemž posloupnost $\{\lambda_k\}$ je omezená.

Ad B3. Podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$\|(x_k \pm y_k) - (x \pm y)\| = \|(x_k - x) \pm (y_k - y)\| \le \|x_k - x\| + \|y_k - y\|.$$

Ad C. Protože je $\|x - y\|^2 = ((x - y) \cdot (x - y)) = \|x\|^2 - 2(x \cdot y) + \|y\|^2$, platí identita

$$(x \cdot y) = \tfrac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\big) \tag{22}$$

pro každé dva body $x \in X$, $y \in X$. Tvrzení C plyne tedy ihned z tvrzení B.

Cvičení 12.07. Nechť ρ_p je (jako dosud) eukleidovská metrika v A^p a nechť

$$\overline{\rho}_p(x, y) := \max\{|x_k - y_k|;\ 1 \le k \le p\}, \tag{23}$$

$$\tilde{\rho}_p(x, y) := \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|. \tag{24}$$

Dokažte, že *funkce $\overline{\rho}_p$ a $\tilde{\rho}_p$ jsou metriky v A^p, pro něž platí nerovnosti*

$$\overline{\rho}_p \le \rho_p \le \sqrt{p}\,\overline{\rho}_p, \quad \rho_p \le \tilde{\rho}_p \le p\,\rho_p, \quad \overline{\rho}_p \le \tilde{\rho}_p \le p\,\overline{\rho}_p. \tag{25}$$

Odvoďte z toho, že pro každou posloupnost bodů $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{np}) \in A^p$, pro každý bod $x = (x_1, \ldots, x_p) \in A^p$ a pro $n \to \infty$ je

$$\rho_p(x_n, x) \to 0 \ \Leftrightarrow\ \overline{\rho}_p(x_n, x) \to 0 \ \Leftrightarrow\ \tilde{\rho}_p(x_n, x) \to 0. \tag{26}$$

V důsledku toho je konvergence $x_n \to x$ při každé z metrik ρ_p, $\overline{\rho}_p$, $\tilde{\rho}_p$ ekvivalentní s tzv. **konvergencí po souřadnicích**, *tj. s podmínkou*

$$x_{nk} \to x_k \ \text{ pro } n \to \infty \text{ a pro každé } \ k = 1, \ldots, p. \quad \square \tag{27}$$

Zobecněním konvergence po souřadnicích je tzv. **bodová konvergence**:

Je-li X libovolná množina a je-li (Y, σ) metrický prostor, říkáme, že posloupnost zobrazení $f_k : X \to Y$ **konverguje v** X **bodově k zobrazení** $f : X \to Y$, je-li $f_k(x) \to f(x)$ (při metrice σ) pro každé $x \in X$. To znamená, že

(28) *pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a pro každé $x \in X$ existuje k_0 tak, že nerovnost $\sigma(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ platí pro všechna $k > k_0$.*

V podmínce (28) závisí index k_0 obecně jak na ε, tak na x; je-li možné volit jej nezávisle na $x \in X$, říkáme, že **konvergence** $f_k \to f$ je v X **stejnoměrná**.

Říkáme tedy, že posloupnost zobrazení $f_k : X \to Y$ **konverguje** k zobrazení $f : X \to Y$ **stejnoměrně** (**v** X), jestliže

(29) *pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* k_0 *tak, že nerovnost* $\sigma(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$ *platí pro všechna* $k > k_0$ *a všechna* $x \in X$.

Je zřejmé, že *ze stejnoměrné konvergence plyne konvergence bodová*; v následujícím příkladě ukážeme, že existují jednoduché posloupnosti funkcí, které konvergují bodově, nikoli však stejnoměrně. [3])

Poznamenejme předtím, že *posloupnost zobrazení* f_k*, konvergující k zobrazení* f *v* X *bodově, nekonverguje k* f *stejnoměrně, právě když*

(30) *existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $k_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $k > k_0$ *a* $x \in X$ *tak, že* $\sigma(f_k(x), f(x)) \geq \varepsilon$.

Příklad 12.3. Je-li $f_k(x) := x/k$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, konvergují funkce f_k v $\mathbb{R}$ k nulové funkci *bodově*. *Konvergence* $f_k \to 0$ však *není v* $\mathbb{R}$ *stejnoměrná*, protože např. pro $\varepsilon = 1$ a pro každé $k_0 \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $|f_k(x)| = |x/k| \geq \varepsilon = 1$ např. pro $k = x = 2k_0$. Konvergence $f_k \to 0$ je v našem případě stejnoměrná na každé *omezené* množině $X \subset \mathbb{R}$. Je-li totiž $K \in \mathbb{R}_+$ zvoleno tak, že $x \in X \Rightarrow |x| < K$, je-li dáno libovolné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a položíme-li $k_0 = K/\varepsilon$, je $|f_k(x)| \leq K/k < K/k_0 = \varepsilon$ pro všechna $x \in X$ a všechna $k > k_0$.

Podmínka omezenosti množiny $X \subset \mathbb{R}$ *je v našem případě pro stejnoměrnou konvergenci* $f_k \to 0$ *v* X *nejen postačující, ale zřejmě i nutná.* Obecně však mohou být vztahy mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí daleko složitější, protože *existují posloupnosti* (*spojitých*) *funkcí* $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, které v* $\mathbb{R}$ *konvergují bodově, ale konvergence není stejnoměrná v žádném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$. (Srov. s [2], str. 166.)

* * *

Než přejdeme ke cvičením, zopakujeme některé pojmy lineární algebry. Ve cvičeních budou často vystupovat prostory funkcí $f : X \to Y$, kde Y je lineární prostor. Součet funkcí f, g bude pak vždy definován rovností $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ (pro všechna $x \in X$), součin konstanty $c \in \mathbb{R}$ s funkcí f rovností $(cf)(x) := cf(x)$. Budeme respektovat i obecnou terminologii, v níž se prvky lineárních prostorů nazývají *vektory*, a budeme o funkcích mluvit též jako o vektorech.

Říkáme, že neprázdná *konečná* podmnožina $M = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ lineárního prostoru X je *lineárně nezávislá*, je-li lineární kombinace $\lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n$ nulový vektor *jen* v případě, že $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. [4]) *Nekonečná* množina M vektorů se nazývá *lineárně nezávislá*, je-li lineárně nezávislá každá její neprázdná konečná

---

[3]) Stejnoměrná konvergence je velmi důležitý pojem matematické analýzy; je mu proto věnována celá následující kapitola. Zde se o stejnoměrné konvergenci zmiňujeme jen proto, že konvergence v některých prostorech funkcí je právě tato konvergence.

[4]) Je zřejmé, že vektory V_k jsou pak navzájem různé a že žádný z nich není nulový.

podmnožina. Není-li množina M vektorů lineárně nezávislá, říkáme, že je *lineárně závislá*. Je-li M lineárně nezávislá (resp. lineárně závislá) množina, říkáme též, že *vektory* $V \in M$ *jsou lineárně nezávislé* (resp. *lineárně závislé*).

Lineárním obalem množiny $M \subset X$ nazýváme množinu všech lineárních kombinací prvků z M. Má-li lineárně nezávislá množina M lineární obal rovný X, nazýváme ji *bází* prostoru X.

Dimenzi (podrobněji: *algebraickou dimenzi*) lineárního prostoru L složeného jen z nulového vektoru definujeme jako 0 a píšeme $\dim L = 0$. Existuje-li v lineárním prostoru L lineárně nezávislá množina složená z $n \in \mathbb{N}$ vektorů, zatímco každá množina $M \subset L$ složená z více než n vektorů je lineárně závislá, říkáme, že L má *dimenzi* n a píšeme $\dim L = n$. Říkáme, že lineární prostor má *nekonečnou dimenzi* a píšeme $\dim L = \infty$, nemá-li dimenzi n pro žádné celé číslo $n \geq 0$, tj. existuje-li v něm pro každé $n \in \mathbb{N}$ lineárně nezávislá množina obsahující (aspoň) n vektorů.

V n.l.p. L nazýváme *jednotkovým vektorem* každý vektor s normou 1. Množina všech jednotkových vektorů prostoru L je jeho *jednotková sféra*, množina všech vektorů s normou < 1 resp. ≤ 1 jeho *otevřená* resp. *uzavřená jednotková koule*.

Cvičení 12.08. 1. Ověřte, že *pro každou množinu $Z \neq \emptyset$ je množina*

$$M(Z) := \{f : Z \to \mathbb{R};\ \text{funkce } f \text{ je omezená v } Z\} \tag{31}$$

lineární prostor, v němž je funkce

$$\|f\| := \sup\{|f(z)|;\ z \in Z\} \tag{32}$$

normou.

Rada k důkazu trojúhelníkové nerovnosti: Pro každé $z \in Z$ je $|f(z) + g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$; nejdříve přejdeme k supremům na pravé straně, pak k supremu vlevo. $\diamond$

2. Ověřte, že

(33) *konvergence při normě* (32) *je totožná se stejnoměrnou konvergencí v Z.*

3. Dokažte, že *pro každou konečnou* (*resp. nekonečnou*) *množinu Z je algebraická dimenze prostoru $M(Z)$ také konečná* (*resp. nekonečná*).

Podrobněji: *Množina všech funkcí*

$$f_a(z) := \left\{\begin{matrix} 1 & \text{pro} & z = a \\ 0 & \text{pro} & z \neq a \end{matrix}\right\},\ \ \text{kde } a \in Z, \tag{34}$$

je lineárně nezávislá; v případě konečné množiny Z je bází prostoru $M(Z)$.

Navíc je $\|f_a\| = 1$ *pro každé* $a \in Z$ a $\|f_a - f_b\| = 1$ *pro každé dva různé body* $a \in Z$, $b \in Z$. $\square$

Definice. (32) je tzv. **supremová norma** (v $M(Z)$); podrobněji ji lze značit např. $\|\ldots\|_{\sup}$. Je-li Z konečná (neprázdná) množina, lze místo suprema psát maximum a v souvislosti s tím mluvit o **maximové normě** ($\|\ldots\|_{\max}$). $\square$

Cvičení 12.09. Pro každý kompaktní interval $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ buď

$$C(a,b) := \{ f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R};\ f \text{ je spojitá v } \langle a,b\rangle \}\,. \tag{35}$$

Spolu s f je i funkce $|f|$ spojitá na kompaktním intervalu $\langle a,b\rangle$, a nabývá tam tedy svého maxima; proto má dobrý smysl definice:

$$\| f \| := \max\{ | f(x)|;\ x \in \langle a,b\rangle \}\,. \tag{36}$$

Dokažte, že (36) *je norma v prostoru* $C(a,b)$ a že *po jejím zavedení se tento prostor stane podprostorem prostoru* $M(a,b) := M(\langle a,b\rangle)$ (sr. s Cv. 12.08). *Konvergence při* **maximové normě** (36), kterou lze podrobněji značit např. $\| \ldots \|_{\max}$, *je opět konvergencí stejnoměrnou, a to v intervalu* $\langle a,b\rangle$.

Cvičení 12.10. Pro každé dvě funkce f a g z množiny (35) položte

$$(f \cdot g) := \int_a^b fg \tag{37}$$

a dokažte, že (37) *je skalární součin*; příslušná norma

$$\| f \|_2 := \Big(\int_a^b f^2 \Big)^{1/2} \tag{38}$$

je jednou z „integrálních norem“. [5])

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak položte

$$f_n(x) := \sin\Big(n\pi \frac{x-a}{b-a} \Big)\,,\ \text{ je-li } a \le x \le a + \frac{b-a}{n}\,,\quad f_n(x) := 0 \ \text{ jinak}, \tag{39}$$

a dokažte, že $\| f_n \|_{\max} = 1$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ (takže *není* $\| f_n \|_{\max} \to 0$), zatímco

$$\| f_n \|_2 = \sqrt{\frac{b-a}{2n}} \to 0\,. \tag{40}$$

Důsledek: *Integrální norma* (38) *není totožná s maximovou normou* (36).

Rady: 1. Při důkazu, že (37) je skalární součin, může činit potíže jen vlastnost S1, konkrétněji implikace $(f \cdot f) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Není-li však $f \equiv 0$ (v $\langle a,b\rangle$), existuje bod $x_0 \in \langle a,b\rangle$ tak, že $A := f^2(x_0) > 0$; ze spojitosti plyne existence intervalu $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, v němž je všude $f^2 > \frac{1}{2}A$. Potom však je

$$\int_a^b f^2 = \int_a^c f^2 + \int_c^d f^2 + \int_d^b f^2 \ge \int_c^d f^2 \ge \int_c^d \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}A\,(d-c) > 0\,.$$

2. Každá z funkcí f_n je spojitá v $\mathbb{R}$ a svého maxima nabývá v bodě $a+(b-a)/2n$; doporučujeme načrtnout si grafy. ◇

---

[5]) Lze dokázat (sr. s [13], str. 542–543), že pro každé $p \in (1, +\infty)$ je i výraz $(\int_a^b |f|^p)^{1/p}$ normou; „integrálních norem“ je tedy nekonečně mnoho a index 2 v (38) odpovídá $p = 2$.

Příklad 12.4. *Funkce* (39) *konvergují k nulové funkci jak při integrální normě* (38), *tak i bodově; konvergence není sice stejnoměrná v celém intervalu* $\langle a, b\rangle$, *ale je stejnoměrná v každém intervalu* $\langle a+\delta, b\rangle$, *kde* $\delta \in (0, b-a)$.

Abychom ukázali, jak málo má konvergence při normě (38) společného nejen s konvergencí stejnoměrnou, ale dokonce i s bodovou, modifikujme předcházející příklad. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $\delta_n := (b-a)/2n$ a buď

$$(41) \qquad g_n(x) := \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \text{ je-li } x \in \langle a-\delta_n, a+\delta_n\rangle, \quad g_n(x) := 0 \text{ jinak};$$

snadno zjistíme, že

$$(42) \qquad \int_{a-\delta_n}^{a+\delta_n} g_n^2 = \delta_n\,, \quad \int_{a-\delta_n}^{a} g_n^2 = \int_a^{a+\delta_n} g_n^2 = \tfrac{1}{2}\delta_n\,.$$

Definujme pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $k = 0, 1, \ldots, 2n$ funkci $h_{nk} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podmínkou

$$(43) \qquad h_{nk}(x) := g_n(x - k\delta_n);$$

protože hodnota integrálu se při translaci nemění, je

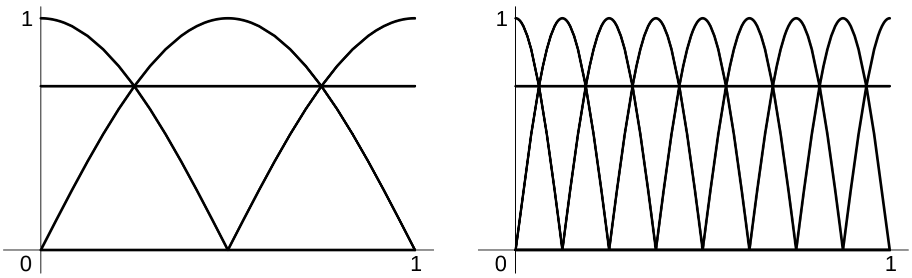
$$(44) \qquad \int_a^b h_{nk}^2 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\delta_n & \text{pro } k=0 \text{ a } k=2n \\ \delta_n & \text{pro } k=1,\ldots,2n-1 \end{array} \right\}.$$

Z toho ihned plyne, že *posloupnost*

$$(45) \qquad h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{20}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, \ldots, h_{n0}, h_{n1}, \ldots, h_{n,2n}, \ldots$$

konverguje při integrální normě k nulové funkci.

Podrobnějším vyšetřením funkcí h_{nk} zjistíme, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují celá čísla j, k ležící mezi 0 a $2n$ tak, že $h_{nj}(x) = 0$, $h_{nk}(x) \geq 1/\sqrt{2}$. V posloupnosti hodnot funkcí (45) v bodě x bude proto na nekonečně mnoha místech 0 a na nekonečně mnoha (jiných) místech hodnota $\geq 1/\sqrt{2}$; *posloupnost* (45) *proto nemá limitu v žádném bodě* $x \in \langle a, b\rangle$.



Funkce h_{nk} pro $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$ a pro $n = 1$ a $n = 4$

Cvičení 12.11. Při označení z (35) dokažte, že

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f| \tag{46}$$

je norma v množině $C(a,b)$, pro niž platí implikace

$$f_k \in C(a,b), \ \|f_k\|_{\max} \to 0 \ \Rightarrow \ \|f_k\|_1 \to 0 . \tag{47}$$

Najděte posloupnost funkcí $f_k \in C(0,1)$, pro něž platí tyto 4 podmínky: $f_k \to 0$ bodově v $\langle 0,1\rangle$, $\|f_k\|_{\max} \to +\infty$, $\|f_k\|_1 \to 0$, $\|f_k\|_2 \to +\infty$. [6])

Cvičení 12.12. Množina

$$\ell^2 := \Big\{x\,;\, x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ x_k \in \mathbb{R} \ \text{pro každé}\ k \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty\Big\} \tag{48}$$

(čte se „malé el kvadrát") je jedním z tzv. **Hilbertových prostorů**.

A. Dokažte, že

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2,\ y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2 \ \Rightarrow \ \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \ \ \textit{konverguje absolutně}, \tag{49}$$

a odvoďte z toho, že i *řada* $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)^2$ *konverguje.*

Definuje-li se tedy sčítání posloupností x a y a násobení posloupnosti x číslem $c \in \mathbb{R}$ *po souřadnicích*, tj. klade-li se

$$x + y := \{x_k + y_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad cx := \{cx_k\}_{k=1}^{\infty}, \tag{50}$$

stane se z ℓ^2 *lineární prostor*; dokažte dále, že *výraz*

$$(x \cdot y) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \tag{51}$$

je skalární součin, takže jeho zavedením do ℓ^2 se tento prostor stane *unitárním prostorem* s normou a metrikou

$$\|x\|_{\infty} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \quad \text{a} \quad \rho_{\infty}(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - y_k)^2}\,. \tag{52}$$

Rada: Závěr implikace (49) plyne ihned z nerovnosti $2|ab| \le a^2 + b^2$ platné pro každá dvě čísla $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ a ze srovnávacího kritéria pro řady. ◇

B. Ukažte, že *pro každou posloupnost vektorů* $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ *a pro každý vektor* $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ *platí implikace*

---

[6]) Několik možných řešení najde čtenář na konci kapitoly.

$$(53) \qquad x^n \to x \text{ pro } n \to \infty \;\Rightarrow\; x_k^n \to x_k \text{ pro } n \to \infty \text{ a každé } k \in \mathbb{N},$$

která znamená, že *z konvergence v* ℓ^2 *plyne konvergence po souřadnicích.*

Tzv. **Kroneckerovo delta** δ_{ij} je pro celá čísla i, j definováno podmínkami

$$(54) \qquad \delta_{ij} := \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ je-li } i = j \\ 0, \text{ je-li } i \neq j \end{matrix} \right\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ se vektor $e_n := \{\delta_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$, tj. posloupnost, jejíž n-tý člen se rovná 1 a všechny ostatní členy jsou nulové, nazývá **jednotkový vektor n-té souřadnicové osy v ℓ^2**. Vektory e_n jsou zřejmě *navzájem ortogonální* (a nenulové, tedy *lineárně nezávislé*); z toho plyne, že $\dim \ell^2 = \infty$.

Ověřte, že *posloupnost* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje po souřadnicích k nulovému vektoru* 0 *prostoru* ℓ^2 *(tj. k nulové posloupnosti), přičemž* $\| e_n \| = 1 \not\to 0$. *Implikaci* (53) *nelze tedy obrátit*!

C. Dokažte, že *pro každé* $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ *je* $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$*, kde* $x_k = (x \cdot e_k)$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$.

Rada: Rovnosti $(x \cdot e_k) = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \cdot e_k) = x_k$ plynou z linearity a ze spojitosti skalárního součinu (viz Př. 12.2). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je proto

$$\Big(\big(x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\big) \cdot \big(x - \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\big)\Big) = \| x \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} x_k (x \cdot e_k) + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

a protože rozdíl vpravo konverguje pro $n \to \infty$ k 0, platí totéž o čtverci normy vektoru $x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ vlevo. $\diamond$

Poznámka 12.4. Nekonečná posloupnost jednotkových, navzájem ortogonálních vektorů e_k určuje v ℓ^2 nekonečně mnoho souřadnicových os $\{t e_k;\, t \in \mathbb{R}\}$. Podobně jako je tomu v eukleidovských prostorech, lze každý vektor $x \in \ell^2$ rozložit do složek $x_k e_k$ ve směru jednotlivých souřadnicových os a jejich „orientované délky“ $x_k = (x \cdot e_k)$ se vypočtou podle stejného vzorce jako v prostorech eukleidovských. Délka vektoru x je s délkami $|x_k|$ průmětů do os vázána rovností $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$, což připomíná Pythagorovu větu.

Uvedené analogie nejsou zdaleka jediné; v Hilbertově prostoru ℓ^2 lze úspěšně rozvíjet geometrii, která v některých ohledech připomíná geometrii eukleidovských prostorů, ale liší se od ní např. tím, že se i u jednoduchých pojmů (skalární součin, norma) musíme vyrovnávat s otázkami konvergence.

Každý eukleidovský prostor $\mathbb{R}^p$ lze snadno zobrazit do ℓ^2 tak, aby se zachovala jak jeho algebraická, tak i jeho metrická „struktura“: Označíme-li φ zobrazení $\mathbb{R}^p$ do ℓ^2, které bodu $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ přiřazuje bod $\{x_1, \ldots, x_p, 0, 0, \ldots\} \in \ell^2$, je zřejmé, že φ zachovává algebraické operace, tj. že

1) $x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^p \Rightarrow \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,

2) $x \in \mathbb{R}^p,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$;

protože

3) $x \in \mathbb{R}^p \Rightarrow \|x\| = \|\varphi(x)\|$ (kde vlevo je norma v $\mathbb{R}^p$, vpravo norma v ℓ^2), *zachovává φ i vzdálenost.*

Zobrazení s vlastnostmi 1) a 2) se nazývají **izomorfní** (krátce: **izomorfismy**), zobrazení s vlastností 3) jsou **izometrická**; φ je tedy **izometrický izomorfismus**, prostory $\mathbb{R}^p$ a $\varphi(\mathbb{R}^p) \subset \ell^2$ jsou **izometricky izomorfní**. Všechny vlastnosti, které plynou z toho, že $\mathbb{R}^p$ i $\varphi(\mathbb{R}^p)$ jsou normované lineární prostory, si v těchto dvou prostorech vzájemně odpovídají, prostory jsou z algebraického i z metrického hlediska „nerozeznatelné".

Nekonečná dimenze prostoru ℓ^2 přináší v porovnání s konečněrozměrnými prostory řadu netušených možností; přes jisté analogie jsou však mezi geometrií prostorů $\mathbb{R}^p$ a ℓ^2 i zásadní rozdíly. Příklad: Zatímco v ℓ^2 je konvergence podmínkou *značně silnější* než konvergence po souřadnicích, je v každém $\mathbb{R}^p$ konvergence *totožná* s konvergencí po souřadnicích.

Cvičení 12.13. Znakem ℓ (nebo podrobněji ℓ^1) se ve funkcionální analýze značí prostor všech (nekonečných) posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ reálných čísel, pro něž řada $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ konverguje. Sčítání dvou vektorů a násobení vektoru číslem je opět definováno jako sčítání resp. násobení po souřadnicích.

A. Dokažte, že

$$\|x\| := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \tag{55}$$

je norma v ℓ.

B. Ukažte dále, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty, \tag{56}$$

takže každá posloupnost ležící v ℓ leží i v ℓ^2. Pozor však! *Prostor ℓ s normou* (55) *není podprostorem prostoru ℓ^2 s normou* (52), protože tyto normy nejsou totožné.

C. *Najděte posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, pro niž je součet na levé straně* (56) *nekonečný, součet vpravo konečný.* Dokažte konečně, že

$$x^n \to x \;\text{ při normě (55)} \;\Rightarrow x^n \to x \;\text{ při normě (52)}. \tag{57}$$

Cvičení 12.14. Nechť $X \neq \emptyset$ je libovolná množina, $c \in \mathbb{R}_+$ libovolné číslo. Pro každé dva body x, y z X položte

$$d_c(x,y) := \left\{ \begin{array}{l} c, \text{ je-li } x \neq y \\ 0, \text{ je-li } x = y \end{array} \right\} \tag{58}$$

a dokažte, že d_c *je metrika.*

Poznamenejme, že prostor (X, d_c) i metrika d_c se nazývají **diskrétní** (podrobněji: *diskrétní s konstantou c*).

Ověřte, že v (X, d_c) platí tato tvrzení:

A. *Pro každý bod $x \in X$ je*

$$U(x, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \{x\},\ \text{je-li } \varepsilon \in (0, c\rangle \\ X,\ \ \text{je-li } \varepsilon \in (c, +\infty) \end{array} \right\}. \tag{59}$$

Důsledek: *Každé okolí má průměr rovný buď* 0, *nebo c.*

B. *Posloupnost bodů $x_k \in X$ je konvergentní, právě když je stacionární.*

Ověřte dále správnost těchto tvrzení:

C. *Množina $\{e_n ; n \in \mathbb{N}\}$ všech jednotkových vektorů v ℓ^2 je diskrétní prostor s $c = \sqrt{2}$. Táž množina, považovaná za podprostor prostoru ℓ, je také diskrétní prostor, ale s konstantou $c = 2$.*

D. *Každá z funkcí $\cos 2^k \pi x$, kde $k \in \mathbb{N}$, je jednotkový vektor prostoru $C(0,1)$ s maximovou normou a množina všech těchto vektorů je diskrétní podprostor prostoru $C(0,1)$ s konstantou $c = 2$.*

E. *Množina všech funkcí* (34) *ze* Cv. 12.08 *je diskrétní podprostor s konstantou $c = 1$ prostoru $M(0,1)$ se supremovou normou; každá z uvedených funkcí má přitom normu také rovnou* 1.

F. *Definujeme-li v prostoru $C(-\pi, \pi)$ skalární součin podle* Cv. 12.10, *získáme unitární prostor, v němž funkce $f_k(x) := \sin kx$, kde $k \in \mathbb{N}$, tvoří diskrétní podprostor s konstantou $c = \sqrt{2\pi}$; uvedené funkce jsou přitom navzájem ortogonální vektory s normou $\sqrt{\pi}$.*

G. *V prostoru $C(0,1)$ se skalárním součinem z* Cv. 12.10 *tvoří funkce*

$$g_k(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 2^{k/2} \sin(2^k \pi x) & \text{v } \langle 2^{-k}, 2^{-k+1} \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{array} \right\}, \ \textit{kde } k \in \mathbb{N}, \tag{60}$$

diskrétní množinu s konstantou $c = 1$; funkce g_k jsou navzájem ortogonální a každá z nich má normu $1/\sqrt{2}$.

Cvičení 12.15. Nechť X je množina všech komplexních čísel a nechť pro každá dvě komplexní čísla $z = |z| e^{is}$, $\zeta = |\zeta| e^{it}$, kde $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, je

$$\rho_{\text{zvl}}(z, \zeta) := \left\{ \begin{array}{ll} |z - \zeta|, & \text{je-li buď } z\zeta = 0, \text{ nebo } s \equiv t \bmod \pi \\ |z| + |\zeta| & \text{jinak} \end{array} \right\}. \tag{61}$$

(Vzdálenost dvou bodů se tedy na každé přímce procházející počátkem měří „normálně“ (=„eukleidovsky“); leží-li však body $z \neq 0$, $\zeta \neq 0$ na dvou různých polopřímkách vycházejících z počátku a netvořících dohromady přímku, je jejich vzdálenost rovna eukleidovské vzdálenosti, kterou by měly, kdyby obě polopřímky dohromady přímku tvořily, tj. kdyby jedna z nich byla prodloužením druhé. Názornou představu o „metrických poměrech“ v celém prostoru (X, ρ_{zvl}) komplikuje skutečnost, že by se *každá* polopřímka vycházející z počátku v tomto smyslu jevila jako prodloužení *každé jiné* takové polopřímky.)

Dokažte, že

1) *funkce* ρ_{zvl} *je metrika v množině* X *všech komplexních čísel.*

Dokažte dále, že v prostoru (X, ρ_{zvl}) platí:

2) $z_k \to 0 \Leftrightarrow |z_k| \to 0$;

3) $z_k \to z = |z| e^{is} \neq 0$, *právě když je* $z_k = |z_k| e^{is}$ *pro s. v.* k a $|z_k - z| \to 0$.

Cvičení 12.16. Nechť X je množina všech posloupností přirozených čísel, tj. všech zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Je-li $f \in X$, $g \in X$, $f \neq g$, položme $\rho_{BP}(f, g) = 1/n$, kde n je nejmenší přirozené číslo, pro něž je $f(n) \neq g(n)$; je-li $f = g$, buď $\rho_{BP}(f, g) = 0$.

Dokažte tato tvrzení:

A. ρ_{BP} *je metrika v* X. (Dvojice (X, ρ_{BP}) se nazývá **Bairův prostor**.)

B. *Je-li* $f_k \in X$, $f \in X$, *je* $f_k \to f$ *při metrice* ρ_{BP}, *právě když pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje* $k(n) \in \mathbb{N}$ *tak, že pro všechna* $k \geq k(n)$ *je* $f_k(1) = f(1), \ldots, f_k(n) = f(n)$. (Utvoříme-li „dvakrát nekonečnou“ matici, jejíž k-tý řádek tvoří členy posloupnosti f_k, je první člen k-tého řádku s $k \geq k(1)$ číslo $f(1)$, první dva členy k-tého řádku s $k \geq k(2)$ jsou čísla $f(1), f(2)$, atd. Sloupce matice jsou tedy stacionární posloupnosti, přičemž v n-tém sloupci je od $k(n)$-tého členu číslo $f(n)$.)

C. *Nechť* $f_k(k) := k$ *pro všechna* k *a* $f_k(j) := 1$, *je-li* $j \neq k$; *pak* $f_k \to f$, *kde* f *je konstantní posloupnost* f, *pro niž je* $f(j) = 1$ *pro všechna* j.

Cvičení 12.17. Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a nechť $\varphi : \mathbb{R} \to_{\text{na}} (a, b)$ je spojitá rostoucí funkce; rozšiřme její definiční obor na celé $\mathbb{R}^*$ tím, že položíme $\varphi(-\infty) := a$, $\varphi(+\infty) := b$. Dokažte, že *funkce definovaná podmínkou*

(62) $$\rho_{\text{red}}(x, y) := |\varphi(y) - \varphi(x)| \quad \text{pro každé dva body } x \in \mathbb{R}^*,\ y \in \mathbb{R}^*$$

je metrika. (Můžeme jí říkat **redukovaná metrika v** $\mathbb{R}^*$ generovaná funkcí φ; body x, y na ose x zobrazíme funkcí φ a najdeme (eukleidovskou) vzdálenost jejich obrazů $\varphi(x), \varphi(y)$ na ose y.)

Dokažte dále, že *pro každou posloupnost* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konečných reálných čísel a pro každé* $x \in \mathbb{R}^*$ *je* $\lim_{k \to \infty} x_k = x$,[7]) *právě když* $\rho_{\text{red}}(x_k, x) \to 0$.

Ověřte konečně, že např. *funkce* $\varphi(x) := x/(1 + |x|)$ $(x \in \mathbb{R})$ *splňuje nahoře uvedené podmínky*, přičemž $(a, b) = (-1, 1)$.

* * *

Jsou-li z_1, z_2 dvě komplexní čísla, označme $x_j := \operatorname{Re} z_j$, $y_j := \operatorname{Im} z_j$ pro $j = 1, 2$ a položme

(63) $$\rho(z_1, z_2) := |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Funkce ρ je podle toho, co jsme řekli v Př. 12.01, metrika v množině $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel; není-li řečeno nic jiného, předpokládá se automaticky, že $\mathbb{C}$ *je metrický prostor právě s touto metrikou.*

---

[7]) podle běžné definice

V analýze v komplexním oboru se m.p. $\mathbb{C}$ nazývá **otevřená Gaussova rovina**; podobně jako bylo z mnoha důvodů výhodné přidat k $\mathbb{R}$ *dvě* nekonečná čísla $\pm\infty$, je v komplexní analýze vhodné rozšířit množinu $\mathbb{C}$ o *jediné* **nekonečno** ∞. Vznikne tak množina $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Algebraické operace s ∞ se zavádějí takto:

1. Součet: $z + \infty = \infty + z := \infty$ pro každé $z \in \mathbb{C}$; součet $\infty + \infty$ není definován.

2. Součin: $z \cdot \infty = \infty \cdot z := \infty$ pro každé *nenulové* $z \in \mathbb{S}$; součiny $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ nejsou definovány.

3. Podíl: $z/0 := \infty$ pro každé *nenulové* $z \in \mathbb{S}$ a $z/\infty := 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$; podíly $0/0$ a ∞/∞ nejsou definovány.

4. Celočíselná mocnina: $\infty^0 := 1$, $\infty^n := \infty$, $\infty^{-n} := 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Do množiny $\mathbb{S}$ se zavádí metrika ρ^* takto: Označme $A := (0,0,1)$ „severní pól" jednotkové sféry

$$\tilde{\mathbb{S}} := \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3\,;\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\} \tag{64}$$

v $\mathbb{R}^3$ a pro každé $X = (\xi,\eta,\zeta) \in \tilde{\mathbb{S}} - \{A\}$ buď $(x,y,0)$ průsečík souřadnicové roviny $\zeta = 0$ s polopřímkou vycházející z bodu A a procházející bodem X. Položíme-li

$$\Phi(X) := \left\{ \begin{array}{ll} x + iy\,, & \text{je-li } X \neq A \\ \infty, & \text{je-li } X = A \end{array} \right\}, \tag{65}$$

je Φ zřejmě prosté zobrazení množiny $\tilde{\mathbb{S}}$ na množinu $\mathbb{S}$, takže $\Psi := \Phi_{-1}$ zobrazuje $\mathbb{S}$ prostě na $\tilde{\mathbb{S}}$. Pro každé dva body z_1, z_2 z $\mathbb{S}$ pak definujeme

$$\rho^*(z_1,z_2) := \rho_3(\Psi(z_1),\Psi(z_2))\,, \tag{66}$$

kde ρ_3 je eukleidovská metrika v $\mathbb{R}^3$. Zobrazení Φ se nazývá **stereografická projekce**, ρ^* je tzv. **redukovaná metrika v** $\mathbb{S}$ [8]), m.p. $(\mathbb{S},\rho^*)$ je **uzavřená Gaussova rovina**.

Cvičení 12.18. Dokažte toto jednoduché obecné tvrzení, z něhož ihned plyne, že *ρ^* je opravdu metrika v $\mathbb{S}$*:

Věta 12.1. *Je-li (Y,σ) metrický prostor, je-li $\omega : Y \to_{\text{na}} W$ prosté zobrazení a definujeme-li*

$$\tau(w_1,w_2) := \sigma(\omega_{-1}(w_1),\omega_{-1}(w_2)) \quad \textit{pro každé dva body} \quad w_1 \in W\,,\ w_2 \in W\,, \tag{67}$$

je (W,τ) metrický prostor. $\square$

V souladu s tím, co jsme řekli v Po.12.4 pro jeden speciální případ, nazývá se **zobrazení** $\omega : Y \to W$ prostoru (Y,σ) do prostoru (W,τ) **izometrické**, jestliže

$$y_1 \in Y\,,\ y_2 \in Y \ \Rightarrow\ \tau(\omega(y_1),\omega(y_2)) = \sigma(y_1,y_2)\,. \tag{68}$$

[8]) ρ^* je metrika podle V.12.1, která následuje a jejíž snadný důkaz přenecháme čtenáři.

Existuje-li izometrické zobrazení $\omega : Y \to_{\text{na}} W$, říkáme, že **prostory** Y a W jsou **izometrické**. [9]) $\square$

Jistě jsou zřejmá tato dvě tvrzení:

$$\text{(69)} \qquad \textit{Roviny } \mathbb{R}^2 \textit{ a } \mathbb{C} \textit{ jsou izometrické;}$$

$$\text{(70)} \qquad \textit{rovina } (\mathbb{S}, \rho^*) \textit{ je izometrická s jednotkovou sférou } \tilde{\mathbb{S}} \textit{ v } \mathbb{R}^3 .$$

Cvičení 12.19. Dokažte tato tvrzení:

1. *Je-li* $(0,0,1) = A \neq X = (\xi, \eta, \zeta) \in \tilde{\mathbb{S}}$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, *je*

$$\text{(71)} \qquad \Phi(X) = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} ,$$

$$\text{(72)} \qquad \xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} , \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} , \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} .$$

2. *Je-li* ρ *metrika* (63), *je-li* $z_k \in \mathbb{C}$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a je-li* $z \in \mathbb{S}$, *platí tyto implikace*:

$$\text{(73)} \qquad z \in \mathbb{C} \Rightarrow (\rho^*(z_k, z) \to 0 \Leftrightarrow \rho(z_k, z) \to 0) ,$$

$$\text{(74)} \qquad z = \infty \Rightarrow (\rho^*(z_k, z) \to 0 \Leftrightarrow |z_k| \to +\infty) .$$

Cvičení 12.20. Nechť (X, ρ) je metrický prostor; dokažte, že *funkce* ρ^* *definovaná rovností*

$$\text{(75)} \qquad \rho^*(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)} \quad \textit{pro každé dva body } x \in X ,\ y \in X$$

je metrika v X *splňující ekvivalenci*

$$\text{(76)} \qquad \rho(x_k, x) \to 0 \Leftrightarrow \rho^*(x_k, x) \to 0$$

pro každou posloupnost bodů $x_k \in X$ *a každý bod* $x \in X$.

Rada: Trojúhelníková nerovnost pro funkci (75) je ekvivalentní s nerovností, která z ní vznikne vynásobením všemi jmenovateli; stačí pak porovnat obě strany. $\diamond$

Všimněme si, že *všechny hodnoty funkce* ρ^* *leží v intervalu* $\langle 0, 1)$; z toho ihned plyne, že *každá podmnožina prostoru* X *s metrikou* ρ^* *je omezená – její průměr není větší než* 1.

Všimněme si dále, že když za prostor (X, ρ) zvolíme $\mathbb{R}$, bude mít (75) tvar

$$\text{(75*)} \qquad \rho^*(x,y) := \frac{|y - x|}{1 + |y - x|} \quad \textit{pro každá dvě čísla } x, y \textit{ z } \mathbb{R};$$

[9]) Jde zřejmě o relaci reflexivní, symetrickou a tranzitivní, tedy o ekvivalenci ve smyslu obecné teorie množin.

i tato metrika v množině všech konečných reálných čísel se počítává mezi tzv. *redukované metriky*. $\square$

Definice. Dvě (libovolné) metriky ρ a ρ^* v témž prostoru X, pro něž platí (76), se nazývají **ekvivalentní**.

Cvičení 12.21. Nechť X je množina všech (nekonečných) posloupností (konečných) reálných čísel; jsou-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ a $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ dvě takové posloupnosti, buď

$$\sigma(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|y_k - x_k|}{1 + |y_k - x_k|}\,. \tag{77}$$

Dokažte, že

1. *σ je metrika v X;*

2. *konvergence v prostoru (X, σ) je totožná s konvergencí po souřadnicích, tj. s podmínkou: Je-li $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in X$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a je-li $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$, je*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = x \text{ v } (X, \sigma) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \text{ pro každé } k \in \mathbb{N}. \tag{78}$$

Rada: Z výsledků Cv. 12.20 snadno plyne, že σ je metrika. Každý sčítanec na pravé straně (77) je nejvýše rovný levé straně; podle Cv. 12.20 proto $\sigma(x^n, x) \to 0 \Rightarrow |x_k^n - x_k| \to 0$ pro každé k. Je-li obráceně $|x_k^n - x_k| \to 0$ pro každé k a je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, zvolíme $K \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo $\sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{1}{2}\varepsilon$; pak najdeme $N \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo $|x_k^n - x_k| < \varepsilon/2K$ pro všechna $n > N$ a všechna $k \in \{1, \ldots, K\}$. Pro každé $n > N$ je pak $\sigma(x^n, x) < \varepsilon$. $\diamond$

Cvičení 12.22. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a nechť $\langle a_m, b_m\rangle$ jsou kompaktní intervaly splňující podmínky

$$\langle a_m, b_m\rangle \subset (a_{m+1}, b_{m+1}) \text{ pro každé } m \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} \langle a_m, b_m\rangle = (a, b). \tag{79}$$

Nechť X je množina všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ omezených na každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset (a, b)$; pro každou funkci $f \in X$ a pro každé $m \in \mathbb{N}$ označme

$$\sigma_m(f) := \sup\{|f(x)|;\, x \in \langle a_m, b_m\rangle\} \tag{80}$$

a pro každé dvě funkce $f \in X$, $g \in X$ položme

$$\sigma(f, g) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\sigma_m(f - g)}{1 + \sigma_m(f - g)}\,. \tag{81}$$

Dokažte, že

1. *σ_m není (pro žádné m) norma v X*, ale

2. *σ je metrika v X.*

Rada: σ_m není norma, protože pro dvě funkce f, g z X, pro něž je $f(x) = g(x)$ pro všechna $x \in \langle a_m, b_m \rangle$, je $\sigma_m(f, g) = 0$ bez ohledu na to, jakých hodnot nabývají v $(a, b) - \langle a_m, b_m \rangle$; σ_m však splňuje nerovnost $\sigma_m(f + g) \leq \sigma_m(f) + \sigma_m(g)$, což stačí k tomu, aby funkce $\sigma_m(f)/(1 + \sigma_m(f))$ splňovala podobnou nerovnost. Z toho snadno plyne trojúhelníková nerovnost pro funkci σ. $\diamond$

Dokažte dále, že

3. $\sigma(f_k, f) \to 0$, *právě když je* $f_k \to f$ *stejnoměrně v každém* $\langle a_m, b_m \rangle$.

Rada: Postupujte podobně jako ve Cv. 12.21. $\diamond$

Nechť $\langle c_n, d_n \rangle$ splňují analogické podmínky jako intervaly $\langle a_m, b_m \rangle$, tj. nechť je

$$\langle c_n, d_n \rangle \subset (c_{n+1}, d_{n+1}) \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle c_n, d_n \rangle = (a, b). \tag{79'}$$

Analogicky buď

$$\tau_n(f) := \sup\{|f(x)|;\ x \in \langle c_n, d_n \rangle\} \tag{80'}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$\tau(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\tau_n(f - g)}{1 + \tau_n(f - g)}. \tag{81'}$$

Dokažte, že

4. *metriky* σ *a* τ *jsou ekvivalentní*, tj. že *konvergence v* X *nezávisí na způsobu, jak byl interval* (a, b) *rozložen na kompaktní intervaly* $\langle a_m, b_m \rangle$ *s vlastností* (79).

Rada: Dokažte, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\langle a_m, b_m \rangle \subset \langle c_n, d_n \rangle$, a že obráceně pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\langle c_n, d_n \rangle \subset \langle a_m, b_m \rangle$; využijte to pak v důkazu. $\diamond$

Cvičení 12.23. Buďte (X, ρ) a (Y, σ) dva libovolné metrické prostory; pro každé dva body $z' = (x', y') \in X \times Y$, $z'' = (x'', y'') \in X \times Y$ položme

$$\rho_{XY}(z', z'') := \sqrt{\rho^2(x', x'') + \sigma^2(y', y'')}, \tag{82}$$

$$\overline{\rho}_{XY}(z', z'') := \max(\rho(x', x''), \sigma(y', y'')), \tag{83}$$

$$\tilde{\rho}_{XY}(z', z'') := \rho(x', x'') + \sigma(y', y''). \tag{84}$$

Dokažte, že

1. *každá z funkcí* (82) $-$ (84) *je metrikou v kartézském součinu* $X \times Y$;

2. *každé dvě z těchto metrik jsou ekvivalentní a při každé z nich je konvergence v* $X \times Y$ *konvergencí po souřadnicích.*

3. *Metrizujte podobně obecný kartézský součin* $X_1 \times \ldots \times X_p$, *kde* $p > 1$ *je přirozené číslo a dokažte analogická tvrzení.*

4. *Proveďte předcházející úkol speciálně pro případ, že* $X_1 = \ldots = X_p = \mathbb{R}$. *Pak pro* $p = 2$ *a pro* $p = 3$ *popište, jak z hlediska eukleidovské geometrie vypadají okolí při všech třech zkonstruovaných metrikách.* $\square$

Říkáme, že podmnožina M metrického prostoru (X, ρ) je **otevřená**, má-li každý bod $x \in M$ okolí $U(x)$ obsažené v M. Říkáme, že množina $N \subset X$ je **uzavřená**, je-li její doplněk $X - N$ otevřený.

Cvičení 12.24. Dokažte tato tvrzení:

O1. *$\emptyset$ a X jsou otevřené množiny.*

O2. *Je-li A libovolná množina a je-li množina M_α otevřená pro každé $\alpha \in A$, je i sjednocení $\bigcup_{\alpha \in A}$ otevřené.*

O3. *Je-li A konečná množina a je-li množina M_α otevřená pro každé $\alpha \in A$, je i průnik $\bigcap_{\alpha \in A}$ otevřený.*

Cvičení 12.25. Dokažte tato tvrzení:

U1. *$\emptyset$ a X jsou uzavřené množiny.*

U2. *Je-li A libovolná množina a je-li množina M_α uzavřená pro každé $\alpha \in A$, je i průnik $\bigcap_{\alpha \in A}$ uzavřený.*

U3. *Je-li A konečná množina a je-li množina M_α uzavřená pro každé $\alpha \in A$, je i sjednocení $\bigcup_{\alpha \in A}$ uzavřené.*

* * *

Pro každou podmnožinu M metrického prostoru (X, ρ) definujeme **vnitřek** $\operatorname{int} M$, **vnějšek** $\operatorname{ext} M$, **uzávěr** $\overline{M}$ a **hranici** ∂M množiny M takto:

1. $x \in \operatorname{int} M$ znamená, že existuje $U(x)$ obsažené v M.
2. $x \in \operatorname{ext} M$ znamená, že existuje $U(x)$ disjunktní s M.
3. $x \in \overline{M}$ znamená, že každé $U(x)$ má společné body s M.
4. $x \in \partial M$ znamená, že každé $U(x)$ má společné body jak M, tak i s $X - M$.

Bodům z $\operatorname{int} M$ resp. z $\operatorname{ext} M$ resp. z ∂M se říká **vnitřní** resp. **vnější** resp. **hraniční body** množiny M.

Je zřejmé, že $\operatorname{int} M \subset M$ a $\operatorname{ext} M \cap M = \emptyset$; *body $x \in \overline{M}$ a $x \in \partial M$ mohou, ale nemusí patřit do M.*

Cvičení 12.26. Dokažte, že pro každou podmnožinu M m.p. (X, ρ) platí:

1. *Je*

$$X = \operatorname{int} M \cup \partial M \cup \operatorname{ext} M, \text{ \textit{přičemž množiny vpravo jsou disjunktní.}} \tag{85}$$

2. $\operatorname{int}(X - M) = \operatorname{ext} M$, $\operatorname{ext}(X - M) = \operatorname{int} M$.
3. $\overline{M} = X - \operatorname{ext} M = \operatorname{int} M \cup \partial M = M \cup \partial M$.
4. $\partial M = \partial(X - M) = \overline{M} \cap \overline{X - M}$.
5. *Množiny $\operatorname{int} M$ a $\operatorname{ext} M$ jsou otevřené, množiny $\overline{M}$ a ∂M uzavřené.*
6. *Množina M je otevřená, právě když $M = \operatorname{int} M$.*
7. *Množina M je otevřená, právě když $M \cap \partial M = \emptyset$.*
8. *Množina M je uzavřená, právě když $M = \overline{M}$.*
9. *Množina M je uzavřená, právě když $\partial M \subset M$.*

Cvičení 12.27. Dokažte, že pro každou podmnožinu M m.p. (X,ρ) platí:

1. *M je otevřená, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in X$, pro niž je $x_k \to x \in M$, je $x_k \in M$ pro s.v. k.*

2. *M je uzavřená, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, která konverguje v X, je $\lim x_k \in M$.*

3. *$x \in \operatorname{int} M$, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in X$, pro niž je $x_k \to x \in M$, je $x_k \in M$ pro s.v. k.*

4. *$x \in \overline{M}$, právě když existuje posloupnost bodů $x_k \in M$ tak, že $x_k \to x$.*

5. *$x \in \partial M$, právě když existují dvě posloupnosti bodů $x'_k \in M$ a $x''_k \in X - M$ tak, že $\lim x'_k = \lim x''_k = x$.* □

Definice. Říkáme, že podmnožina M metrického prostoru (X,ρ) je **kompaktní**, je-li možné z každé posloupnosti bodů $x_k \in M$ vybrat posloupnost konvergentní v M. □

Ve větách 12.2 −12.7 jsou shrnuty nejdůležitější vlastnosti kompaktních množin; důkazy prvních pěti nejsou nikterak obtížné a mohou sloužit čtenáři jako test, že příslušné pojmy myšlenkově dobře zvládl.

Věta 12.2. *Je-li množina $M \subset X$ kompaktní, je omezená a uzavřená* (v X).

Věta 12.3. *Je-li množina $M \subset X$ uzavřená a je-li prostor X kompaktní, je M kompaktní.*

Věta 12.4. *Je-li $p \in \mathbb{N}$, je množina $M \subset \mathbb{R}^p$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Cvičení 12.28. Dokažte, že *uzavřená jednotková koule* $\{x \in \ell^2;\ \|x\| \le 1\}$ *prostoru ℓ^2 není kompaktní, ačkoli je uzavřená a omezená.* [10])

Rada: Protože z konvergence $x_n \to x$ v ℓ^2 plyne jak konvergence po souřadnicích, tak i relace $\|x_n\| \to \|x\|$, nemůže mít žádná posloupnost vybraná z posloupnosti vektorů e_n souřadnicových os v ℓ^2 žádnou limitu; po souřadnicích totiž konverguje k nule, zatímco normy mají limitu 1. ◇

Věta 12.5. *Jsou-li prostory (X,ρ) a (Y,σ) kompaktní, platí totéž pro jejich kartézský součin $X \times Y$ metrizovaný kteroukoli z metrik z* Př. 12.23. (*Analogické tvrzení platí pro kartézský součin libovolného konečného počtu kompaktních prostorů.*)

Věta 12.6. (Cantorova věta.) *Jsou-li M_k neprázdné kompaktní podmnožiny metrického prostoru (X,ρ) a je-li $M_k \supset M_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je $\bigcap_{k=1}^{\infty} M_k \ne \emptyset$.* □

Definice. Říkáme, že systém $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ množin **pokrývá** množinu M (nebo že je **pokrytím** množiny M nebo že množiny $M_\alpha \in \mathcal{M}$ **pokrývají** množinu M), je-li $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$. O **otevřeném pokrytí** mluvíme v případě, že všechny množiny $M_\alpha \in \mathcal{M}$ jsou otevřené.

---

[10]) Podmínka $M \subset \mathbb{R}^p$ věty 12.5 je tedy *podstatná*. Ve funkcionální analýze se dokazuje, že *uzavřená jednotková koule v n.l.p. X je kompaktní, právě když má X konečnou dimenzi.*

Věta 12.7. (Borelova věta.) *Je-li* $\mathcal{M} = \{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *otevřené pokrytí kompaktní podmnožiny* M *metrického prostoru* (X,ρ), *existuje konečná množina* $B \subset A$ *tak, že systém* $\mathcal{M}_1 := \{M_\alpha\,;\ \alpha \in B\}$ *je také pokrytím množiny* M.

* * *

Definice. Jsou-li (X,ρ) a (Y,σ) metrické prostory a je-li $M \subset X$, říkáme, že zobrazení $f : M \to Y$ je **spojité v bodě** $x \in M$ **vzhledem k** M, platí-li implikace

$$x_k \in M \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{N},\ x_k \to x \ \Rightarrow\ f(x_k) \to f(x)\,. \tag{86}$$

Je-li f spojité v každém bodě $x \in M$ *vzhledem k* M, říkáme, že je **spojité v** M. Pro spojitost vzhledem k X se obvykle užívá krátký název **spojitost**.

Cvičení 12.29. Uvažte, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná jako 1 v intervalu $I := \langle -1, 1\rangle$ a jako 0 v $\mathbb{R} - I$, je spojitá v I, ale není spojitá (*vzhledem k* $\mathbb{R}$) v bodech ± 1.

Slova „vzhledem k M*" jsou proto v definici spojitosti v* M *podstatná.* Uvažte však také, že *v případě otevřené množiny* M *je spojitost vzhledem k* M *totéž co spojitost vzhledem k* X.

Cvičení 12.30. Dokažte ekvivalenci těchto tří výroků:

A. *f je spojitá v bodě x vzhledem k M.*

B. *Pro každé okolí* $U(f(x))$ (*v prostoru* Y) *existuje okolí* $U(x)$ (*v prostoru* X) *tak, že* $f(U(x) \cap M) \subset U(f(x))$.

C. *Pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* $\delta \in \mathbb{R}_+$ *tak, že*

$$x' \in M\,,\ \rho(x',x) < \delta \ \Rightarrow\ \sigma(f(x'), f(x)) < \varepsilon\,. \tag{87}$$

Dodatek. *Je-li* $M \subset X$ *otevřená množina, lze v podmínce* A *slova „vzhledem k* M*" vynechat, v podmínce* B *lze psát* $U(x)$ *místo* $U(x) \cap M$ *a v podmínce* C *nemusíme psát „*$x' \in M$*".*

Cvičení 12.31. Dokažte ekvivalenci těchto výroků:

A. *Zobrazení* $f : X \to Y$ *je spojité.*

B. *Pro každou množinu* M *otevřenou v* Y *je množina* $f_{-1}(M)$ *otevřená v* X.

C. *Pro každou množinu* N *uzavřenou v* Y *je množina* $f_{-1}(N)$ *uzavřená v* X.

D. *Pro každou množinu* $W \subset X$ *je* $f(\overline{W}) \subset \overline{f(W)}$.

Věta 12.7. *Je-li* X *kompaktní prostor a je-li zobrazení* $f : X \to Y$ *spojité, je i množina* $f(X)$ *kompaktní.*

Důsledek. *Je-li* $X \neq \emptyset$ *kompaktní prostor, nabývá v něm každá spojitá funkce* $f : X \to \mathbb{R}$ *jak svého maxima, tak i svého minima.* $\square$

Následující tvrzení zobecňuje známou větu o spojitosti superpozice dvou reálných funkcí reálné proměnné; protože podprostor metrického prostoru je metrický prostor, vyslovíme je pro jednoduchost jen pro celé prostory s tím, že užívat je lze (po evidentní úpravě) i pro podprostory.

Věta 12.8. 1. *Je-li zobrazení f z m.p. X do m.p. Y spojité v bodě $a \in X$ a je-li zobrazení g z m.p. Y do m.p. Z spojité v bodě $f(a)$, je superpozice $g \circ f$ spojitá v bodě a.*

2. *Je-li $f : X \to Y$ spojité v X a je-li $g : Y \to Z$ spojité v Y, je superpozice $g \circ f$ spojitá v X.*

Důležitost stejnoměrné konvergence naznačuje např. tato věta:

Věta 12.9. *Nechť X, Y jsou metrické prostory, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost zobrazení z X do Y, f zobrazení z X do Y. Pak platí:*

1. *Jsou-li všechna zobrazení f_k spojitá v bodě $a \in X$ a je-li $f_k \to f$ stejnoměrně v jistém $U(a)$, je i zobrazení f spojité v bodě a.*

2. *Jsou-li všechna zobrazení f_k spojitá v X a je-li $f_k \to f$ stejnoměrně v X, je zobrazení f spojité v X.*

Cvičení 12.32. Dokažte, že *prostor $C(a, b)$ z* Cv. 12.09 *je uzavřený podprostor prostoru $M(a, b)$ z* Cv. 12.08 .

Rada: Jde jen o parafrázi 2. části věty 12.9. $\diamond$

Definice. Jsou-li (X, ρ), (Y, σ) metrické prostory, říkáme, že zobrazení $f : X \to Y$ je **stejnoměrně spojité** (v X), jestliže

$$x' \in X\,,\ x'' \in X\,,\ \rho(x', x'') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon\,. \tag{88}$$

Poznámka 12.5. Spojitost zobrazení f v X je totéž jako jeho spojitost v každém bodě $x'' \in X$, tj. totéž jako platnost výroku: *Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ a pro každý bod $x'' \in X$ existuje $\delta \in \mathbb{R}_+$ tak, že*

$$x' \in X,\ \rho(x', x'') < \delta \Rightarrow \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon\,. \tag{89}$$

V této podmínce závisí δ obecně jak na ε, tak i na bodu x''; f je stejnoměrně spojité, právě když lze δ volit nezávisle na bodu x''. Obecně je tedy stejnoměrná spojitost podmínkou *silnější* než pouhá spojitost (viz též Cv. 12.33); následující věta ukazuje, že v kompaktních prostorech je situace přehlednější.

Věta 12.10. *Každé spojité zobrazení kompaktního prostoru X (do libovolného metrického prostoru Y) je (v X) stejnoměrně spojité.*

Cvičení 12.33. Dokažte, že

1. *funkce $f(x) := x^2$ je spojitá v $\mathbb{R}$, ale není tam spojitá stejnoměrně*;

2. *funkce $f(x) := \cos(1/x)$ je spojitá a omezená v omezeném intervalu $(0, 1\rangle$, ale není v tomto intervalu spojitá stejnoměrně.*

Rady: Ad 1. Je-li dáno libovolné $\delta \in \mathbb{R}_+$ a položíme-li $x_n := n$, $y_n = n + 1/n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, bude $0 < y_n - x_n = 1/n < \delta$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, zatímco výraz $y_n^2 - x_n^2 = 2 + 1/n^2$ bude (pro všechna n) větší než 2.

Ad 2. Je-li $x_n := 1/n\pi$, je $|\,x_n - x_{n+1}\,| = 1/n(n+1)\pi \to 0$ pro $n \to \infty$, zatímco $|\,f(x_n) - f(x_{n+1})\,| = |\,\cos n\pi - \cos(n+1)\pi\,| = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Definice. Jsou-li X, Y metrické prostory, říkáme, že **zobrazení** $f : X \to Y$ je **homeomorfní** (nebo že je to **homeomorfismus**), je-li f spojité a prosté v X a je-li zobrazení f_{-1} spojité v $f(X)$. Říkáme, že **prostory** X, Y jsou **homeomorfní**, existuje-li homeomorfní zobrazení $f : X \to_{\text{na}} Y$.

Příklad 12.5. Je zřejmé, že *každé izometrické zobrazení je homeomorfní*.

Příklad 12.6. Je dobře známo, že *reálná funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je prostá, právě když je ryze monotónní; množina $f(I)$ je pak interval a funkce f_{-1} inverzní k f je v něm spojitá. Takové zobrazení je tedy homeomorfní.*

Obecně ovšem není pravda, že každé prosté spojité zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ je homeomorfismus; dokumentuje to tento příklad: Funkce f definovaná v množině $M = (-\infty, -1\rangle \cup (0, +\infty)$ podmínkami

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} x+1, & \text{je-li } x \in (-\infty, -1\rangle \\ x, & \text{je-li } x \in (0, +\infty) \end{array} \right\}$$

je spojitá a prostá v M, ale inverzní funkce $g := f_{-1} : \mathbb{R} \to_{\text{na}} M$ spojitá není, protože $g(0+) = 0$, $g(0-)$ $(= g(0)) = -1$.

Cvičení 12.34. Dokažte, že *pro každé dva otevřené intervaly $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$, $I \neq \mathbb{R} \neq J$, existuje* **lineární lomená funkce**, tj. funkce tvaru

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\,, \quad \text{kde } \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \mathbb{R} \ \text{ a } \ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\,, \tag{90}$$

která je homeomorfismem a zobrazuje I na J.

Dokažte dále, že *lineární lomenou funkcí lze množinu $\mathbb{R}$ homeomorfně zobrazit jen na $\mathbb{R}$, přičemž každá taková funkce je lineární.* (Uvažte, co by se stalo, kdyby bylo $\gamma \neq 0$.)

Najděte několik (svým typem pokud možno hodně odlišných) rostoucích homeomorfních zobrazení $\mathbb{R}$ na interval $(-1, 1)$.

Příklad 12.7. Zobrazení přiřazující číslu $z \in \mathbb{C}$ dvojici $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$ je izometrické, tedy homeomorfní; z toho plyne, že *otevřená Gaussova rovina $\mathbb{C}$ je homeomorfní s eukleidovskou rovinou $\mathbb{R}^2$.*

Uzavřená Gaussova rovina $\mathbb{S}$ je homeomorfní s jednotkovou sférou $\tilde{\mathbb{S}}$ v $\mathbb{R}^3$; stereografická projekce je příslušný homeomorfismus.

Cvičení 12.35. Najděte homeomorfní zobrazení h otevřeného jednotkového kruhu $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$ tak, aby platila implikace

$$z \in \mathcal{U},\ z = |z|e^{it},\ t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ h(z) = |h(z)|e^{it}$$

a rovnost $h(\mathcal{U}) = X$, kde

1. $X = \mathbb{C}$ (celá rovina);
2. $X = \{z \in \mathbb{C};\, |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$ (otevřený čtverec o středu 0 a délce strany 2);

3. $X = \{x + iy \in \mathbb{C};\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ (x/a)^2 + (y/b)^2 < 1\}$, kde $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ (otevřená elipsa o středu 0 a poloosách délek a, b).

Rada: Protože h má zachovávat argument (= polární úhel), pište čísla $z \in \mathbb{C}$ v „polárním" tvaru $z = r\,e^{it}$, kde $r \in \langle 0, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$, a homeomorfismy h hledejte ve tvaru $h(r\,e^{it}) = g(r,t)\,e^{it}$, kde g je vhodná nezáporná funkce. $\diamond$

Cvičení 12.36. Dokažte, že *lineární lomená funkce* $f(z) := (z-i)/(z+i)$ *zobrazuje otevřenou horní polorovinu* $X := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$ *homeomorfně na jednotkový kruh* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

Rada: Porovnáním absolutní hodnoty čitatele a jmenovatele zjistíte, že pro každé $z \in X$ je $|f(z)| < 1$; je tedy $f(X) \subset \mathcal{U}$. Rovnice $w = f(z)$ má pro $w \in \mathcal{U}$ právě jedno řešení $z = i(1+w)/(1-w)$ a imaginární část tohoto z, rovná $(1-|w|^2)/(|1-w|^2))$, je kladná. $\diamond$

Cvičení 12.37. Nechť

$$f(x,y,z) := \left\{ \begin{array}{ll} (x,y,0)\,, & \text{je-li } x > 0, y > 0, z = 0 \\ (z,0,0)\,, & \text{je-li } x = y = 0, z \geq 0 \\ (0,-z,0)\,, & \text{je-li } x = y = 0, z \leq 0 \end{array} \right\}. \tag{91}$$

Dokažte, že f *je prosté spojité zobrazení množiny* $X \subset \mathbb{R}^3$, *která je sjednocením prvního otevřeného kvadrantu roviny* xy *s osou* z, *na první uzavřený kvadrant roviny* xy. Dokažte dále, že *zobrazení* f *není homeomorfní.* $\square$

Poznamenejme, že nic podobného situaci z Cv. 12.37 nemůže nastat, je-li množina X kompaktní; platí totiž toto tvrzení:

Věta 12.11. *Je-li* f *prosté spojité zobrazení kompaktního m. p.* X *do* (*libovolného*) *m. p.* Y, *je* f *homeomorfismus.*

Příklad 12.8. Nechť $p \in \mathbb{N}$ a matice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p1} & \lambda_{p2} & \dots & \lambda_{pp} \end{pmatrix} \tag{92}$$

nechť je *regulární*, tj. nechť $\det \Lambda \neq 0$. *Označíme-li*

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p\,, \\ L_2(x) &= \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_p(x) &= \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \ldots + \lambda_{pp}x_p\,, \end{aligned} \tag{93}$$

je lineární zobrazení $L = (L_1, L_2, \ldots, L_p)$ *homeomorfismus prostoru* $\mathbb{R}^p$ *na* $\mathbb{R}^p$. (Spojitost zobrazení L je zřejmá. Z algebry je známo, že soustava rovnic (93) má právě jedno řešení, nahradíme-li p-tici $\{L_1(x), \ldots, L_p(x)\}$ jakoukoli p-ticí $\{y_1, \ldots, y_p\}$

reálných čísel, protože determinant soustavy není nulový. Z toho plyne, že $L(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p$; protože řešení je lineární funkcí levých stran, je inverzní zobrazení L_{-1} spojité.)

Považujeme-li x a $L(x)$ za *sloupcové vektory* (tj. za matice typu $p \times 1$, v jejichž k-tém řádku je číslo x_k resp. $L_k(x)$), lze „transformační rovnosti" (93) zapsat ve tvaru

$$(93') \qquad L(x) = \Lambda x\,,$$

kde vpravo je maticový součin. Znamená-li Λ_{-1} matici inverzní k Λ, popisuje maticová rovnost

$$(94) \qquad L_{-1}(y) = \Lambda_{-1}\, y$$

zobrazení inverzní k L; y a $L_{-1}(y)$ je třeba opět považovat za sloupcové vektory.

Zobrazení L je izomerické, právě když je matice Λ **ortogonální**, což znamená, že její řádky $r_j := (\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jp})$, $j = 1, \ldots, p$, splňují podmínku

$$(95) \qquad (r_j \cdot r_k) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ji}\lambda_{ki} = \delta_{jk} \text{ pro } j = 1, \ldots, p,\ k = 1, \ldots, p.$$

Je-li podmínka splněna, platí nejen rovnost $\|\, L(x) \,\| = \|\, x \,\|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^p$, ale dokonce obecnější rovnost

$$(96) \qquad (L(x) \cdot L(y)) = (x \cdot y) \ \textit{ pro každé dva body } \ x \in \mathbb{R}^p,\ y \in \mathbb{R}^p\,.$$

Z toho ihned plyne, že souřadnicové osy se zobrazí na soustavu navzájem ortogonálních přímek, tedy nových souřadnicových os, na nichž je stejné měřítko jako na osách původních.

Cvičení 12.38. Nechť X, Y jsou metrické prostory, $f : X \to_{\text{na}} Y$ prosté zobrazení; dokažte ekvivalenci těchto podmínek:

A. *Zobrazení f je homeomorfní.*

A$'$. *Zobrazení f_{-1} je homeomorfní.*

B. *Množina M je otevřená v X, právě když je množina $f(M)$ otevřená v Y.*

B$'$. *Množina N je otevřená v Y, právě když je množina $f_{-1}(N)$ otevřená v X.*

C. *Množina M je uzavřená v X, právě když je množina $f(M)$ uzavřená v Y.*

C$'$. *Množina N je uzavřená v Y, právě když je množina $f_{-1}(N)$ uzavřená v X.*

D. *Pro každou množinu $M \subset X$ je $\overline{f(M)} = f(\overline{M})$.*

D$'$. *Pro každou množinu $N \subset Y$ je $\overline{f_{-1}(N)} = f_{-1}(\overline{N})$.*

Rada: Je zřejmé, že A $\Leftrightarrow$ A$'$; jinak viz Cv. 12.31. $\diamond$

* * *

Označení. Je-li $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost bodů nějakého m. p. X a je-li $x \in X$, píšeme $x \neq x_k \to x$, je-li $x \neq x_k$ pro s. v. k a $x_k \to x$.

Definice. Je-li $M \subset X$, kde X je m.p., říkáme, že $x \in X$ je **hromadný bod** množiny M, existuje-li posloupnost bodů $x_k \in M$, pro niž je $x \neq x_k \to x$. Říkáme, že bod $x \in M$ je **izolovaný bod** množiny M, není-li jejím hromadným bodem. [11])

Množina všech hromadných bodů množiny M se nazývá **derivace** množiny M; značíme ji $\operatorname{der} M$.

Definice. Je-li X m.p., $x \in X$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, nazýváme množinu

$$P(x,\varepsilon) := U(x,\varepsilon) - \{x\} \tag{97}$$

prstencové okolí bodu x o **poloměru** ε; x je jeho **střed**. Je-li ρ metrika v X (pomocí níž byla vytvořena okolí $U(x,\varepsilon)$), je zřejmě

$$P(x,\varepsilon) = \{x' \in X\,;\, 0 < \rho(x',x) < \varepsilon\}\,. \tag{97'}$$

Nezáleží-li na poloměru, značíme prstencová okolí krátce $P(x)$. Okolí $U(x)$ se pro zdůraznění nazývají **kruhová**.

Cvičení 12.39. Dokažte tato tvrzení:

1. *$x \in X$ je hromadný bod množiny $M \subset X$, právě když je množina $M \cap U(x)$ nekonečná pro každé okolí $U(x)$ bodu x.*

2. *$x \in X$ je hromadný bod množiny $M \subset X$, právě když je množina $M \cap P(x)$ nekonečná pro každé okolí $P(x)$ bodu x.*

3. *$x \in X$ je hromadný bod množiny $M \subset X$, právě když je $M \cap P(x) \neq \emptyset$ pro každé okolí $P(x)$ bodu x.*

4. *$x \in M$ je izolovaný bod množiny $M \subset X$, právě když pro každou posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodů z M platí implikace: $x_k \to x \Rightarrow x_k = x$ pro s. v. k.*

Rada k implikaci $3 \Rightarrow 2$: Existuje-li $P(x)$ tak, že $M \cap P(x)$ je neprázdná konečná množina, a jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ všechny její prvky, neobsahuje okolí $P(x,\delta)$, kde $\delta := \min\{\rho(x_k,x)\,;\, 1 \le k \le n\}$, žádný bod množiny M. ◇

Definice. Nechť X je m.p., nechť $M \subset X$, $a \in \operatorname{der} M$, nechť f je zobrazení nějaké množiny tvaru $P(a) \cap M$ do m.p. Y a nechť $A \in Y$; píšeme pak

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} f(x) = A\,, \tag{98}$$

platí-li pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$ implikace

$$a \neq x_k \to a \;\Rightarrow\; f(x_k) \to A\,. \tag{99}$$

Bod $A \in Y$ se pak nazývá **limita zobrazení f v bodě a vzhledem k M**. Je-li $M = X$, píšeme pod znamením limity zpravidla jen „$x \to a$“ a mluvíme krátce o „limitě zobrazení f v bodě a“.

[11]) Všimněme si, že zatímco izolovaný bod množiny M je bodem této množiny, hromadný bod množiny M v M ležet nemusí.

Poznámka 12.6. Limitu vzhledem k M definujeme jen v bodech $a \in \operatorname{der} M$, abychom zajistili její jednoznačnost; pro body $a \in X - \operatorname{der} M$ totiž žádné posloupnosti bodů $x_k \in M$, pro něž by bylo $a \neq x_k \to a$, neexistují, a implikace (99) by byla v důsledku toho pravdivá pro každé A.

Jistě je zřejmé, že platí toto jednoduché, ale užitečné tvrzení:

(100) *Je-li* $N \subset M \subset X$, $a \in \operatorname{der} N$, *je* $\lim_{x\to a,\, x\in N} f(x) = \lim_{x\to a,\, x\in M} f(x)$, *existuje-li limita vpravo.*

Tvrzení (100) se často užívá k důkazu, že limita (98) *neexistuje*; abychom neexistenci limity dokázali, *stačí najít dvě množiny* $N_1 \subset M$, $N_2 \subset M$ *tak, že*

$$a \in \operatorname{der} N_1 \cap \operatorname{der} N_2, \quad \lim_{x\to a,\, x\in N_1} f(x) \neq \lim_{x\to a,\, x\in N_2} f(x).$$

P ř í k l a d . Je-li $f(x) := 1$ v $\mathbb{R}_-$ a $f(x) := 0$ v $\mathbb{R}_+$, nemá funkce f v bodě 0 limitu (vzhledem k $\mathbb{R}$), protože její limita vzhledem k $\mathbb{R}_-$ je rovna 1 a limita vzhledem k $\mathbb{R}_+$ se rovná 0.

Poznámka 12.7. K tomu, abychom dokázali existenci limity na levé straně (98), stačí ověřit, že pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, pro niž je $a \neq x_k \to a$, má posloupnost $\{f(x_k)\}$ příslušných hodnot *nějakou* limitu v Y, protože *pak má každá taková posloupnost stejnou limitu*. Jsou-li totiž $\{x'_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{x''_k\}_{k=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti s uvedenými vlastnostmi, má uvedenou vlastnost i posloupnost $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_k, x''_k, \dots$; podle předpokladu má tedy posloupnost příslušných hodnot jistou limitu $A \in Y$ a posloupnosti $\{f(x'_k)\}$, $\{f(x''_k)\}$ z ní vybrané mají touž limitu A.

Věta 12.12. *Je-li* $a \in M \cap \operatorname{der} M$, *je zobrazení* f *spojité v bodě* a *vzhledem k* M, *právě když je*

$$\lim_{x\to a,\, x\in M} f(x) = f(a). \tag{101}$$

Je-li a *izolovaný bod množiny* M, *je* f *spojité v bodě* a *vzhledem k* M, *právě když je v bodě* a *definováno.*

Věta 12.13. (Věta o limitě superpozice.) *Nechť* X, Y, Z *jsou metrické prostory, nechť* $M \subset X$, $a \in \operatorname{der} M$ *a nechť zobrazení* $f : M \to Y$ *má v bodě* a *vzhledem k* M *limitu* $A \in Y$. *Pak platí:*

1. *Je-li* $A \in \operatorname{der} f(M)$, *má-li zobrazení* $g : f(M) \to Z$ *v bodě* A *vzhledem k* $f(M)$ *limitu* $B \in Z$ *a existuje-li okolí* $P(a) \subset X$ *tak, že* $x \in P(a) \cap M \Rightarrow f(x) \neq A$, *je*

$$\lim_{x\to a,\, x\in M} g(f(x)) = B. \tag{102}$$

2. *Je-li* $N := f(M) \cup \{A\}$ *a je-li zobrazení* $g : N \to Z$ *spojité v bodě* A *vzhledem k* N, *je*

$$\lim_{x\to a,\, x\in M} g(f(x)) = g(A). \tag{103}$$

Cvičení 12.40. Ukažte, že *není-li splněna podmínka* $x \in P(a) \cap M \Rightarrow f(x) \neq A$ *v první části* V.12.14, *nemusí platit* (102), *i když jsou ostatní podmínky splněny.*

Rada: Limity v bodě 0 funkcí $f(x) := x \sin(1/x)$ a $g(x) := 1 - |\operatorname{sgn} x|$ existují, jejich superpozice $g \circ f$ limitu v bodě 0 nemá. ◇

Cvičení 12.41. Dokažte toto tvrzení: *Jsou-li množiny $M \subset X$ a $N \subset X$ buď obě otevřené, nebo obě uzavřené, a je-li zobrazení $f : (M \cup N) \to Y$ spojité v bodě $a \in M \cap N$ vzhledem k M i vzhledem k N, je v bodě a spojité i vzhledem k $M \cup N$.*

Na příkladě pak ukažte, že *podmínka, že množiny M, N jsou buď obě otevřené, nebo obě uzavřené, je podstatná.*

Rada: Jsou-li M, N otevřené množiny, užijte definici spojitosti založenou na okolích; jsou-li uzavřené, užijte raději definici založenou na posloupnostech a uvažte, že když je $x_k \in M \cup N$ pro s.v. k, mohou nastat jen tyto tři případy: 1) $x_k \in M$ pro s.v. k, 2) $x_k \in N$ pro s.v. k, 3) existují dvě nekonečné posloupnosti indexů k'_m a k''_n tak, že skoro každé $k \in \mathbb{N}$ se rovná buď některému k'_m, nebo některému k''_n a že $x_{k'_m} \in M$ pro všechna m, $x_{k''_n} \in N$ pro všechna n.

Uvažte pak, že Dirichletova funkce f (rovná 1 v $\mathbb{Q}$ a 0 v $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) je spojitá v $\mathbb{Q}$ i v $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, ale není spojitá v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$. ◇

Cvičení 12.42. Dokažte, že

(104) *množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, právě když je $M = \bigcup_{k \in K} I_k$, kde K je nějaká spočetná množina a kde I_k jsou disjunktní otevřené intervaly.*

Rada: Definujte v otevřené množině M relaci R tak, že xRy znamená, že existuje interval $J \subset M$ obsahující body x, y. Ukažte, že jde o ekvivalenci a že třídy I_k generované touto ekvivalencí splňují všechny podmínky tvrzení (104). ◇

* * *

Definice. Leží-li množiny M, N v m.p. X, říkáme, že množina $M \subset N$ je **hustá** v N, je-li $N \subset \overline{M}$. Říkáme, že množina M je **řídká** (v X), je-li $\operatorname{int} \overline{M} = \emptyset$. □

Snadno nahlédneme, že platí tato tvrzení:

(105) *$M \subset N$ je hustá v N, právě když je každý bod $x \in N$ buď bodem množiny M, nebo jejím hromadným bodem.*

(106) *$M \subset N$ je hustá v N, právě když každé okolí $U(x)$ každého bodu $x \in N$ protíná M.*

(107) *$M \subset N$ je hustá v N, existuje-li pro každé $x \in N$ posloupnost bodů $x_k \in M$ tak, že $x_k \to x$.*

(108) *Je-li množina M řídká (v X), platí totéž o $\overline{M}$ i o každé množině $M_1 \subset M$.*

Cvičení 12.43. Dokažte tato tvrzení:

1. *V $\mathbb{R}$ je hustá jak množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel, tak i množina $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel. Průnik každé z těchto množin s intervalem (a, b) (kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) je hustý v intervalu $\langle a, b \rangle \cap \mathbb{R}$.*

2. *Je-li každá z množin $X_1, \dots, X_p$ hustá v $\mathbb{R}$, je kartézský součin $X := X_1 \times \dots \times X_p$ hustý v $\mathbb{R}^p$ a pro každou otevřenou množinu $M \subset \mathbb{R}^p$ je množina $X \cap M$ hustá v $\overline{M}$.*

Cvičení 12.44. Dokažte, že *v Hilbertově prostoru ℓ^2 je hustá množina $\mathbb{Q}^\omega$ všech bodů $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, kde $x_k \in \mathbb{Q}$ pro všechna k a $x_k = 0$ pro skoro všechna k.*

Rada: Je-li $y \in \ell^2$, řada $\sum_{k=1}^\infty y_k^2$ konverguje, takže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{k=p+1}^\infty y_k^2 < \varepsilon^2/2$; jsou-li $x_k \in \mathbb{Q}$ zvolena tak, že $(y_k - x_k)^2 < \varepsilon^2/2p$ pro $k = 1, \dots, p$, je vzdálenost bodu $\{x_1, \dots, x_p, 0, 0, 0, \dots\}$ od bodu y menší než ε.

Poznámka 12.8. Slavnou *Weierstrassovu větu* [12]) o stejnoměrné aproximaci spojité funkce polynomy najdeme v literatuře zpravidla v jednom z těchto tvarů:

(109′) *Pro každou funkci f spojitou v $\langle a, b\rangle$ a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje polynom g tak, že $\max\{|f(x) - g(x)|;\ x \in \langle a, b\rangle\} < \varepsilon$.*

(109″) *Pro každou funkci f spojitou v $\langle a, b\rangle$ existuje posloupnost polynomů g_k tak, že $g_k \to f$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$.*

Větu však lze vyslovit i takto:

(109) *Pro každý interval $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ je množina všech polynomů (restringovaných na $\langle a, b\rangle$) hustá v prostoru $C(a, b)$ všech funkcí spojitých v $\langle a, b\rangle$ s maximovou normou.*

Poznámka 12.9. Jednoduchými příklady řídkých podmnožin prostoru $\mathbb{R}$ jsou množiny $\mathbb{Z}$, $\{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $\{1/n + 1/m;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$. V kapitole 19 (Př. 19.2) se seznámíme s daleko složitějšími řídkými množinami, s tzv. *Cantorovým diskontinuem* a dalšími diskontinuy; tyto množiny nemají na rozdíl od uvedených tří množin žádné izolované body a jsou kompaktní a nespočetné.

Řídkost množiny M je definována podmínkou, že *uzávěr množiny M nemá vnitřní body*; podmínka $\operatorname{int} M = \emptyset$ má zcela jiný význam a s řídkostí přímo nesouvisí: Splňuje ji např. množina $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, která není řídká, ale hustá (v $\mathbb{R}$).

Podobně jako množina, která není otevřená, nemusí být uzavřená, nemusí množina, která není řídká, být hustá. (Příklad: Množina $\langle 0, 1\rangle$ není ani řídká, ani hustá v $\mathbb{R}$.) Platí však toto tvrzení:

Věta 12.14. *Uzavřená množina $M \subset X$ je řídká v X, právě když je (otevřená) množina $X - M$ hustá v X.*

* * *

Podprostor metrického prostoru (X, ρ) jsme definovali jako množinu $Y \subset X$ s metrikou $\rho | Y \times Y$. Z toho plyne, že okolí $U_Y(y)$ bodů $y \in Y$ v podprostoru Y mají tvar $U(y) \cap Y$, kde $U(y)$ je okolí bodu y v X. Protože Y je metrický prostor, mají v něm smysl všechny pojmy, které jsme v metrických prostorech zavedli; přenesení těchto pojmů z prostoru X do jeho podprostorů Y se říká *relativizace*.

[12]) Klasický Bernštejnův důkaz této důležité věty najde čtenář např. v [2].

Pracujeme-li současně v prostoru X i v jeho podprostoru Y, mohly by vést k nedorozumění výroky typu „$M \subset Y$ je otevřená množina“, protože není jasné, zdali jde o množinu otevřenou v X, nebo v Y. *V podobných situacích je proto na místě zvýšená přesnost vyjadřování; tam, kde je to možné, vyznačujeme např. indexem (jako jsme to udělali v případě okolí), ke kterému prostoru je daný pojem vztažen.*

Snadno nahlédneme, že platí např. tato tvrzení:

(110) *Množina $M \subset Y$ je otevřená (uzavřená) v Y, právě když má tvar $M^* \cap Y$, kde M^* je množina otevřená (uzavřená) v X.*

(111) *Uzávěr $\overline{M}^Y$ množiny M v Y je roven $\overline{M} \cap Y$ (kde $\overline{M}$ je uzávěr v X).*

Pozor však! *Není pravda, že $\operatorname{int}_Y M = \operatorname{int} M \cap Y$, a není ani pravda, že $\partial_Y M = \partial M \cap Y$.* (Je-li $X = \mathbb{R}$, $M = Y = \mathbb{Q}$, je $\operatorname{int}_Y M = \mathbb{Q}$, $\operatorname{int} M = \emptyset$, $\partial_Y M = \emptyset$, $\partial M = \mathbb{R}$.)

Řešení

12.11. Položíme-li

$$f_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2k^5 x, & \text{je-li } 0 \le x \le \frac{1}{2}k^{-3} \\ 2k^2(1 - k^3 x), & \text{je-li } \frac{1}{2}k^{-3} \le x \le k^{-3} \\ 0, & \text{je-li } k^{-3} \le x \le 1 \end{array} \right\}, \tag{112}$$

je f_k po částech lineární a nezáporná v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, má maximum v bodě $\frac{1}{2}k^{-3}$ rovné k^2 a zřejmě je $f_k \to 0$ bodově v $\langle 0, 1 \rangle$; snadno zjistíme, že $\int_0^1 f_k = 1/2k$ a $\int_0^1 f_k^2 = k/3$.

Obdobné vlastnosti mají nezáporné funkce

$$g_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k^2 \sin(k^3 \pi x), & \text{je-li } 0 \le x \le k^{-3} \\ 0, & \text{je-li } k^{-3} \le x \le 1 \end{array} \right\}; \tag{113}$$

v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ bodově konvergují k 0, každá z funkcí g_k je v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spojitá, má maximum rovné k^2 v bodě $\frac{1}{2}k^{-3}$, $\int_0^1 g_k = 2/k\pi$, $\int_0^1 g_k^2 = \frac{1}{2}k$.

Každá z nezáporných funkcí

$$h_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} k^2 \sin^2(k^3 \pi x), & \text{je-li } 0 \le x \le k^{-3} \\ 0, & \text{je-li } k^{-3} \le x \le 1 \end{array} \right\} \tag{114}$$

má v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ spojitou derivaci, $h_k \to 0$ bodově, $\max h_k = h_k(\frac{1}{2}k^{-3}) = k^2$, $\int_0^1 h_k = 1/2k$, $\int_0^1 h_k^2 = \frac{3}{8}k$.

12.13. $x_k = 1/k$.

12.23. Pro $p = 2$ jsou to kruhy, čtverce o stranách rovnoběžných se souřadnicovými osami a čtverce „postavené na vrchol“; pro $p = 3$ se jedná o koule, o krychle o hranách rovnoběžných se souřadnicovými osami a o osmistěny „postavené na vrchol“.

12.34. Omezený interval (a,b) zobrazuje na omezený interval (c,d) např. (rostoucí) funkce $((d-c)x-(ad-bc))/(b-a)$. Následující tabulka podává příklady funkcí zobrazujících homeomorfně otevřený interval na otevřený interval, přičemž $-\infty < a < b < +\infty$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$:

Zobrazuje se	na (a,b)	na $(A,+\infty)$	na $(-\infty,B)$
(a,b)	x	$\dfrac{x(1-A)+Ab-a}{b-x}$	$\dfrac{x(B+1)-aB-b}{x-a}$
$(A,+\infty)$	$\dfrac{a+b(x-A)}{x+1-A}$	x	$A+B-x$
$(-\infty,B)$	$\dfrac{a(x-B)-b}{x-B-1}$	$A+B-x$	x

Ani když odhlédneme od toho, že koeficienty $\alpha,\dots,\delta$ lze násobit týmž nenulovým číslem, aniž se funkce $f(x)=(\alpha x+\beta)/(\gamma x+\delta)$ změní, neurčují intervaly I, J tyto koeficienty jednoznačně; čtenářovy výsledky proto nemusí souhlasit s výsledky uvedenými v tabulce. Až na $A+B-x$ jsou všechny funkce uvedené v tabulce rostoucí, funkce ležící symetricky vzhledem k diagonále jsou vzájemně inverzní. Klesající funkci $A+B-x$ lze nahradit (složitější) funkcí rostoucí – např. funkcí $(B(x-A)-1)/(x-A)$, která také zobrazuje $(A,+\infty)$ na $(-\infty,B)$; funkci k ní inverzní dostaneme záměnou čísel A, B.

Rostoucími homeomorfními zobrazeními $\mathbb{R}$ na $(-1,1)$ jsou např. funkce

$$\frac{x}{1+|x|}\,, \quad \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\,, \quad \frac{e^x-1}{e^x+1}\,.$$

12.35. V úlohách 1–3 lze funkci $g(r,t)$ volit např. takto:

Ad 1. $g(r,t)=-\lg(1-r)$.

Ad 2. $g(r,t)=r/f(t)$, kde $f(t)$ je v intervalech $\langle -\frac14\pi, \frac14\pi\rangle$, $\langle \frac14\pi, \frac34\pi\rangle$, $\langle \frac34\pi, \frac54\pi\rangle$, $\langle \frac54\pi, \frac74\pi\rangle$ po řadě rovno $\cos t$, $\sin t$, $-\cos t$, $-\sin t$.

Ad 3. $g(r,t)=rab/(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{1/2}$.

13. Posloupnosti a řady funkcí

V kapitole 12 jsme zavedli pojem *stejnoměrné konvergence posloupnosti* zobrazení takto: Je-li X libovolná množina, (Y,σ) metrický prostor a jsou-li f a f_k, kde $k \in \mathbb{N}$, zobrazení množiny X do Y, říkáme, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje v* X *stejnoměrně k* f, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje k_0 tak, že

$$k > k_0\,,\; x \in X \;\Rightarrow\; \sigma(f_k(x), f(x)) < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Víme, že stejnoměrná konvergence se liší od *bodové konvergence v* X (tedy od podmínky, že $f_k(x) \to f(x)$ pro každé $x \in X$) tím, že číslo k_0 nezávisí na $x \in X$, zatímco při bodové konvergenci je obecně na x závislé.

Konvergenci a součet řady funkcí, jejichž hodnoty leží v nějakém n.l.p. Y, jsme zavedli v Po.12.1: *Stejnoměrná konvergence řady* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ se součtem s se definuje jako stejnoměrná konvergence posloupnosti jejích částečných součtů $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ k s, tedy jako platnost výroku: Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje n_0 tak, že

$$n > n_0,\; x \in X \;\Rightarrow\; \|\, s_n(x) - s(x)\,\| = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\,\| < \varepsilon\,. \tag{1'}$$

Je jistě zřejmé, že platí např. toto tvrzení:

(2) *Je-li* $m \in \mathbb{N}$ a $X = \bigcup_{j=1}^{m} X_j$, *konverguje posloupnost nebo řada funkcí v* X *stejnoměrně, právě když konverguje stejnoměrně na každé z množin* X_j.

Příklad 13.1. Pro platnost právě vysloveného tvrzení je podstatné, že jde o sjednocení *konečného počtu* množin, protože *analogické tvrzení pro nekonečnou posloupnost množin neplatí*: Funkce $f_k(x) := x/k$ konvergují v $\mathbb{R}$ (bodově) k nulové funkci, konvergence je stejnoměrná v každém intervalu $X_j := \langle -j, j\rangle$, kde $j \in \mathbb{N}$, ale *není stejnoměrná* v $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$.

Poznámka 13.1. Stejnoměrná konvergence má řadu důsledků, které z bodové konvergence obecně nevyplývají. Platí např. toto velmi důležité tvrzení:

(3) *Jsou-li zobrazení* f_k *spojitá v m.p.* X *a je-li* $f_k \to f$ *stejnoměrně v* X, *je i zobrazení* f *spojité v* X.

Podobně pro řady funkcí, jejichž hodnoty leží v n.l.p.:

(3′) *Jsou-li zobrazení* f_k *spojitá v m.p.* X *a konverguje-li řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *stejnoměrně v* X, *je součet řady spojitý v* X.

Z bodové konvergence spojitých funkcí spojitost limitní funkce ovšem neplyne: Funkce $f_k(x) := x^k$ konvergují bodově v intervalu $\langle 0,1\rangle$ k funkci $f(x)$ rovné 0 v intervalu $\langle 0,1)$ a 1 v bodě 1. $\square$

Řady, jejichž členy mají hodnoty v obecných n. l. p., studuje podrobněji tzv. *funkcionální analýza* – subdisciplína matematické analýzy vzniklá kolem roku 1930. Protože hlavním předmětem zájmu této sbírky příkladů je daleko starší *klasická analýza*, omezíme se v dalším na řady komplexních funkcí.

Úmluva. Nebude-li řečeno výslovně něco jiného (např. že členy řady jsou reálné), budeme „řadou" rozumět *řadu komplexních funkcí*. □

Následující věta ukazuje, že stejnoměrná konvergence značně zjednodušuje opakované limitní přechody.

Věta 13.1. (Věta o záměně limitních přechodů.) *Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť v jistém okolí $P(a)$ konverguje posloupnost funkcí $f_k : P(a) \to \mathbb{R}$ stejnoměrně k funkci $f : P(a) \to \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{x\to a} f_k(x) = A_k \in \mathbb{R}$ pro každé k. Pak existují konečné limity $\lim_{k\to\infty} A_k$, $\lim_{x\to a} f(x)$ a mají touž hodnotu.*

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava resp. zleva v bodech $a < +\infty$ resp. $a > -\infty$; okolí $P(a)$ se v tom případě nahradí okolím $P^+(a)$ resp. $P^-(a)$.

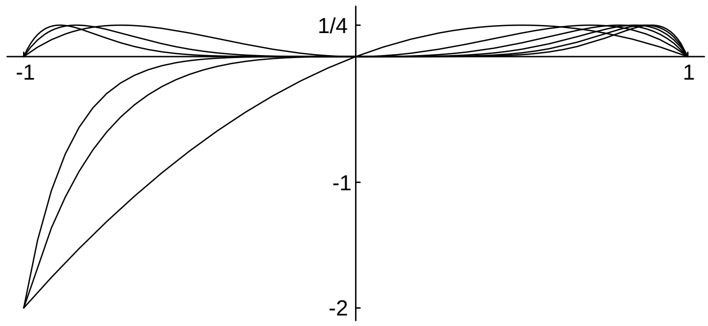
Poznámka 13.2. Název věty souvisí s tím, že její tvrzení lze napsat ve tvaru

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\big(\lim_{x\to a} f_k(x)\big). \tag{4}$$

Pro aplikaci V. 13.1 je podstatné, že se předpokládá jen existence „vnitřních" limit v (4) (a stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$); *existenci (konečných) „vnějších" limit (včetně jejich rovnosti) zaručuje věta sama.*

Věta se dosti často užívá i *k vyvrácení stejnoměrnosti konvergence*: *Pokud existují a jsou konečné obě „vnitřní" limity v (4) a buď některá z dvojnásobných limit (4) neexistuje, nebo není konečná, nebo sice obě existují, ale nejsou stejné, není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná v žádném $P(a)$.* (Podobně „zprava" a „zleva".)

Podobným způsobem lze ovšem využít i tvrzení (3): *Je-li limita f spojitých funkcí f_k nespojitá funkce, není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná.*



K PŘÍKLADU Z PO. 13.2: f_k, $1 \le k \le 6$

P ř í k l a d : Je-li $f_k(x) := x^k - x^{2k}$, je $f_k \to 0$ všude v intervalu $(-1, 1\rangle$, konvergence však není stejnoměrná v žádném $P^+(-1)$, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$A_{2k} := f_{2k}(-1+) = f_{2k}(-1) = 0$, $A_{2k-1} := f_{2k-1}(-1+) = f_{2k-1}(-1) = -2$, takže $\lim A_k$ neexistuje.

K důkazu, že konvergence není stejnoměrná ani v žádném $P^-(1)$, však ani tvrzení (3), ani větu 13.1 užít nelze. (Běžnými metodami vyšetřování průběhu funkce ovšem zjistíme, že $\max f_k(\langle 0, 1\rangle) = f_k(\sqrt[k]{1/2}) = \frac{1}{4}$; protože v každém $P^-(1)$ leží skoro všechna čísla $\sqrt[k]{1/2}$, je konvergence $f_k \to 0$ v každém $P^-(1)$ opravdu nestejnoměrná.) $\square$

Jak víme, je spojitost v bodě a „*lokální vlastnost*“, tj. vlastnost, která nezávisí na tom, jak je funkce definována mimo jakékoli předem dané okolí $U(a)$. Proto lze tvrzení (3) velmi účelně zobecnit, a to tím, že zobecníme pojem stejnoměrné konvergence:

Definice. Říkáme, že **posloupnost** $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ zobrazení m.p. (X, ρ) do m.p. (Y, σ) **konverguje v** X **lokálně stejnoměrně** k zobrazení $f : X \to Y$, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $U(x)$ tak, že $f_k \to f$ stejnoměrně v $U(x)$.

Říkáme, že **řada** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **konverguje lokálně stejnoměrně v** X, má-li tuto vlastnost posloupnost jejích částečných součtů. $\square$

Poznámka 13.3. Obecně je lokálně stejnoměrná konvergence slabší než konvergence stejnoměrná – ukazuje to nahoře uvedený příklad funkcí $f_k(x) = x/k$, které k nulové funkci nekonvergují v $\mathbb{R}$ stejnoměrně, ale lokálně stejnoměrně ano. Z Borelovy věty však snadno plyne platnost tohoto tvrzení:

Věta 13.2. *Konverguje-li posloupnost resp. řada lokálně stejnoměrně v X, je její konvergence stejnoměrná na každé kompaktní množině $K \subset X$.*

Důsledek. *Je-li (X, ρ) kompaktní prostor, je lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti resp. řady v X ekvivalentní s její stejnoměrnou konvergencí v X.*

Hlavní část právě uvedené věty lze v některých prostorech obrátit:

Věta 13.3. *Je-li $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde kompaktní množiny X_n splňují inkluzi $X_n \subset \operatorname{int} X_{n+1}$ pro každé n, konverguje posloupnost resp. řada lokálně stejnoměrně v X, právě když konverguje stejnoměrně na každé kompaktní množině $K \subset X$.*

Dodatek. *Podmínku věty splňují např. všechny eukleidovské prostory, všechny jejich otevřené a uzavřené podprostory, a také všechny intervaly obsažené v $\mathbb{R}$.*

Zobecněním tvrzení (3) a (3′) je tato důležitá věta:

Věta 13.4. *Je-li $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost zobrazení spojitých v m.p. X a je-li $f_k \to f$ lokálně stejnoměrně v X, je i zobrazení f spojité v X.*

Konverguje-li řada funkcí spojitých v X lokálně stejnoměrně v X, je její součet funkce spojitá v X.

Lokálně stejnoměrná konvergence souvisí i s derivováním:

Věta 13.5. (Věta o derivování posloupnosti a řady člen po členu.) *Konverguje-li posloupnost funkcí $f_k : (a, b) \to \mathbb{R}$ aspoň v jednom bodě $c \in (a, b)$ a je-li $f_k' \to g$ lokálně stejnoměrně v (a, b), konverguje i posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ lokálně stejnoměrně v (a, b); označíme-li f její limitu, je $f' = g$ v (a, b).*

Obdobně pro řady: Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ reálných funkcí aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$ a je-li konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ v (a,b) lokálně stejnoměrná, platí totéž i pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, přičemž

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \quad \text{všude v } (a,b). \tag{5}$$

Poznámka 13.4. Pamatujme, že se v první části věty 13.5 nepředpokládá lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, ale lokálně stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{f_k'\}$ (a že obdobně je tomu ve druhé části věty s příslušnými řadami). *Z lokálně stejnoměrné konvergence diferencovatelných funkcí – dokonce ani z jejich stejnoměrné konvergence – neplyne ani bodová konvergence posloupnosti příslušných derivací.* (Příklad: Funkce $\sin k^2x/k$ konvergují k nulové funkci stejnoměrně v $\mathbb{R}$, ale příslušná posloupnost derivací $k\cos k^2x$ nekonverguje nikde.) $\square$

Napíšeme-li v předcházející větě g_k místo f_k' a G_k místo f_k, dostaneme toto ekvivalentní tvrzení:

Věta 13.5'. (Věta o integraci posloupnosti a řady člen po členu.) *Má-li každá z funkcí $g_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $k \in \mathbb{N}$, v (a,b) funkci primitivní, konverguje-li posloupnost $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ v (a,b) lokálně stejnoměrně k funkci g a je-li posloupnost $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ funkcí primitivních k funkcím g_k zvolena tak, aby konvergovala aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$, konverguje posloupnost $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ v (a,b) lokálně stejnoměrně k jisté funkci G, která je funkcí primitivní k funkci g v (a,b).*

Obdobně pro řady: Má-li každá z funkcí $g_k : (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $k \in \mathbb{N}$, v intervalu (a,b) primitivní funkci, konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ v (a,b) lokálně stejnoměrně a jsou-li funkce G_k primitivní v (a,b) k funkcím g_k zvoleny tak, aby řada $\sum_{k=1}^{\infty} G_k$ konvergovala aspoň v jednom bodě $c \in (a,b)$, konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} G_k$ v (a,b) lokálně stejnoměrně a její součet je funkce primitivní v (a,b) k součtu řady $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$.

Slovo „integrace“ není jednoznačné: může znamenat nejen přechod k primitivní funkci, ale i přechod k integrálu. Stejnoměrná konvergence souvisí i s druhým z těchto významů:[1])

Věta 13.6. (Limitní přechod za znamením integrálu.) *Konverguje-li posloupnost spojitých funkcí $f_k : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ stejnoměrně v $\langle a,b\rangle$, je*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k\,. \tag{6}$$

Věta 13.7. (Integrace řady člen po členu – 2. verze.) *Jsou-li $f_k : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ funkce spojité v $\langle a,b\rangle$ a konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ v $\langle a,b\rangle$ stejnoměrně, je*

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k\,. \tag{7}$$

[1]) Ve větách 13.6 a 13.7 se integrují spojité funkce v konečných mezích, a je proto jedno, máme-li na mysli Newtonův, Riemannův nebo např. Lebesgueův integrál.

Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti i řady spojitých funkcí lze někdy dokázat i pomocí této věty:

Věta 13.8. (Diniho věta.) *Nechť X je kompaktní prostor a nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí spojitých v X. Pak platí:*

1. *Je-li posloupnost $\{f_k(x)\}$ pro každé $x \in X$ monotónní a omezená a je-li funkce $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ spojitá v X, je konvergence $f_k \to f$ v X stejnoměrná.*

2. *Jsou-li funkce f_k nezáporné a je-li součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ spojitý v X, konverguje tato řada stejnoměrně v X.*

Příklad 13.2. Posloupnost funkcí $f_k(x) := x^{(k+1)/(2k-1)}$ je v každém bodě $x \in \mathbb{R}_+^0$ monotónní – v bodech 0 a 1 je konstantní, pro $x \in (0,1)$ rostoucí, pro $x > 1$ klesající. Protože všechny funkce f_k jsou v $\mathbb{R}_+^0$ spojité a protože totéž platí i o funkci $f(x) = \lim f_k(x) = \sqrt{x}$, konverguje posloupnost $\{f_k\}$ stejnoměrně v každém kompaktním intervalu $I \subset \mathbb{R}_+^0$; v $\mathbb{R}_+^0$ je tedy tato konvergence lokálně stejnoměrná. Vzhledem k tomu, že $f_k(k^{2k-1}) - f(k^{2k-1}) = k^k(k - 1/\sqrt{k}\,) \to +\infty$ pro $k \to \infty$, posloupnost nekonverguje stejnoměrně v žádném $P(+\infty)$, a tím spíše ne v $\mathbb{R}_+^0$.

* * *

Pro derivování a integrování tzv. **mocninných řad**, tj. řad tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\zeta)^k, \tag{8}$$

kde **koeficienty** a_k a **střed** ζ stejně jako „proměnná“ z jsou komplexní čísla, platí daleko jednodušší pravidla než pro řady obecné.

Základním poznatkem o konvergenci mocninných řad je toto tvrzení:

Lemma 13.1. (Abelovo lemma.) *Konverguje-li mocninná řada* (8) *v některém bodě $z_1 \neq \zeta$, konverguje absolutně pro každé $z \in U(\zeta, |z_1 - \zeta|)$.*

Přímým důsledkem Abelova lemmatu je tato věta:

Věta 13.9. *Pro každou řadu* (8) *existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ tak, že platí:*

(9) $|z-\zeta| < R \Rightarrow$ řada (8) *konverguje absolutně*,

(10) $|z-\zeta| > R \Rightarrow$ řada (8) *diverguje*.

Dodatek. *Je-li $R > 0$, řada* (8) *konverguje v množině $\{z \in \mathbb{C};\, |z-\zeta| < R\}$ lokálně stejnoměrně.* □

Číslo R je vlastnostmi (9) a (10) určeno jednoznačně a nazývá se **poloměr konvergence** řady (8).

Protože nechceme měnit definici okolí $U(\zeta, R)$ (v níž je $R \in \mathbb{R}_+$) a protože poloměr konvergence může být i $+\infty$, zavedeme označení

$$K(\zeta, R) = \left\{ \begin{array}{ll} U(\zeta, R) & \text{pro } R \in \mathbb{R}_+ \\ \mathbb{C} & \text{pro } R = +\infty \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Pro řady (8) s poloměrem konvergence $R > 0$ se množina (11) nazývá **kruh konvergence**; *řady s nulovým poloměrem konvergence kruh konvergence nemají.*

Věta 13.10. (Věta o derivování mocninné řady člen po členu.) *Pro každé* $p \in \mathbb{N}$ *má řada*

$$\sum_{k=p}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-p+1)\,a_k\,(z-\zeta)^{k-p}\,, \tag{12}$$

která vznikla p*-násobným derivováním člen po členu řady* (8), *týž poloměr konvergence* R *jako řada* (8).

Je-li $R > 0$ *a označíme-li* $F(z)$ *součet řady* (8), *je*

$$F^{(p)}(z) = \sum_{k=p}^{\infty} k\,(k-1)\cdots(k-p+1)\,a_k\,(z-\zeta)^{k-p} \text{ pro každé } z \in K(\zeta, R) \tag{13}$$

a pro každé celé číslo $p \geq 0$, *přičemž*

$$a_k = \frac{F^{(k)}(\zeta)}{k!} \text{ pro každé } k \geq 0\,. \tag{14}$$

Důsledek. *Je-li* $R > 0$, *jsou koeficienty* a_k *určeny součtem* $F(z)$ *řady* (8) *jednoznačně. Speciálně: Je-li* $F \equiv 0$ *v jistém* $U(\zeta)$, *jsou všechna* a_k *rovna* 0. [2])

Poznámka 13.5. Derivace v předcházející větě jsou samozřejmě derivacemi „podle komplexní proměnné“. Mocninnou řadu s kladným poloměrem konvergence lze tedy derivovat člen po členu a součet výsledné řady je derivací součtu řady původní. Mocninnou řadu však lze také *integrovat člen po členu*; touto operací dojdeme ke *komplexní primitivní funkci* součtu původní řady, tedy k funkci, jejíž derivace podle komplexní proměnné je rovna tomuto součtu:

Věta 13.11. *Má-li řada* (8) *poloměr konvergence* $R > 0$, *je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-\zeta)^k = \Big(c + \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\frac{(z-\zeta)^{k+1}}{k+1}\Big)' \text{ pro všechna } z \in K(\zeta, R) \tag{15}$$

a pro každou konstantu $c \in \mathbb{C}$.

* * *

Vysvětleme nyní metody, jimiž lze účelně vyšetřovat stejnoměrnou resp. lokálně stejnoměrnou konvergenci v případě, že jde o posloupnost funkcí definovaných na množině $M \subset \mathbb{R}$.

Úmluva. Úloha „*vyšetřit stejnoměrnou konvergenci posloupnosti* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$“ bude znamenat, že máme najít

1. bodovou limitu na maximální množině M, v níž posloupnost konverguje;
2. všechny intervaly, v nichž posloupnost konverguje stejnoměrně;

---

[2]) Poslední tvrzení je analogií známého tvrzení o polynomech: *Je-li* $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \equiv 0$ *např. v nějakém intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *je* $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

3. maximální množinu resp. všechny maximální intervaly, v nichž je konvergence lokálně stejnoměrná;

4. všechny body $a \in \mathbb{R}^*$, pro něž *existuje* (pravé, levé, oboustranné) prstencové okolí, v němž posloupnost konverguje bodově, ale konvergence není stejnoměrná v *žádném* takovém okolí.

V případě *řad* je úkol i postup analogický; vyšetřujeme však zpravidla jen (bodovou, stejnoměrnou, lokálně stejnoměrnou) konvergenci, protože součet lze najít jen výjimečně. $\square$

Vysvětlíme nyní *standardní metodu*, kterou lze při hledání odpovědí na tyto otázky aplikovat v případě posloupnosti:

I. *Najdeme bodovou limitu* f funkcí f_k na maximální množině M, na níž existuje a je konečná; v konkrétních případech to bude zpravidla sjednocení jistých disjunktních intervalů.

II. Protože $f_k \to f$ stejnoměrně v neprázdné množině $X \subset M$, právě když je

$$\sup\{|f_k(x) - f(x)|;\, x \in X\} \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty, \tag{16}$$

je většinou účelné vytvořit funkce

$$g_k := f_k - f \tag{17}$$

a vyšetřit jejich průběh.[3]) *Posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje v* $X \neq \emptyset$ *stejnoměrně k funkci* f, *právě když je*

$$\sup\{|g_k(x)|;\, x \in X\} \to 0 \quad \textit{pro} \quad k \to \infty. \tag{16'}$$

Vzhledem k tomu, že

$$Y \subset \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \sup\{|y|;\, y \in Y\} = \max(\sup Y, -\inf Y),$$

můžeme místo suprem (16′) hledat čísla

$$\inf\{g_k(x);\, x \in X\} \quad \text{a} \quad \sup\{g_k(x);\, x \in X\}; \tag{16''}$$

konvergence $f_k \to f$ *je stejnoměrná v* $X \neq \emptyset$, *právě když obě posloupnosti čísel* (16″) *konvergují k nule*.

Stává se, že hledání přesných hodnot infim a suprem (16″) je obtížné; může to být někdy i zbytečné, protože podaří-li se nám najít *odhady*

$$A_k \le g_k(x) \le B_k \;\text{ pro všechna }\; x \in X, \tag{18}$$

pro něž je $A_k \to 0$, $B_k \to 0$, je platnost (16) zaručena.

[3]) K tomu je samozřejmě třeba dobře ovládat příslušné metody – vyložili jsme je v kapitole 7 Úvodu.

Poznamenejme, že podmínka (16′) je geometricky velmi názorná: *Je splněna, právě když vodorovný pás*

$$Z(\varepsilon) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ -\varepsilon < y < \varepsilon\}$$

obsahuje pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *grafy skoro všech funkcí* g_k. Obráceně tedy: *Existuje-li pás* $Z(\varepsilon)$ *tak, že graf funkce* g_k *v něm není obsažen pro nekonečně mnoho indexů* k*, není konvergence* $g_k \to 0$ *stejnoměrná v* X.

III. Po nalezení všech intervalů, v nichž je konvergence stejnoměrná, užijeme V.13.3, podle níž *je konvergence lokálně stejnoměrná v intervalu* I*, právě když je stejnoměrná na každém kompaktním intervalu* $J \subset I$.

IV. *Existuje-li* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *a posloupnost bodů* $a_k \in M$ *tak, že* $a \neq a_k \to a$ *a že nerovnost* $|g_k(a_k)| \geq \varepsilon$ *platí pro nekonečně mnoho indexů* k*, není konvergence* $f_k \to f$ *stejnoměrná v žádném* $P(a)$.

Jak jsme však již řekli v Po.13.2, lze k nalezení bodů $a \in \overline{M}$, v jejichž žádném okolí $P(a)$ není konvergence $f_k \to f$ stejnoměrná, užít i tvrzení (3) a V.13.1.

Podobná tvrzení platí samozřejmě i pro okolí $P^+(a)$ a $P^-(a)$.

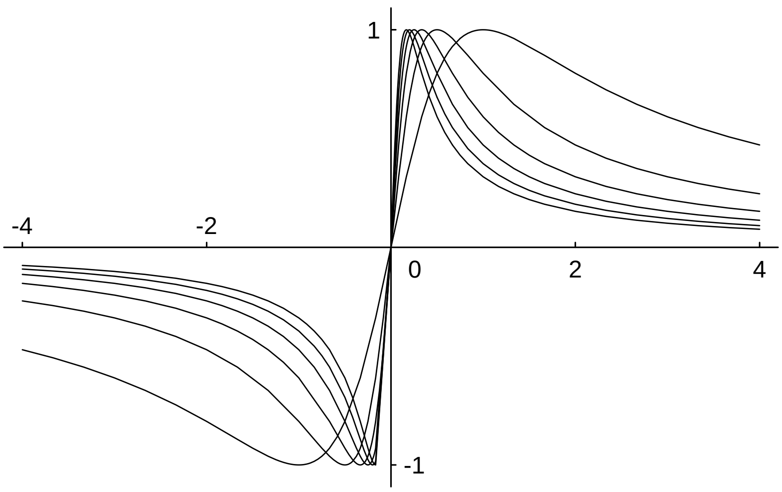
Příklad 13.3. Je-li

$$f_k(x) := \frac{2kx}{1+k^2x^2} \tag{19}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je zřejmě $f_k \to 0$ všude v $\mathbb{R}$. Všude v $\mathbb{R}$ existuje také derivace

$$f_k'(x) = \frac{2k(1-k^2x^2)}{(1+k^2x^2)^2}\,; \tag{20}$$

je rovna 0, právě když je $x = \pm 1/k$.



K Př.13.3: f_k, $1 \leq k \leq 6$

Protože $f_k(\pm\infty\mp) = f_k(0) = 0$, $f_k(\pm 1/k) = \pm 1$, nabývá funkce f_k v bodě $-1/k$ svého minima rovného -1 a v bodě $1/k$ svého maxima rovného 1 (viz V.8.2). Odtud plyne, že $\sup\{|f_k(x)|;\ x \in \mathbb{R}\} = 1$, což pro $k \to \infty$ nekonverguje k nule; *konvergence v* $\mathbb{R}$ *není stejnoměrná.*

Protože body $1/k$ resp. $-1/k$ konvergují zprava resp. zleva k nule, *není konvergence* $f_k \to 0$ *stejnoměrná v žádném* $P^+(0)$ *a v žádném* $P^-(0)$. Je-li však $\delta \in \mathbb{R}_+$, je funkce f_k pro všechna $k > 1/\delta$ klesající v intervalu $\langle \delta, +\infty)$ i v intervalu $(-\infty, -\delta\rangle$, takže v prvním z těchto intervalů je $f_k(\delta) \ge f_k(x) > 0$, ve druhém $0 > f_k(x) \ge f_k(-\delta)$. Protože $f_k(\delta) \to 0$, $f_k(-\delta) \to 0$, je z toho patrné, že $f_k \to 0$ stejnoměrně v obou těchto intervalech.

Shrneme-li výsledky, vidíme, že *konvergence* $f_k \to 0$ *je stejnoměrná v intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *právě když je* $0 \notin \overline{I}$; *konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$. [4])

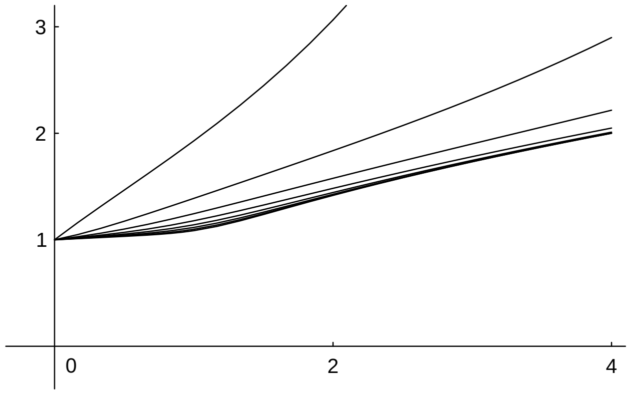
Příklad 13.4. Vyšetřme stejnoměrnou konvergenci funkcí

$$f_k(x) := \sqrt[2k]{x^k + e^x} \quad \text{v intervalu } \langle 0, +\infty). \tag{21}$$

Spolu s výpočtem bodové limity dokážeme pomocí vhodných odhadů něco i o stejnoměrné konvergenci: Je-li $0 \le x \le 1$, je

$$1 \le f_k(x) \le \sqrt[2k]{1+e} \to 1 \ \text{ pro } \ k \to \infty; \tag{22}$$

z toho je patrné, že *v intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *je konvergence* $f_k \to 1$ *stejnoměrná.*



K Př. 13.4: f_k, $1 \le k \le 8$

Pro každé (pevné) $x \in (1, +\infty)$ je $\lim_{k\to\infty} x^k = +\infty$, a v důsledku toho platí nerovnost $x^k > e^x$ pro všechna dost velká k (konkrétně: pro všechna $k > x/\lg x$); z toho plyne, že pro taková k je

$$\sqrt{x} \le f_k(x) = \sqrt[2k]{x^k + e^x} \le \sqrt[2k]{2x^k} = \sqrt[2k]{2}\,\sqrt{x}. \tag{23}$$

Protože $\sqrt[2k]{2} \to 1$ pro $k \to \infty$, je zřejmé, že v intervalu $(1, +\infty)$ je $f_k(x) \to \sqrt{x}$.

[4]) Všimněme si, že z lokálně stejnoměrné konvergence v $\mathbb{R} - \{0\}$ a z konvergence v bodě 0 *neplyne* lokálně stejnoměrná konvergence v $\mathbb{R}$.

Položíme-li $g_k(x) = f_k(x) - \sqrt{x}$, bude

$$0 \le g_k(x) = \frac{(x^k + e^x) - x^k}{(f_k(x))^{2k-1} + (f_k(x))^{2k-2}\sqrt{x} + \ldots + (\sqrt{x}\,)^{2k-1}} \le \frac{e^x}{2k}\,, \tag{24}$$

protože každý z $2k$ výrazů ve jmenovateli je větší než 1. Je-li tedy $b \in (1, +\infty)$ a $x \in (1, b)$, je $0 \le g_k(x) \le e^b/2k$, což pro $k \to \infty$ konverguje k 0. Tím je dokázána *stejnoměrná konvergence* $f_k(x) \to \sqrt{x}$ *v každém omezeném intervalu* $(1, b)$.

Protože $g_k(x) \ge \sqrt[2k]{e^x} - \sqrt{x} \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ a každé k, *je konvergence nestejnoměrná v každém* $P(+\infty)$. [5])

<ins>Résumé</ins>. *Je-li* $I \subset \langle 0, +\infty)$, *konverguje posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *stejnoměrně v* I, *právě když je interval* I (*shora*) *omezený; funkce* $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ *je přitom rovna* 1 *v intervalu* $\langle 0, 1\rangle$ *a* $\sqrt{x}$ *v intervalu* $\langle 1, +\infty)$. *Konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\langle 0, +\infty)$.

Příklad 13.5. Je-li

$$f_k(x) := \frac{x}{k} \lg \frac{x}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}_+\,, \tag{25}$$

je $f_k(x) \to 0$ pro $k \to \infty$ a všechna $x \in \mathbb{R}_+$ a také $f_k(x) \to 0$ pro $x \to 0+$ a každé $k \in \mathbb{N}$. Protože derivace

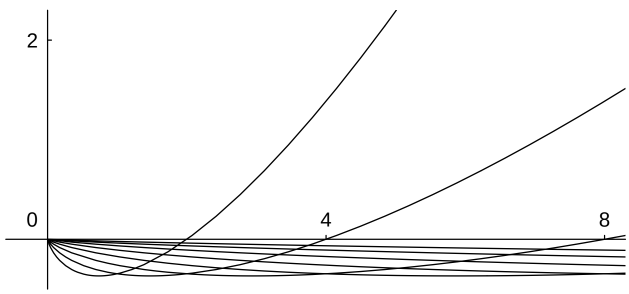
$$f_k'(x) = \frac{1}{k}\Bigl(1 + \lg \frac{x}{k}\Bigr) \tag{26}$$

je rovna 0, právě když je $x = x_k := k/e$, a protože $f_k(x_k) = -1/e$, funkce f_k klesá v intervalu $(0, k/e\rangle$.

Je-li $a \in \mathbb{R}_+$, klesá funkce f_k v intervalu $(0, a\rangle$ pro všechna $k > ae$, takže pro tato k platí odhad

$$0 > f_k(x) \ge f_k(a) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (0, a\rangle\,.$$

Protože $f_k(a) \to 0$ pro $k \to \infty$, plyne z toho, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně v každém intervalu* $(0, a\rangle$, *kde* $a \in \mathbb{R}_+$, *a tedy obecněji i v každém omezeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}_+$.



K PŘ. 13.5 : f_{2^k}, $0 \le k \le 8$

[5]) Z obrázku by to bylo patrné, kdybychom interval $\langle 0, 4\rangle$ nahradili např. intervalem $\langle 0, 20\rangle$.

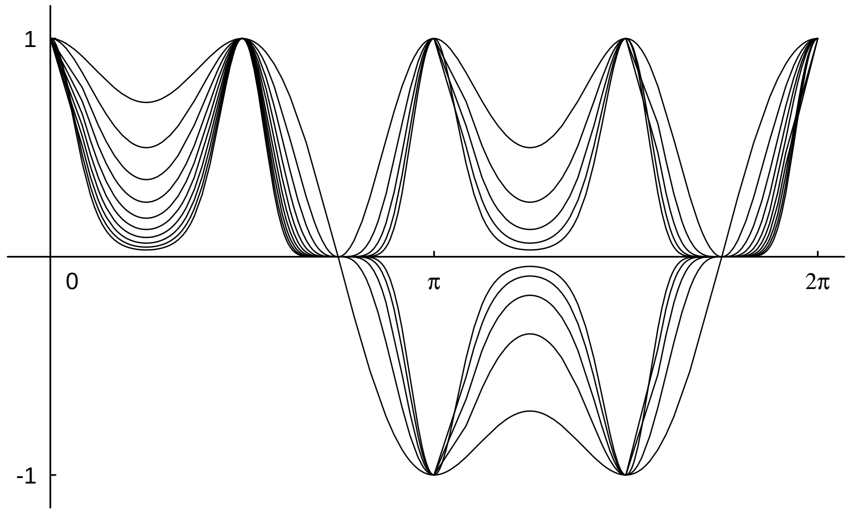
Obráceně, není-li interval $I \subset \mathbb{R}_+$ omezený, leží body x_k v I pro s. v. k, a protože $\lim_{k\to\infty} f_k \equiv 0$ v $\mathbb{R}_+$, zatímco $f_k(x_k) = -1/e$, *konvergence v I stejnoměrná není.*

Shrneme-li, vidíme, že *posloupnost* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *konverguje v intervalu* $I \subset \mathbb{R}_+$ *stejnoměrně, právě když je tento interval omezený.* [6]) *V* $\mathbb{R}_+$ *je konvergence lokálně stejnoměrná.*

Příklad 13.6. Nechť

$$f_k(x) := (g(x))^k\,, \text{ kde } g(x) := \sin^3 x + \cos^3 x \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}\,; \tag{27}$$

protože tyto funkce jsou 2π-periodické, vyšetříme posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ v $\mathbb{R}$ nejdříve v intervalu $I := \langle 0, 2\pi\rangle$.



K Př. 13.6 : f_k, $1 \le k \le 10$

Derivace

$$g'(x) = 3\sin x \cos x\,(\sin x - \cos x) \tag{28}$$

existuje všude v $\mathbb{R}$ a v I se rovná 0, právě když je x rovno některému z čísel 0, $\frac14\pi$, $\frac12\pi$, π, $\frac54\pi$, $\frac32\pi$, 2π, přičemž hodnoty funkce g v těchto bodech jsou po řadě 1, $\frac12\sqrt2$, 1, -1, $-\frac12\sqrt2$, -1, 1. V intervalu I nabývá tedy funkce g svého maxima rovného 1 v bodech 0, $\frac12\pi$, 2π a minima rovného -1 v bodech π, $\frac32\pi$; v ostatních bodech $x \in I$ je $|g(x)| < 1$.

Z toho ihned plyne, že

[6]) Při takovéto formulaci výsledku již není třeba *explicite* dodávat, že konvergence není stejnoměrná v žádném $P(+\infty)$.

a) *posloupnost* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *nemá limitu v bodech* $x = \pi$ *a* $x = \frac{3}{2}\pi$ *a má limitu* 1 *v bodech* $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = 2\pi$; *v ostatních bodech* $x \in I$ *je limita rovna* 0 ;

b) *v žádném levém ani pravém (prstencovém) okolí bodů* 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π *není konvergence stejnoměrná* ;

c) *pro každé* $\delta \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ *existuje* $q \in (0,1)$ *tak, že* $|g(x)| < q$ *všude v množině*

$$I - (U(0,\delta) \cup U(\tfrac{1}{2}\pi,\delta) \cup U(\pi,\delta) \cup U(\tfrac{3}{2}\pi,\delta) \cup U(2\pi,\delta))\,; \tag{29}$$

z toho plyne, že v této množině je $|f_k| < q^k \to 0$, *takže konvergence* $f_k \to 0$ *je tam stejnoměrná.*

Úplná informace o bodové, stejnoměrné a nestejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}$ plyne z uvedených výsledků a z periodicity funkcí f_k:

A) $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *konverguje, právě když je* $\pi \not\equiv x \not\equiv \frac{3}{2}\pi \mod 2\pi$;

B) *v žádném levém ani pravém (prstencovém) okolí bodů* $x \equiv 0 \mod \frac{1}{2}\pi$ *není konvergence stejnoměrná* ;

C) *pro každé* $\delta \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ *existuje* $q \in (0,1)$ *tak, že* $|g(x)| < q$ *všude v množině*

$$\mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U(\tfrac{1}{2}k\pi, \delta)\,; \tag{29'}$$

v této množině je konvergence $f_k \to 0$ *stejnoměrná; konvergence je lokálně stejnoměrná v každém intervalu tvaru* $(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$, *tedy na množině* $\mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{1}{2}k\pi\}$.

* * *

V důkazech vět o stejnoměrné a lokálně stejnoměrné konvergenci řad komplexních funkcí hraje podstatnou roli příslušná **Bolzano–Cauchyho podmínka**: [7])

(30) *Pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* n_0 *tak, že* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$, $x \in X \Rightarrow$
$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$.

Věta 13.12. (Bolzano–Cauchyho kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně v* X, *právě když platí podmínka* (30).

Důsledek. *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje stejnoměrně v* X. *Pak je* $f_k \to 0$ *stejnoměrně v* X *a pro každou funkci* g *omezenou v* X *konverguje i řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g$ *stejnoměrně v* X.

Uveďme některá další kritéria stejnoměrné konvergence:

Věta 13.13. (Srovnávací kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Platí-li nerovnost* $|f_k(x)| \le g_k(x)$ *pro všechna* $x \in X$ *a všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a konverguje-li řada* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ *stejnoměrně v* X, *platí totéž o řadách*

[7]) BC podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady je přímým důsledkem BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti, která zde není uvedena, protože ji (na rozdíl od podmínky pro řady) nebudeme nikde potřebovat. Čtenář ji jistě bude umět zkonstruovat sám; správnost svého výsledku pak může ověřit např. v [12] nebo v [27] (2. díl).

(31) $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k\,|\,.$$

S p e c i á l n ě : *Je-li* $|\,f_k(x)\,| \le c_k \in \mathbb{R}$ *pro všechna* $x \in X$ *a všechna* $k \in \mathbb{N}$ *a je-li* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *konvergentní řada, konvergují obě řady* (31) *stejnoměrně v* X.

Poznámka 13.6. Je-li $|\,f_k\,| \le g_k$ (resp. $|\,f_k\,| \le c_k \in \mathbb{R}$) v X pro všechna $k \in \mathbb{N}$, říkáme, že $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ (resp. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$) je **majorantní řada** (stručněji: **majoranta**) řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (v X). $\square$

Srovnávací kritérium lze formulovat i jako *nutnou a postačující podmínku*:

Věta 13.13'. (Symetrická verze srovnávacího kritéria stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť* $f_k : X \to \mathbb{C}$, $g_k : X \to \mathbb{C}$ *pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a nechť existují konstanty* K_1, K_2 *tak, že je*

(32) $$0 < K_1 \le \left|\frac{f_k(x)}{g_k(x)}\right| \le K_2 < +\infty \quad \text{pro všechna } x \in X \text{ a všechna } k \in \mathbb{N}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k\,|$ *konverguje stejnoměrně v* X, *právě když má tuto vlastnost řada* $\sum_{k=1}^{\infty} |\,g_k\,|$. $\square$

I když se srovnávací kritérium užívá ke zjištění stejnoměrné konvergence dosti často, je z jeho znění patrné, že je „dosti hrubé“ – nelze je užít např. v situacích, kdy první z řad (31) konverguje stejnoměrně, druhá ne. Následující tři věty jsou *jemnějšími kritérii* stejnoměrné konvergence.

Věta 13.14. (Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť posloupnosti funkcí* $f_k : X \to \mathbb{C}$, $g_k : X \to \mathbb{R}$ *splňují tyto podmínky:*

(33′) $$\text{Pro každé } x \in X \text{ je } \; g_1(x) \ge g_2(x) \ge \ldots \ge g_k(x) \ge \ldots \ge 0\,,$$

(33″) $$g_k \to 0 \;\text{ stejnoměrně v }\; X$$

a existuje $K \in \mathbb{R}_+$ *tak, že*

(34) $$\Big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big| \le K \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a všechna } x \in X\,.$$

Pak řada

(35) $$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\, g_k(x)$$

konverguje stejnoměrně v X.

Věta 13.15. (Abelovo kritérium stejnoměrné konvergence řady.) *Pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *nechť je* $f_k : X \to \mathbb{C}$ *a* $g_k : X \to \mathbb{R}$, *přičemž nechť*

(36′) $$\text{posloupnost } \{g_k(x)\} \text{ je pro každé } x \in X \text{ monotónní}$$

a nechť existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že

$$(36'') \qquad x \in X\,,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow |g_k(x)| \le K\,.$$

Konverguje-li řada

$$(37) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

stejnoměrně v X, konverguje v X stejnoměrně i řada (35).

Věta 13.15'. (Symetrická verze Abelova kritéria stejnoměrné konvergence řady.) *Nechť $f_k : X \to \mathbb{C}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nechť posloupnosti funkcí $g_k : X \to \mathbb{R}$ a $h_k : X \to \mathbb{R}$ splňují tyto podmínky:*

$$(38') \qquad \text{posloupnost } \left\{\frac{g_k(x)}{h_k(x)}\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ je pro každé } x \in X \text{ monotónní}$$

a existují čísla K_1, K_2 tak, že

$$(38'') \qquad x \in X\,,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < K_1 \le \frac{g_k(x)}{h_k(x)} \le K_2 < +\infty\,.$$

Pak řada (35) *konverguje stejnoměrně v X, právě když tam stejnoměrně konverguje řada*

$$(35') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) h_k(x)\,.$$

Definice. Jsou-li A a X množiny a je-li $f_\alpha : X \to \mathbb{C}$ pro každé $\alpha \in A$, říkáme, že funkce f_α, $\alpha \in A$, jsou **stejně omezené v** X, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že nerovnost $|f_\alpha(x)| \le K$ platí pro všechna $x \in X$ a všechna $\alpha \in A$.

Poznámka 13.7. Ve V. 13.14 (resp. V. 13.15) tedy předpokládáme stejnou omezenost v X částečných součtů $\sum_{k=1}^{n} f_k$ řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (resp. funkcí g_k). Podmínku (38″) věty 13.14* bychom mohli popsat jako „stejnou omezenost funkcí g_k/h_k zdola i shora kladnými konstantami“. $\square$

Podobně jako je tomu u číselných řad, užívá se Abelovo kritérium (a to hlavně jeho symetrická verze) ke zjednodušení členů řad, zatímco Dirichletovo kritérium se aplikuje zpravidla až na řadu dostatečně zjednodušenou.

Příklad 13.7. Pro každé $\alpha > 1$ konverguje podle V. 13.13 jak řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k!\,x)}{k^\alpha}\,,$$

tak i řada příslušných absolutních hodnot stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$; její majorantou je konvergentní číselná řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$.

Příklad 13.8. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad \text{kde} \quad f_k(x) := x^k e^{-kx} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_-$, konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}_+^0$. Protože pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $f_k'(x) = kx^{k-1}(1-x)$, protože se tato derivace v $\mathbb{R}_+$ rovná 0, právě když je $x = 1$, a protože $f_k(0) = f_k(+\infty-) = 0$, $f_k(1) = e^{-k}$, nabývá nezáporná funkce $f_k\,|\,\mathbb{R}_+^0$ v bodě 1 svého maxima. (Sr. s V.8.2.)

Konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ je tedy majorantou v $\mathbb{R}_+^0$ řady (39), která tam proto podle srovnávacího kritéria konverguje stejnoměrně.

Příklad 13.9°. Porovnejme stejnoměrnost konvergence řad o členech

$$f_k(x) := \frac{x}{1+k^2x^2} \quad \text{a} \quad g_k(x) := \frac{x^2}{1+k^2x^2}\,, \tag{40}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$. Obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0)$ jsou nulové, tedy konvergentní; je-li $x \neq 0$, je

$$|\,f_k(x)\,| \le \frac{|\,x\,|}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2|\,x\,|} \quad \text{a} \quad 0 \le g_k(x) \le \frac{x^2}{k^2x^2} \le \frac{1}{k^2}\,. \tag{41}$$

Z toho plyne, že

$$\textit{řada} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \;\; \textit{konverguje v } \mathbb{R} \textit{ bodově, řada} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \;\; \textit{stejnoměrně.} \tag{42}$$

Z prvního odhadu je zároveň patrné, že $|\,x\,| \ge \delta > 0 \Rightarrow |\,f_k(x)\,| \le 1/k^2\delta$, takže (podle V.13.13)

$$\textit{řada} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \;\; \textit{konverguje stejnoměrně v } \mathbb{R} - U(0,\delta) \textit{ pro každé } \delta \in \mathbb{R}_+\,. \tag{42}$$

Ukažme, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \;\; \textit{nekonverguje stejnoměrně v žádném } P^+(0) \textit{ a v žádném } P^-(0)\,; \tag{43}$$

vzhledem k lichosti funkcí f_k stačí nestejnoměrnost konvergence dokázat jen pro intervaly tvaru $(0,\delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$. K tomu stačí ověřit *neplatnost* příslušné BC podmínky, tj. *platnost* její negace, která zní:

(44) *Existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$, $p \in \mathbb{N}$ *a* $x \in (0,\delta)$ *tak, že* $|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\,| \ge \varepsilon$.

V našem případě však platí dokonce toto silnější a konkrétnější tvrzení:

$$(45) \qquad n > \frac{1}{2\delta} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2n} \in (0, \delta)\,, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) \ge \frac{1}{4}\,.$$

Z nerovnosti $k \le 2n$ totiž plyne, že $k/2n \le 1$, takže $1 + (k/2n)^2 \le 2$ a

$$f_k\Big(\frac{1}{2n}\Big) = \frac{1}{2n\,(1 + (k/2n)^2)} \ge \frac{1}{4n}\,.$$

<u>Résumé</u>. Přes podobnost funkcí (40) se obory stejnoměrné konvergence příslušných řad podstatně liší: *Druhá řada konverguje stejnoměrně v* $\mathbb{R}$, *první konverguje stejnoměrně v intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *právě když není* $0 \in \overline{I}$, *takže její konvergence je lokálně stejnoměrná v* $\mathbb{R} - \{0\}$ *a nestejnoměrná v každém* $P^+(0)$ *i v každém* $P^-(0)$.

Podstatný rozdíl v chování obou řad způsobil faktor x, kterým se $g_k(x)$ liší od $f_k(x)$ a který podstatně zmenšil hodnoty funkcí $g_k(x)$ v blízkosti počátku.

Poznámka 13.8. Jsou-li splněny předpoklady srovnávacího kritéria (V.13.13), konvergují obě řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k\,|$ stejnoměrně; někdy se v takové situaci říká, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje **absolutně stejnoměrně**. Poznamenejme, že v tvrzení V.13.13 by stačilo uvést, že stejnoměrně konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k\,|$, protože stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ pak již zaručuje BC kritérium.

Stejnoměrně konvergující řadu, pro niž řada příslušných absolutních hodnot diverguje, lze sestrojit velmi snadno. Čtenář, který by nebyl spokojen s neabsolutně konvergentní řadou o členech $f_k := (-1)^k/k$ (ačkoli je to zcela právoplatný příklad, protože konvergentní řady s konstantními členy nejsou „zakázány“ a konvergují samozřejmě stejnoměrně), může vyšetřit např. řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k(x)\,, \quad \text{kde } g_k(x) := \frac{\operatorname{arctg}(1 + k^2x^2)}{k}\,,$$

která podle Abelova kritéria konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$, zatímco řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ příslušných absolutních hodnot všude v $\mathbb{R}$ diverguje, protože pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $g_k(x) \ge g_k(0) \ge \pi/4k$.

Může se však stát, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ na nějaké množině X *konverguje absolutně i stejnoměrně*, *nikoli však absolutně stejnoměrně*; ukazuje to tento příklad:

Buďte f_k funkce z Př. 13.9, položme

$$(46) \qquad h_{2k-1} := f_k\,, \quad h_{2k} := -f_k \;\text{ pro každé }\; k \in \mathbb{N}$$

a s_n resp. σ_n nechť je n-tý částečný součet řady $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} |\,h_k\,|$. Je zřejmé, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak

$$(47) \qquad s_{2n-1}(x) = f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}\,, \quad s_{2n} \equiv 0\,,$$

a protože nerovnosti $|\,f_n(x)\,| \le f_n(1/n) \le 1/2n$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$, je $s_n \to 0$ stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sigma_{2n-1} = 2\sum_{k=1}^{n-1} |\, f_k \,| + |\, f_n \,| \,, \quad \sigma_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} |\, f_k \,| \,,$$

konverguje (podle toho, co jsme dokázali v Př. 13.9) řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, h_k \,|$ všude v $\mathbb{R}$, ale konvergence není stejnoměrná v žádném $P^+(0)$ a v žádném $P^-(0)$.

Příklad 13.10. Pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}_+$ položme

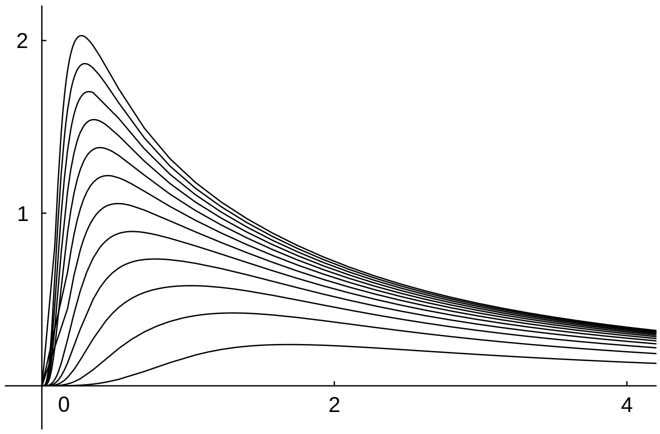
$$\lambda_k(x) := \arcsin^\alpha \frac{kx}{k^2x^2+1} \,, \quad \mu_k(x) := \lg^\beta\Bigl(1 + \frac{1}{k^2x^2}\Bigr), \quad f_k(x) := \frac{\lambda_k(x)}{\mu_k(x)} \tag{48}$$

a vyšetřme, jak je to se stejnoměrnou konvergencí řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ v $\mathbb{R}_+$.

Je-li $x \in \mathbb{R}_+$ (pevně zvoleno), je

$$\arcsin^\alpha \frac{kx}{k^2x^2+1} \asymp \frac{1}{k^\alpha} \,, \quad \lg^\beta\Bigl(1 + \frac{1}{k^2x^2}\Bigr) \asymp \frac{1}{k^{2\beta}} \,, \quad \text{tedy} \ \ f_k(x) \asymp \frac{1}{k^{\alpha-2\beta}} \tag{49}$$

pro $k \to \infty$; podle 3. části V. 11.5 *řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje bodově v $\mathbb{R}_+$, právě když je $\alpha - 2\beta > 1$.*



K Př. 13.10 : $\sum_{k=1}^{n} f_k$, $\alpha = \frac{10}{3}$, $\beta = 1$, $1 \le n \le 12$

Protože $\lambda_k(1/k) = \arcsin^\alpha \frac{1}{2} = (\frac{1}{6}\pi)^\alpha$ a $\mu_k(1/k) = \lg^\beta 2$, není $f_k \to 0$ stejnoměrně v žádném $P^+(0)$, takže ani *řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ tam nekonverguje stejnoměrně.* (Sr. s V. 13.12.)

Je-li $\alpha - 2\beta \le 1$, nekonverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ ani bodově; předpokládejme proto obrácenou nerovnost $\alpha - 2\beta > 1$ a dokažme, že *řada konverguje v každém intervalu $I(\delta) := \langle \delta, +\infty)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$, stejnoměrně.* Důkaz provedeme v několika krocích, v nichž budeme funkce λ_k a μ_k postupně zjednodušovat.

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je

$$\arcsin \frac{kx}{k^2x^2+1} = \frac{\arcsin(\varphi(kx))}{\varphi(kx)}\, \psi(kx)\, \frac{1}{kx}\,, \tag{50'}$$

kde

$$\varphi(x) := \frac{x}{x^2+1}\,, \quad \psi(x) := \frac{x^2}{x^2+1}\,,$$

a snadno se ověří platnost těchto tvrzení:

1a. $\varphi(0+) = \varphi(+\infty-) = 0$, $\varphi'(x) \neq 0$, je-li $1 \neq x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(1) = \frac{1}{2}$; v důsledku toho φ roste v $(0, \frac{1}{2}\rangle$, klesá v $\langle \frac{1}{2}, +\infty)$ a $\varphi(\mathbb{R}_+) \subset (0, \frac{1}{2}\rangle$. (Sr. s V.8.2.)

1b. Funkce $\nu(y) := (\arcsin y)/y$ v intervalu $(0,1\rangle$ roste (sr. s Př. 7.6), takže pro každé y z intervalu $(0, \frac{1}{2}\rangle$ je $1 = \nu(0+) < \nu(y) \leq \nu(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}\pi$. Všechny hodnoty prvního zlomku na pravé straně (50′) leží tedy mezi čísly 1 a $\frac{1}{3}\pi$.

1c. Funkce ψ v $\mathbb{R}_+$ roste a v $+\infty$ má limitu 1; v důsledku toho je $\psi(\delta) \leq \psi(x) < 1$ pro všechna $x \geq \delta$. Je-li $x \geq \delta$, je tím spíše $kx \geq \delta$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, takže všechny hodnoty funkce $\psi(kx)$ leží také mezi čísly $\psi(\delta) > 0$ a 1.

1d. Z tvrzení 1a−1c plyne, že pro všechna $x \in I(\delta)$ a $k \in \mathbb{N}$ leží hodnoty funkce $\nu(\varphi(kx))\,\psi(kx)$ mezi $\psi(\delta)$ a $\frac{1}{3}\pi$; protože všechny mocniny Id^α jsou monotónní, leží všechny hodnoty funkce $(\nu(\varphi(kx))\,\psi(kx))^\alpha$, která je podílem funkcí $\lambda_k(x)$ a $1/(kx)^\alpha$, mezi čísly $(\psi(\delta))^\alpha$ a $(\frac{1}{3}\pi)^\alpha$. Podle V.13.13′ konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ v $I(\delta)$ stejnoměrně, právě když to platí o řadě s členy $1/((kx)^\alpha \mu_k(x))$.

2. Pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ je

$$\lg\Big(1 + \frac{1}{k^2x^2}\Big) = \omega(k^2x^2)\, \frac{1}{k^2x^2}\,, \quad \text{kde } \ \omega(x) := x \lg\Big(1 + \frac{1}{x}\Big), \tag{50''}$$

přičemž

$$\omega'(x) = \lg\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{1+x}\,, \quad \omega''(x) = -\frac{1}{x\,(1+x)^2}\,.$$

Z nerovnosti $\omega'' < 0$ v $\mathbb{R}_+$ plyne, že funkce ω' tam klesá; protože $\omega'(+\infty-) = 0$, je $\omega' > 0$ v $\mathbb{R}_+$, takže ω tam roste a totéž platí o funkci $\omega \circ \mathrm{Id}^2$. Je-li tedy $x \geq \delta$, je $\omega(x^2) \geq \omega(\delta^2)$; protože $\omega(+\infty-) = 1$, je navíc $\omega(x^2) < 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Je-li $x \geq \delta$, je $kx \geq \delta$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, takže $\omega(\delta^2) \leq \omega(k^2x^2) \leq 1$; protože každá mocnina Id^β je monotónní, leží pak všechny hodnoty funkce $(\omega(k^2x^2))^\beta$, která je podílem funkcí $\mu_k(x)$ a $1/(kx)^{2\beta}$, mezi čísly $(\omega(\delta^2))^\beta > 0$ a 1.

3. Podle 1d a V.13.13′ konverguje tedy řada $\sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ stejnoměrně v $I(\delta)$, právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^\infty (kx)^{2\beta}/(kx)^\alpha = \sum_{k=1}^\infty 1/(kx)^{\alpha-2\beta}$. Protože tato řada má v $I(\delta)$ konvergentní majorantu $\sum_{k=1}^\infty 1/k^{\alpha-2\beta}\delta^{\alpha-2\beta}$, konverguje tam stejnoměrně; tím je důkaz dokončen.

Résumé. *Je-li $\alpha - 2\beta > 1$, konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty f_k$ v intervalu $J \subset \mathbb{R}_+$ stejnoměrně, právě když je $0 \notin \overline{J}$; v $\mathbb{R}_+$ je pak její konvergence lokálně stejnoměrná. Je-li $\alpha - 2\beta \leq 1$, řada všude v $\mathbb{R}_+$ diverguje.* (Viz obrázek, v němž je zakresleno prvních 12 částečných součtů řady s $\alpha = \frac{10}{3}$, $\beta = 1$.)

Příklad 13.11. Předpokládejme, že $\alpha \in \mathbb{R}$, a dokažme některé vlastnosti řad

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}\,. \tag{51}$$

1. *Je-li $\alpha > 1$, konvergují řady*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^\alpha}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos kx|}{k^\alpha} \tag{51'}$$

(a tedy i řady (51)) stejnoměrně v $\mathbb{R}$.

2. *Je-li $\alpha \in (0,1\rangle$, konverguje první z řad (51) všude v $\mathbb{R}$, přičemž konvergence je neabsolutní pro každé $x \not\equiv 0 \bmod \pi$. Druhá z řad konverguje, a to neabsolutně, v $\mathbb{R} - \{2m\pi;\, m \in \mathbb{Z}\}$. Pro $x \equiv 0 \bmod \pi$ je první řada v (51) řadou nulovou; druhá řada je v bodech $x \equiv \pi \bmod 2\pi$ alternující (a má tedy konečný součet), zatímco její součet v bodech $x \equiv 0 \bmod 2\pi$ je $+\infty$.*

Obě řady konvergují stejnoměrně na každé množině tvaru

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \langle 2m\pi + \delta, 2(m+1)\pi - \delta \rangle\,, \tag{52}$$

kde $\delta \in (0,\pi)$; na množině $\mathbb{R} - \{2m\pi;\, m \in \mathbb{Z}\}$ konvergují lokálně stejnoměrně. V žádném (pravém, levém, oboustranném) okolí žádného bodu $2m\pi$, kde $m \in \mathbb{Z}$, není konvergence stejnoměrná.

3. *Je-li $\alpha \le 0$, konverguje první z řad (51), právě když je $x \equiv 0 \bmod \pi$ (kdy je řadou nulovou), zatímco druhá z řad (51) všude v $\mathbb{R}$ diverguje.*

Připomeňme, že pro každé číslo $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí identity

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin(\frac{1}{2}nx)\sin(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin\frac{1}{2}x}\,, \tag{53}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(\frac{1}{2}nx)\cos(\frac{1}{2}(n+1)x)}{\sin\frac{1}{2}x} \tag{54}$$

(viz (46) v kap. 11). Z nich ihned plyne, že

(55) *pro každé $\delta \in (0,\pi)$ jsou součty (53) a (54) stejně omezené v množině* $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \langle 2m\pi + \delta, 2(m+1)\pi - \delta \rangle$,

protože v této množině platí nerovnost $|\sin\frac{1}{2}x| \ge \sin\frac{1}{2}\delta$ a absolutní hodnota čitatelů obou zlomků vpravo není větší než 1.

Ad 1. Toto tvrzení plyne ihned ze srovnávacího kritéria, protože $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^\alpha)$ je konvergentní číselná majoranta obou řad.

Ad 2. Protože první část tvrzení jsme dokázali již v prvním dílu této učebnice (viz Př. 11.5), věnujme se stejnoměrné konvergenci.

Stejnoměrnost konvergence řad (51) (na uvedených množinách) plyne z (55) a z Dirichletova kritéria, protože (číselná) posloupnost $\{1/k^\alpha\}$ je monotónní a má limitu 0.

Nestejnoměrnost konvergence dokážeme pro první z řad (51) nejdříve v intervalu $(0,\delta)$, kde $0<\delta<\frac12\pi$, a to pomocí negace příslušného BC kritéria:

Je-li $n\in\mathbb{N}$, $x_n:=\delta/3n$, $n<k\le 2n$, je $\frac13\delta<kx_n\le\frac23\delta<\delta$ a

$$(56_1)\qquad \Big|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx_n}{k^\alpha}\Big|=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx_n}{k^\alpha}\ge\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin\frac13\delta}{k}\ge\frac{n\sin\frac13\delta}{2n}=\tfrac12\sin\tfrac13\delta\,.$$

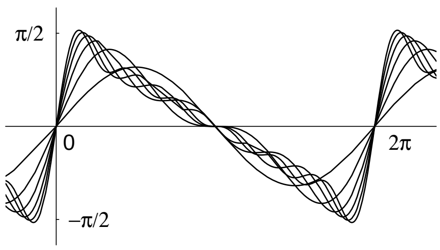
Pro levá okolí bodu 0 je důkaz analogický, protože sinus je lichá funkce; protože je 2π-periodická, je konvergence v okolích sudých násobků čísla π stejná jako v okolích nuly.

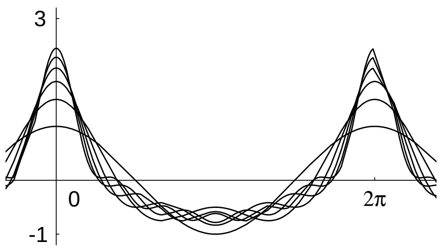
Pro součty s kosinem je situace dokonce jednodušší: Je-li $n>\pi/6\delta$, $x_n:=\pi/6n$, $n<k\le 2n$, je $\frac16\pi=nx_n<kx_n\le 2nx_n=\frac13\pi$, takže $\cos kx_n\ge\cos\frac13\pi=\frac12$ a

$$(56_2)\qquad \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\cos kx_n}{k^\alpha}\ge\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2k}\ge\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{4n}=\tfrac14\,;$$

protože kosinus je sudá funkce, dostáváme pro $x_n=-\pi/6n$ stejné odhady. Druhá z řad (51) tedy nekonverguje stejnoměrně v žádném $P^+(0)$ a v žádném $P^-(0)$; obdobná tvrzení o okolích všech sudých násobků čísla π plynou z 2π-periodicity kosinu.

Ad 3. Tvrzení plynou ihned z toho, že *pro žádné* $x\not\equiv 0 \bmod \pi$ *není* $\sin kx\to 0$ *a pro žádné* $x\in\mathbb{R}$ *není* $\cos kx\to 0$. (Důkaz: Kdyby bylo $\cos kx\to 0$, měla by vybraná posloupnost o členech $\cos 2kx=2\cos^2 kx-1$ limitu -1, což je spor. Je-li $\sin kx\to 0$, je $\cos 2kx=1-2\sin^2 kx\to 1$, $\cos(2k+1)x=\cos 2kx\cos x-\sin 2kx\sin x\to\cos x$ a $1\equiv\sin^2(2k+1)x+\cos^2(2k+1)x\to\cos^2 x$; z rovnosti $\cos^2 x=1$ plyne, že $x\equiv 0 \bmod \pi$.)





K Př. 13.11: Prvních 6 částečných součtů řad (51) s $\alpha=1$

* * *

Závěrem se vraťme k mocninným řadám; i když jsou nenahraditelným nástrojem komplexní analýzy, lze jejich jednoduché vlastnosti využít i v reálné analýze. (Viz např. Dodatek ke kap. 11 a kap. 18, kde se pomocí nich řeší diferenciální rovnice.)

Příklad 13.12. V Př. 11.8 jsme (pomocí d'Alembertova kritéria) dokázali, že *řady*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

které v komplexním oboru definují po řadě funkce $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, *konvergují pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, *a mají tedy poloměr konvergence rovný* $+\infty$.

Na rozdíl od toho konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,z^k$ jen v bodě 0 (protože jinak nemá její k-tý člen limitu 0), a má tedy poloměr konvergence rovný 0.

Příklad 13.13. *Pro každé* $\alpha \in \mathbb{R}$ *má mocninná řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha} \tag{57}$$

poloměr konvergence rovný 1.

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je totiž $\sqrt[k]{|\,z^k|/k^\alpha} = |\,z\,|/(\sqrt[k]{k})^\alpha$, což má pro $k \to \infty$ limitu rovnou $|\,z\,|$. Podle Cauchyho kritéria řada (57) konverguje, je-li $|\,z\,| < 1$, a diverguje, je-li $|\,z\,| > 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

Zcela analogicky dokážeme, že *řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{a^k\,k^\alpha} \tag{58}$$

má pro každé $a \in \mathbb{C}$ *různé od nuly poloměr konvergence rovný* $|\,a\,|$.

Poznámka 13.9. Na řadách tvaru (57) lze ukázat, že *není náhodné, že* V. 13.9 *neobsahuje žádnou informaci o konvergenci řady pro případ, že* $|\,z - \zeta\,| = R$; *obecně totiž za této situace nelze o konvergenci nic říci*:

Je-li $\alpha = 2$, je konvergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ majorantou řady (57) pro všechna z, pro něž je $|\,z\,| \le 1$; řada tedy konverguje (absolutně stejnoměrně) v celém uzávěru jednotkového kruhu $\mathcal{U}$ (který je kruhem konvergence *všech* řad (57)).

Je-li $\alpha = 0$ a $|\,z\,| = 1$, nemá k-tý člen řady (57) limitu 0, takže řada diverguje v každém bodě hranice kruhu $\mathcal{U}$.

Je-li konečně $\alpha = 1$, lze body z, pro něž je $|\,z\,| = 1$, napsat ve tvaru $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$, kde $t \in \mathbb{R}$, takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}$$

a řada vlevo konverguje, právě když konvergují obě řady vpravo. Protože podle Př. 13.10 obě konvergují, právě když je $t \not\equiv 0 \bmod 2\pi$, řada (57) konverguje pro všechna $z \in \partial\mathcal{U}$ s výjimkou bodu 1; v něm má reálná část řady součet $+\infty$, imaginární část součet 0. $\square$

I když obecná věta V. 13.9 nezaručuje konvergenci řady (8) v žádném hraničním bodě jejího kruhu konvergence, má konvergence v takovém bodě důležitý důsledek pro stejnoměrnou konvergenci řady (8), a tedy i pro spojitost jejího součtu:

Věta 13.16. (Abelova věta.) *Má-li řada* (8) *poloměr konvergence* $R \in \mathbb{R}_+$ *a konverguje-li v některém bodě tvaru* $\zeta + Re^{it}$, *kde* $t \in \mathbb{R}$, *konverguje stejnoměrně na uzavřené úsečce* $\{\zeta + re^{it};\, 0 \le r \le R\}$ *s krajními body* ζ, $\zeta + Re^{it}$*; součet řady je pak na této úsečce spojitý.*

* * *

Mezi nejdůležitější mocninné řady patří tzv. *Taylorovy řady*, které úzce souvisí s *Taylorovými polynomy*; předpoklady, za nichž lze danou funkci rozvinout v Taylorovu řadu, jsou dobrou ilustrací markantních rozdílů mezi reálnou a komplexní analýzou. Definice je v obou případech *formálně* stejná:

Je-li funkce f definována v jistém okolí bodu ζ a má-li v bodě ζ derivace všech řádů, nazýváme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\,(z-\zeta)^k \tag{59}$$

Taylorovou řadou funkce f **o středu** ζ; pro každé $n \ge 0$ je

$$R_{n+1}(z) := f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\,(z-\zeta)^k \tag{60}$$

tzv. **zbytek po** n**-tém členu** této řady. **Reálnou Taylorovou řadou** budeme rozumět řadu (59) za dodatečných předpokladů, že f je reálná funkce reálné proměnné, že $\zeta \in \mathbb{R}$ a že derivace jsou „podle reálné proměnné“; o **komplexní Taylorově řadě** budeme mluvit v případě, že f je komplexní funkce komplexní proměnné, $\zeta \in \mathbb{C}$ a derivace v (59) jsou „podle komplexní proměnné“. Slovo okolí bude v prvním případě znamenat okolí v $\mathbb{R}$, ve druhém případě to bude okolí v $\mathbb{C}$.

Poznamenejme, že *v definici Taylorovy řady se nepředpokládá nic o její konvergenci* a že na pravé straně (60) se od $f(z)$ odečítá n-**tý Taylorův polynom** (funkce f o středu ζ), který je n-tým částečným součtem Taylorovy řady (za předpokladu, že tato řada existuje).

Poznámka 13.10. Nechť $\zeta \in \mathbb{R}$, nechť f je definována v jistém okolí $U(\zeta)$ (v $\mathbb{C}$) bodu ζ a nechť je reálná v okolí $U(\zeta) \cap \mathbb{R}$ bodu ζ na reálné ose. Protože z existence derivace $f^{(k)}(\zeta)$ podle komplexní proměnné plyne existence analogické derivace podle reálné proměnné (a rovnost obou derivací), je zřejmé, že *za uvedených předpokladů plyne z existence komplexní Taylorovy řady funkce f o středu ζ existence příslušné reálné Taylorovy řady, přičemž obě řady mají pak stejné koeficienty*.

Obrácené tvrzení však neplatí, protože např. funkce (sr. s Cv. 5.69)

$$f(z) := \left\{ \begin{array}{cl} \exp(-z^{-2}) & \text{pro } z \neq 0 \\ 0 & \text{pro } z = 0 \end{array} \right\} \tag{61}$$

má v bodě 0 (nulové) derivace všech řádů podle reálné proměnné, ale vzhledem k $\mathbb{C}$ není v bodě 0 spojitá (protože její limita v bodě 0 vzhledem k imaginární ose je rovna $+\infty$), takže derivace (kladných řádů) podle komplexní proměnné nemá.

Z příkladu je zároveň patrné, že *existence derivací všech řádů podle reálné proměnné všude v* $\mathbb{R}$ <u>*není*</u> *postačující podmínkou možnosti rozvoje dané funkce v Taylorovu řadu: Reálnou Taylorovu řadu funkce* (60) *lze sice napsat, ale protože je to řada nulová, není její součet roven* $f(z)$ *v žádném bodě* $z \neq 0$. □

Přímo z definice součtu řady (jako limity jejích částečných součtů) plyne, že

(62) *Taylorova řada* (59) *má v bodě* z *součet* $f(z)$*, právě když je* $R_{n+1}(z) \to 0$ *pro* $n \to \infty$.[8])

Reálná analýza se proto musí zabývat otázkou, jak tuto podmínku v konkrétních případech dokázat (nebo vyvrátit); u řady důležitých funkcí lze podmínku (62) dokázat, přepíšeme-li zbytek jedním ze způsobů uvedených v této větě:

Věta 13.17. *Nechť* ζ *a* $\zeta' \neq \zeta$ *jsou reálná čísla, nechť* $n \geq 0$ *je celé číslo a nechť* f *je reálná funkce reálné proměnné, která má v každém bodě uzavřeného intervalu* I *s krajními body* ζ, ζ' (*konečné*) *derivace až do řádu* $n+1$ *včetně. Pak existují čísla* $\xi \in \operatorname{int} I$, $\eta \in \operatorname{int} I$ *tak, že*

$$R_{n+1}(\zeta') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(\zeta' - \zeta)^{n+1}, \tag{63}$$

$$R_{n+1}(\zeta') = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!}\,(\zeta' - \eta)^{n}\,(\zeta' - \zeta). \quad \square \tag{64}$$

(63) a (64) jsou po řadě přepisy zbytku v **Lagrangeově** a v **Cauchyho tvaru**.

Poznámka 13.11. Pomocí (63)–(64) lze mj. dokázat (viz [10] nebo [27], 1. díl), že *pro všechna* $z \in \mathbb{R}$ *je*

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{65}$$

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{66}$$

že pro všechna $x \in (-1, 1\rangle$ *resp.* $x \in \langle -1, 1)$ *je*

$$\lg(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} \quad \textit{resp.} \quad \lg(1-z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \tag{67}$$

a že pro všechna $z \in (-1, 1)$ *a všechna* $\alpha \in \mathbb{R}$ *platí identita*

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k. \tag{68}$$

[8]) Někteří autoři čtenářům bohužel sugerují, že (62) je závažné tvrzení, a nazývají je Taylorovou *větou*. Na rozdíl od *triviálního* výroku (62) je pro reálnou analýzu *skutečně velmi důležitá* např. věta 13.17, která v řadě důležitých případů dovoluje podmínku $R_{n+1}(z) \to 0$ ověřit.

Mocninné řady na pravých stranách identit (65) a (66) mají poloměr konvergence rovný $+\infty$, zatímco poloměr konvergence řad v (67) je roven 1. Je-li α nezáporné celé číslo, obsahuje řada v (68) jen konečný počet nenulových sčítanců a má poloměr konvergence $+\infty$; jinak je její poloměr konvergence roven 1. $\square$

Zatímco v reálném oboru je možnost rozvoje funkce v Taylorovu řadu dána podmínkou (62), jejíž ověření není vždy snadné, je v komplexním oboru situace *nesrovnatelně jednodušší*; příslušné tvrzení je založeno na tomto základním pojmu komplexní analýzy:

Definice. Říkáme, že komplexní funkce f komplexní proměnné je **holomorfní** v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, má-li v každém bodě $z \in \Omega$ derivaci podle komplexní proměnné.

Věta 13.18. *Je-li funkce f holomorfní v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, má v každém bodě $z \in \Omega$ derivace všech řádů.*[9] *Je-li $K(\zeta, R) \subset \Omega$ (pro jisté $R > 0$), je*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k \quad \text{pro všechna } z \in K(\zeta, R). \tag{69}$$

Dodatek. *Konverguje-li mocninná řada v kruhu $K(\zeta, R)$, je v tomto kruhu Taylorovou řadou svého součtu. Jinými slovy:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-\zeta)^k \ \text{ v } K(\zeta, R) \ \Rightarrow \ a_k = \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!} \ \text{ pro všechna } k \ge 0. \tag{70}$$

Poznámka 13.12. V komplexním oboru tedy platí tvrzení v reálném oboru zcela neslýchané: *Z existence první derivace (v otevřené množině) plyne existence derivací všech řádů.* Kromě toho je patrné, že *při rozvádění funkce v mocninnou řadu není nutné zabývat se zbytkem R_{n+1}*, protože v kruhu, v němž je funkce holomorfní, zbytek automaticky konverguje k nule.[10]

Poznámka 13.13. Víme (viz V.11.17), že *Cauchyho součin dvou absolutně konvergentních řad se součty s a t je absolutně konvergentní řada, jejíž součet je roven st.* Protože mocninné řady konvergují ve svých kruzích konvergence absolutně, platí:

Cauchyho součin dvou mocninných řad, které mají v kruzích $K(\zeta, R_1)$, $K(\zeta, R_2)$ součty $f(z)$, $g(z)$, je Taylorovou řadou součinu $f(z)\,g(z)$ v kruhu $K(\zeta, \min(R_1, R_2))$. Podobné tvrzení platí i pro reálné Taylorovy řady; kruhy je však třeba nahradit jejich průniky s $\mathbb{R}$.

To umožňuje napsat Taylorovu řadu funkce, která je součinem dvou funkcí, jejichž Taylorovy řady známe, bez počítání jejich derivací:

---

[9] Samozřejmě podle komplexní proměnné.

[10] Zcela na místě je otázka, jak je to možné, když definice derivace podle reálné a komplexní proměnné jsou formálně zcela identické. Odpověď: I když jsou formálně identické, je ve skutečnosti existence derivace podle komplexní proměnné v (neprázdné) otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ podmínkou *nesrovnatelně* silnější, než je např. existence derivace podle reálné proměnné v intervalu. Podstatu věci čtenáři odhalí až studium komplexní analýzy, při němž se seznámí i s důkazy vyslovených tvrzení.

Příklad 13.14. Podle (65) a (67) je

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \ \text{ v } \mathbb{R}, \quad \lg(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \ \text{ v } (-1,1); \tag{71}$$

z toho plyne, že Taylorovou řadou (o středu 0) funkce $e^x \lg(1-x)$ je řada

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^j x^k}{j!\,k} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \ \text{ kde } c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n-k)!\,k}, \tag{72}$$

konvergující absolutně v intervalu $(-1,1)$.[11]) Pro úplnost dodejme, že je

$$c_1 = 1, \ c_2 = \tfrac{3}{2}, \ c_3 = \tfrac{4}{3}, \ c_4 = 1, \ c_5 = \tfrac{89}{120}, \ c_6 = \tfrac{83}{144}, \ c_7 = \tfrac{593}{1260}, \dots. \tag{73}$$

Příklad 13.15. Z identity

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \tag{74}$$

platné v intervalu $(-1,1)$ plyne integrací (sr. s V.13.11) v témž intervalu identita

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}; \tag{75}$$

aditivní konstantu c jsme (vpravo) nenapsali, protože hodnota v bodě 0 obou stran napsané identity je 0, takže i $c = 0$. Tím jsme získali Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$, aniž bylo nutné počítat derivace této funkce v bodě 0 (což by mohlo narazit na značné potíže, pokud bychom nenašli např. nějakou rekurentní relaci).

Pro $x = \pm 1$ je na pravé straně (75) alternující řada $\pm\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)$, která podle Leibnizova kritéria konverguje. Podle Abelovy věty 13.16 konverguje tedy řada na pravé straně (75) v celém intervalu $\langle -1, 1\rangle$ stejnoměrně a její součet je tam spojitý; protože levá strana identity (75) je v tomto intervalu také spojitá, identita platí v celém $\langle -1, 1\rangle$.

Utvoříme-li Cauchyho součin řady ze (75) se sebou samou, dostaneme Taylorovu řadu funkce $\operatorname{arctg}^2 x$ v intervalu $(-1,1)$:

$$\operatorname{arctg}^2 x = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}, \tag{76}$$

kde

$$c_n := (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2n-2k-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} \tag{77}$$

[11]) Dva za sebou napsané znaky součtu (tak jako na začátku řádky (72)) se často užívají místo znaku pro zobecněnou řadu, v níž by se v našem případě sčítalo přes všechny dvojice (j,k), kde $j \ge 0$ a $k \ge 1$ jsou celá čísla.

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, protože

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2n-2k-1)} = \frac{1}{2n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n-2k-1}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}\,.$$

Platnost (76) je zatím zaručena jen v intervalu $(-1,1)$, protože s Cauchyho součinem lze bezpečně pracovat jen v případě, že aspoň jedna z řad je absolutně konvergentní (viz V.11.16 a Cv.11.100). Čtenář však může sám dokázat, že posloupnost $\{|c_n|\}_{n=1}^{\infty}$ klesá a její n-tý člen není větší než $1/\sqrt{n}$; podle Leibnizova kritéria tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}$ konverguje i v bodech ± 1. Platnost (76) v celém uzavřeném intervalu $\langle -1,1\rangle$ se tedy dokáže podobně jako platnost (75).

Pro ilustraci ještě dodejme, že šestý částečný součet řady (76) (neboli dvanáctý a třináctý Taylorův polynom funkce $\operatorname{arctg}^2 x$ o středu 0) je roven

$$x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 - \frac{44}{105}x^8 + \frac{563}{1575}x^{10} - \frac{3254}{10395}x^{12}\,. \tag{78}$$

* * *

Vraťme se nyní k „obyčejným“ řadám funkcí a ilustrujme užití Abelova a Dirichletova kritéria stejnoměrné konvergence tímto příkladem:

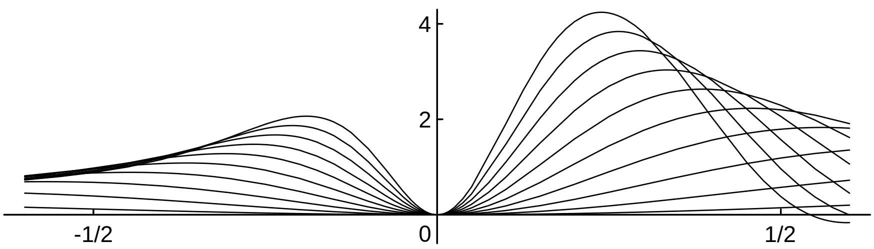
Příklad 13.16. Vyšetřme stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, kde

$$f_k(x) := \frac{e^{kx}}{e^{kx}+1}\operatorname{arctg} kx\,\sqrt{\operatorname{arccotg} kx}\,\sin kx\,. \tag{79}$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(0)$ je nulová řada, budeme se v dalším zabývat jen konvergencí v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$. Všimněme si především, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$f_k\Big(\frac{1}{k}\Big) = \frac{e\sqrt{\pi^3}\,\sin 1}{8\,(e+1)}\,,\quad f_k\Big(-\frac{1}{k}\Big) = \frac{\sqrt{3\pi^3}\,\sin 1}{8\,(e+1)}\,; \tag{80}$$

protože není $f_k(\pm 1/k) \to 0$, nekonverguje posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ k nule stejnoměrně v žádném $P^+(0)$ a v žádném $P^-(0)$, a totéž proto platí i o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.



K Př. 13.16 : $\sum_{k=1}^{n} f_k$, $1 \le n \le 10$

Buď $I \subset \mathbb{R}_+$ libovolný interval s počátečním bodem $\delta \in \mathbb{R}_+$. Než začneme řadu $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ vyšetřovat v I, položme pro větší přehlednost a stručnost

$$a_k(x) := \frac{e^{kx}}{e^{kx}+1}\,, \quad b_k(x) := \operatorname{arctg} kx\,, \quad c_k(x) := \sqrt{\operatorname{arccotg} kx}\,. \tag{81}$$

Čtenář snadno zjistí, že všechny funkce $a_k(x)$ v $\mathbb{R}$ rostou, že jejich hodnoty pro $x \geq 0$ leží mezi $a_k(0) = \frac{1}{2}$ a $a_k(+\infty-) = 1$ a že pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je i posloupnost $\{a_k(x)\}$ rostoucí. Podle symetrické verze Abelova kritéria (tj. podle V.13.15′, v níž položíme $g_k = a_k$, $h_k \equiv 1$) lze tedy funkce $a_k(x)$ z $f_k(x)$ „vynechat“ v tom smyslu, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje v I stejnoměrně, právě když má tuto vlastnost řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)\,c_k(x)\sin kx$.

Z podobných důvodů lze vynechat i funkce $b_k(x)$: Jejich hodnoty pro $x \in I$ leží mezi $\operatorname{arctg}\delta > 0$ a $\frac{1}{2}\pi$ a posloupnost $\{g_k(x)\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ rostoucí.

Protože funkce $\varphi(x) := x \operatorname{arccotg} x$ v $\mathbb{R}$ roste a protože má v bodě $+\infty$ limitu 1, platí implikace $x \in I \Rightarrow \varphi(\delta) \leq \varphi(x) < 1$. Protože $x \in I \Rightarrow kx \in I$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, je i $\varphi(\delta) \leq \varphi(kx) < 1$ a $\sqrt{\varphi(\delta)} \leq \sqrt{\varphi(kx)} = \sqrt{kx}\,c_k(x) < 1$; navíc je posloupnost $\{\varphi(kx)\}$ rostoucí. Podle V.13.15′ lze tedy v I funkce $c_k(x)$ nahradit funkcemi $1/\sqrt{kx}$.

Shrneme-li dosavadní výsledky, vidíme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje v I stejnoměrně, právě když má tuto vlastnost řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{kx}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}\,. \tag{82}$$

Podle Př.13.10 však řada vpravo konverguje v I stejnoměrně, právě když $\overline{I}$ neobsahuje žádný celý násobek čísla 2π, tj. když je $\overline{I} \subset (2(m-1)\pi, 2m\pi)$ pro vhodné $m \in \mathbb{N}$. Potom však je $1/\sqrt{x}$ funkce omezená v I dvěma kladnými konstantami, takže řada vlevo konverguje stejnoměrně v I, právě když to platí pro řadu vpravo. [12]) Konvergence je lokálně stejnoměrná v $\mathbb{R}_+ - \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{2m\pi\}$ a zřejmě neabsolutní – proto bylo třeba užít jemnější Abelovo kritérium.

Vyšetření konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ v $\mathbb{R}_-$ bude daleko snadnější, protože „dominantní vliv“ tam má funkce e^{kx}. Je-li totiž $x \leq -\delta < 0$, platí relace

$$|\,f_k(x)\,| \leq e^{-k\delta} \cdot \tfrac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi^3}\, e^{-k\delta}\,;$$

protože geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\delta}$ konverguje, konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ absolutně stejnoměrně v (každém) intervalu $(-\infty, -\delta\rangle$ a obecněji ovšem v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}_-$, jehož koncovým bodem není 0. Konvergence je lokálně stejnoměrná v $\mathbb{R}_-$; vzhledem k tomu, že je absolutní, mohli jsme užít hrubší srovnávací kritérium.

* * *

[12]) Tvrzení, že *ani stejnoměrná, ani nestejnoměrná konvergence řady se nezmění, vynásobíme-li všechny její členy (jednou a touž) funkcí omezenou na příslušné množině dvěma kladnými čísly*, plyne ihned z důsledku V.13.12.

Řešení některých obyčejných diferenciálních rovnic tvaru $Ly = 0$ lze (v reálném i v komplexním oboru) hledat ve tvaru mocninné řady; postup má v případě, že koeficienty rovnice jsou jednoduchými kombinacemi celých mocnin nezávislé proměnné z a že hledáme řešení v okolí 0, zpravidla tyto kroky:

1) Předpokládáme existenci řešení ve tvaru mocninné řady tvaru $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ s kladným poloměrem konvergence R.

2) Derivováním člen po členu vypočteme všechny potřebné derivace, dosadíme je do rovnice a výsledek uspořádáme podle mocnin z; protože podle důsledku V.13.10 musí být koeficienty u všech mocnin z^k rovny nule, získáme nekonečně mnoho rovnic pro koeficienty a_k.

3) Po jejich vyřešení *ověříme, zdali mocninná řada s vypočítanými koeficienty má opravdu kladný poloměr konvergence*, protože teprve pak máme zaručeno, že jsme našli řešení, a víme též kde. Nemají-li rovnice řešení nebo nemá-li výsledná řada kladný poloměr konvergence, neuspěli jsme – pravděpodobně proto, že rovnice řešení v navrženém tvaru nemá.

Příklad 13.17. Zkusme v komplexním oboru najít řešení rovnice

$$w'' + zw' + w = 0 \tag{83}$$

ve tvaru

$$w(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \tag{84}$$

kde $a_k \in \mathbb{C}$ jsou (zatím) neznámá čísla.[13])

Předpokládejme, že řada (84) má poloměr konvergence $R > 0$; v $K(0, R)$ pak je

$$zw'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^k, \; w''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} z^k. \tag{85}$$

Dosadíme-li právě získané výsledky do (83), dostaneme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} + (k+1) a_k] z^k, \tag{86}$$

která má nulový součet, právě když jsou koeficienty u všech mocnin z rovny nule, tj. právě když je

$$(k+2) a_{k+2} + a_k = 0 \text{ pro všechna } k \geq 0. \tag{87}$$

[13]) Soustavnější informace o diferenciálních rovnicích najde čtenář až v kapitole 18; abychom však objasnili důvod, proč hledáme dvě lineárně nezávislá řešení, prozraďme již nyní, že u lineární rovnice 2. řádu s nulovou pravou stranou (což je náš případ) je množina všech řešení totožná s množinou všech lineárních kombinací dvou lineárně nezávislých řešení. „Řešit“ rovnici znamená najít *všechna* její řešení.

Při volbě $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ plyne z rekurentních vztahů (87), že

$$a_0 = 1\,,\ a_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2!!}\,,\ a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{1}{4!!}\,,\ \dots\,,\ a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}\,, \dots \tag{88}$$

a že $a_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \geq 0$.

Položíme-li naopak $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, bude

$$a_1 = 1\,,\ a_3 = -\frac{a_1}{3} = -\frac{1}{3!!}\,,\ \dots\,,\ a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!}\,, \dots \tag{89}$$

a $a_{2k} = 0$ pro všechna $k \geq 0$.

Jak snadno zjistíme d'Alembertovým kritériem, konvergují obě řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!!}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!} \tag{90}$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, takže jejich poloměr konvergence je $+\infty$ a jejich součty $w_1(z)$, $w_2(z)$ jsou řešení rovnice (79) všude v $\mathbb{C}$. Protože první z funkcí je sudá, druhá lichá, je jejich lineární nezávislost zřejmá.

Podle toho, co jsme uvedli v poznámce [12]) pod čarou, je funkce w řešením rovnice (83) v $\mathbb{C}$, právě když je

$$w(z) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!!} + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!}\,, \tag{91}$$

kde c_1, c_2 jsou komplexní čísla.

Cvičení

A. Vyšetřte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $f_k(x)$ v určeném oboru. [14]) Pro stručnost značíme

$$\mathbb{R}_+^0 := \langle 0, +\infty)\,, \quad J := \langle -1, 1\rangle\,, \quad J^* := (-1, 1)\,; \tag{92}$$

není-li obor uveden, rozumí se jím $\mathbb{R}$.

13.01^o^. $(x^2-1)^k$

13.02^o^. $x^k(1-x^2)$ v J

13.03^o^. $x^k - x^{3k}$ v J

13.04^o^. $k^2x^k(1-x^2)^k$ v J

13.05^o^. $\dfrac{2kx}{x^2+k^2}$

13.06^o^. $\dfrac{x^2+1}{kx+1}$ v $\mathbb{R}_+^0$

[14]) Daná posloupnost se má v tomto oboru *vyšetřovat*; netvrdíme, že v něm všude *konverguje*.

13.07°. $\dfrac{x^2+k}{x+k^2}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.08°. $\dfrac{k^2-x^2}{k^2+x^2}$

13.09°. $\dfrac{x+k}{x^2+k^2}$

13.10°. $\dfrac{k^2x^2}{1+k^2x^2}$

13.11°. $\dfrac{x^{k+1}+1}{x^k+1}$ v $(-1,+\infty)$

13.12°. $\dfrac{x^k}{1+x^{2k}}$

13.13°. $\dfrac{1-x^{2k}}{1+x^{2k}}$

13.14°. $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^k$

13.15°. $\sqrt[k]{x+k}$ v $\langle -1,+\infty)$

13.16°. $\sqrt[k]{x^{2k}+1}$

13.17°. $\sqrt[k]{x^k-1}$ v $(1,+\infty)$

13.18°. $\sqrt[2k-1]{x^{2k+1}+1}$

13.19°. $\sqrt[4k]{\dfrac{x^{2k}}{x^{2k}+1}}$

13.20°. $\sqrt[k]{k^2+k\cosh x}$

13.21°. $\sqrt{x^2+\operatorname{arccotg} k}$

13.22°. $\sqrt[k]{1-\sin^k x}$

13.23°. $\sqrt[k]{kx+\sin kx}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.24°. $e^{-(x-k)^2}$

13.25°. $x^{2k}e^{-k(x^2-1)}$

13.26°. $x^k e^{-x^2/k}$

13.27°. $\dfrac{e^{kx}-1}{e^{kx}+1}$

13.28°. $\dfrac{e^{k^2x^2}-e^{kx}}{e^{k^2x^2}+e^{kx}}$

13.29°. $\dfrac{\lg(kx)}{k}$ v $\mathbb{R}_+$

13.30°. $\lg\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$ v $(-1,+\infty)$

13.31°. $\dfrac{k}{x}\lg\left(1+\dfrac{x}{k}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.32°. $kx\lg\left(1+\dfrac{1}{kx}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.33°. $\lg\dfrac{(x+k)^2}{x^2+k^2}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.34°. $\dfrac{x}{k}\lg\dfrac{x}{k}$ v $\mathbb{R}_+$

13.35°. $\sin\dfrac{x}{k}$

13.36°. $k\sin\dfrac{x}{k}$

13.37°. $\sin\dfrac{\lg(kx)}{k}$ v $\mathbb{R}_+$

13.38°. $k\left(\sin\dfrac{x}{k}-\sin\dfrac{x}{2k}\right)$

13.39°. $\sin(\pi x^k)$ v J

13.40°. $(\sin x+\cos x)^k$ v $\langle -\pi,\pi\rangle$

13.41°. $\sin^k x\cos x$

13.42°. $k|\sin x|^k(1-|\sin x|)^k$

13.43°. $\dfrac{\sinh(x-k)}{\cosh(x+k)}$

13.44°. $\cosh\dfrac{|x|-k}{|x|+k}$

13.45°. $\arcsin\dfrac{2kx}{1+k^2x^2}$

13.46°. $\arccos\dfrac{2kx}{x^2+k^2}$

13.47°. $\operatorname{arccotg} kx$

13.48°. $kx\operatorname{arccotg} kx$

13.49°. $\operatorname{arccotg}\dfrac{kx}{kx+1}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.50°. $\operatorname{arccotg}\dfrac{x^2-k^2}{x^2+k^2}$

13.51°. $\operatorname{arctg} kx \operatorname{arccotg} kx$

13.52°. $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{k} \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{k}$

13.53°. $\operatorname{arctg} \dfrac{2x^k}{1+x^{2k}}$

13.54°. $\arcsin \dfrac{e^{kx}-1}{e^{kx}+1}$

13.55°. $\operatorname{arctg}(e^{kx})$

13.56°. $\operatorname{arccotg}\left(\sin \dfrac{x}{k}\right)$

13.57°. $\arccos(\sin^k \pi x)$

13.58°. $\arcsin x^{2k} \arccos x^{2k}$ v J

13.59°. $\arcsin(x^2(1-x^2)^k)$ v J

13.60°. $\operatorname{arccotg}((1-x^2)(2-x^2))^k$

B. V daných oborech vyšetřte stejnoměrnou konvergenci řad o uvedených členech; závisí-li členy na parametru α, vyšetřujte závislost stejnoměrné konvergence příslušné řady i na tomto reálném parametru.

13.61°. $x^{2k} e^{-kx^2}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.62°. xe^{-kx} v $\mathbb{R}_+^0$

13.63°. $x^2 e^{-kx}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.64°. $xe^{-k^2x^2}$

13.65°. $x^2 e^{-k^2x^2}$

13.66°. $\exp(-(k+x)^2)$

13.67°. $\exp\left(-\left(kx+\dfrac{1}{kx}\right)\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.68°. $\exp\left(-\dfrac{k^2x+x^{-1}}{\sqrt{k}}\right)$ v $\mathbb{R}_+$

13.69°. $\dfrac{kx}{k^3+|x|^3}$

13.70°. $(x(2-x))^k$

13.71°. $(\sin^3 x - \cos^3 x)^k$

13.72°. $(\operatorname{tgh} x)^k$

13.73°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2}{k^2}\right)$

13.74°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2\sin^2 x}{k^2}\right)$

13.75°. $\lg\left(1+\dfrac{x^2 \operatorname{arccotg} x^2}{k^2}\right)$

13.76°. $\operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{k^2} \operatorname{arccotg} \dfrac{x^2}{k^2}$

13.77°. $(\sin^2(\frac{1}{4}\pi x) \operatorname{arccotg} x^2)^k$

13.78°. $x^{2k} \operatorname{arccotg} x^{4k}$

13.79°. $\operatorname{arctg} k^2x^2 \operatorname{arccotg} k^2x^2$

13.80°. $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{k} \operatorname{arccotg} kx$

13.81°. $\arccos \dfrac{k^2x^2}{1+k^2x^2}$

13.82°. $\arccos \dfrac{k^4x^4}{1+k^4x^4}$

13.83°. $\arccos \dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$

13.84°. $\arcsin \dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$

13.85°. $\dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}} \dfrac{1}{x^2+k^2} \operatorname{arctg} \dfrac{k^2x^2+1}{k^2x^2+2}$

13.86°. $\dfrac{(x^k+1)^2}{x^{2k}+1} \dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.87°. $\dfrac{1-e^{-k(x+1)}}{1+e^{-k(x+1)}} \operatorname{arctg} \dfrac{kx+2}{kx+1} \dfrac{\cos kx}{k^\alpha}$

13.88°. $\dfrac{k^2x^2+kx+1}{k^2x^2-kx+1} \dfrac{\sin kx}{\sqrt{k}}$

13.89°. $\dfrac{e^{2kx}-e^{kx}+1}{e^{2kx}+e^{kx}+1}\,\dfrac{\sin kx}{\sqrt[4]{k}}$

13.90°. $\lg\Bigl(1+\dfrac{x^2}{k}\Bigr)\sin kx$

13.91°. $\lg\Bigl(1+\dfrac{x^2}{k^2}\Bigr)\sin(k\pi x)$

13.92°. $\dfrac{k}{k^2+1}\,\sin^2 kx$

13.93°. $\sin\dfrac{x}{k}\,\sin kx$

13.94°. $\dfrac{\operatorname{arctg} kx}{\operatorname{arctg} 2kx}\,\dfrac{\sin kx}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+$

13.95°. $\operatorname{arctg} kx \operatorname{arccotg} kx \cos kx$ v $\mathbb{R}_+^0$

13.96°. $\dfrac{\operatorname{arccotg} kx}{\operatorname{arccotg} 2kx}\,\dfrac{\cos(k\pi x)}{k^\alpha}$ v $\mathbb{R}_+^0$

C. Najděte poloměry konvergence těchto řad:

13.97. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!\,z^k}{k^k}$

13.98. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^k z^k}{(k!)^2}$

13.99. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!\,z^k}{(2k)!!}$

13.100. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!!\,z^k}{k!}$

13.101. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^\alpha z^{2k}}{(2k)!!}$

13.102. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{arccotg} e^k)\,z^k$

13.103. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{j}^{k}\frac{1}{j}\Bigr)z^k$

13.104. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\sin k)\,z^k$

13.105. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{1}{k}\Bigr)^{k^2}z^k$

D. Pro každou z následujících funkcí (proměnné x nebo z) najděte (reálnou nebo komplexní) Taylorovu řadu o středu uvedeném za středníkem. Pro každou z nalezených řad vypočtěte poloměr konvergence.

13.106°. $e^{z^2}\sin z;\ 0$

13.107°. $\cosh z\cos z;\ 0$

13.108°. $\lg(1+x)\lg(1+x^3);\ 0$

13.109°. $\operatorname{arccotg}^2 x;\ 0$

13.110°. $e^{-z}\sinh z;\ 0$

13.111°. $\sin x \arcsin x;\ 0$

13.112°. $\dfrac{e^{iz}}{1+z^2};\ 0$

13.113°. $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};\ 0$

13.114°. $\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1+x^2};\ 0$

13.115°. $\sin z;\ \frac{1}{2}\pi$

13.116°. $e^z;\ 1$

13.117°. $e^z;\ i\pi$

13.118°. $\cosh z;\ i$

13.119°. $\lg x\,\sin\pi x;\ 1$

13.120°. $\lg^3(1-x);\ 0$

E. Najděte předepsaný počet komplexních mocninných řad o středu 0, jejichž součty jsou lineárně nezávislá řešení dané diferenciální rovnice. Počet řešení je uveden za středníkem; nula v příkladu 13.128 znamená, že žádné řešení popsaného tvaru neexistuje (dokažte!). [15]) U každé z nalezených mocninných řad je třeba vypočítat poloměr R konvergence; při $R > 0$ je kruh $K(0, R)$ oborem příslušného řešení příslušné rovnice.

13.121. $w'' + w = 0;\ 2$

13.122. $w'' - w = 0;\ 2$

13.123. $zw'' + w' + zw = 0;\ 1$

13.124. $w''' + w = 0;\ 3$

13.125. $w'' + zw = 0;\ 2$

13.126. $w'' - zw' - w = 0;\ 2$

13.127. $zw'' - w = 0;\ 1$

13.128. $z^2w'' - w = 0;\ 0$

13.129. $zw'' + (1 - z)w' + 5w = 0;\ 1$

13.130. $w'' - zw' + 5w = 0;\ 2$

Řešení

A. Abychom výsledky cvičení 13.01–13.60 mohli zapsat pokud možno stručně a přehledně, užíváme tyto úmluvy a označení: za číslem cvičení následuje vždy čtveřice dat. V části začínající **BL** uvádíme bodovou limitu dané posloupnosti, za značkou **STK** je umístěna nutná a postačující podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti v intervalu I ležícím v oboru, v němž posloupnost konverguje, po **LSK** následuje maximální množina, v níž je konvergence lokálně stejnoměrná, a z údajů za značkou **NSK** lze vyčíst, ve kterých prstencových okolích kterých bodů je konvergence nestejnoměrná. Značka $\emptyset$ znamená, že takové body neexistují; ostatní data v této části zapisujeme pro úsporu místa takto: Konverguje-li posloupnost v jistém $P^+(a)$ (resp. $P^-(a)$) bodově, ale není-li konvergence stejnoměrná v žádném $P^+(a)$ (resp. $P^-(a)$), napíšeme krátce $a+$ (resp. $a-$). Konverguje-li posloupnost v jistém $P(a)$ bodově, ale konvergence není stejnoměrná v žádném $P^+(a)$ a v žádném $P^-(a)$, napíšeme $a\pm$. Symbol $\pm a \mp$ píšeme místo dvojice symbolů „$+a-$“ a „$-a+$“; konverguje-li posloupnost bodově v jistém okolí bodů $\pm a$, ale nekonverguje-li v žádném jejich pravém ani levém okolí, napíšeme $(\pm a)\pm$.

13.01. BL: 0, je-li $0 < |x| < \sqrt{2}$; 1 v $\pm\sqrt{2}$; div., je-li $x = 0 \vee |x| > \sqrt{2}$; **STK:** $\overline{I} \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$; **LSK:** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) - \{0\}$; **NSK:** $\pm\sqrt{2}\mp$, $0\pm$

13.02. BL: 0 v J; **STK:** $I \subset J$; **LSK:** J; **NSK:** $\emptyset$

13.03. BL: 0 v J; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1 \mp$

[15]) Protože rovnice 13.121−13.130 mají pravou stranu rovnou nule, je nulová řada zřejmě řešením každé z nich; protože úkolem je najít *lineárně nezávislá* řešení, nulové řešení nesplňuje zadané podmínky.

13.04. BL: 0 v J; **STK:** $I \subset J$; **LSK:** J; **NSK:** $\emptyset$

13.05. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.06. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$, 1 v 0; **STK:** I omez., $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.07. BL: 0 v $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+^0$; **NSK:** $+\infty-$

13.08. BL: 1 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.09. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.10. BL: 0 v 0, 1 jinde; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.11. BL: 1 v J^*, x v $\langle 1, +\infty)$; **STK:** $-1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $(-1, +\infty)$; **NSK:** $-1+$

13.12. BL: 0 pro $x \neq \pm 1$, $\frac{1}{2}$ v 1, div. v -1; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.13. BL: 1 v J^*, 0 v ± 1, -1 jinde; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.14. BL: 0 v $\mathbb{R} - \{0\}$, v 0 div.; **STK:** I omez., $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$, $\pm\infty\mp$

13.15. BL: 1 v $\langle -1, +\infty)$; **STK:** I sh. omez.; **LSK:** $\langle -1, +\infty)$; **NSK:** $+\infty-$

13.16. BL: 1 v J, x^2 jinde; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.17. BL: x v $(1, +\infty)$, ale $f_k(1+) = 0$; **STK:** $1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $(1, +\infty)$; **NSK:** $1+$

13.18. BL: 1 pro $x \in J^*$, 0 pro $x = -1$, x jinak; **STK:** $-1 \notin \overline{I}$, I omez.; **LSK:** $\mathbb{R} - \{-1\}$; **NSK:** $-1\pm$, $\pm\infty\mp$

13.19. BL: $\sqrt{|x|}$ v J, 1 jinde; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.20. BL: 1 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.21. BL: $|x|$ v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.22. BL: div. v bodech $(2n - \frac{1}{2})\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, 0 v bodech $(2n + \frac{1}{2})\pi$, 1 jinde; **STK:** $\overline{I} \cap \{(2n \pm \frac{1}{2})\pi;\, n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{(2n \pm \frac{1}{2})\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; **NSK:** $((2n \pm \frac{1}{2})\pi)\pm$, kde $n \in \mathbb{Z}$, $\pm\infty\mp$

13.23. BL: 0 v 0, 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** I omez., $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.24. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I sh. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $+\infty-$

13.25. BL: 1 v ± 1, 0 jinde; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.26. BL: 1 v 1, 0 pro $x \in J^*$, div. jinak; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1\mp$

13.27. BL: $\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.28. BL: 0 v 0, 1 jinde; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.29. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$, I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.30. BL: 0 v $(-1, +\infty)$; **STK:** I omez.; **LSK:** $(-1, +\infty)$; **NSK:** $+\infty-$

13.31. BL: 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $+\infty-$

13.32. BL: 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.33. BL: 0 v $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $+\infty-$

13.34. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $+\infty-$

13.35. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.36. BL: x v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.37. BL: 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$, I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$, $+\infty-$

13.38. BL: $\frac{1}{2}x$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.39. BL: 0 v J; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1\mp$

13.40. BL: div. v $\langle -\pi, -\frac{1}{2}\pi\rangle \cup (0, \frac{1}{2}\pi) \cup \{\pi\}$, 1 v 0 a v $\frac{1}{2}\pi$, 0 jinde; **STK:** $\overline{I} \subset (-\frac{1}{2}\pi, 0) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi)$; **LSK:** $(-\frac{1}{2}\pi, 0) \cup (\frac{1}{2}\pi, \pi)$; **NSK:** $-\frac{1}{2}\pi+$, $0-$, $\frac{1}{2}\pi+$, $\pi-$

13.41. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.42. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.43. BL: $-e^{-2x}$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I zd. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $-\infty+$

13.44. BL: $\cosh 1 \doteq 1.54308$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.45. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.46. BL: $\frac{1}{2}\pi$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.47. BL: π v $\mathbb{R}_-$, $\frac{1}{2}\pi$ v 0, 0 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.48. BL: div. v $\mathbb{R}_-$, 0 v 0, 1 v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $\overline{I} \subset \mathbb{R}_+$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.49. BL: $\frac{1}{2}\pi$ v 0, $\frac{1}{4}\pi$ v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $\overline{I} \subset \mathbb{R}_+$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.50. BL: $\frac{3}{4}\pi$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.51. BL: $-\frac{1}{2}\pi^2$ v $\mathbb{R}_-$, 0 v $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.52. BL: 0 v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.53. BL: v -1 div., $\frac{1}{4}\pi$ v 1, 0 jinak; **STK:** $\pm 1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$; **NSK:** $(\pm 1)\pm$

13.54. BL: $\frac{1}{4}\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.55. BL: 0 v $\mathbb{R}_-$, $\frac{1}{4}\pi$ v 0, $\frac{1}{2}\pi$ v $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.56. BL: $\frac{1}{2}\pi$ v $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.57. BL: div. v bodech $2n - \frac{1}{2}$, kde $n \in \mathbb{Z}$, 0 v bodech $2n + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\pi$ jinak; **STK:** $\overline{I} \cap \{2n \pm \frac{1}{2};\, n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{2n \pm \frac{1}{2};\, n \in \mathbb{Z}\}$; **NSK:** $(2n \pm \frac{1}{2})\pm$, kde $n \in \mathbb{Z}$

13.58. BL: 0 v J; **STK:** $\overline{I} \subset J^*$; **LSK:** J^*; **NSK:** $\pm 1\mp$

13.59. BL: 0 v J; **STK:** J; **LSK:** J; **NSK:** $\emptyset$

13.60. BL: označíme-li $A := \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $B := \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, je $f_k \to \frac{1}{2}\pi$, je-li $A < |x| < B$, $f_k \to \frac{1}{4}\pi$ v bodech $\pm A, \pm B$, $f_k \to 0$, je-li $|x| < A$, nebo $|x| > B$; **STK:** $\overline{I} \cap \{\pm A, \pm B\} = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm A, \pm B\}$; **NSK:** $(\pm A)\pm$, $(\pm B)\pm$

B. Výsledky cvičení 13.61–13.96 jsou uspořádány podobně jako výsledky sub A. Za „**BK**“ je uvedena maximální podmnožina zadaného oboru, v níž řada bodově konverguje; součet řady není uveden, protože je ve většině případů neznámý.

13.61. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.62. BK: $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.63. BK: $\mathbb{R}_+^0$; **STK:** $\mathbb{R}_+^0$; **LSK:** $\mathbb{R}_+^0$; **NSK:** $\emptyset$

13.64. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.65. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.66. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I zd. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $-\infty+$

13.67. BK: $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.68. BK: $\mathbb{R}_+$; **STK:** $\mathbb{R}_+$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $\emptyset$

13.69. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.70. BK: $1 \neq x \in K$, kde $K := (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$; **STK:** $1 \notin \overline{I} \subset K$; **LSK:** $K - \{1\}$; **NSK:** $(1-\sqrt{2})+$, $1\pm$, $(1+\sqrt{2})-$

13.71. BK: $x \notin N_1$, kde $N_1 := \{\frac{1}{2}n\pi;\ n \in \mathbb{Z}\}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_1 = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_1$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_1$, $\pm\infty\mp$

13.72. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.73. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.74. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.75. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.76. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\pm\infty\mp$

13.77. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.78. BK: $\mathbb{R} - \{\pm1\}$; **STK:** $\pm1 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{\pm1\}$; **NSK:** $(\pm1)\pm$

13.79. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.80. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** I zd. omez.; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $-\infty+$

13.81. řada diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$

13.82. BK: $\mathbb{R} - \{0\}$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R} - \{0\}$; **NSK:** $0\pm$

13.83. BK: $\mathbb{R}_+$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_+$; **NSK:** $0+$

13.84. BK: $\mathbb{R}_-$; **STK:** $0 \notin \overline{I}$; **LSK:** $\mathbb{R}_-$; **NSK:** $0-$

13.85. BK: $\mathbb{R}$; **STK:** $\mathbb{R}$; **LSK:** $\mathbb{R}$; **NSK:** $\emptyset$

13.86. řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty}(\sin kx)/k^{\alpha}$ (viz Př. 13.11)

13.87. řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty}(\cos kx)/k^{\alpha}$ (viz Př. 13.11)

13.88. **BK:** $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_2 = \emptyset$, kde $N_2 := \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_2$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_2$, $\pm\infty\mp$

13.89. jako ve cvičení **13.88**

13.90. **BK:** $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_3 = \emptyset$, kde $N_3 := \{\pm 2n\pi;\, n \in \mathbb{N}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_3$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_3$, $\pm\infty\mp$

13.91. **BK:** $\mathbb{R}$; **STK:** $\overline{I} \cap N_4 = \emptyset$, kde $N_4 := \{\pm 2n;\, n \in \mathbb{N}\}$; **LSK:** $\mathbb{R} - N_4$; **NSK:** $x\pm$ pro všechna $x \in N_4$, $\pm\infty\mp$

13.92. řada konverguje jen v bodech $x \equiv 0 \bmod \pi$

13.93. jako ve cvičení **13.90**

13.94. jako ve cvičení **13.86**

13.95. **BK:** $\mathbb{R}_+^0 - N_5$, kde $N_5 := \{2n\pi;\, n \in \mathbb{N}\}$; **STK:** $\overline{I} \cap (\{0\} \cup N_5) = \emptyset$; **LSK:** $\mathbb{R}_+ - N_5$; **NSK:** $0+$, $x\pm$ pro všechna $x \in N_5$, $\pm\infty\mp$

13.96. v $\mathbb{R}_+^0$ řada konverguje (bodově, stejnoměrně, lokálně stejnoměrně), právě když to platí o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos k\pi x)/k^{\alpha}$ (sr. s Př. 13.11, kde místo x píšeme πx)

C. Za číslem každého z cvičení 13.97–13.105 je uveden poloměr konvergence příslušné mocninné řady.

13.97. e	**13.98.** $+\infty$	**13.99.** 1	**13.100.** $\frac{1}{2}$	**13.101.** $+\infty$
13.102. e	**13.103.** 1	**13.104.** 1	**13.105.** e^{-1}	

D. U komplexních Taylorových řad uvádíme kruh konvergence, u reálných řad otevřený interval, který je průnikem kruhu konvergence s reálnou osou. Symbol [...] v horní mezi několika součtů znamená celou část výrazu uvnitř závorek.

13.106. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n+1}$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(2n-2k+1)!}$

13.107. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{4n}$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!\,(4n-2k)!} + \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2}$

13.108. $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=1}^{[(n-1)/3]} \frac{1}{k\,(n-3k)}$

13.109. $\displaystyle\frac{1}{4}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$c_{2n-1} := \frac{(-1)^n \pi}{2n-1}, \quad c_{2n} := \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$$

13.110. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ v $\mathbb{C}$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{[(n+1)/2]} \frac{1}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!}$

13.111. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n}$ v $(-1,1)$, kde $\displaystyle c_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k-1}(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2n-2k-1)!\,(2k+1)}$

13.112. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ v $U(0,1)$, kde pro $n \geq 0$ je

$$c_{2n} := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}\,, \quad c_{2n+1} := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{i}{(2k+1)!}$$

13.113. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$ v $(-1,1)$, kde $\displaystyle c_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!\,(2n-2k-1)!!}{(2k)!!\,(2n-2k)!!\,(2k+1)}$

13.114. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$ v $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, kde $\displaystyle c_n := (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k+1}}{2k+1}$

13.115. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\frac{1}{2}\pi)^{2n}}{(2n)!}$ v $\mathbb{C}$

13.116. $\displaystyle e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ v $\mathbb{C}$

13.117. $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^n}{n!}$ v $\mathbb{C}$

13.118. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-i)^n}{n!}$ v $\mathbb{C}$, kde pro $n \geq 0$ je $c_{2n} := \cos 1$, $c_{2n+1} := i \sin 1$

13.119. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n (x-1)^n$ v $(0,2)$, kde $\displaystyle c_n := \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k}\pi^{2k-1}}{(2k-1)!\,(n-2k+1)}$

13.120. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} c_n x^n$ v $(-1,1)$, kde $\displaystyle c_n := -\sum_{m=2}^{n-1} \Big(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k\,(m-k)\,(n-m)} \Big)$

E. Protože lineární kombinace řešení diferenciální rovnice s nulovou pravou stranou je řešením této rovnice, nemusí uvedené výsledky souhlasit s tím, co vypočetl čtenář. Všechny mocninné řady mají poloměr konvergence $+\infty$, takže jsou řešeními příslušné rovnice v celém $\mathbb{C}$; ve dvou případech se mocninná řada redukuje na polynom.

13.121. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ $(= \cos z)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $(= \sin z)$

13.122. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ $(= \cosh z)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $(= \sinh z)$

13.123. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!!}$

13.124. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k}}{(3k)!}\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k+1}}{(3k+1)!}\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k+2}}{(3k+2)!}$

13.125. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{3j\,(3j-1)}\Big) z^{3k},\ \sum_{k=0}^{\infty} \Big((-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{3j\,(3j+1)}\Big) z^{3k+1}$

13.126. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!!}\,,\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!!}$

13.127. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)!\,k!}$

13.128. Po dosazení $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ do rovnice dostáváme rovnosti $a_0 = a_1 = 0$

a ze vztahů $a_k(k\,(k-1)-1) = 0$ plyne, že $a_k = 0$ i pro $k \geq 2$

13.129. $1 - 5z + 5z^2 - \dfrac{5z^3}{3} + \dfrac{5z^4}{24} - \dfrac{z^5}{120}$

13.130. $15z - 10z^3 + z^5\,,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{(-1)^k}{(2k)!} \prod_{j=1}^{k} (7-2j)\Big) z^{2k}$

14. Funkce několika proměnných

V této kapitole se budeme zabývat některými základními pojmy teorie funkcí několika proměnných; funkce jedné proměnné budeme přitom považovat za zvláštní případ funkcí „několika proměnných“. [1])

Prostory $\mathbb{R}^p$ s $p > 1$ jsme nerozšířili o žádné „nevlastní body“ odpovídající $\pm\infty$ v $\mathbb{R}^*$; mají-li mít další výsledky stejný tvar pro všechny dimenze $p \in \mathbb{N}$, je nutné vyhnout se nekonečným limitám skalárních funkcí. Zavedeme proto tuto úmluvu:

Úmluva. V dalším bude slovo „*limita*“ znamenat vždy „*konečnou limitu*“. [2]) $\square$

Body z obecného $\mathbb{R}^p$ budeme značit

$$x = (x_1, \dots, x_p),\; y = (y_1, \dots, y_p),\; a = (a_1, \dots, a_p),\; b = (b_1, \dots, b_p) \tag{1}$$

apod.; je-li však $p = 2$ resp. $p = 3$, budeme užívat i jiné značení, např. (x, y) nebo (u, v) v $\mathbb{R}^2$ a (x, y, z) nebo (u, v, w) v $\mathbb{R}^3$. Nejčastější označení zobrazení do $\mathbb{R}^q$ bude

$$f = (f_1, \dots, f_q),\; g = (g_1, \dots, g_q); \tag{2}$$

čtenáři je jistě známo, že zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ se nazývají q-**rozměrné vektorové funkce** p (reálných) **proměnných**. Je-li $q = 1$, mluvíme též o **skalárních funkcích**, ale *považujeme je za speciální případ funkcí vektorových.*

Cvičení 14.01. Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}^p$ a nechť f je zobrazení nějaké množiny tvaru $U(a) \cap M$ do $\mathbb{R}^q$. Uvažte, že konvergence v $\mathbb{R}^q$ je konvergencí po souřadnicích (sr. s Cv. 12.7), a dokažte, že

(3) *zobrazení f je spojité v bodě a vzhledem k M, právě když tuto vlastnost mají všechny jeho složky f_j, $j = 1, \dots, q$.*

Dále: Za předpokladu, že $a \in \operatorname{der} M$ a že f je definováno na nějaké množině tvaru $P(a) \cap M$, dokažte, že

$$\lim_{x \to a,\, x \in M} f(x) = A = (A_1, \dots, A_q) \Leftrightarrow \lim_{x \to a,\, x \in M} f_j(x) = A_j \text{ pro } j = 1, \dots, q. \tag{4}$$

Jinými slovy, *spojitost i existenci limity lze ověřovat „po složkách“, limitu lze navíc „po složkách“ i počítat.*

Poznámka 14.1. *Limitní přechod v $\mathbb{R}^p$ však nelze* (až na triviální případy) *„rozkládat“ na p limitních přechodů v jednotlivých proměnných!* Ani v $\mathbb{R}^2$ není totiž

[1]) Řada autorů mluví o funkcích *více* proměnných, ale ani při této terminologii nejsou funkce jedné proměnné vyloučeny. Jistě se však nelze divit, že se přesnější termín, např. „funkce libovolného kladného konečného počtu proměnných“, neužívá.

[2]) Má-li tedy některá skalární funkce nekonečnou limitu podle původní terminologie, budeme od tohoto okamžiku říkat, že *limitu nemá*.

žádná souvislost mezi *dvojnou limitou*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \tag{5}$$

a *dvojnásobnými limitami*

$$\lim_{x\to a}\big(\lim_{y\to b} f(x,y)\big), \quad \lim_{y\to b}\big(\lim_{x\to a} f(x,y)\big). \tag{6}$$

Příklad 14.1^o^. 1. Je-li

$$f(x,y) := \left\{\begin{array}{cc} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}\,, & \text{je-li } x\neq 0\neq y \\ 0 & \text{jinak} \end{array}\right\}, \tag{7'}$$

je $|f(x,y)| \le x^2+y^2 \to 0$ pro $(x,y)\to(0,0)$, takže limita (5) (kde $(a,b)=(0,0)$) je nulová. Protože však ani $\lim_{y\to 0} f(x,y)$ pro $x\neq 0$, ani $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ pro $y\neq 0$ neexistuje, neexistuje žádná z limit (6).

2. Obráceně, pro funkci f definovanou podmínkami

$$f(x,y) := \left\{\begin{array}{l} 1, \ \text{je-li } y = x \neq 0 \\ 0 \ \ \text{jinak} \end{array}\right\} \tag{7''}$$

je $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ pro každé $x\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$ pro každé $y\in\mathbb{R}$, takže i

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 0\,, \quad \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) = 0\,.$$

Dvojná limita funkce f v počátku však neexistuje, protože její limita vzhledem k přímce o rovnici $y=x$ je rovna 1, zatímco limita např. vzhledem k oběma osám souřadnicovým je nulová.

3. Nechť g je Dirichletova funkce a nechť $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definována podmínkami

$$f(x,y) := \left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{je-li } y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \\ y\,g(x), & \text{je-li } y\in\mathbb{Q} \end{array}\right\}. \tag{7'''}$$

Pak je $|f(x,y)| \le |y|$ pro všechna $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, a v důsledku toho je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \ \text{ a } \ \lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) = 0$$

(protože $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$). Protože však $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ neexistuje pro žádné racionální číslo $y\neq 0$, dvojnásobná limita

$$\lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big) \ \text{neexistuje}.$$

Jedna z limit (6) tedy neexistuje, druhá je – stejně jako limita (5) – rovna nule.

Poznámka 14.2. Připomeňme v této souvislosti tato jednoduchá tvrzení z teorie metrických prostorů:

(8) $$a \in N \subset M,\ a \in \operatorname{der} N,\ \lim_{x\to a,\ x\in M} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to a,\ x\in N} f(x) = A.$$

Obráceně tedy:

(8′) *Je-li* $N_1 \cup N_2 \subset M$, $a \in \operatorname{der} N_1 \cap \operatorname{der} N_2$ *a má-li* f *vzhledem k množinám* N_1, N_2 *různé limity, limita* f *vzhledem k* M *neexistuje.*

Často se však hodí i toto tvrzení:

(9) *Je-li* $N_1 \cup N_2 = M$, $a \in \operatorname{der} N_1 \cap \operatorname{der} N_2$ *a má-li* f *vzhledem k oběma množinám* N_1, N_2 *touž limitu* A, *existuje i její limita vzhledem k* M *a rovná se* A.

Cvičení 14.02. Dokažte, že pro každé dvě q-rozměrné vektorové funkce f a g (definované v nějakém m. p. (X, ρ)) platí:

1. *Jsou-li obě funkce* f, g *spojité v bodě* a (*resp. na množině* M), *platí totéž o funkcích* $f \pm g$ a $(f \cdot g)$.

2. *Je-li navíc* $q = 1$ (*takže* f, g *jsou skalární funkce*), *je v bodě* a *spojitý i součin* fg, *a pokud je* $g(a) \neq 0$, *i podíl* f/g.

Podobně: *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, *platí tato tvrzení*:

1′. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$, $\lim_{x\to a}(f \cdot g) = (A \cdot B)$.

2′. *Je-li navíc* $q = 1$, *je* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *a v případě, že* $B \neq 0$, *platí i rovnost* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$. $\square$

Definujeme-li hodnoty $f(x)$ funkce f nějakým „vzorcem“ neboli „výrazem závislým na x“, považujeme za definiční obor funkce f množinu všech x, pro něž má „výraz“ smysl – pokud se z nějakých důvodů nerozhodneme, že definiční obor má být menší. [3]) Před cvičením uveďme tři příklady, které problém ilustrují:

Příklad 14.2$^{\mathbf{o}}$. 1. Řekneme-li, že funkci f dvou proměnných definujeme předpisem $f(x, y) := x/y$, rozumíme tím, že jejím definičním oborem má být maximální podmnožina M roviny $\mathbb{R}^2$, v jejímž každém bodě (x, y) má pravá strana smysl. V našem případě je tedy $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \neq 0\}$, tj. rovina bez osy x. Tato množina je otevřená a funkce f je v ní zřejmě spojitá.

2. Funkce f tří proměnných definovaná rovností $f(x, y, z) := \lg(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ má definiční obor $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, což je otevřená jednotková koule v $\mathbb{R}^3$. I tato funkce f je ve svém definičním oboru spojitá.

3. Definičním oborem funkce

$$f(x, y) := \operatorname{sgn} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

---

[3]) Omlouvám se za užívání nedefinovaných slov „vzorec“ resp. „výraz“, které nezbývá než chápat jen intuitivně. Úlohy, které čtenář najde v následujícím cvičení, se však v literatuře poměrně často vyskytují, a nebylo by proto namístě vyhýbat se jim.

je množina $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, tedy rovina bez počátku; funkce f není spojitá v žádném bodě osy y, zatímco v množině $\mathbb{R}^2 - \{(x,y);\, x \neq 0\}$ je spojitá.

4. Popišme geometricky definiční obor funkce

$$f(x,y,z) := \frac{\arcsin xy}{z^2 - 1}\,.$$

Hranici množiny $M := \{(x,y);\, -1 \leq xy \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$, která obsahuje obě souřadnicové osy, tvoří 4 větve hyperbol $y = \pm 1/x$. Definičním oborem funkce f je množina $M \times \mathbb{R}$, která obsahuje roviny xz a yz a jejíž hranici tvoří hyperbolické válce s popisem $y = \pm 1/x$, tedy sjednocení všech přímek rovnoběžných s osou z a procházejících body $(x,y,0)$, kde $xy = \pm 1$, z něhož byly odstraněny všechny body (x,y,z), pro něž je $z = \pm 1$. Funkce f je v této množině spojitá.

Cvičení

U každé z následujících funkcí „definovaných vzorcem“ najděte maximální množinu M, na níž má pravá strana smysl, považujte ji za definiční obor příslušné funkce f a dokažte, že je v něm spojitá. Definiční obor popište geometricky.

14.03$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

14.04$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x^2-y^2}$

14.05$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = x^{\lg y}$

14.06$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \arcsin(\sqrt{x^2+y^2} - 2)$

14.07. $f(x,y,z) = \lg(x+y+z-1)$

14.08. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^y + y^z + z^x)$

14.09. $f(x,y,z) = \arccos(|x| + |y| + |z|)$

14.10. $f(x,y) = (\lg(x^2+y^2-1)\,,\, \lg(4-x^2-y^2))$

14.11. $f(x,y) = \Big(\dfrac{x+y}{(x-y)^2-1}\,,\, \dfrac{x-y}{(x+y)^2-1}\Big)$

14.12. $f(x,y,z) = \Big(xyz\sin\dfrac{1}{xyz}\,,\, \dfrac{\cos xyz}{xyz}\Big)$

14.13. $f(x,y,z) = \Big(\dfrac{yz}{\sin x}\,,\, \dfrac{xz}{\sin y}\,,\, \dfrac{xy}{\sin z}\Big)$

14.14. $f(x,y,z) = \Big(\dfrac{1}{e^x - e^{y+z}}\,,\, \dfrac{1}{e^y - e^{z+x}}\,,\, \dfrac{1}{e^z - e^{x+y}}\Big)$

14.15. $f(x,y,z,u) = \dfrac{x^2+y^2+z^2+u^2+1}{x^2+y^2+z^2+u^2-1}$

Dokažte tato tvrzení o limitách v počátku prostorů $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$:

14.16$^\mathbf{o}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neexistuje

14.17$^\mathbf{o}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

14.18$^\mathbf{o}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = +\infty$

14.19$^\mathbf{o}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{|xy|+|x-y|}$ neexistuje

14.20$^\mathbf{o}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),\,(x,y)\in K} \frac{\sin xy}{xy} = 1,$ je-li $K := \mathbb{R}_+^2$

14.21$^\mathbf{o}$. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\lg(x^2+y^2) = 0$

14.22. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{1-\cos(x+y)}$ neexistuje

14.23. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2+y^2+z^2)^\alpha \sin\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = 0$ pro každé $\alpha\in\mathbb{R}_+$

14.24. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\exp(-1/(x^2+y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} = 0$ pro každé $\alpha\in\mathbb{R}_+$

14.25. $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|xyz|}{|xyz|+|x^2-yz|+|y^2-xz|+|z^2-xy|}$ neexistuje

* * *

Je-li $a\in\mathbb{R}$ a je-li f zobrazení nějakého okolí $U(a)\subset\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^q$, definujeme **derivaci** funkce f v bodě a rovností

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,, \tag{10}$$

má-li její pravá strana smysl.

Poznámka 14.3. Definice derivace vektorové funkce zobecňuje pojem derivace skalární funkce (reálné proměnné), protože zavedená úmluva vylučuje nekonečné derivace skalárních funkcí. Dodejme, že ve vektorové analýze by nekonečné derivace složek vektorových funkcí vedly většinou jen ke komplikacím.

Poznámka 14.4. Je jistě zřejmé, že *derivace $f'(a)$ funkce $f=(f_1,\dots,f_q)$ existuje, právě když existují derivace $f_j'(a)$ pro všechna $j=1,\dots,q$, načež*

$$f'(a) = (f_1'(a),\dots,f_q'(a))\,. \tag{11}$$

Jinými slovy: *Existenci i hodnotu derivace vektorové funkce reálné proměnné lze ověřit a počítat „po složkách“.* $\square$

Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$, nechť $a \in \mathbb{R}^p$ a $v \in \mathbb{R}^p$; **derivace funkce f v bodě a ve směru vektoru v** je pak definována rovností

$$\partial_{(v)} f(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}, \tag{12}$$

má-li její pravá strana smysl. Pro všechny takové derivace se užívá souhrnný název **směrové derivace**.

Poznámka 14.5. Klademe-li $p = 1$, $v = 1$, přejde (12) v (10); *směrové derivace jsou tedy zobecněním derivací ve smyslu definice* (10). V definici směrové derivace není vyloučen případ, že v je nulový vektor (i když podle běžné terminologie takový vektor žádný směr nemá). Situace je však velmi jednoduchá: *Je-li $v = 0$, je $\partial_{(v)} f(a) = 0$, právě když je funkce f v bodě a definována.*

Směrová derivace je *homogenní* v tomto smyslu: *Je-li $v \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$, je*

$$\partial_{(\lambda v)} f(a) = \lambda \partial_{(v)} f(a), \ \text{má-li pravá strana rovnosti smysl.} \tag{13}$$

Jak však ukáže následující příklad, *směrová derivace není obecně aditivní* (*tedy obecně ani lineární*) *funkcí vektoru v.*

Příklad 14.3$^{\mathbf{o}}$. Nechť

$$f(x,y) := \left\{ \begin{matrix} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{matrix} \right\} \tag{14}$$

a nechť $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$; pak je

$$\partial_{(v)} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 v_1^2 \cdot t v_2}{t \cdot t^2 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

což jistě není aditivní vzhledem k v. (Derivace ve směrech $(1,0)$ a $(0,1)$ jsou nulové, zatímco derivace ve směru $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ je rovna $\frac{1}{2}$.) $\square$

Označení. *Jednotkový vektor i-té souřadnicové osy*, tedy vektor, který má i-tou složku rovnou 1, zatímco ostatní složky jsou nulové, budeme v dalším značit e_i. [4])

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$, nechť $a \in \mathbb{R}^p$ a nechť $1 \leq i \leq p$; **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme rovností

$$\partial_i f(a) := \partial_{(e_i)} f(a), \tag{15}$$

má-li její pravá strana smysl. $\square$

Má-li i-tá proměnná nějaký název, např. x_i, $y_i, \ldots$, užíváme pro právě zavedenou parciální derivaci i označení

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}, \ \frac{\partial f(a)}{\partial y_i}, \ \ldots .$$

[4]) V označení chybí dimenze příslušného prostoru, protože bude vždy zřejmá ze souvislosti.

Značíme-li v $\mathbb{R}^3$ proměnné x, y, z a je-li $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, můžeme příslušné parciální derivace zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z}.$$

Poznámka 14.6. Podle definice je parciální derivace $\partial_i f(a)$ rovna

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\cdots,a_p) - f(a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_p)}{t}; \tag{16}$$

v čitateli se mění pouze i-tá souřadnice, ostatní souřadnice jsou konstantní. Položíme-li tedy

$$\varphi_i(t) := f(a_1,\cdots,a_{i-1},t,a_{i+1},\cdots,a_p), \tag{17}$$

je patrné, že

$$\partial_i f(a) = \varphi_i'(a_i). \tag{18}$$

Parciální derivování podle i-té proměnné se tedy redukuje na „obyčejné“ derivování podle této proměnné, při němž se ostatní proměnné chovají jako konstanty.

Čtenář snadno ověří, že pro *vektorové* funkce f, g platí rovnost

$$\partial_i(f \pm g)(a) = \partial_i f(a) \pm \partial_i g(a), \tag{19}$$

má-li pravá strana smysl; pro *skalární* funkce je navíc

$$\partial_i(fg)(a) = \partial_i f(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot \partial_i g(a), \tag{20}$$

má-li pravá strana smysl, a

$$\partial_i\Big(\frac{f}{g}\Big)(a) = \frac{\partial_i f(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot\partial_i g(a)}{g^2(a)}, \tag{21}$$

má-li pravá strana smysl.

Příklad 14.4$^{\mathbf{o}}$. 1. Definičním oborem funkce $f(x,y) := x^y$ $(= \exp(y \lg x))$ je otevřená polorovina $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$; v každém jejím bodě (x,y) je

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \lg x.$$

2. Vektorová funkce $f(x,y,z) := \big(e^{xyz},\, z\sin(x/y)\big)$ má ve svém definičním oboru $\{(x,y,z);\, y \neq 0\}$ (geometricky: $\mathbb{R}^3$ bez roviny xz) tyto parciální derivace:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \Big(yz\,e^{xyz}, \frac{z}{y}\cos\frac{x}{y}\Big), \quad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \Big(xz\,e^{xyz}, -\frac{xz}{y^2}\cos\frac{x}{y}\Big),$$
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \Big(xy\,e^{xyz}, \sin\frac{x}{y}\Big).$$

3. Funkce $f(x,y)$ definovaná v $\mathbb{R}^2$ předpisem $f(x,y) := 1$, je-li y racionální, a $f(x,y) := 0$, je-li y iracionální, má parciální derivaci podle x rovnou 0 všude v $\mathbb{R}^2$, zatímco její parciální derivace podle y neexistuje nikde. $\square$

Definice. Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ a nechť $a \in \mathbb{R}^p$; říkáme, že lineární forma $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ je **diferenciál funkce f v bodě** a, je-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\| h \|} = 0 . \tag{22}$$

Tento diferenciál (tedy formu L) budeme značit $Df(a)$, jeho hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^p$ (tj. q-rozměrný vektor $L(h)$) zapíšeme ve tvaru $Df(a;h)$. Existuje-li $Df(a)$, říkáme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a. $\square$

Je zřejmé, že *funkce $f = (f_1, \dots, f_q)$ je diferencovatelná v bodě a, právě když jsou v bodě a diferencovatelné všechny funkce f_j, kde $j = 1, \dots, q$; je-li podmínka splněna, je*

$$Df(a) = (Df_1(a), \dots, Df_q(a)) . \quad \square \tag{23}$$

Poznámka 14.7. Jak je dobře známo z algebry, existuje pro každou lineární formu $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ právě jedna matice

$$\Lambda = (\lambda_{ji})_{1 \le j \le q,\, 1 \le i \le p} \tag{24}$$

typu $q \times p$ tak, že rovnost $y = L(x)$ je ekvivalentní s maticovou rovností

$$y = \Lambda x , \tag{25}$$

kde vpravo je maticový součin matice Λ s vektorem x, který je třeba v této souvislosti považovat za vektor *sloupcový*, tedy za matici typu $p \times 1$; vlevo je sloupcový vektor y, tentokrát ovšem matice typu $q \times 1$. (Chceme-li zdůraznit, že y a x jsou sloupcové vektory, můžeme psát např. $y^{sl} = \Lambda x^{sl}$.)

Rovnost (25) lze podrobněji napsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1p} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{q1} & \lambda_{q2} & \dots & \lambda_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} , \tag{25'}$$

což je ekvivalentní se zápisem

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_{11} x_1 + \lambda_{12} x_2 + \ldots + \lambda_{1p} x_p , \\ y_2 &= \lambda_{21} x_1 + \lambda_{22} x_2 + \ldots + \lambda_{2p} x_p , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ y_q &= \lambda_{q1} x_1 + \lambda_{q2} x_2 + \ldots + \lambda_{qp} x_p . \end{aligned} \tag{26}$$

Λ se nazývá **matice lineární formy** L, L je obráceně **lineární forma daná maticí** Λ. Je-li $L = (L_1, \dots, L_q)$ a jsou-li e_i jednotkové vektory souřadnicových os v $\mathbb{R}^p$, je

$$\lambda_{ji} = L_j(e_i) \text{ pro } i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, q. \quad \square \tag{27}$$

Definice. Je-li zobrazení f z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ diferencovatelné v bodě a, definujeme **derivaci** f **v bodě** a jako matici lineární formy $Df(a)$ a značíme ji $f'(a)$.

Poznámka 14.8. Jak snadno nahlédneme, je právě zavedená derivace zobecněním derivace (10); ztotožníme-li jednoelementovou matici s jejím jediným elementem, je právě zavedená derivace také zobecněním derivace reálné funkce reálné proměnné podle běžné definice – nezapomeňme, že připouštíme jen konečné derivace.

Věta 14.1. *Každá funkce f má v daném bodě a nejvýše jeden diferenciál.*

Věta 14.2. *Je-li funkce f v bodě a diferencovatelná, je v něm spojitá.*

Věta 14.3. *Je-li zobrazení $f = (f_1, \dots, f_q)$ z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ diferencovatelné v bodě $a \in \mathbb{R}^p$, je*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_p f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_p f_2(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q(a) & \partial_2 f_q(a) & \dots & \partial_p f_q(a) \end{pmatrix}; \tag{28}$$

v bodě a pak existují všechny směrové derivace $\partial_{(v)} f(a)$ a je

$$\partial_{(v)} f(a) = Df(a; v) = f'(a)v \text{ pro každé } v \in \mathbb{R}^p. \tag{29}$$

Věta 14.4. *Jsou-li všechny parciální derivace $\partial_i f_j$, kde $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, spojité v bodě a, je funkce f v bodě a diferencovatelná.*

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená množina. Říkáme, že **funkce** $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ **je třídy** C_1 neboli **spojitě diferencovatelná v** Ω, jsou-li všechny její parciální derivace $\partial_i f$, $i = 1, \dots, p$, spojité v Ω. $\square$

Věta 14.4 je sice nejdůležitějším praktickým kritériem diferencovatelnosti, čtenář se však v následujícím cvičení sám přesvědčí, že *podmínka v ní uvedená je jen postačující, nikoli nutná.*

Cvičení 14.26$^{\mathbf{o}}$. Dokažte, že reálná funkce f definovaná v $\mathbb{R}^p$ podmínkami

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2 \sin \dfrac{1}{\|x\|^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases} \tag{30}$$

je v počátku $0 \in \mathbb{R}^p$ diferencovatelná, zatímco všechny její parciální derivace jsou v tomto bodě nespojité. $\square$

Věta 14.5. (Věta o diferencování superpozice.) *Je-li zobrazení f z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ diferencovatelné v bodě $a \in \mathbb{R}^p$ a je-li zobrazení g z $\mathbb{R}^q$ do $\mathbb{R}^r$ diferencovatelné v bodě $f(a)$, je superpozice $h := g \circ f$ diferencovatelná v bodě a, přičemž*

$$Dh(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)\,, \quad h'(a) = g'(f(a))\,f'(a)\,. \tag{31}$$

Poznámka 14.9. Podle věty 14.3 lze druhou z rovností (31) rozepsat takto:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 h_1 & \dots & \partial_p h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 h_r & \dots & \partial_p h_r \end{pmatrix}(a) = \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 g_1 & \dots & \partial_q g_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 g_r & \dots & \partial_q g_r \end{pmatrix}(f(a)) \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q & \dots & \partial_p f_q \end{pmatrix}(a)\,.$$

Pro každé $i = 1, \dots, p$ a každé $k = 1, \dots, r$ je tedy

$$\partial_i h_k(a) = \sum_{j=1}^{q} \partial_j g_k(f(a)) \cdot \partial_i f_j(a)\,. \tag{33}$$

Značíme-li $x = (x_1, \dots, x_p)$ a $y = (y_1, \dots, y_q)$ proměnné v $\mathbb{R}^p$ a v $\mathbb{R}^q$, získáme místo (33) tento dobře zapamatovatelný a velmi důležitý vzorec pro diferencování superpozice:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(a))\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \ \text{ pro } \ i = 1, \dots, p,\ k = 1, \dots, r, \tag{34}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a))\,\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \ \text{ pro } \ i = 1, \dots, p. \tag{35}$$

Příklad 14.5. Nechť $f = (f_1, f_2, f_3)$ je třírozměrná vektorová funkce dvou (reálných) proměnných u, v a nechť g je (skalární nebo vektorová) funkce tří proměnných x, y, z. Hodnoty jejich superpozice $h = g \circ f$ získáme z hodnot $g(x, y, z)$ funkce g tím, že x, y, z nahradíme po řadě výrazy $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$, $f_3(u, v)$. Jsou-li splněny předpoklady V. 14.5, je

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial u}\,, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial v}\,, \tag{36}$$

přičemž parciální derivace funkcí h a f_j jsou v bodě $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, parciální derivace funkce g v bodě $f(u, v) \in \mathbb{R}^3$.

Příklad 14.6. Nechť f je čtyřrozměrná vektorová funkce reálné proměnné t, nechť g je funkce čtyř proměnných u_j, $1 \leq j \leq 4$, a nechť $h = g \circ f$. Za předpokladů V. 14.5 pak je

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial g}{\partial u_j}(f(t))\, f_j'(t)\,. \tag{37}$$

Protože h a f_j jsou funkce jedné proměnné, neužili jsme symbol pro parciální, ale pro „obyčejnou" derivaci; nebylo by samozřejmě chybné napsat znak parciální derivace (protože parciální derivace funkce jedné reálné proměnné je identická s její „obyčejnou" derivací), ale takto je na první pohled vidět, které funkce v (37) jsou funkcemi jen jedné proměnné.

Příklad 14.7$^{\mathbf{o}}$. Pozor! *Rovnosti* (32) – (35) *obecně neplatí za pouhého předpokladu, že jejich pravé strany mají smysl;* *diferencovatelnost je ve větě* 14.5 *podstatná!*

Je-li totiž např. $g(x,y) := \sqrt{|xy|}$ pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a $f(t) := (t,t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, není superpozice $h(t) := g(f(t)) = |t|$ diferencovatelná v bodě $t = 0$, ale výraz

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)\, f_1'(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\, f_2'(0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$$

má dobrý smysl. $\square$

Vztahy mezi spojitostí a diferencovatelností funkce a existencí resp. linearitou jejích směrových derivací nepatří mezi nejjednodušší; tím spíše je nutné vyvarovat se intuitivních soudů nepodložených exaktní argumentací. Následující cvičení dává možnost aspoň trochu nahlédnout do spleti možností na první pohled netušených.

Cvičení 14.27$^{\mathbf{o}}$. V počátku $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nechť jsou funkce f, g a h rovny nule, zatímco v bodech $(x,y) \neq (0,0)$ nechť je

$$f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}\,, \quad g(x,y) := \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}\,, \quad h(x,y) := \frac{x^5 y^2}{x^8 + y^4}\,. \tag{38}$$

Ověřte platnost těchto tvrzení:

1) Všechny tři funkce f, g, h jsou na obou souřadnicových osách (identicky) rovny 0 a jsou spojité na každé přímce v $\mathbb{R}^2$.[5])

2) Funkce f není v počátku spojitá, tedy ani diferencovatelná, ačkoli všechny její směrové derivace tam existují.

3) Funkce g není v počátku spojitá, tedy ani diferencovatelná, přestože se směrová derivace $\partial_{(v)}\, g(0,0)$ rovná 0 pro každé $v \in \mathbb{R}^2$, takže je lineární funkcí vektoru v.

4) Funkce h je v počátku spojitá, ale není tam diferencovatelná, přestože všechny její směrové derivace $\partial_{(v)}\, h(0,0)$ jsou rovny nule.

[5]) Jde zejména o přímky procházející počátkem, protože spojitost na jiných přímkách je zřejmá.

Rada: K důkazu nespojitosti funkcí f a g vyšetřujte tyto funkce na parabole s rovnicí $y = x^2$; spojitost funkce h dokážete užitím nerovnosti $x^4y^2 \le x^8 + y^4$. Kdyby byla funkce h diferencovatelná v počátku, byl by tam její diferenciál nulovou formou (proč?) a šlo by o to, zdali má výraz $h(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}$ pro $(x,y) \to (0,0)$ limitu 0 – zkuste však opět dosadit $y = x^2$. ◇

* * *

Je-li f diferencovatelná skalární funkce p proměnných, je její derivace matice typu $1 \times p$, takže ji lze považovat i za p-rozměrný vektor. Nazývá se pak **gradient** funkce f a značí se $\operatorname{grad} f$; je tedy

$$\operatorname{grad} f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_p f)\,. \tag{39}$$

Hodnotu funkce $\operatorname{grad} f$ v bodě $a \in \mathbb{R}^p$ budeme zpravidla značit $\operatorname{grad} f(a)$, i když bychom správně měli psát $(\operatorname{grad} f)(a)$.

Pro každou diferencovatelnou skalární funkci f lze hodnoty diferenciálu v bodě $a \in \mathbb{R}^p$ (tedy směrové derivace) napsat i jako skalární součin:

$$Df(a;v) = \partial_{(v)} f(a) = (\operatorname{grad} f(a) \cdot v) \quad \text{pro každé} \quad v \in \mathbb{R}^p\,. \tag{40}$$

V případě, že f je funkce jedné proměnné, měří $f'(a)$ rychlost změny této funkce v bodě a. Je-li f funkce p proměnných, měří rychlost změny funkce f v bodě a na přímce určené bodem a a jednotkovým vektorem e_i parciální derivace $\partial_i f(a)$, zatímco na obecné přímce určené bodem a a *jednotkovým* vektorem v hraje podobnou úlohu směrová derivace $\partial_{(v)} f(a)$. [6])

Následující cvičení ukazuje, ve kterých směrech se f mění nejrychleji.

Cvičení 14.28. Užijte (40) spolu s dobře známou identitou [7])

$$(V \cdot W) = \|V\| \cdot \|W\| \cdot \cos\alpha\,, \tag{41}$$

kde α je úhel sevřený vektory V, W, a dokažte, že *za předpokladu, že* $\operatorname{grad} f(a) \ne 0$, *platí toto tvrzení:*

(42) *Na jednotkové sféře* $\|v\| = 1$ *nabývá derivace* $\partial_{(v)} f(a)$ *svou maximální* (*resp. minimální*) *hodnotu pro* $v = \operatorname{grad} f(a)/\|\operatorname{grad} f(a)\|$ (*resp. pro* $v = -\operatorname{grad} f(a)/\|\operatorname{grad} f(a)\|$).

Je-li tedy $\operatorname{grad} f(a) \ne 0$*, má tento vektor směr největšího růstu funkce* f *v bodě* a*, zatímco ve směru* $-\operatorname{grad} f(a)$ *funkce* f *nejrychleji klesá.*

[6]) Podmínku $\|v\| = 1$ je nutné klást proto, že směrová derivace $\partial_{(v)} f(a)$ nezávisí jen na směru vektoru v, ale je přímo úměrná normě tohoto vektoru – sr. s (13). Máme-li srovnávat rychlosti růstu, je třeba užívat na každé přímce procházející bodem a stejné měřítko.

[7]) Viz např. [20].

Poznámka 14.10. Cílem Cv. 14.29 − 14.52 je procvičení parciálního derivování a nalezení bodů, v nichž je daná funkce spojitá, aniž má spojitou derivaci; cílem naopak *není* řešit problém, zdali do definičního oboru funkce tvaru $g(x)^{h(x)}$ máme započítat i některé body, v nichž g není kladná. [8]) V těchto cvičeních budeme v případě, že h je nekonstantní (reálná) funkce, definovat

$$g(x)^{h(x)} := \exp(h(x) \lg(g(x)));$$

definičním oborem této funkce je pak množina $\{x \in \mathbb{R}^p;\ g(x) \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \in \mathbb{R}\}$.

Cvičení

Pro každou z následujících funkcí najděte definiční obor a dokažte, že je v něm spojitá; pak najděte maximální otevřenou množinu Ω, v níž je daná funkce třídy C_1, a vypočtěte tam její derivaci.

14.29$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4 - y^2}$

14.30$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

14.31$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \sqrt{xy}$

14.32$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

14.33$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \arcsin x^y$

14.34$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \arccos \dfrac{2(x+y)}{(x+y)^2 + 1}$

14.35$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = (\lg x)^{\lg y}$

14.36$^{\mathbf{o}}$. $f(x,y) = \lg(x^2 + y^2 - 1)$

14.37. $f(x,y,z) = x^{y^z}$

14.38. $f(x,y,z) = \sqrt{|xy^2 z^3|}$

14.39. $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2)/z^2}$

14.40. $f(x,y,z) = \sin(x \sin(y \sin z))$

14.41. $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\left(x \sin \dfrac{y}{z}\right)$

14.42. $f(x,y,z) = \arccos \dfrac{1}{\cosh(x^2 + y^2 + z^2)}$

14.43. $f(x,y) = \left(xy \sin \dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x} \cos xy\right)$

---

[8]) Pro funkce jedné proměnné jsme definiční obor funkce dané „vzorcem“ definovali jako sjednocení všech intervalů, v nichž má vzorec všude smysl. Viz str. 53 a 85 Úvodu.

14.44. $f(x,y) = \left(y^{\sin x}, x^{\sin y}\right)$

14.45. $f(x,y) = \left(\lg xy\,,\ \lg \dfrac{x}{y},\ \lg \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$

14.46. $f(x,y,z) = \left(\arcsin \sqrt{x^2+z^2}\,,\ \arccos \sqrt{y^2+z^2}\,\right)$

14.47. $f(x,y,z) = \left(xe^{yz}, ye^{zx}, ze^{xy}\right)$

14.48. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y^2+z^2}\,,\ \dfrac{y}{z^2+x^2}\,,\ \dfrac{z}{x^2+y^2}\right)$

14.49. $f(x,y,z,u) = \operatorname{arctg} \dfrac{xy^2}{zu^2}$

14.50. $f(x,u,z,u) = (x^{yz/u},\ u^{x/yz})$

14.51. $f(x,y,z,u) = \left(\lg(1+x^2y^2+z^2u^2),\ \operatorname{arctg}(xy+zu),\ \operatorname{arccotg} \dfrac{xy}{zu}\right)$

14.52. $f(x,y,z,u) = (\,\sqrt[4]{xy}\,,\ \sqrt[4]{yz}\,,\ \sqrt[4]{zu}\,,\ \sqrt[4]{ux}\,)$

* * *

Je-li f dvojrozměrná vektorová funkce třídy C_1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jsou její **divergence** a **rotace** definovány (v Ω) rovnostmi

(43) $$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} f := \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\,;$$

značíme-li proměnné x, y, je tedy

(43′) $$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad \text{a} \quad \operatorname{rot} f := \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\,.$$

Divergence a rotace trojrozměrné vektorové funkce f třídy C_1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se definuje takto:

(44) $$\operatorname{div} f := \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3\,,$$

(45) $$\operatorname{rot} f := \left(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1\right);$$

značíme-li proměnné x, y, z, je tedy

(44′) $$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\,,$$

(45′) $$\operatorname{rot} f := \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Cvičení

Pro úsporu místa budeme v dalších cvičeních této kapitoly značit

(46) $$r := \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad R := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,;$$

úkolem Cv. 14.53 – 14.66 je najít u každé z funkcí f maximální otevřenou množinu Ω, v níž je f třídy C_1, a v Ω pak vypočítat $\operatorname{div} f$ a $\operatorname{rot} f$.

14.53. $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{r}$

14.54. $f(x,y) = \dfrac{(-y,x)}{r}$

14.55. $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{r^2}$

14.56. $f(x,y) = \dfrac{(x,y)}{r^3}$

14.57. $f(x,y) = (x,y) \cdot \lg r^2$

14.58. $f(x,y) = (x,y) \cdot \operatorname{arctg} r$

14.59. $f(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{R}$

14.60. $f(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{R^2}$

14.61. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \lg R$

14.62. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{R}$

14.63. $f(x,y,z) = \dfrac{(yz, zx, xy)}{R}$

14.64. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right) \cdot \lg R$

14.65. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot xyz$

14.66. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot e^R$

* * *

Pro každou z dále uvedených funkcí f dokažte, že má v daném bodě a diferenciál, a pro uvedený vektor v vypočtěte $Df(a;v)$ (neboli $\partial_{(v)} f(a)$).

14.67$^{\mathbf{O}}$. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $a = (1,1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.68$^{\mathbf{O}}$. $f(x,y) = \lg(x + y^2 - 4)$, $a = (1,-2)$, $v = (v_1, v_2)$

14.69$^{\mathbf{O}}$. $f(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y)$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi)$, $v = (v_1, v_2)$

14.70$^{\mathbf{O}}$. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $a = (1,-1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.71. $f(x,y,z) = xy^2z^3 \exp(-(x + y^2 + z^3))$, $a = (1,1,-1)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.72. $f(x,y,z) = \arccos \dfrac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$, $a = (0,0,-2)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.73. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $a = (x,y,z) \neq (0,0,0)$,
$v = \operatorname{grad} f(a) / \| \operatorname{grad} f(a) \|$

14.74. $f(x,y) = (\lg(x+y), \lg(x-y))$, $a = (2,-1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.75. $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, $a = (-1,3)$, $v = (1,3)$

14.76. $f(x,y) = \left(x^y, y^x, (xy)^{xy}\right)$, $a = (1,1)$, $v = (v_1, v_2)$

14.77. $f(x,y) = (x \sin y, y \sin x, xy)$, $a = (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$, $v = (v_1, v_2)$

14.78. $f(x,y,z) = (x^2 z, y^2 z)$, $a = (1,2,3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.79. $f(x,y,z) = \left(\lg \dfrac{xy}{z}, \lg \dfrac{yz}{x}, \lg \dfrac{zx}{y}\right)$, $a = (2,2,2)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.80. $f(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \exp(x^2 + y^2 + z^2)$, $a = (1,-1,0)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$

14.81. $f(x,y,z,u) = (x^2y, z^2u)$, $a = (1,-1,1,-1)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

14.82. $f(x,y,z,u) = (xyz, xyu, xzu, yzu)$, $a = (1,0,1,0)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

* * *

Parciální derivace $\partial_i f$, $i = 1, \dots, p$, zobrazení f z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ se podrobněji nazývají **parciální derivace prvního řádu** nebo **řádu** 1. Parciální derivace vyšších řádů se definují indukcí: Předpokládejme, že pro některé $n \in \mathbb{N}$ a pro jistou n-tici čísel $i_1, \dots, i_n$, z nichž každé leží v množině $\{1, \dots, p\}$, je definována **parciální derivace**

$$\partial_{i_1 \dots i_n} f \tag{47}$$

n**-tého řádu** (neboli **řádu** n) podle i_1-ní, … , i_n-té proměnné. Je-li $1 \le i_{n+1} \le p$, položíme

$$\partial_{i_1 \dots i_n i_{n+1}} f := \partial_{i_{n+1}} (\partial_{i_1 \dots i_n} f)\,, \tag{48}$$

má-li pravá strana smysl. Funkci f je výhodné prohlásit za **derivaci nultého řádu** neboli **řádu** 0.

Jmenují-li se proměnné např. $x_1, \dots, x_p$, značíme derivaci (47) také

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}\,; \tag{49}$$

jsou-li $k_1, \dots, k_r$ *přirozená* čísla, jejichž součet je n, a je-li

$$\begin{aligned}
&m_1 := i_1 = \dots = i_{k_1}\,,\\
&m_2 := i_{k_1+1} = \dots = i_{k_1+k_2}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,\\
&m_r := i_{k_1+\dots+k_{r-1}+1} = \dots = i_{k_1+\dots+k_r}\,,
\end{aligned}$$

píše se (49) zpravidla ve tvaru

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{m_1}^{k_1} \partial x_{m_2}^{k_2} \dots \partial x_{m_r}^{k_r}}\,. \tag{50}$$

Obecněji lze v zápisu (50) předpokládat jen *nezápornost* celých čísel k_j (spolu s rovností $k_1 + \dots + k_r = n$); je-li $k_j = 0$ (pro některé j), znamená to, že se podle m_j-té proměnné nederivuje.

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina a jsou-li všechny parciální derivace funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně spojité v Ω, říkáme, že f je n**-krát spojitě diferencovatelná** neboli **třídy** C_n **v** Ω. Je-li f třídy C_n pro každé $n \in \mathbb{N}$, říkáme, že f je **třídy** C_∞ (nebo že je **nekonečněkrát spojitě diferencovatelná**). Je-li f spojitá v Ω, říkáme, že je **třídy** C_0.

Poznámka 14.10. Při tvorbě n-té parciální derivace (47) (kde $n \geq 2$) *záleží obecně na pořadí indexů i_m* neboli *na pořadí, v němž funkci f podle jednotlivých proměnných derivujeme.*

Je-li f např. funkce dvou proměnných x, y, jsou její „smíšené" [9]) derivace druhého řádu definovány rovnostmi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big). \tag{51}$$

I když obě existují, nemusí mít touž hodnotu, jak ukazuje tento příklad:

Příklad 14.8^o. Vypočtěme v počátku $(0,0)$ smíšené parciální derivace (51) funkce f definované v $\mathbb{R}^2$ předpisem

$$f(x,y) := \left\{ \begin{array}{l} xy\,, \text{ je-li } |x| \geq |y| \\ \;0\,, \text{ je-li } |x| < |y| \end{array} \right\}. \tag{52}$$

Je-li $y \neq 0$, je $f(x,y) = 0$ ve všech bodech (x,y), pro něž je $|x| < |y|$, takže i $\partial f(0,y)/\partial x = 0$; protože $f = 0$ na celé ose x, platí výsledek i pro $y = 0$. Na ose y je tedy $\partial f/\partial x \equiv 0$ a v důsledku toho $\partial^2 f(0,0)/\partial x \partial y = 0$.

Je-li $x \neq 0$, je $f(x,y) = xy$ ve všech bodech (x,y), pro něž je $|y| \leq |x|$, takže $\partial f(x,0)/\partial y = x$; protože $f = 0$ na celé ose y, výsledek platí i pro $x = 0$. Na ose x, tedy speciálně i v počátku, je v důsledku toho $\partial^2 f/\partial y \partial x \equiv 1$. $\square$

Za velmi jednoduchých a zpravidla snadno ověřitelných předpokladů se však to, co jsme viděli v právě uvedeném příkladu, stát nemůže:

Věta 14.6. (Záměnnost parciálních derivací vyšších řádů.) *Je-li $n \geq 2$, je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina, je-li $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ funkce třídy C_n v Ω a je-li pořadí $(j_1, \dots, j_n)$ permutací pořadí $(i_1, \dots, i_n)$, platí v Ω identita*

$$\partial_{j_1,\dots,j_n} f = \partial_{i_1,\dots,i_n} f\,. \tag{53}$$

Za této situace tedy záleží jen na tom, kolikrát podle té které proměnné derivujeme; na pořadí nezáleží. V důsledku toho např. u funkce dvou proměnných x, y stačí místo $2^{10} = 1024$ parciálních derivací desátého řádu počítat jen 11 derivací

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10}}\,,\;\; \frac{\partial^{10} f}{\partial x^9 \partial y}\,,\; \dots\,,\; \frac{\partial^{10} f}{\partial x \partial y^9}\,,\;\; \frac{\partial^{10} f}{\partial y^{10}}\,, \tag{54}$$

neboli derivací

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^{10-i} \partial y^i}\,, \text{ kde } i = 0, 1, \dots, 10\,. \tag{54'}$$

* * *

[9]) Tento název se užívá pro parciální derivace řádů ≥ 2, v nichž se nederivuje stále podle téže proměnné.

V dalších cvičeních této kapitoly budeme opět užívat označení

$$r := \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad R := \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \tag{46}$$

Cvičení 14.83. Užijte V. 14.6 a najděte všechny parciální derivace 2. řádu funkcí

$$f(x,y) := e^{x-y}\sin(x-y)\,,\ g(x,y,z) := \frac{1}{R^2}\,. \tag{55}$$

Cvičení 14.84. Užijte V. 14.6 a najděte všechny parciální derivace 3. řádu funkcí

$$f(x,y) := x^2y^4\,,\ g(x,y,z) := x^2y^3z^4\,. \tag{56}$$

Cvičení 14.85. Užijte V. 14.6 a najděte všechny parciální derivace 4. řádu funkce

$$f(x,y) := \lg(1+xy) \tag{57}$$

v jejím definičním oboru.

* * *

Je-li funkce $f:\Omega\to\mathbb{R}$ třídy C_2 v otevřené množině $\Omega\subset\mathbb{R}^p$, definujeme

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{p}\partial_{ii}f\,. \tag{58}$$

Symbol Δ je tzv. **Laplaceův operátor**, v (58) jej aplikujeme na funkci f. Značíme-li x,y resp. x,y,z proměnné v $\mathbb{R}^2$ resp. v $\mathbb{R}^3$, bude mít (58) tvar

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{resp.} \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,. \tag{59}$$

Funkce f splňující v Ω identitu $\Delta f\equiv 0$ se nazývá **harmonická** (v Ω).

Cvičení 14.86. Pomocí V. 14.6 dokažte, že pro každou skalární funkci f dvou nebo tří proměnných a třídy C_2 v otevřené množině Ω platí (v Ω) identity

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f\,, \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)\equiv 0\,. \tag{60}$$

Cvičení 14.87. Najděte maximální otevřené množiny $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, v nichž platí identity

$$\Delta(x^3y^3) = 6xyr^2\,,\ \Delta\Big(\frac{xy}{r}\Big) = -\frac{3xy}{r^3}\,,\ \Delta\Big(\frac{x+y}{r^2}\Big) = 0\,,\ \Delta(x^4+y^4) = 12r^2\,, \tag{61}$$

$$\Delta(\sin xy) = -r^2\sin xy\,,\quad \Delta(\cosh xy) = r^2\cosh xy\,, \tag{62}$$

a ověřte jejich platnost.

Cvičení 14.88. Najděte maximální otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v nichž platí identity

$$\Delta\,(x^2y^2z^2) = 2\,(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,,\quad \Delta\Big(\frac{xy}{z}\Big) = \frac{2xy}{z^3}\,, \tag{63}$$

$$\Delta\Big(\frac{x^2y^2}{z^2}\Big) = \frac{2\,(3x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)}{z^4}\,,\quad \Delta\Big(\frac{xyz}{R^3}\Big) = -\frac{12xyz}{R^5}\,, \tag{64}$$

$$\Delta\Big(\frac{x+y+z}{R}\Big) = -\frac{2\,(x+y+z)}{R^3}\,,\quad \Delta\,(x^4+y^4+z^4) = 12R^2\,, \tag{65}$$

a ověřte jejich platnost.

Cvičení 14.89. Dokažte, že funkce

$$xy\,,\ x^2-y^2\,,\ x\,(x^2-3y^2)\,,\ y\,(3x^2-y^2) \tag{66}$$

jsou harmonické v $\mathbb{R}^2$.

Cvičení 14.90. Nechť je $f(x)$ rovno buď $\sin x$, nebo $\cos x$ a $g(y)$ buď $\sinh y$, nebo $\cosh y$. Dokažte, že pak je $f(x)\,g(y)$ funkce harmonická v $\mathbb{R}^2$.

Cvičení 14.91. Dokažte, že funkce

$$\lg r\,,\ \operatorname{div}\,((\lg r,\, \lg r))\,,\ \operatorname{div}\,((x \lg r, y \lg r)) \tag{67}$$

jsou harmonické v $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Cvičení 14.92. Dokažte, že funkce

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,,\quad x \lg r - y \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{68}$$

jsou harmonické v množině $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \neq 0\}$.

Cvičení 14.93. Dokažte, že funkce

$$xyz\,,\ 5\,(x^4+y^4+z^4) - 3R^4\,,\ x^2(x-3y) + y^2(y-3z) + z^2(z-3x) \tag{69}$$

jsou harmonické v $\mathbb{R}^3$.

Cvičení 14.94. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$\Delta\Big(\frac{1}{r^\alpha}\Big) = \frac{\alpha^2}{r^{2+\alpha}}\ \text{ v } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,,\ \ \Delta\Big(\frac{1}{R^\alpha}\Big) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{R^{2+\alpha}}\ \text{ v } \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}\,. \tag{70}$$

Cvičení 14.95. Dokažte, že

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\,((x \lg r^2,\, y \lg r^2))) = \frac{4\,(x,y)}{r^2}\ \text{ v } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\,. \tag{71}$$

Cvičení 14.96. Dokažte, že pro funkce definované v $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ rovnostmi

$$f(x,y) := \Big(\frac{x}{r}\,,\,\frac{y}{r}\Big),\ f^*(x,y) := \Big(\frac{-y}{r}\,,\,\frac{x}{r}\Big), \tag{72}$$

$$g(x,y) := \Big(\frac{x}{r^2}\,,\,\frac{y}{r^2}\Big),\ g^*(x,y) := \Big(\frac{-y}{r^2}\,,\,\frac{x}{r^2}\Big) \tag{73}$$

platí v Ω identity

$$\operatorname{div} f(x,y) = \operatorname{rot} f^*(x,y) = \frac{1}{r}\,,\ \operatorname{rot} f(x,y) = \operatorname{div} f^*(x,y) \equiv 0\,, \tag{74}$$

$$\operatorname{div} g(x,y) = \operatorname{rot} g(x,y) = \operatorname{div} g^*(x,y) = \operatorname{rot} g^*(x,y) \equiv 0\,. \tag{75}$$

Cvičení 14.97. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí v $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ rovnost

$$\Delta\Big(\operatorname{div}\Big(\frac{x}{r^\alpha}\,,\,\frac{y}{r^\alpha}\Big)\Big) = \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{r^{2+\alpha}}\,. \tag{76}$$

Cvičení 14.98. Dokažte, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ platí v $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ rovnosti

$$\Delta(\lg R) = \frac{1}{R^2}\,,\quad \Delta\Big(\frac{\lg R}{R}\Big) = -\frac{1}{R^3}\,. \tag{77}$$

Cvičení 14.99. Dokažte, že funkce

$$f(x,y,z) := \frac{(x,y,z)}{R}\,,\quad g(x,y,z) := \frac{(x,y,z)}{R^2}\,,\quad h(x,y,z) := \frac{(x,y,z)}{R^3} \tag{78}$$

splňují v $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ identity

$$\operatorname{div} f(x,y,z) = \frac{2}{R}\,,\quad \operatorname{grad}(\operatorname{div} f(x,y,z)) = -\frac{2\,(x,y,z)}{R^3}\,, \tag{79}$$

$$\operatorname{div} g(x,y,z) = \frac{1}{R^2}\,,\ \operatorname{grad}(\operatorname{div} g(x,y,z)) = -\frac{2\,(x,y,z)}{R^4}\,, \tag{80}$$

$$\operatorname{div} h(x,y,z) = 0\,,\quad \operatorname{grad}(\operatorname{div} h(x,y,z)) = (0,0,0)\,. \tag{81}$$

Cvičení 14.100. Dokažte, že v $\mathbb{R}^3$ platí identity

$$\operatorname{div}(e^{xyz}, e^{xyz}, e^{xyz}) = e^{xyz}(xy + xz + yz)\,, \tag{82}$$

$$\operatorname{rot}(e^{xyz}, e^{xyz}, e^{xyz}) = e^{xyz}(x\,(z-y), y\,(x-z), z\,(y-x))\,, \tag{83}$$

$$\Delta(e^{xyz}) = e^{xyz}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)\,. \tag{84}$$

Řešení

Následující poznámky k řešení Cv. 14.03 – 14.15 obsahují hlavně geometrický popis definičních oborů funkcí z jednotlivých cvičení.

14.03. Rovina bez přímky $y = x$, tj. bez osy 1. a 3. kvadrantu.

14.04. Rovina bez os $y = \pm x$ kvadrantů.

14.05. Definičním oborem funkce $x^{\lg y} \equiv \exp(\lg x \lg y)$ je otevřený 1. kvadrant $\mathbb{R}^2_+ \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x > 0,\, y > 0\}$.

14.06. Uzavřené mezikruží $M := \overline{U((0,0),3)} - U((0,0),1)$.

14.07. Otevřený poloprostor, který neobsahuje počátek a jehož hranicí je rovina $x + y + z = 1$ procházející body $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

14.08. Otevřený 1. oktant, tj. množina $\mathbb{R}^3_+$.

14.09. Uzavřený osmistěn s vrcholy $(\pm 1,0,0)$, $(0,\pm 1,0)$, $(0,0,\pm 1)$.

14.10. Otevřené mezikruží $U((0,0),2) - \overline{U((0,0),1)}$.

14.11. Rovina bez přímek $y = x \pm 1$ a $y = -x \pm 1$.

14.12. Prostor $\mathbb{R}^3$ bez souřadnicových rovin xy, yz, zx.

14.13. Sjednocení nekonečně mnoha otevřených krychlí s délkou hrany π, které vzniknou z $\mathbb{R}^3$ vynecháním všech rovin $x \equiv 0 \bmod \pi$, $y \equiv 0 \bmod \pi$ a $z \equiv 0 \bmod \pi$.

14.14. $\mathbb{R}^3$ bez rovin $x = y + z$, $y = z + x$ a $z = x + y$ (procházejících počátkem).

14.15. Prostor $\mathbb{R}^4$ bez příslušné jednotkové sféry $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$.

V poznámkách k řešení Cv. 14.16 – 14.25 znamená f funkci za znamením limity v příslušném cvičení; neexistence limity se dokazuje pomocí tvrzení z Po. 14.2.

14.16. S výjimkou počátku je f rovna 0 na osách a $\frac{1}{2}$ na přímce $y = x$.

14.17. Z odhadu $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (platného pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) plyne, že $|f(x,y)| \le |y|$.

14.18. V polárních souřadnicích je $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 1/(r^2 g(\varphi))$ a všechny hodnoty funkce $g(\varphi) := \cos^4\varphi + \sin^4\varphi = \frac{1}{4}(3 + \cos 4\varphi)$ leží mezi $\frac{1}{2}$ a 1.

14.19. S výjimkou počátku je $f = 0$ na osách a $f = 1$ na přímce $y = x$.

14.20. Protože $x \to 0+,\ y \to 0+ \ \Rightarrow\ z := xy \to 0+$ a $z \to 0 \ \Rightarrow\ (\sin z)/z \to 1$, stačí aplikovat větu o limitě superpozice.

14.21. Je $|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)| \le r^2 |\lg r^2|$, což pro $r \to 0+$ konverguje k 0.

14.22. Je-li $y = -x$, je ve jmenovateli 0, takže není splněna nutná podmínka pro existenci limity, totiž že daná funkce je definována v jistém prstencovém okolí daného bodu. (Limity vzhledem k 1. a k 3. kvadrantu by však byly rovny 2.)

14.23. Je-li $R := \|(x,y,z)\|$, je $0 \le f(x,y,z) \le R^{2\alpha} \to 0$ pro $R \to 0+$.

14.24. Je-li $R := \|(x,y,z)\|$, je $f(x,y,z)$ rovno $R^{-2\alpha}\exp(-R^{-2})$, což má pro $R \to 0+$ limitu 0, protože substitucí $s = 1/R$ dostaneme $\lim_{s\to+\infty} s^{2\alpha} e^{-s^2} = 0$.

14.25. S výjimkou počátku je $f = 0$ ve všech souřadnicových rovinách a $f = 1$ na přímce $x = y = z$.

V řešení Cv. 14.29 – 14.52 uvádíme nejdříve definiční obor a množinu Ω, za středníkem je derivace funkce f v Ω; z typografických důvodů však někdy místo matice f' píšeme její řádky, tedy derivace (neboli gradienty) složek f_j funkce f.

14.29. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,y);\, y = \pm x^2\};\ \dfrac{(-y^2(3x^4+y^2),\ 2x^5y)}{(x^4-y^2)^2}$

14.30. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\};\ \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

14.31. $\mathcal{D}(f) = \{(x,y);\, xy \geq 0\}$, $\Omega = \{(x,y);\, xy > 0\};\ \dfrac{(y,x)}{2\sqrt{xy}}$

14.32. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{(x,y);\, xy \neq 0\};\ \dfrac{\operatorname{sgn}(xy)}{2\sqrt{|xy|}} \cdot (y,x)$

14.33. $\mathcal{D}(f) = (0,1\rangle \times \langle 0,+\infty) \cup \langle 1,+\infty) \times (-\infty,0\rangle$,

$$\Omega = (0,1) \times \mathbb{R}_+ \cup (1,+\infty) \times \mathbb{R}_-;\ \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}} \cdot (y, x \lg x)$$

14.34. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$, $\Omega = \{(x,y);\, x+y \neq \pm 1\};\ \dfrac{2\operatorname{sgn}((x+y)^2-1)}{(x+y)^2+1} \cdot (1,1)$

14.35. $\mathcal{D}(f) = \Omega = (1,+\infty) \times \mathbb{R}_+;\ (\lg x)^{\lg y - 1} \cdot \Big(\dfrac{\lg y}{x},\ \dfrac{\lg x\ \lg(\lg x)}{y}\Big)$

14.36. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y);\, x^2+y^2 > 1\};\ \dfrac{2\,(x,y)}{x^2+y^2-1}$

14.37. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};\ x^{y^z-1}y^{z-1} \cdot (y,\, xz\lg x,\, xy \lg x \lg y)$

14.38. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$, $\Omega = \{(x,y,z);\, xyz \neq 0\};\ \dfrac{(yz^3, 2xz^3, 3xyz^2)\operatorname{sgn}(xyz)}{2\sqrt{|xz^3|}}$

14.39. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y,z);\, z \neq 0\};\ 2z^{-3}e^{-(x^2+y^2)/z^2} \cdot (-xz,\, -yz,\, x^2+y^2)$

14.40. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^3$;

$$\cos(x\sin(y\sin z)) \cdot (\sin(y \sin z),\, x\cos(y\sin z)\sin z,\, xy\cos(y\sin z)\cos z)$$

14.41. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y,z);\, z \neq 0\};\ \dfrac{\Big(z^2\sin\dfrac{y}{z},\, xz\cos\dfrac{y}{z},\, -xy\cos\dfrac{y}{z}\Big)}{z^2\Big(1+x^2\sin^2\dfrac{y}{z}\Big)}$

14.42. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^3;\ \dfrac{2\,(x,y,z)}{\cosh(x^2+y^2+z^2)}$

14.43. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(x,y);\, xy \neq 0\}$;

$$\begin{pmatrix} y\sin\dfrac{x}{y} + x\cos\dfrac{x}{y} & x\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{x^2}{y}\cos\dfrac{x}{y} \\ -\dfrac{y\cos xy + xy\sin xy}{x^2} & \dfrac{\cos xy}{x} - y\sin xy \end{pmatrix}$$

14.44. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^2_+;\ \begin{pmatrix} y^{\sin x}\cos x\ \lg y & y^{\sin x-1}\sin x \\ x^{\sin y-1}\sin y & x^{\sin y}\cos y\ \lg x \end{pmatrix}$

14.45. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^2_+;\ f_1'\ :\ \left(\dfrac{1}{x}\,,\ \dfrac{1}{y}\right);\ f_2'\ :\ \left(\dfrac{1}{x}\,,\ -\dfrac{1}{y}\right);$

$f_3'\ :\ \left(\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\,,\ \dfrac{1}{x+y}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right)$

14.46. $\mathcal{D}(f)=\{(x,y,z);\ x^2+z^2\le 1,\ y^2+z^2\le 1\},$

$\Omega=\{(x,y,z);\ 0<x^2+z^2<1,\ 0<y^2+z^2<1\};$

$f_1'\ :\ \dfrac{(x,0,z)}{\sqrt{(1-x^2-z^2)(x^2+z^2)}};\ f_2'\ :\ \dfrac{-(0,y,z)}{\sqrt{(1-y^2-z^2)(y^2+z^2)}}$

14.47. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^3;\ f_1'\ :\ e^{yz}\cdot(1,xz,xy);\ f_2'\ :\ e^{zx}\cdot(yz,1,xy);$

$f_3'\ :\ e^{xy}\cdot(yz,xz,1)$

14.48. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\mathbb{R}^3-(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y}\cup\mathrm{Z})$, kde X, Y, Z jsou souřadnicové osy;

$f_1'\ :\ \dfrac{(y^2+z^2,-2xy,-2xz)}{(y^2+z^2)^2};\ f_2'\ :\ \dfrac{(-2xy,x^2+z^2,-2yz)}{(x^2+z^2)^2};$

$f_3'\ :\ \dfrac{(-2xz,-2yz,x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

14.49. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\{(x,y,z,u);\ zu\ne 0\};\ \dfrac{yu\cdot(yzu,2xzu,-xyu,-2xyz)}{x^2y^4+z^2u^4}$

14.50. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\{(x,y,z,u);\ x>0,\ y\ne 0\ne z,\ u>0\};$

$f_1'\ :\ x^{yz/u}\cdot\left(\dfrac{yz}{xu}\,,\dfrac{z}{u}\lg x,\dfrac{y}{u}\lg x,-\dfrac{yz}{u^2}\lg x\right);$

$f_2'\ :\ u^{x/yz}\cdot\left(\dfrac{\lg u}{yz}\,,-\dfrac{x\lg u}{y^2z}\,,-\dfrac{x\lg u}{yz^2}\,,\dfrac{x}{yzu}\right)$

14.51. $\mathcal{D}(f)=\Omega=\{(x,y,z,u);\ z\ne 0\ne u\};\ f_1'\ :\ \dfrac{2\,(xy^2,x^2y,zu^2,uz^2)}{1+x^2y^2+z^2u^2};$

$f_2'\ :\ \dfrac{(y,x,u,z)}{1+(xy+zu)^2};\ f_3'\ :\ \dfrac{(-yzu,-xzu,xyu,xyz)}{x^2y^2+z^2u^2}$

14.52. $\mathcal{D}(f)=\langle 0,+\infty)^4\cup(-\infty,0\rangle^4,\ \Omega=\mathbb{R}^4_+\cup\mathbb{R}^4_-;$

$f_1'\ :\ \dfrac{(y,x,0,0)}{4\sqrt[4]{(xy)^3}};\ f_2'\ :\ \dfrac{(0,z,y,0)}{4\sqrt[4]{(yz)^3}};\ f_3'\ :\ \dfrac{(0,0,u,z)}{4\sqrt[4]{(zu)^3}};\ f_4'\ :\ \dfrac{(u,0,0,x)}{4\sqrt[4]{(ux)^3}}$

V seznamu řešení Cv. 14.53 – 14.66 užíváme tato označení:

(85) $\quad\Omega_1:=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\},\ \Omega_2:=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\},\ \Omega_3:=\{(x,y,z);\ xyz\ne 0\}.$

Středníky oddělují množinu Ω, divergenci a rotaci.

14.53. $\Omega_1\,;\ \dfrac{1}{r}\,;\ 0$

14.54. $\Omega_1\,;\ 0;\ \dfrac{1}{r}$

14.55. $\Omega_1\,;\ 0;\ 0$

14.56. $\Omega_1\,;\ -\dfrac{1}{r^3}\,;\ 0$

14.57. $\Omega_1\,;\ 2\,(1+\lg r^2);\ 0$

14.58. $\mathbb{R}^2;\ \dfrac{r}{1+r^2}+2\operatorname{arctg} r;\ 0$

14.59. $\Omega_2\,;\ \dfrac{2}{R}\,;\ (0,0,0)$

14.60. $\Omega_2\,;\ \dfrac{1}{R^2}\,;\ (0,0,0)$

14.61. $\Omega_2\,;\ 1+3\lg R;\ (0,0,0)$

14.62. $\Omega_2\,;\ 3\operatorname{arctg}\dfrac{1}{R}-\dfrac{R}{1+R^2}\,;\ (0,0,0)$

14.63. $\Omega_2\,;\ -\dfrac{3xyz}{R^3}\,;\ \dfrac{(x\,(z^2-y^2),y\,(x^2-z^2),z\,(y^2-x^2))}{R^3}$

14.64. $\Omega_3\,;\ \dfrac{3}{R^2}-\Big(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\Big)\lg R;\ \dfrac{(x\,(y^2-z^2),y\,(z^2-x^2),z\,(x^2-y^2))}{R^2xyz}$

14.65. $\mathbb{R}^3;\ 6xyz;\ (x\,(z^2-y^2),y\,(x^2-z^2),z\,(y^2-x^2))$

14.66. $\mathbb{R}^3;\ e^R(R+3);\ (0,0,0)$

* * *

14.67. v_1-v_2

14.68. v_1-4v_2

14.69. $-\,v_1$

14.70. $\frac{1}{2}\,(v_1+v_2)$

14.71. $\dfrac{6v_3}{e}$

14.72. $-\dfrac{v_1+v_2-v_3}{2\sqrt{3}}$

14.73. $\dfrac{2}{R^3}$

14.74. $(v_1+v_2,\frac{1}{3}\,(v_1-v_2))$

14.75. $\left(\frac{13}{50},-\frac{9}{50}\right)$

14.76. (v_1,v_2,v_1+v_2)

14.77. $\dfrac{(4v_1+\pi v_2,\pi v_1+4v_2,\pi\sqrt{2}\,(v_1+v_2))}{4\sqrt{2}}$

14.78. $(6v_1+v_3,4\,(3v_2+v_3))$

14.79. $\frac{1}{2}\,(v_1+v_2-v_3,v_2+v_3-v_1,v_3+v_1-v_2)$

14.80. $e^2\,(3v_1-2v_2,3v_2-2v_1,v_3)$

14.81. $(v_2 - 2v_1, v_4 - 2v_3)$ **14.82.** $(v_2, 0, v_4, 0)$

V řešení Cv. 14.83 − 14.85 zapisujeme parciální derivace ve tvaru (47), přičemž x, y, z je po řadě první, druhá a třetí proměnná; pro úsporu místa přitom píšeme např. $\partial_{11} f$ místo $(\partial_{11} f)(x, y)$. Všechny funkce z těchto cvičení jsou třídy C_∞ (ve svém definičním oboru, kterým je v prvních dvou příkladech $\mathbb{R}^2$ u f a $\mathbb{R}^3$ u g, zatímco ve třetím příkladu je to množina $\{(x, y);\, 1 + xy > 0\}$); parciální derivace jsou záměnné, indexy u symbolu ∂ jsou uspořádány lexikograficky.

14.83. $\partial_{11} f = -\partial_{12} f = \partial_{22} f = 2e^{x-y} \cos(x - y)$;
$\partial_{11}\, g = 8x^2 R^{-6} - 2R^{-4}$; $\partial_{12}\, g = 8xyR^{-6}$; $\partial_{13}\, g = 8xzR^{-6}$;
$\partial_{22}\, g = 8y^2 R^{-6} - 2R^{-4}$; $\partial_{23}\, g = 8yzR^{-6}$; $\partial_{33}\, g = 8z^2 R^{-6} - 2R^{-4}$

14.84. $\partial_{111} f = 0$; $\partial_{112} f = 8y^3$; $\partial_{122} f = 24xy^2$; $\partial_{222} f = 24x^2 y$;
$\partial_{111}\, g = 0$; $\partial_{112}\, g = 6y^2 z^4$; $\partial_{113}\, g = 8y^3 z^3$; $\partial_{122}\, g = 12xyz^4$;
$\partial_{123}\, g = 24xy^2 z^3$; $\partial_{133} = 24xy^3 z^2$; $\partial_{222}\, g = 6x^2 z^4$; $\partial_{223}\, g = 24x^2 yz^3$;
$\partial_{233}\, g = 36x^2 y^2 z^2$; $\partial_{333}\, g = 24x^2 y^3 z$

14.85. $\partial_{1111} f = -\dfrac{6y^4}{(1 + xy)^4}$; $\partial_{1112} f = \dfrac{6y^2}{(1 + xy)^4}$; $\partial_{1122} f = \dfrac{2(2xy - 1)}{(1 + xy)^4}$;
$\partial_{1222} f = \dfrac{6x^2}{(1 + xy)^4}$; $\partial_{2222} f = -\dfrac{6x^4}{(1 + xy)^4}$

* * *

V řešení Cv. 14.87 − 14.88 jsou množiny Ω odpovídající jednotlivým funkcím cvičení odděleny středníkem; užíváme přitom označení (85) a navíc klademe

(86) $$\Omega_4 := \{(x, y, z);\, z \neq 0\}.$$

14.87. $\mathbb{R}^2$; Ω_1; Ω_1; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^2$
14.88. $\mathbb{R}^3$; Ω_4; Ω_4; Ω_2; Ω_2; $\mathbb{R}^3$

15. Geometrické aplikace

Definice. Jsou-li $p < q$ přirozená čísla, existuje-li k množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^p$ tak, že $G \subset \Omega \subset \overline{G}$, a je-li $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ je spojité zobrazení, budeme říkat, že f je p-**rozměrná nadplocha v** $\mathbb{R}^q$ (definovaná v Ω). Množinu $\langle f \rangle := f(\Omega)$ pak budeme nazývat **geometrický obraz** nadplochy f.

Je-li $M = \langle f \rangle$ pro nějakou množinu M a nějakou nadplochu f, říkáme, že f je **parametrizace** nebo **parametrický popis** množiny M; napíšeme-li množinu M ve tvaru $\langle f \rangle$, říkáme, že jsme ji (nadplochou f) **parametrizovali**. Pro jednorozměrné nadplochy se zpravidla užívá název **křivka**, pro dvojrozměrné nadplochy název **plocha**; je-li $p > 2$, mluví se často o **zakřiveném prostoru**. [1])

Poznámka 15.1. Právě uvedená definice nadplochy je zobecněním dobře známé Jordanovy definice křivky jako spojitého *zobrazení* (nikoli obrazu!) kompaktního jednorozměrného intervalu, inspirované zřejmě dynamikou hmotného bodu. V této disciplíně není totiž primární *trajektorie* (geometrický obraz) pohybujícího se bodu, ale závislost polohy bodu na čase (křivka). Známe-li tuto závislost, známe i trajektorii, nikoli však naopak, protože touž trajektorii může hmotný bod opisovat nekonečně mnoha způsoby.

Definiční obor Ω nadplochy je množina, která vznikla z jisté otevřené množiny G přidáním části hranice; definičním oborem křivky může být proto např. jakýkoli (otevřený, polouzavřený nebo uzavřený) interval, což dovoluje parametrizovat např. všechny úsečky, polopřímky a přímky – bez ohledu na to, zdali k nim počítáme jejich krajní body – lineárními funkcemi.

Pro běžné potřeby geometrie a fyziky je definice založená pouze na spojitosti příliš obecná; italský matematik Peano již v roce 1890 totiž dokázal, že geometrickým obrazem křivky může být i dvojrozměrný útvar, např. čtverec – rozumí se i s vnitřkem. Při studiu elementárních diferenciálněgeometrických pojmů souvisejících s nadplochami se jednoznačně hodí nahoře uvedená „dynamická“ definice, doplníme-li ji dalšími předpoklady, které mj. vyloučí vícerozměrnost geometrického obrazu křivky. $\square$

Definice. Budeme říkat, že nadplocha $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ je **hladká**, je-li splněna jedna z těchto podmínek:

1. Ω je otevřená množina, funkce f je v Ω třídy C_1 a matice $f'(x)$ má hodnost p v každém bodě $x \in \Omega$.

2. Existuje otevřená množina $\Omega^* \supset \Omega$ a rozšíření $f^* : \Omega^* \to \mathbb{R}^q$ funkce f, které je hladkou nadplochou podle bodu 1 této definice.

---

[1]) Poznamenejme, že křivé prostory jsou nedílnou součástí např. obecné teorie relativity a jejich vlastnosti se v této teorii intenzivně studují již bezmála sto let. Pro pobavení čtenářů dodejme, že jeden z našich překladatelů, který se – jako mnozí další – zřejmě domnívá, že k překládání odborných textů není nutná ani základní orientace v příslušné vědní disciplíně včetně její terminologie, přeložil anglická slova „curved space“ jako „zahnutý prostor“.

Definice. Je-li $\Omega_1 \subset \Omega$ maximální otevřená množina, v níž je nadplocha $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^q$ hladká, a je-li $x \in \Omega - \Omega_1$, říkáme, že x je **singulární bod** nadplochy f.

Poznámka 15.2. Čtenáři je jistě z algebry známo, že hodnost obdélníkové matice M typu $q \times p$, kde $q > p$, lze definovat těmito dvěma ekvivalentními způsoby:

1) jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice M,

2) jako maximální číslo n, pro něž existuje submatice M_1 typu $n \times n$ matice M tak, že $\det M_1 \neq 0$. $\square$

Je-li $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$ třídy C_1, má matice

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_p f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q & \partial_2 f_q & \dots & \partial_p f_q \end{pmatrix} \tag{1}$$

hodnost *nejvýše rovnou* p. V definici hladkosti nadplochy f žádáme tedy *maximální hodnost* této matice, tj. *lineární nezávislost sloupců*

$$\begin{aligned} &T^1 := (\partial_1 f_1, \partial_1 f_2, \dots, \partial_1 f_q)^{sl}, \\ &T^2 := (\partial_2 f_1, \partial_2 f_2, \dots, \partial_2 f_q)^{sl}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad , \\ &T^p := (\partial_p f_1, \partial_p f_2, \dots, \partial_p f_q)^{sl} \end{aligned} \tag{2}$$

matice f' (všude v Ω). Tyto sloupce pak nazýváme **tečné vektory** nadplochy f a pro každé $a \in \Omega$ je

$$\{f(a) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T^i(a);\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\} \tag{3}$$

tečná nadrovina nadplochy f v bodě a. Je-li $p = 1$ resp. $p = 2$ resp. $p = 3$, mluvíme o **tečně** resp. o **tečné rovině** resp. o **tečném** (trojrozměrném) **prostoru**.

Poznámka 15.3. Položíme-li $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^{sl}$, bude

$$f(a) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i T^i(a) = f(a) + f'(a)\lambda = f(a) + D(f; \lambda); \tag{4}$$

tím je objasněn *geometrický význam diferenciálu zobrazení* f *v případě, že jde o zobrazení z prostoru nižší dimenze do prostoru dimenze vyšší.* $\square$

Každý nenulový vektor ortogonální ke všem vektorům (2) se nazývá **normálový vektor** (hladké) nadplochy f. Protože dimenze ortogonálního doplňku p-rozměrného lineárního prostoru generovaného v $\mathbb{R}^q$ lineárně nezávislými vektory T^i je $q - p$, existují $(q - p)$-tice

$$\{N^1, \dots, N^{q-p}\} \tag{5}$$

lineárně nezávislých normálových vektorů, které pak tvoří bázi ortogonálního doplňku a spolu s vektory T^i bázi celého prostoru $\mathbb{R}^q$. Za této situace nazýváme množinu

$$\{f(a) + \sum_{j=1}^{q-p} \mu_j N^j(a);\ (\mu_1, \ldots, \mu_{q-p}) \in \mathbb{R}^{q-p}\} \tag{6}$$

normálovou nadrovinou nadplochy f v bodě a; je-li $p = q-1$ resp. $p = q-2$ resp. $p = q-3$, mluvíme o **normále** resp. o **normálové rovině** resp. o **normálovém** (trojrozměrném) **prostoru**.

Poznámka 15.4. Funkce (4) proměnných $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ je zřejmě parametrický popis příslušné tečné nadroviny, stejně jako je funkce

$$f(a) + \sum_{j=1}^{q-p} \mu_j N^j(a) \tag{7}$$

proměnných $\mu_1 \in \mathbb{R}, \ldots, \mu_{q-p} \in \mathbb{R}$ parametrickým popisem nadroviny normálové.

Bod $X \in \mathbb{R}^q$ leží v tečné nadrovině (3), právě když je vektor $X - f(a)$ ortogonální ke všem vektorům N^j; příslušné relace

$$\big((X - f(a)) \cdot N^j(a)\big) = 0,\ j = 1, \ldots, q-p, \tag{8}$$

se nazývají **rovnice tečné nadroviny** nadplochy f v bodě a. Podobné relace

$$\big((X - f(a)) \cdot T^i(a)\big) = 0,\ 1 = 1, \ldots, p, \tag{9}$$

jsou **rovnicemi normálové nadroviny** nadplochy f v bodě a a charakterizují body X ležící v této normálové nadrovině.

Poznámka 15.5. Normálové vektory N^j, $j = 1, \ldots, q-p$, lze získat např. řešením homogenní soustavy p rovnic

$$(T^i \cdot N) = 0,\ i = 1, \ldots, p, \tag{10}$$

pro neznámé složky $n_1, \ldots, n_q$ vektoru N.

Možnost takto najít $q-p$ lineárně nezávislých normálových vektorů zaručují naše předpoklady o f spolu s dobře známými větami z algebry: Protože je hodnost matice f' rovna p, existuje v ní p řádků tak, že příslušný determinant není nulový. Předpokládáme-li pro jednoduchost, že jde o prvních p řádků matice f', lze (10) přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &(\partial_1 f_1) n_1 + \ldots + (\partial_1 f_p) n_p = -((\partial_1 f_{p+1}) n_{p+1} + \ldots + (\partial_1 f_q) n_q), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ &(\partial_p f_1) n_1 + \ldots + (\partial_p f_p) n_p = -((\partial_p f_{p+1}) n_{p+1} + \ldots + (\partial_p f_q) n_q), \end{aligned} \tag{11}$$

a abychom odtud získali $q-p$ lineárně nezávislých řešení, stačí vhodným způsobem ($(q-p)$-krát) zvolit čísla $n_{p+1}, \dots, n_q$.

Je-li však $p = q-1$, nemusíme řešit žádné rovnice, protože ke všem tečným vektorům T^i je ortogonální jejich **vektorový součin**

$$T^1 \times T^2 \times \dots \times T^{q-1}, \tag{12}$$

jehož j-tou složku definujeme jako $(-1)^{j-1} \det_j$, kde $\det_j$ znamená determinant matice, která vznikne vynecháním j-tého řádku matice f'. Ortogonalita vektoru (12) a vektorů T^i plyne ihned z toho, že jejich skalární součin je determinant matice, jejíž dva sloupce jsou totožné.

Připomeňme ještě, že *vektorový součin* (12) *je nenulový, právě když jsou vektory* T^i *lineárně nezávislé*; lineární nezávislost vektorů T^i lze tedy ověřit např. tak, že dokážeme nerovnost $\sum_{j=1}^q \det_j^2 > 0$, protože součet vlevo je čtverec normy jejich vektorového součinu.

Poznámka 15.5. Rovnice tečné nadroviny lze získat i eliminací parametrů λ_i z rovnice $X = f(a) + f'(a)\lambda$: Víme, že aspoň jeden z determinantů stupně p matice $f'(a)$ je nenulový; pro jednoduchost zápisu předpokládejme, že je to determinant matice tvořené prvními p řádky. Pak je soustava

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(a) + \lambda_1 T_1^1 + \dots + \lambda_p T_1^p, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_p &= f_p(a) + \lambda_1 T_p^1 + \dots + \lambda_p T_p^p \end{aligned} \tag{13}$$

lineárních rovnic pro parametry λ_i jednoznačně řešitelná a řešení stačí dosadit do zbylých $q-p$ rovnic

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= f_{p+1}(a) + \lambda_1 T_{p+1}^1 + \dots + \lambda_p T_{p+1}^p, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_q &= f_q(a) + \lambda_1 T_q^1 + \dots + \lambda_p T_q^p, \end{aligned} \tag{14}$$

abychom dostali soustavu rovnic ekvivalentních soustavě $\big((X - f(a)) \cdot N^j\big) = 0$ pro $j = 1, \dots, q-p$.

Příklad 15.1. Předpokládejme, že $a \neq b$ jsou dva body z $\mathbb{R}^p$ a položme

$$f(t) := a + (b-a)t \quad \text{pro všechna} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Protože je $f'(t) = b - a \neq 0$ všude v $\mathbb{R}$, je f hladká křivka; jejím geometrickým obrazem je **přímka procházející body** a, b.

Geometrickými obrazy restrikcí $f|\mathbb{R}_+$ a $f|\mathbb{R}_+^0$ jsou **otevřená** a **uzavřená polopřímka vycházející z bodu** a **a procházející bodem** b.

Uzavřená úsečka (krátce: **úsečka**) **s krajními body** a, b je geometrický obraz restrikce $f|\langle 0,1\rangle$, zatímco restrikce $f|(0,1)$, $f|\langle 0,1)$, $f|(0,1\rangle$ parametrizují po řadě

otevřenou úsečku s krajními body a, b a obě **polouzavřené úsečky** s týmiž krajními body. *Všechny uvedené restrikce jsou* (*stejně jako funkce* (15)) *hladké*.

Přímku procházející body a, b lze ovšem parametrizovat např. i prostou funkcí

$$g(t) := a + (b - a)\,t^3,\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{15'}$$

třídy C_∞; protože je $g'(t) = 3t^2(b - a) = 0$, právě když je $t = 0$, *není tato parametrizace hladká* a hladké nejsou ani restrikce $g\,|\,\mathbb{R}_+^0$, $g\,|\,\langle 0, 1\rangle$, $g\,|\,\langle 0, 1)$. Restrikce $g\,|\,\mathbb{R}_+$, $g\,|\,(0, 1)$, $g\,|\,(0, 1\rangle$ však hladké jsou.

Příklad 15.2. Je-li $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, je křivka

$$f(t) := (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t),\ \ t \in \langle 0, 2\pi\rangle, \tag{16}$$

parametrickým popisem **elipsy** o středu (x_0, y_0), délce poloos a, b a rovnici

$$\Big(\frac{x - x_0}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y - y_0}{b}\Big)^2 = 1\,. \tag{17}$$

Parametrizace (16) je hladká, protože obě složky jsou třídy C_∞ a vektor $f'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ není pro žádné $t \in \mathbb{R}$ nulový. [2])

Parametrický popis tečny v bodě t je

$$(x_0 + a(\cos t - \lambda\sin t),\ y_0 + b(\sin t + \lambda\cos t)),\ \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Vektor $N(t) := (b\cos t, a\sin t)$ je zřejmě ortogonální k vektoru $f'(t)$, takže

$$f(t) + \mu N(t) = (x_0 + (a + \mu b)\cos t,\ y_0 + (b + \mu a)\sin t),\ \ \mu \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

je parametrický popis normály.

Rovnice tečny má obecně tvar $(((x, y) - f(t)) \cdot N(t)) = 0$, což se v našem případě redukuje na $(x - x_0)\,b\cos t + (y - y_0)\,a\sin t = ab$; totéž dostaneme eliminací parametru λ z vektorové rovnice $(x, y) = (x_0 + a(\cos t - \lambda\sin t), y_0 + b(\sin t + \lambda\cos t))$.

Rovnice normály má tvar $(((x, y) - f(t)) \cdot f'(t)) = 0$, tj. $(x - x_0 - a\cos t)\,a\sin t = (y - y_0 - b\sin t)\,b\cos t$.

Parametrický popis **kružnice** o středu (x_0, y_0) a poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ se dostane z (16), položíme-li $a = b = r$. Některé výsledky odvozené pro elipsu budou pro kružnici jednodušší; např. parametrizaci (19) normály lze napsat ve tvaru

$$(x_0 + \mu\cos t,\ y_0 + \mu\sin t),\ \ t \in \mathbb{R}, \tag{19'}$$

protože koeficient $r(1 + \mu)$ u $\cos t$ i $\sin t$ probíhá $\mathbb{R}$ stejně jako μ.

---

[2]) V souladu s literaturou se v této knize někdy (a samozřejmě jen za situace, kdy nemůže dojít k nedorozumění) užívá stejný symbol pro označení funkce f i jejího rozšíření na větší množinu. V (16) je $f(t)$ definováno jen pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a pro rozšíření na $\mathbb{R}$ stejným předpisem se (bez upozornění přímo v textu) užívá stejný symbol.

Příklad 15.3. Pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ je funkce

$$f(\varphi, \vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,, \tag{20}$$

kde $(\varphi, \vartheta) \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, parametrickým popisem **sféry** o středu v počátku a poloměru r, tedy množiny popsané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Užijeme-li geografickou terminologii, znamená φ zeměpisnou délku[3]), ϑ zeměpisnou šířku.

Rozšíříme-li funkci f týmž předpisem na množinu všech $(\varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^2$, je rozšíření v této množině třídy C_∞ a zbývá proto jen zjistit hodnost matice

$$f'(\varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Znamená-li $\det_j$ determinant matice, která vznikne z (21) vynecháním j-tého řádku, je

$$\det_1 = r^2\cos\varphi\cos^2\vartheta\,,\ \det_2 = -r^2\sin\varphi\cos^2\vartheta\,,\ \det_3 = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,, \tag{22}$$

takže

$$\det_1^2 + \det_2^2 + \det_3^2 = r^4(\cos^4\vartheta + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta) = r^4\cos^2\vartheta\,. \tag{23}$$

Poslední výraz se rovná nule, právě když je $\vartheta \equiv \frac{1}{2}\pi \bmod \pi$, takže pro původní, nerozšířené zobrazení f jsou singulárními body právě všechny body tvaru $(\varphi, \pm\frac{1}{2}\pi)$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. I když je singulárních bodů nekonečně mnoho, jejich obrazy jsou jen dva – jsou to oba „póly“ („severní“ a „jižní“) sféry; $f\,|\,\langle 0, 2\pi\rangle \times (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ je hladká plocha.

Tečnými vektory v bodě $a = (\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi)$ jsou hodnoty sloupců matice (21) v bodě a, tedy vektory

$$T^1 = \tfrac{1}{2}r\cdot(-1, 1, 0)\,,\ T^2 = \tfrac{1}{2}r\cdot(1, 1, \sqrt{2})\,, \tag{24}$$

a

$$N := T^1 \times T^2 = (\det_1(a), -\det_2(a), \det_3(a)) = \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,r^2\cdot(1, 1, -\sqrt{2}\,) \tag{25}$$

je normálový vektor. Protože $A := f(a) = \frac{1}{2}r\cdot(1, 1, -\sqrt{2}\,)$, plyne z toho, že do tečné roviny patří právě všechny body $X = (x, y, z)$, pro něž je

$$x = \tfrac{1}{2}r(1 - \lambda_1 + \lambda_2)\,,\ y = \tfrac{1}{2}r(1 + \lambda_1 + \lambda_2)\,,\ z = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,r(-1 + \lambda_2)\,,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Normálou je množina všech bodů tvaru $(1, 1, -\sqrt{2}\,)\cdot\frac{1}{2}r(1 + \mu r/\sqrt{2})$, kde $\mu \in \mathbb{R}$; protože funkce proměnné μ za tečkou zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, lze místo ní psát jen μ.

[3]) Úhel φ se přitom neměří ve stupních, ale v obloukové míře, a je nespojitý na greenwichském poledníku; volbou $\varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$ bychom nespojitost přesunuli na její obvyklé místo do Tichomoří.

Tečná rovina má rovnici $((X-A)\cdot N)=0$, což je po dosazení ekvivalentní s rovnicí $x+y-\sqrt{2}\,z=2r$, normála je průnikem dvou rovin o rovnicích $((X-A)\cdot T^1)=0$ a $((X-A)\cdot T^2)=0$; po dosazení a evidentní úpravě zjistíme, že jsou to rovnice $x=y$ a $x+y+\sqrt{2}\,z=0$.

Příklad 15.4. Funkce $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ definovaná rovností

$$F(u,v):=(\cos v,\sin v,u\cos\tfrac{1}{2}v,u\sin\tfrac{1}{2}v) \tag{26}$$

pro všechna $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$, přičemž

$$F'(u,v)=\begin{pmatrix}0 & -\sin v\\ 0 & \cos v\\ \cos\frac{1}{2}v & -\frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}v\\ \sin\frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}v\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Sloupce T^1, T^2 této matice jsou zřejmě navzájem ortogonální; protože žádný z nich není nulovým vektorem, jsou (pro všechna $(u,v)\in\mathbb{R}^2$) lineárně nezávislé. Z toho plyne, že plocha F je hladká v celém $\mathbb{R}^2$.

Při hledání dvou lineárně nezávislých normálových vektorů N^1, N^2 můžeme postupovat metodou vyloženou v Po. 15.5, založenou na řešení rovnic $(T^i\cdot N)=0$ pro $i=1,2$. Lépe je však využít jednoduchou strukturu matice F' a postupovat méně standardně:

1) Vektor $N=(n_1,n_2,n_3,n_4)$ s $n_3=n_4=0$ je zřejmě ortogonální k T^1; položíme-li $n_1=\cos v$, $n_2=\sin v$, bude ortogonální i k T^2. Vektor

$$N^1:=(\cos v,\sin v,0,0) \tag{28}$$

splňuje tedy obě rovnice $(T^i\cdot N^1)=0$.

2) Každý vektor tvaru $N=(n_1,n_2,-\sin\frac{1}{2}v,\cos\frac{1}{2}v)$ je opět ortogonální k T^1, přičemž součet součinů třetích a čtvrtých složek vektorů N a T^2 je roven

$$(-\sin\tfrac{1}{2}v)(-\tfrac{1}{2}u\sin\tfrac{1}{2}v)+(\cos\tfrac{1}{2}v)(\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}v)=\tfrac{1}{2}u\,.$$

Položíme-li tedy $n_1=\frac{1}{2}u\sin v$, $n_2=-\frac{1}{2}u\cos v$, bude součet součinů prvních a druhých složek roven

$$(\tfrac{1}{2}u\sin v)(-\sin v)+(-\tfrac{1}{2}u\cos v)(\cos v)=-\tfrac{1}{2}u\,,$$

takže bude $(T^2\cdot N)=0$. Vektor

$$N^2:=(\tfrac{1}{2}u\sin v,-\tfrac{1}{2}u\cos v,-\sin\tfrac{1}{2}v,\cos\tfrac{1}{2}v) \tag{29}$$

je tedy také ortogonální k oběma vektorům T^i.

Vektory N^1, N^2 jsou přitom nejen lineárně nezávislé, ale dokonce ortogonální, jak ihned zjistíme výpočtem jejich skalárního součinu. V každém bodě $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tvoří tedy vektory T^1,T^2,N^1,N^2 ortogonální bázi prostoru $\mathbb{R}^4$.

Jistě není nutné, abychom rozepisovali do složek parametrické popisy

$$F + \lambda_1 T^1 + \lambda_2 T^2 \quad \text{a} \quad F + \mu_1 N^1 + \mu_2 N^2 \tag{30}$$

tečné a normálové roviny v obecném bodě $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Označíme-li $X := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ obecný bod prostoru $\mathbb{R}^4$, lze tyto roviny popsat i dvojicemi rovnic

$$((X - F) \cdot N^j) = 0, \quad \text{kde } j = 1, 2, \quad \text{a} \quad ((X - F) \cdot T^i) = 0, \quad \text{kde } i = 1, 2, \tag{31}$$

z nichž každá je rovnicí jisté trojrozměrné nadroviny v $\mathbb{R}^4$.

Nadplocha (26) má tuto *pozoruhodnou vlastnost*: Je-li $u = 0$ a roste-li v od 0 do 2π, mění se příslušné normálové vektory

$$N^1(0, v) = (\cos v, \sin v, 0, 0) \quad \text{a} \quad N^2(0, v) = (0, 0, -\sin \tfrac{1}{2}v, \cos \tfrac{1}{2}v) \tag{32}$$

spojitě od hodnoty $N_0^1 := (1, 0, 0, 0)$ k téže hodnotě $N_{2\pi}^1 := (1, 0, 0, 0)$ [4]) a od $N_0^2 := (0, 0, 0, 1)$ k opačné hodnotě $N_{2\pi}^2 := (0, 0, 0, -1)$. [5]) Ve stejném geometrickém bodě $F(0, 0) = F(0, 2\pi) = (1, 0, 0, 0)$ má tedy plocha F dvě dvojice normálových vektorů, přičemž 1) orientace bází $\{N_0^1, N_0^2\}$, $\{N_{2\pi}^1, N_{2\pi}^2\}$ příslušných normálových rovin jsou opačné, 2) první báze přešla v druhou spojitě. [6]) Čtenář se může sám přesvědčit, že podobná změna probíhá i v tečné rovině.

Nadplochy, které mají podobnou vlastnost, se nazývají *neorientovatelné*; plocha F je čtyřrozměrným modelem tzv. *Möbiova listu*, jehož trojrozměrnou analogii vyšetříme v dalším příkladu.

Příklad 15.5. Rotaci bodu $(x, 0, z)$ (ležícího v rovině xz prostoru $\mathbb{R}^3$) kolem osy z popisuje funkce $(x \cos\varphi, x \sin\varphi, z)$, kde φ je úhel otáčení. Funkce $(1 + u, 0, 0)$, kde $|u| \le \frac{1}{3}$, je parametrický popis úsečky U s krajními body $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ na ose x; rotaci v rovině xz úsečky U kolem jejího středu $(1, 0, 0)$ popisuje funkce $(1 + u \cos\vartheta, 0, u \sin\vartheta)$, kde ϑ je úhel otáčení. Má-li tedy úsečka U rotovat rychlostí v kolem osy z a zároveň se poloviční rychlostí $\frac{1}{2}v$ otáčet kolem svého středu, bude funkce

$$f(u, v) := ((1 + u \cos \tfrac{1}{2}v) \cos v, (1 + u \cos \tfrac{1}{2}v) \sin v, u \sin \tfrac{1}{2}v), \tag{33}$$

kde $|u| \le \frac{1}{3}, 0 \le v \le 2\pi$, popisovat jednotlivé fáze výslednice obou pohybů, při nichž se úsečka U kolem osy z otočí nakonec o plný úhel, ale kolem svého středu jen o úhel poloviční. Po dokončené rotaci vznikne tedy jakoby její zrcadlový obraz: bod $(1 + u, 0, 0)$ přejde v bod $(1 - u, 0, 0)$ a naopak. Geometrický obraz funkce (33) (případně s jinou úsečkou U na kladné části osy x) se nazývá **Möbiův list**.

---

[4]) Kdybychom počáteční bod vektoru N_1 umístili do počátku prostoru $\mathbb{R}^4$, opsal by jeho koncový bod jednotkovou kružnici v rovině x_1x_2.

[5]) Na rozdíl od N_1 opíše koncový bod vektoru N_2 jen půl jednotkové kružnice, a to v rovině x_3x_4.

[6]) Výsledek je tedy podobný pohledu do zrcadla, jenomže při něm je změna „okamžitá“, nespojitá, kdežto změna na $\langle F \rangle$ nastala postupně, spojitě, „cestováním“ po vhodné dráze v $\langle F \rangle$.

Rozšíření funkce f týmž předpisem na celou rovinu uv je třídy C_∞, přičemž

$$f'(u,v) = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}v\cos v & -(1+u\cos\frac{1}{2}v)\sin v - \frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}v\cos v \\ \cos\frac{1}{2}v\sin v & (1+u\cos\frac{1}{2}v)\cos v - \frac{1}{2}u\sin\frac{1}{2}v\sin v \\ \sin\frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}v \end{pmatrix}. \tag{34}$$

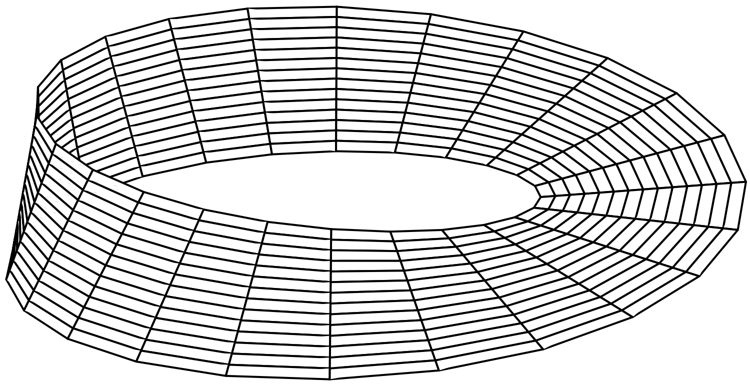
Jak snadno zjistíme, všude v $\mathbb{R}^2$ je

$$\begin{aligned} \det_1 &= \tfrac{1}{2}u\sin v\,(1-\cos v) - \sin\tfrac{1}{2}v\cos v\,,\\ \det_2 &= \tfrac{1}{2}u\,(\cos v + \sin^2 v) + \sin\tfrac{1}{2}v\sin v\,,\\ \det_3 &= \cos\tfrac{1}{2}v\,(1+u\cos\tfrac{1}{2}v)\,,\\ \det_1^2+\det_2^2+\det_3^2 &= \tfrac{1}{4}u^2 + (u\cos\tfrac{1}{2}v+1)^2 > 0\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Vektor $N := \partial_1 f \times \partial_2 f = (\det_1, -\det_2, \det_3)$ je tedy všude nenulový; speciálně: norma vektoru

$$N(0,v) = (-\sin\tfrac{1}{2}\,v\,\cos v, -\sin\tfrac{1}{2}\,v\,\sin v, \cos\tfrac{1}{2}\,v) \tag{36}$$

je identicky rovna 1.



Möbiův list

Tento příklad se podobá příkladu 15.4 v tom, že $f(0,0) = f(0,2\pi) = (1,0,0)$ a že $N(0,0) = (0,0,1)$, $N(0,2\pi) = (0,0,-1) = -N(0,0)$. Proběhne-li v od 0 do 2π, opíše bod $f(0,v) = (\cos v, \sin v, 0)$ jednotkovou kružnici v rovině xy; příslušný normálový vektor (36) se spojitě mění od hodnoty $(0,0,1)$ (kdy směřuje „přímo nahoru“) k opačné hodnotě $(0,0,-1)$ („přímo dolů“).

Möbiův list patří mezi tzv. *neorientovatelné plochy* právě proto, že podobný jev je na něm (na rozdíl např. od sféry nebo válcové plochy) možný.

* * *

Graf obecného zobrazení $f : X \to Y$ je definován jako množina

$$\operatorname{gr} f := \{(x, f(x)) \in X \times Y\,;\, x \in X\}\,. \quad \square \tag{37}$$

Předpokládejme, že p a q jsou přirozená čísla a že $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ je nějaká (pevně zvolená) permutace posloupnosti $(1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q)$ splňující podmínku $i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_q$. Body

$$z = (z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_{p+q}) \in \mathbb{R}^{p+q} \tag{38}$$

budeme pak psát ve tvaru

$$(x, y), \text{ kde } x = (z_{i_1}, \ldots, z_{i_p})\,,\ y = (z_{j_1}, \ldots, z_{j_q})\,. \tag{39}$$

Ačkoli to není zcela korektní, budeme tedy ztotožňovat prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ s kartézským součinem prostorů $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ generovaných jednotkovými vektory i_1-ní až i_p-té resp. j_1-ní až j_q-té souřadnicové osy v $\mathbb{R}^{p+q}$; v souladu s tím budeme psát $z = (x, y)$.

Při tomto značení a za předpokladu, že $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}^q$, je

$$\operatorname{gr} f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{p+q}\,;\, x \in \Omega\} \tag{40}$$

v souladu s obecnou definicí grafu. Vektorovou $(p+q)$-rozměrnou funkci

$$G_f(x) := (x, f(x))\,,\ x \in \Omega\,, \tag{41}$$

budeme pak nazývat **standardní parametrický popis** grafu f. **Standardní rovnicí** grafu (40) budeme rozumět rovnici $y = f(x)$, $x \in \Omega$, neboli ve složkách

$$y_1 \equiv z_{j_1} = f_{j_1}(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}), \ldots, y_q \equiv z_{j_q} = f_{j_q}(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p})\,, \tag{42}$$

kde $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}) \equiv (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega$. $\square$

Úmluva. Abychom se vyhnuli technickým potížím při zápisu, budeme předpokládat, že

$$(i_1, \ldots, i_p) = (1, \ldots, p)\,,\ (j_1, \ldots, j_q) = (p+1, \ldots, p+q)\,, \tag{43}$$

takže bod $z = (z_1, \ldots, z_{p+q})$ bude roven (x, y), kde

$$x = (x_1, \ldots, x_p) = (z_1, \ldots, z_p)\,,\ y = (y_1, \ldots, y_q) = (z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})\,. \quad \square \tag{44}$$

Obecný případ lze z tohoto speciálního získat příslušnou permutací souřadnic.

Hladkost standardního parametrického popisu grafu charakterizuje tato věta:

Věta 15.1. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina, je nadplocha G_f hladká v Ω, právě když je funkce f třídy C_1 v Ω.*

Abychom to ověřili, uvažme, že

$$G_f' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \dots & \partial_p f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \dots & \partial_p f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q & \partial_2 f_q & \dots & \partial_p f_q \end{pmatrix} \tag{45}$$

a že determinant matice složené z prvních p řádků je roven 1; hodnost matice (45) je tedy rovna p. $\square$

V prvních p řádkách matice (45) jsou jednotkové vektory souřadnicových os v $\mathbb{R}^p$, v posledních q řádkách gradienty složek funkce f.

Je-li nadplocha G_f hladká, jsou sloupce

$$T^1 = (1, 0, \dots, 0, \partial_1 f_1, \dots, \partial_1 f_q), \dots, T^p = (0, 0, \dots, 1, \partial_p f_1, \dots, \partial_p f_q) \tag{46}$$

matice (45) lineárně nezávislé a generují zaměření tečné nadroviny nadplochy G_f; tečná nadrovina v bodě $a \in \Omega$ má tedy parametrický popis

$$G_f(a) + \lambda_1 T^1(a) + \dots + \lambda_p T^p(a)\,,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \tag{47}$$

neboli $G_f(a) + DG_f(a; \lambda)$ neboli $G_f'(a)\lambda$, kde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^{sl}$.

Rozepíšeme-li rovnici $z = G_f(a) + \lambda_1 T^1(a) + \dots + \lambda_p T^p(a)$ do složek, dostaneme rovnice

$$x_1 = a_1 + \lambda_1\,, \dots, x_p = a_p + \lambda_p\,, \tag{48$'$}$$

$$y_1 = f_1(a) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\,\partial_i f_1(a), \dots, y_q = f_q(a) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\,\partial_i f_q(a)\,. \tag{48$''$}$$

Vypočítáme-li z rovnic (48′) čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ a dosadíme-li je do (48″), nabudou tyto rovnice tvaru

$$y_j = f_j(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f_j(a)\,(x_i - a_i)\,,\ j = 1, \dots, q, \tag{49}$$

neboli

$$y^{sl} = f(a)^{sl} + f'(a)\,(x - a)^{sl} \ \text{(neboli } y = f(a) + Df(a; x - a))\,. \tag{50}$$

Podle Po. 15.5 jsou (49) a (50) *rovnice tečné nadroviny ke grafu funkce f v bodě a*. Poznamenejme, že (50) se redukuje na jedinou rovnici, právě když je $q = 1$; je to pak rovnice

$$y = f(a) + (f'(a) \cdot (x - a)) \ (= f(a) + (\operatorname{grad} f(a) \cdot (x - a)))\,. \tag{51}$$

Je-li $p = q = 1$, redukuje se (51) na rovnici $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, kde $a, f(a)$, $f'(a), x, y$ jsou čísla; (50) je tedy zobecněním rovnice tečny „křivky $y = f(x)$“, dobře známé z elementů diferenciálního počtu reálných funkcí reálné proměnné.

* * *

Příklad 15.6. Funkce

$$f(u,v) := (u, v, u^2 - v^2)\,,\ \ (u,v) \in \mathbb{R}^2, \tag{52}$$

je standardní parametrický popis **hyperbolického paraboloidu** o rovnici $z = x^2 - y^2$; souřadnice x, y, z odpovídají při hořejším označení případu, že $(i_1, i_2, j_1) = (1, 2, 3)$, takže podmínky hořejší úmluvy jsou splněny.

Abychom mohli napsat rovnici tečné roviny a normály v obecném bodě (a, b) roviny $\mathbb{R}^2$, potřebujeme vědět, že

$$\begin{aligned} T^1(u,v) &= (1,0,2u)\,,\ T^2(u,v) = (0,1,-2v)\,,\\ N(u,v) :&= T^1(u,v) \times T^2(u,v) = (-2u, 2v, 1)\,; \end{aligned} \tag{53}$$

označíme-li tedy $X = (x, y, z)$ a $A = f(a, b)$, má tečná rovina rovnici

$$\begin{aligned} ((X-A)\cdot N(a,b)) &= (x-a)(-2a) + (y-b)\cdot 2b + (z - (a^2 - b^2))\cdot 1\\ &= -2ax + 2by + z + a^2 - b^2 = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

a normálu charakterizují rovnice

$$\begin{aligned} ((X-A)\cdot T^1(a,b)) &= (x-a) + 2a(z - (a^2 - b^2)) = 0\,,\\ ((X-A)\cdot T^2(a,b)) &= (y-b)\ - 2b(z - (a^2 - b^2)) = 0\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Standardní parametrické popisy hyperbolických paraboloidů charakterizovaných rovnicemi $y = x^2 - z^2$ a $x = y^2 - z^2$ se dostanou permutacemi $(i_1, i_2, j_1) = (1, 3, 2)$ a $(i_1, i_2, j_1) = (2, 3, 1)$ souřadnic; jsou to tedy funkce

$$g(u,v) := (u, u^2 - v^2, v) \ \text{ a } \ h(u,v) := (u^2 - v^2, u, v)\,.$$

Rovnice tečných rovin a normál získáme z rovnic (54) a (55) týmiž permutacemi.

Příklad 15.7. Pomocí vektorové funkce $f := (\cos, \sin) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (třídy C_∞) lze vytvořit tři grafy, popsané standardními rovnicemi

$$(y,z) = f(x)\,,\quad (x,z) = f(y)\,,\quad (x,y) = f(z) \tag{56}$$

a standardními parametrizacemi

$$g(x) := (x, \cos x, \sin x)\,,\ h(y) := (\cos y, y, \sin y)\,,\ k(z) := (\cos z, \sin z, z)\,. \tag{57}$$

Grafy se nazývají **závitnice** nebo **šroubovice** a liší se jen svou polohou v $\mathbb{R}^3$.

Je-li $a = \frac{1}{3}\pi$, je $A := g(a) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ a $T := g'(a) = (a, -\sin a, \cos a) = (1, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,, \frac{1}{2})$ je tečný vektor křivky g v bodě a. Vektor $N^1 := (0, 1, \sqrt{3})$ je zřejmě kolmý k vektoru T a vektorový součin $N^2 := T \times N^1 = (-2, -\sqrt{3}\,, 1)$ je nejen kolmý k oběma vektorům T, N^1, ale trojice $\{T, N^1, N^2\}$ je kladná ortogonální báze v $\mathbb{R}^3$.

Z toho plyne, že

$$A + \lambda T = (\tfrac{1}{3}\pi + \lambda, \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,\lambda), \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + \lambda)),\ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

je parametrický popis tečny,

$$A + \mu_1 N^1 + \mu_2 N^2 = (\tfrac{1}{3}\pi - 2\mu_2, \tfrac{1}{2} + \mu_1 - \sqrt{3}\,\mu_2, \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\,\mu_1 + \mu_2),\ (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,$$

parametrický popis normálové roviny křivky g v bodě a. Píšeme-li $X = (x, y, z)$, je tečna popsána rovnicemi $((X - A) \cdot N^j) = 0$, $j = 1, 2$, tj. rovnicemi $y + \sqrt{3}\,z = 2$, $2x + \sqrt{3}\,y - z = \frac{2}{3}\pi$, zatímco normálová rovina má rovnici $((X - A) \cdot T\,) = 0$, tj. $2x - \sqrt{3}\,y + z = \frac{2}{3}\pi$.

Příklad 15.8. Standardním parametrickým popisem uzavřené „přední“ poloviny jednotkové sféry v $\mathbb{R}^3$, tedy grafu s rovnicí $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, je funkce $G : \Omega \to \mathbb{R}^3$, kde

$$G(u, v) := \bigl(\sqrt{1 - u^2 - v^2}\,, u, v\bigr) \ \text{ a } \ \Omega := \{(u, v);\, u^2 + v^2 \le 1\}. \tag{58}$$

G je však třídy C_1 jen v otevřeném kruhu $\{(u, v);\, u^2 + v^2 < 1\}$, protože výraz

$$\Bigl(\frac{\partial G_1}{\partial u}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{\partial G_1}{\partial v}\Bigr)^2 = \left(\frac{-u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)^2 + \left(\frac{-v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{1 - u^2 - v^2}$$

nemá limitu [7]), blíží-li se bod (u, v) z vnitřku jednotkového kruhu k jeho hranici, takže funkci f nelze rozšířit na funkci třídy C_1 v žádné otevřené množině mající neprázdný průnik s hranicí jednotkového kruhu. Všechny body této hranice jsou singulární.

Je-li $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, snadno zjistíme, že

$$\begin{gathered} G(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \bigl(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\bigr), \\ T^1 = \bigl(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,, 1, 0\bigr),\ T^2 = \bigl(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,, 0, 1\bigr),\ N = \bigl(1, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\bigr). \end{gathered} \tag{59}$$

Příslušná tečná rovina má tedy rovnici

$$\bigl(x - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\bigr) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\bigl((y - \tfrac{1}{2}) + (z - \tfrac{1}{2})\bigr) = x + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,y + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,z - \sqrt{2} = 0,$$

což lze jednodušeji napsat jako $\sqrt{2}\,x + y + z = 2$. Normálu pak popisují rovnice $x = \sqrt{2}\,y$ a $x = \sqrt{2}\,z$.

---

[7]) Výraz by měl limitu $+\infty$, kdybychom ze svých úvah nevyloučili nekonečné limity.

Cvičení

Pro každou z dále uvedených funkcí f najděte definiční obor a maximální množinu Ω, v níž je f hladkou nadplochou. Pro každý z uvedených bodů a najděte parametrický popis a rovnici (rovnice) tečné a normálové nadroviny nadplochy f v bodě a.[8]) Body z $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ značíme (x, y), (x, y, z) a (x_1, x_2, x_3, x_4).

Křivky

	$f(t) =$	$a =$
15.01°.	$(2\cos t, 3\sin t)$ (elipsa)	$\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.02°.	$(t - \sin t, 1 - \cos t)$ (cykloida)	$-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi$
15.03°.	$(2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t)$ (kardioida)	$\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi$
15.04°.	$(3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$ (astroida)	$\frac{1}{6}\pi, \frac{3}{4}\pi$
15.05°.	$(e^t \cos t, e^t \sin t)$ (logaritmická spirála)	$\frac{1}{2}\pi, \pi$
15.06°.	$(\lg t \sin t, \lg t \cos t)$	$1, e$
15.07°.	$\left(\dfrac{t}{t^3+1}, \dfrac{t^2}{t^3+1}\right)$ (Descartův list)	$-2, 0$
15.08°.	$(\cos t + \sin 2t, \sin t + \cos 2t)$ (trojlístek)	$0, \frac{1}{6}\pi$
15.09°.	$\left(\dfrac{\cos^3 t}{\sin t}, \cos^2 t\right)$ (Dioklova kissoida)	$\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{4}\pi$
15.10°.	$(t, t - \lvert\sin t\rvert)$	$\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi$
15.11°.	$(\sqrt{\cos 2t}\,\cos t, \sqrt{\cos 2t}\,\sin t)$ (lemniskata)	$\frac{1}{6}\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.12°.	$(\cos 2t, \cos 2t\ \operatorname{tg} t)$ (strofoida)	$\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{3}\pi$
15.13°.	$(\cos t + \sin 3t, \sin t + \cos 3t)$ (čtyřlístek)	$\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi$
15.14°.	$(t\cos t, t\sin t)$ (Archimedova spirála)	$0, \frac{1}{2}\pi$
15.15°.	$((2\cos t + 1)\cos t, (2\cos t + 1)\sin t)$ (Pascalova závitnice)	$\frac{1}{3}\pi, \pi$
15.16°.	$(2\cos t, 3\sin t, \frac{1}{2}t)$ (eliptická závitnice)	$\frac{1}{3}\pi, \pi$
15.17°.	$(\cos t, \sin t, \sin t\cos t)$	$\pi, \frac{5}{6}\pi$

[8]) K tomu je nutné znát $f(a)$ a příslušné tečné a normálové vektory. Protože sestavit z nich parametrický popis žádaných nadrovin je triviální a protože nechci rozsah knihy neúměrně zvětšovat, najde čtenář v seznamu řešení jen koeficienty rovnic všech těchto nadrovin (které se složkami tečných a normálových vektorů známým způsobem souvisí).

15.18°. $(\sin t, \sin^2 t, \sin^3 t)$ $\pi, -\frac{1}{6}\pi$

15.19°. $(t^2, t^3 - 1, t^3 + 1)$ $1, 3$

15.20°. $(\arcsin t, \arccos t, t^2)$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$

15.21°. $(\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t)$ $\frac{5}{6}\pi, -\frac{1}{3}\pi$

15.22°. $(\operatorname{arctg} t, \lg(1 + t^2), \operatorname{arccotg} t)$ $0, \sqrt{3}$

15.23°. $(t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t)$ $\pi, -\frac{1}{2}\pi$

15.24°. $(2\sin t + \sin 2t, 2\cos t - \cos 2t, \sin t)$ $\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi$

15.25°. $(\lg t\ \cos \pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ $1, 2$

15.26. (t, t^2, t^3, t^4) $2, -1$

15.27. $(1 - \sin t, 2 - \sin 2t, 3 - \sin 3t, 4 - \sin 4t)$ $\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi$

15.28. $(\operatorname{arctg} t, \operatorname{arctg} t^{-1}, \lg(1 + t^2), \lg(1 + t^{-2}))$ $1, -1$

15.29. $(\lg t, t \lg t, t \lg^2 t, t^2 \lg^2 t)$ $1, e^{-1}$

15.30. $(\sin \pi t, \cos \pi t, e^t \sin \pi t, e^t \cos \pi t)$ $0, -2$

Plochy

	$f(u,v) =$	$a =$
15.31°.	$(u, u + v^2, u^2 - v)$	$(0,1)$, $(1,-1)$
15.32°.	$(u + v, u - v, u^3 + v^3)$	$(2,1)$, $(1,-1)$
15.33°.	$(u^2 - uv, uv + v^2, u^2 v + uv^2)$	$(1,1)$, $(1,-1)$
15.34°.	$(u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)$	$(1,-2)$, $(-1,2)$
15.35°.	$(uv^{-1}, u^{-1}, u^2 - v^2)$	$(1,-1)$, $(1,2)$
15.36°.	$(u^2, uv^{-1}, u^{-1}v)$	$(-1,-2)$, $(2,2)$
15.37°.	$(uv^2, uv^{-1}, \lg(uv))$	$(1,1)$, $(-2,-1)$
15.38°.	$(\lg(u + v), \lg(u - v), \lg(u^2 - v^2))$	$(2,1)$, $(3,-2)$
15.39°.	$(u^2, uv, \sin(\pi uv))$	$(1,1)$, $(\frac{1}{2}, 2)$
15.40°.	$(\sin u, \sin v, u - v)$	$(0,0)$, $(\pi, \frac{1}{2}\pi)$
15.41°.	$(\sin(u - v), \cos(u - v), u + v)$	$(\frac{1}{2}\pi, \pi)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$

15.42°. $((1+|u|)\cos v, (1+|u|)\sin v, |u|)$ $\quad(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\pi, \pi)$

15.43°. $(\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u \cos v)$ $\quad(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi), (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$

15.44°. $(e^{u+v}, e^u + e^v, e^u - e^v)$ $\quad(0,0), (1,-1)$

15.45°. $(e^{uv}, e^{u+v}, e^{u-v})$ $\quad(1,1), (-1,1)$

15.46°. (ue^v, uve^{u-v}, ve^u) $\quad(1,1), (-1,1)$

15.47°. $(\lg(1+u+v), \lg(1-u+v), \lg(1+u-v))$ $\quad(1,1), (4,4)$

15.48°. $(\operatorname{arctg} u, \lg(uv), \operatorname{arctg} v)$ $\quad(1,1), (-1,-1)$

15.49°. $(\operatorname{arctg}(uv^{-1}), \lg(1+uv), \operatorname{arctg}(u^{-1}v))$ $\quad(1,1), (\sqrt{3}, \sqrt{3})$

15.50°. $(\operatorname{arccotg}(uv), \operatorname{arccotg}(uv^{-1}), \operatorname{arccotg}(u^{-1}v))$ $\quad(1,-1), (-\sqrt{3}, 1)$

15.51°. $(\cos v, \sin v, u)$ (válec $x^2+y^2=1$) $\quad(1, \frac{1}{6}\pi), (-1, -\frac{1}{4}\pi)$

15.52°. $(u\cos v, u\sin v, u)$ (kužel $x^2+y^2=z^2$) $\quad(1, \frac{1}{4}\pi), (-1, -\frac{1}{3}\pi)$

15.53°. $(v\sin u, v\cos u, v^2)$ (paraboloid $x^2+y^2=z$) $\quad(0,1), (\frac{1}{4}\pi, -1)$

15.54°. $(4\cos u\cos v, 3\sin u\cos v, 2\sin v)$ $\quad(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi), (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$
(elipsoid $(\frac{1}{4}x)^2 + (\frac{1}{3}y)^2 + (\frac{1}{2}z)^2 = 1$)

15.55°. $(\cosh^2 v, \sinh v, u)$ (parabolický válec $x = y^2+1$) $\quad(2,0)\ (1,-1)$

15.56°. $(\cosh v, \sinh v, u)$ $\quad(0,1), (1,-1)$
(půl hyperbolického válce $x^2-y^2=1$)

15.57°. $(u\cosh v, u\sinh v, u^2)$ $\quad(-1,0), (1,-1)$
(část hyperbolického paraboloidu $x^2-y^2=z$)

15.58°. $(\cos u\cosh v, \sin u\cosh v, \sinh v)$ $\quad(\frac{1}{2}\pi, 1), (-\frac{1}{4}\pi, -1)$
(1-dílný hyperboloid $x^2+y^2-z^2=1$)

15.59°. $(\cosh u\cosh v, \sinh u\cosh v, \sinh v)$ $\quad(-1,0), (0,-1)$
(půl 2-dílného hyperboloidu $x^2-y^2-z^2=1$)

15.60°. $((3+\cos u)\cos v, (3+\cos u)\sin v, \sin u)$ (anuloid) $\quad(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi), (\frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{2}\pi)$

15.61. $(u\sin v, v\sin u, u\cos v, v\cos u)$ $\quad(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi), (\frac{1}{2}\pi, -\pi)$

15.62. $(u+v, u-v, uv, uv^{-1})$ $\quad(1,2), (-2,-2)$

15.63. (u^3, u^2v, uv^2, v^3) $\quad(1,-1), (1,2)$

15.64. $(uv^{-1}, u^{-1}v, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$ $(1, 2)$, $(1, 1)$

15.65. $(\sin(u + v), \cos(u + v), \sin(u - v), \cos(u - v))$ $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$

15.66. $(\operatorname{arctg} u, \operatorname{arctg} v, \operatorname{arctg}(uv^{-1}), \operatorname{arctg}(u^{-1}v))$ $(1, -1)$, $(\sqrt{3}, 1)$

15.67. $(\lg(u + v), \lg(u - v), \lg(uv), \lg(uv^{-1}))$ $(2, 1)$, $(3, 1)$

15.68. $(\operatorname{arctg} u, \operatorname{arctg} v, \lg(1 + u^2), \lg(1 + v^2))$ $(1, 1)$, $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

15.69. $(\sin u \sinh v, \sin u \cosh v, \cos u \sinh v, \cos u \cosh v)$ $(\pi, 1)$, $(-\frac{1}{2}\pi, -1)$

15.70. $((1 + u^2)\cos \pi v, (1 + u^2)\sin \pi v,$
$(1 + v^2)\cos \pi u, (1 + v^2)\sin \pi u)$ $(1, \frac{1}{2})$, $(-1, -1)$

Křivé prostory

$f(u, v, w) =$ $a =$

15.71. $(uvw, uvw^{-1}, u(vw)^{-1}, (uvw)^{-1})$ $(1, 1, 1)$, $(-2, 1, -1)$

15.72. $(\operatorname{arctg}(uvw^{-1}), \lg u, \lg v, \lg w)$ $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$

15.73. $(u \cos w, u \sin w, v \cos w, v \sin w)$ $(1, -1, \frac{1}{3}\pi)$, $(2, 1, -\frac{1}{6}\pi)$

15.74. $(u \sin v \sin w, u \sin v \cos w,$
$u \cos v \sin w, u \cos v \cos w)$ $(1, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$, $(-1, \frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi)$

15.75. $(\cos u \cos v \cos w, \sin u \cos v \cos w,$
$\sin v \cos w, \sin w)$ $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi)$, $(-\frac{1}{6}\pi, 0, \frac{1}{6}\pi)$
(jednotková sféra v $\mathbb{R}^4$)

* * *

Pro každou z následujících standardních rovnic grafů najděte 1) standardní parametrický popis příslušné nadplochy (křivky, plochy, křivého trojrozměrného prostoru), 2) maximální množinu, v níž je hladká, 3) parametrický popis a rovnici (rovnice) tečné a normálové nadroviny v předepsaném bodě a.

Grafy

rovnice: $a =$

15.76°. $y = \arcsin x$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

15.77°. $y = \arccos(1 - \sin^4 x)^2$ $0, \frac{1}{2}\pi$

15.78°. $x = \sqrt{y}$ $\qquad 1, 2$

15.79°. $x = \sqrt{1 - y^2}$ $\qquad \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

15.80°. $(y, z) = (x^{4/3}, x^{5/3})$ $\qquad -1, 8$

15.81°. $(x, y) = (\arcsin z, \arccos z)$ $\qquad -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$

15.82°. $(x, y) = (\operatorname{arctg} z, \operatorname{arccotg} z)$ $\qquad -1, \sqrt{3}$

15.83°. $(x, z) = (\cos^2 y, \sin^2 y)$ $\qquad \frac{1}{4}\pi, -\frac{5}{6}\pi$

15.84°. $(y, z) = (\sinh x, \cosh x)$ $\qquad 0, -1$

15.85°. $(x_2, x_3, x_4) = (x_1^2, x_1^3, x_1^4)$ $\qquad 1, -1$

15.86°. $(x_1, x_2, x_4) = (\lg x_3, \lg^2 x_3, \lg^3 x_3)$ $\qquad 1, e$

15.87°. $(x_1, x_2, x_3) = (|x_4 - 1|, |x_4 - 2|, |x_4 - 3|)$ $\qquad 0, \frac{3}{2}$

15.88°. $z = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$ $\qquad (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

15.89°. $y = \dfrac{x^2 + z^2}{x^2 - z^2}$ $\qquad (2, 0), (-1, -2)$

15.90°. $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ $\qquad (3, 4), (-1, -1)$

15.91°. $x = \sqrt{yz}$ $\qquad (2, 8), (-4, -9)$

15.92°. $z = \arccos(xy)$ $\qquad (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1), (-\frac{1}{2}, 1)$

15.93°. $y = \dfrac{\sin(x + z)}{\sin(x - z)}$ $\qquad (\frac{1}{2}\pi, \pi), (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi)$

15.94°. $x = \lg(1 + y^2 + z^2) + \operatorname{arctg}(y + z)$ $\qquad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (1, -1)$

15.95. $(x_1, x_3) = (\sqrt{x_2 - x_4}, \sqrt{x_2 + x_4})$ $\qquad (5, 4), (10, -6)$

15.96. $(x_1, x_2) = \left(\sin \dfrac{\pi x_3}{x_4}, \cos \dfrac{\pi x_4}{x_3}\right)$ $\qquad (1, 2), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

15.97. $(x_1, x_4) = (\lg(1 + x_2^2 - x_3^2), \lg(1 - x_2^2 + x_3^2))$ $\qquad (1, 1), (3, -3)$

15.98. $x_4 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ $\qquad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

15.99. $x_2 = \dfrac{x_1^2 - x_3^2}{x_1^2 - x_4^2}$ $\qquad (0, 1, 2), (-1, -1, 3)$

15.100. $x_1 = \operatorname{arctg} \dfrac{x_2 x_3}{x_4}$ $\qquad (-1, -1, \sqrt{3}), (1, -2, 2)$

Řešení

Užíváme tyto zkratky: **T** – tečna, **TR** – tečná rovina, **TP** – tečný (trojrozměrný) prostor, **N** – normála, **NR** – normálová rovina, **NP** – normálový (trojrozměrný) prostor.

V seznamu řešení Cv. 13.01 – 13.15 následuje za informací o $\mathcal{D}(f)$, Ω, za středníkem a za „1) **T:**“ trojice čísel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, pro niž je $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ rovnice tečny, za „**N:**“ další trojice $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, pro niž je $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$ rovnice normály, a to v prvním z bodů a; pak jsou uvedeny analogické dvě trojice čísel pro druhý z bodů a. Je-li $T = f'(a) = (t_1, t_2)$ tečný vektor, klademe $N := (-t_2, t_1)$, takže báze $\{T, N\}$ je vždy kladná. Vektory (α_1, β_1), (α_2, β_2) jsou *kladnými* násobky vektorů N, T volenými tak, aby rovnice tečny a normály byly co nejjednodušší.

15.01. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-\sqrt{3}, -2, 4\sqrt{3}$; **N:** $-4, 2\sqrt{3}, -5$; 2) **T:** $-3\sqrt{3}, 2, 12$; **N:** $4, 6\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$.

15.02. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $1, \sqrt{2} - 1, 2(1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{4}\pi$; **N:** $\sqrt{2} - 1, -1, \frac{1}{4}(\sqrt{2} - 1)\pi$;

2) **T:** $1, 1, -2 - \frac{3}{2}\pi$; **N:** $1, -1, -\frac{3}{2}\pi$.

15.03. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{(2k-1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $1, -1, 3$; **N:** $-1, -1, 1$; 2) **T:** $-1, 1 + \sqrt{2}, 3(1 + \sqrt{2})$; **N:** $1 + \sqrt{2}, 1, -1$.

15.04. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $-1, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$; **N:** $-\sqrt{3}, 1, 4$; 2) **T:** $1, -1, 2\sqrt{2}$; **N:** $-1, -1, 0$.

15.05. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-1, -1, e^{\pi/2}$; **N:** $-1, 1, -e^{\pi/2}$; 2) **T:** $1, -1, e^{\pi}$; **N:** $-1, -1, -e^{\pi}$.

15.06. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;

1) **T:** $-\cos 1, \sin 1, 0$; **N:** $\sin 1, \cos 1, 0$;

2) **T:** $e \sin e - \cos e, e \cos e + \sin e, -e$; **N:** $e \cos e + \sin e, \cos e - e \sin e, -1$.

15.07. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R} - \{-1\}$;

1) **T:** $20, 17, 4$; **N:** $119, -140, -114$; 2) **T:** $0, 1, 0$; **N:** $1, 0, 0$.

15.08. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-1, 2, -1$; **N:** $2, 1, -3$; 2) **T:** $\sqrt{3}, 1, -4$; **N:** $1, -\sqrt{3}, 0$.

15.09. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $6\sqrt{3}, -10, 1$; **N:** $-10\sqrt{3}, -18, 7$; 2) **T:** $2, -4, 1$; **N:** $-4, -2, 3$.

15.10. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $-1, 2, \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$; **N:** $4, 2, \sqrt{3} - 2\pi$;

2) **T:** $3 - 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$; **N:** $12, 6(2 - \sqrt{3}), 3(2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 4)\pi$.

15.11. $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle (k-\frac{1}{4})\pi, (k+\frac{1}{4})\pi \rangle;\ \Omega = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} ((k-\frac{1}{4})\pi, (k+\frac{1}{4})\pi);$

1) **T:** $0, -2\sqrt{2}, 1$; **N:** $-2\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}$; 2) **T:** $0, 2\sqrt{2}, 1$; **N:** $2\sqrt{2}, 0, -\sqrt{3}$.

15.12. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2k-1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $1, -1, 0$; **N:** $-1, -1, 0$; 2) **T:** $5, \sqrt{3}, 1$; **N:** $\sqrt{3}, -5, 3\sqrt{3}$.

15.13. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-1, -6-\sqrt{3}, 2(\sqrt{3}-2)$; **N:** $-6-\sqrt{3}, 1, 4$;

2) **T:** $-6-\sqrt{3}, 1, 2(\sqrt{3}-2)$; **N:** $1, 6+\sqrt{3}, 4$.

15.14. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $0, 1, 0$; **N:** $1, 0, 0$; 2) **T:** $-4, -2\pi, \pi^2$; **N:** $-\pi, 2, -\pi$.

15.15. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $1, -3\sqrt{3}, 8$; **N:** $-3\sqrt{3}, -1, 4\sqrt{3}$; 2) **T:** $-1, 0, 1$; **N:** $0, 1, 0$.

Báze zaměření roviny v $\mathbb{R}^3$ není určena jednoznačně. Čtenářovy výsledky by měly souhlasit s výsledky uvedenými zde, odvodí-li je tímto postupem: Splňuje-li tečný vektor $T = (t_1, t_2, t_3)$ podmínku $t_1^2 + t_2^2 > 0$, položí $N^1 = (-t_2, t_1, 0)$; je-li $t_1 = t_2 = 0$, položí $N^1 = (-t_3, 0, 0)$. V obou případech pak bude definovat $N^2 := T \times N^1$, takže báze $\{T, N^1, N^2\}$ bude ortogonální a kladná.

Řešení Cv. 15.16 –15.25 jsou uspořádána podobně jako dosud, místo trojic čísel α, β, γ určujících přímku v $\mathbb{R}^2$ o rovnici $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ však zde jsou čtveřice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koeficientů rovnic $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ rovin v $\mathbb{R}^3$. Přímka v $\mathbb{R}^3$ je určena dvěma rovnicemi, protože je průnikem dvou rovin; čtveřice příslušných koeficientů jsou odděleny znakem $\wedge$ logické konjunkce. Většina čtveřic koeficientů byla vhodným *kladným* faktorem upravena na jednodušší tvar.

15.16. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-3, -2\sqrt{3}, 0, 12 \wedge 4\sqrt{3}, -6, 42, 5\sqrt{3} - 7\pi$; **NR:** $-4\sqrt{3}, 6, 2, -5\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi$;

2) **T:** $1, 0, 0, 2 \wedge 0, 1, 6, -3\pi$; **NR:** $0, -6, 1, -\frac{1}{2}\pi$.

15.17. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $1, 0, 0, 1 \wedge 0, 1, 1, 0$; **NR:** $0, -1, 1, 0$;

2) **T:** $\sqrt{3}, -1, 0, 2 \wedge 1, \sqrt{3}, 4, \sqrt{3}$; **NR:** $-4, -4\sqrt{3}, 4, \sqrt{3}$.

15.18. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}(2k-1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$;

1) **T:** $0, -1, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0$; **NR:** $-1, 0, 0, 0$;

2) **T:** $4, 4, 0, 1 \wedge -12, 12, 32, -5$; **NR:** $32, -32, 24, 27$.

15.19. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$;

1) **T:** $-3, 2, 0, 3 \wedge -6, -9, 13, -20$; **NR:** $2, 3, 3, -8$;

2) **T:** $-9, 2, 0, 29 \wedge -18, -81, 85, -112$; **NR:** $2, 9, 9, -504$.

15.20. $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1 \rangle$; $\Omega = (-1, 1)$;

1) **T:** $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -3, 3, 4\sqrt{3}, -\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$; **NR:** $8, -8, 4\sqrt{3}, \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$;

2) **T:** $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 1, 2, -1$; **NR:** $2, -2, 2, -1$.

15.21. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-1, -1, 0, 1 \wedge 1, -1, 2\sqrt{3}, 2$; **NR:** $-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 4, -\sqrt{3}$;

2) **T:** $-1, -1, 0, 1 \wedge -1, 1, 2\sqrt{3}, 2$; **NR:** $-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, -4, \sqrt{3}$.

15.22. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $0, 1, 0, 0 \wedge 1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$; **NR:** $1, 0, -1, \frac{1}{2}\pi$;

2) **T:** $-6, \sqrt{3}, 0, 2\pi - \sqrt{3}\lg 4 \wedge 2, 4\sqrt{3}, 26, -5\pi - 4\sqrt{3}\lg 4$;

NR: $3, 6\sqrt{3}, -3, -6\sqrt{3}\lg 4 - \frac{1}{2}\pi$.

15.23. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $0, 1, 0, -2 \wedge 1, 0, 2, -\pi$; **NR:** $2, 0, -1, -2\pi$;

2) **T:** $2, 2, 0, \pi - 4 \wedge 0, 0, 1, 1$; **NR:** $2, -2, 0, \pi$.

15.24. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $1, -1, 0, -1 \wedge 0, 0, 1, -1$; **NR:** $-1, -1, 0, 3$;

2) **T:** $-2, 0, 0, -3\sqrt{3} \wedge 0, -2, 0, 3$; **NR:** $0, 0, 2, \sqrt{3}$.

15.25. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;

1) **T:** $0, -1, 0, 1 \wedge 2\pi, 0, 1, 0$; **NR:** $-1, 0, 2\pi, 0$;

2) **T:** $0, 1, 0, -1 \wedge -4\pi, 0, 1, 4\pi\lg 2$; **NR:** $1, 0, 4\pi, -\lg 2$.

Tečné vektory $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ všech pěti uvedených křivek v $\mathbb{R}^4$ splňují nerovnosti $t_1^2 + t_2^2 > 0$, $t_3^2 + t_4^2 > 0$; bylo proto možné položit $N^1 = (-t_2, t_1, 0, 0)$, $N^2 = (0, 0, -t_4, t_3)$, $N^3 = -T \times N^1 \times N^2$, což zaručilo, že ortogonální báze $\{T, N^1, N^2, N^3\}$ je kladná. Koeficientů určujících trojrozměrnou nadrovinu je pět, tečna je průnikem tří nadrovin, a je proto určena třemi pěticemi koeficientů.

15.26. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-4, 1, 0, 0, 4 \wedge 0, 0, -8, 3, 16 \wedge 292, 1168, -51, -136, -2672$;

NP: $1, 4, 12, 32, -626$;

2) **T:** $2, 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 4, 3, 1 \wedge 5, 5, -10, 4, 8$; **NP:** $1, -2, 3, -4, 10$.

15.27. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $-1, 0, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0, -4 \wedge 0, 2, 0, 1, -8$; **NP:** $0, 1, 0, -2, 6$;

2) **T:** $-4, -2, 0, 0, 8 + 3\sqrt{3} \wedge 0, 0, -4, 6, 3\sqrt{3} - 12 \wedge -26, -26, 52, -10, 7 - 18\sqrt{3}$;

NP: $-2, 4, 12, 8, 3\sqrt{3} - 74$.

15.28. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R} - \{0\}$;

1) **T:** $1, 1, 0, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, 1, 1, -\lg 4 \wedge 2, -2, -1, 1, 0$; **NP:** $1, -1, 2, -2, 0$;

2) **T:** $1, 1, 0, 0, \frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, -1, -1, \lg 4 \wedge 2, 2, -2, -1, 0$; **NP:** $1, -1, -2, 2, 0$.

15.29. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}_+$;

1) **T:** $-1, 1, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, -1, 0, 0 \wedge 1, 1, 0, -1, 0$; **NP:** $1, 1, 0, 2, 0$;

2) **T:** $0, e, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 2e, -e^2, -4 \wedge 4 + e^2, 4 + e^2, 0, 2e^2, 8$;

NP: $e^4, 0, -e^3, -2e^2, e^4 + e^2 - 4$.

15.30. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $0, 1, 0, 0, -1 \wedge 1, 0, -1, \pi, -\pi \wedge 1 + \pi^2, 0, -\pi^2, -\pi, \pi$; **NP:** $\pi, 0, \pi, 1, -1$;

2) **T:** $0, 1, 0, 0, -1 \wedge 0, 0, -e^2, e^2\pi, -\pi \wedge 1 + \pi^2, 1 + \pi^2, 0, -e^2\pi, \pi$;

NP: $e^4\pi, 0, e^2\pi, e^2, -1$.

V řešení Cv. 15.31 – 15.60 je rovina $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ určena čtyřmi koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, přičemž normálový vektor $N = (\alpha, \beta, \gamma)$ je vždy kladným násobkem vektorového součinu $T^1 \times T^2$; normála k ploše je průnikem dvou rovin, příslušné čtveřice koeficientů jsou odděleny znakem $\wedge$.

15.31. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-1, 1, 2, 1$; **N:** $1, 1, 0, -1 \wedge 0, 2, -1, -3$;

2) **TR:** $3, 1, -2, -1$; **N:** $1, 1, 2, -7 \wedge 0, -2, -1, 6$.

15.32. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $15, 9, -2, -36$; **N:** $1, 1, 12, -112 \wedge 1, -1, 3, -29$;

2) **TR:** $3, 0, -1, 0$; **N:** $1, 1, 3, -2 \wedge 1, -1, 3, 2$.

15.33. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

1) **TR:** $-3, -3, 2, 2$; **N:** $1, 1, 3, -8 \wedge -1, 3, 3, -12$;

2) **TR:** $0, 1, -1, 0$; **N:** $3, -1, -1, -6 \wedge -1, -1, -1, 2$.

15.34. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u,v);\, u \neq v\}$;

1) **TR:** $12, -3, -2, 13$; **N:** $1, 2, 3, 12 \wedge 1, -4, 12, 105$;

2) **TR:** $-12, -3, 2, 13$; **N:** $1, -2, 3, -12 \wedge 1, 4, 12, -105$.

15.35. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $-2, 0, -1, -2$; **N:** $-1, -1, 2, 0 \wedge -1, 0, 2, -1$;

2) **TR:** $16, 6, -1, -17$; **N:** $2, -4, 8, 27 \wedge -2, 0. - 32, -95$.

15.36. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $0, -4, -1, 4$; **N:** $-8, -2, 8, -7 \wedge 0, 2, -8, 15$;

2) **TR:** $0, -1, -1, 2$; **N:** $8, 1, -1, -32 \wedge 0, -1, 1, 0$.

15.37. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, uv > 0\}$;

1) **TR:** $2, 1, -3, -3$; **N:** $1, 1, 1, -2 \wedge 2, -1, 1, -1$;

2) **TR:** $2, -1, 6, 6(1 - \lg 2)$; **N:** $2, -2, -1, 8 + \lg 2 \wedge 4, 2, -1, 4 + \lg 2$.

15.38. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, |v| < u\}$;

1) **TR:** $1, 1, -1, 0$; **N:** $1, 3, 4, -5 \lg 3 \wedge 1, -3, -2, \lg 3$;

2) **TR:** $1, 1, -1, 0$; **N:** $5, 1, 6, -7\lg 5 \wedge 5, -1, 4, -3\lg 5$.

15.39. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u,v);\, u \neq 0\}$;

1) **TR:** $0, \pi, 1, -\pi$; **N:** $2, 1, -\pi, -3 \wedge 0, 1, -\pi, -1$;

2) **TR:** $0, \pi, 1, -\pi$; **N:** $4, 8, -8\pi, -9 \wedge 0, 1, -\pi, -1$.

15.40. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(\frac{1}{2}(2m+1)\pi, \frac{1}{2}(2n+1)\pi);\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}\}$;

1) **TR:** $-1, 1, 1, 0$; **N:** $1, 0, 1, 0 \wedge 0, 1, -1, 0$;

2) **TR:** $0, -1, 0, 1$; **N:** $-1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, -1, \frac{1}{2}\pi$.

15.41. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $1, 0, 0, 1$; **N:** $0, 1, 1, -\frac{3}{2}\pi \wedge 0, -1, 1, -\frac{3}{2}\pi$;

2) **TR:** $0, -1, 0, 1$; **N:** $1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$.

15.42. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u,v);\, u \neq 0\}$;

1) **TR:** $0, -1, 1, 1$; **N:** $0, 1, 1, -1-\pi \wedge -1, 0, 0, 0$;

2) **TR:** $1, 0, 1, 1$; **N:** $-1, 0, 1, -1-2\pi \wedge 0, -1, 0, 0$.

15.43. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(\frac{1}{2}m\pi, \frac{1}{2}m\pi + n\pi);\, m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}\}$;

1) **TR:** $-1, -1, 0, \sqrt{2}$; **N:** $0, 0, -1, 0 \wedge 1, -1, 0, 0$;

2) **TR:** $-\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}, 3$; **N:** $4, 4\sqrt{3}, -12, -\sqrt{3} \wedge 12, -4\sqrt{3}, -4, \sqrt{3}$.

15.44. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-1, 1, 0, -1$; **N:** $1, 1, 1, -3 \wedge 1, 1, -1, -3$;

2) **TR:** $-1, \cosh 1, -\sinh 1, -1$; **N:** $1, e, e, -1-2e^2 \wedge e^2, e, -e, -2-e^2$.

15.45. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-e, 1, 0, 0$; **N:** $e, e^2, 1, -1-e^2-e^4 \wedge e, e^2, -1, 1-e^2-e^4$;

2) **TR:** $-1, 0, e, 0$; **N:** $e^3, e^4, e^2, -1-e^2-e^4 \wedge -e^3, e^4, -e^2, 1+e^2-e^4$.

15.46. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $1, 0, -1, 0$; **N:** $e, 2, e, -2-2e^2 \wedge 1, 0, 1, -2e$;

2) **TR:** $0, -e^2, 0, -1$; **N:** $e^3, 0, e, e^4-1 \wedge -e^3, 0, e, -e^4-1$.

15.47. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, u+v+1 > 0,\, u-1 < v < u+1\}$;

1) **TR:** $0, 1, 1, 0$; **N:** $1, -3, 3, -\lg 3 \wedge 1, 3, -3, -\lg 3$;

2) **TR:** $0, 1, 1, 0$; **N:** $1, -9, 9, -\lg 9 \wedge 1, 9, -9, -\lg 9$.

15.48. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, uv > 0\}$;

1) **TR:** $2, -1, 2, -\pi$; **N:** $1, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge 0, 2, 1, -\frac{1}{4}\pi$;

2) **TR:** $-2, -1, -2, -\pi$; **N:** $1, -2, 0, \frac{1}{4}\pi \wedge 0, -2, 1, \frac{1}{4}\pi$.

15.49. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\, 1+uv > 0,\, u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$; **N:** $1, 1, -1, -\lg 2 \wedge -1, 1, 1, -\lg 2$;

2) **TR:** $1, 0, 1, -\frac{1}{2}\pi$; **N:** $2, 3, -2, -3\lg 4 \wedge -2, 3, 2, -3\lg 4$.

15.50. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u, v);\ u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $0, 1, 1, -\frac{3}{2}\pi$; **N:** $1, 1, -1, -\frac{3}{4}\pi \wedge -1, 1, -1, \frac{3}{4}\pi$;

2) **TR:** $0, 1, 1, -\frac{3}{2}\pi$; **N:** $-1, -1, 1, \pi \wedge 1, -1, 1, -\frac{2}{3}\pi$.

15.51. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-\sqrt{3}, -1, 0, 2$; **N:** $0, 0, 1, -1 \wedge -1, \sqrt{3}, 0, 0$;

2) **TR:** $-1, 1, 0, \sqrt{2}$; **N:** $0, 0, 1, 1 \wedge 1, 1, 0, 0$.

15.52. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v);\ u \neq 0\}$;

1) **TR:** $-1, -1, \sqrt{2}, 0$; **N:** $1, 1, \sqrt{2}, -2\sqrt{2} \wedge -1, 1, 0, 0$;

2) **TR:** $1, -\sqrt{3}, -2, 0$; **N:** $1, -\sqrt{3}, 2, 4 \wedge -\sqrt{3}, -1, 0, 0$.

15.53. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v);\ v \neq 0\}$

1) **TR:** $0, -2, 1, 1$; **N:** $1, 0, 0, 0 \wedge 0, 1, 2, -3$;

2) **TR:** $-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -1, -1$; **N:** $-1, 1, 0, 0 \wedge 1, 1, -2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$.

15.54. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v);\ v \not\equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi\}$;

1) **TR:** $0, 2, \sqrt{3}, -4\sqrt{3}$; **N:** $-1, 0, 0, 0 \wedge 0, -2\sqrt{3}, 4, 5$;

2) **TR:** $\sqrt{3}, -4, 12, -16\sqrt{3}$; **N:** $16, 4\sqrt{3}, 0, -7 \wedge -16\sqrt{3}, 36, 16, 27\sqrt{3}$.

15.55. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-1, 0, 0, 1$; **N:** $0, 0, 1, -2 \wedge 0, 1, 0, 0$;

2) **TR:** $-\cosh 1, -\sinh 2, 0, (1 - \sinh^2 1)\cosh 1$;

N: $0, 0, 1, -1 \wedge -2\sinh 1, 1, 0, (1 + 2\cosh^2 1)\sinh 1$.

15.56. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-\cosh 1, \sinh 1, 0, 1$; **N:** $0, 0, 1, 0 \wedge \sinh 1, \cosh 1, 0, -\sinh 2$;

2) **TR:** $-\cosh 1, -\sinh 1, 0, 1$; **N:** $0, 0, 1, -1 \wedge -\sinh 1, \cosh 1, 0, \sinh 2$.

15.57. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$; $\Omega = \{(u, v);\ u \neq 0\}$;

1) **TR:** $-2, 0, -1, -1$; **N:** $1, 0, -2, 3 \wedge 0, -1, 0, 0$;

2) **TR:** $-2\cosh 1, -2\sinh 1, 1, 1$;

N: $\cosh 1, -\sinh 1, 2, -1 - 2\cosh^2 1 \wedge -\sinh 1, \cosh 1, 0, \sinh 2$.

15.58. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $0, \cosh 1, -\sinh 1, -1$; **N:** $-1, 0, 0, 0 \wedge 0, \sinh 1, \cosh 1, -\sinh 2$;

2) **TR:** $\cosh 1, -\cosh 1, \sqrt{2}\sinh 1, -\sqrt{2}$;

N: $1, 1, 0, 0 \wedge -\sinh 1, \sinh 1, \sqrt{2}\cosh 1, \sqrt{2}\sinh 2$.

15.59. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $\cosh 1, \sinh 1, 0, -1$; **N:** $-\sinh 1, \cosh 1, 0, \sinh 2 \wedge 0, 0, 1, 0$;

2) **TR:** $\cosh 1, 0, \sinh 1, -1$; **N:** $0,1,0,0 \wedge -\sinh 1, 0, \cosh 1, \sinh 2$.

15.60. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $0,0,-1,1$; **N:** $0,-1,0,3 \wedge -1,0,0,0$;

2) **TR:** $0,1,-1,3+\sqrt{2}$; **N:** $0,1,1,3 \wedge 1,0,0,0$.

Trojrozměrné nadroviny $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 = 0$ jsou ve cvičeních 15.61–15.70 určeny pěti koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_5$, tečné i normálové roviny jsou průniky dvou takových nadrovin. První čtveřice koeficientů rovnic normálových rovin jsou v dalším vždy kladnými násobky vektorů T^1, T^2. Chceme-li tečné roviny popisovat co nejjednodušeji, je nutný individuální přístup k hledání vektorů N^1, N^2. Někdy je aspoň jeden z těchto vektorů patrný na první pohled, jindy nezbývá než řešit rovnice $(T^1 \cdot N) = 0$, $(T^2 \cdot N) = 0$; máme-li již N^1, lze definovat N^2 jako *záporný* násobek vektorového součinu $T^1 \times T^2 \times N^1$, jehož výpočet může ovšem chvilku trvat. Bez ohledu na metodu hledání vektorů N^1, N^2 je báze $\{T^1, T^2, N^1, N^2\}$ dále uvedených vektorů vždy kladná.

15.61. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $\sqrt{2}, -\pi, -\sqrt{2}, 0, \frac{1}{4}\pi^2 \wedge -\sqrt{2}\pi, 0, -\sqrt{2}\pi, -8, \pi^2$;

NR: $\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, -\frac{1}{2}\pi, -\pi \wedge \sqrt{2}\pi, 4, -\sqrt{2}\pi, 0, -\pi$;

2) **TR:** $0,0,2\pi,2,\pi^2 \wedge -2,-\pi,0,0,-\pi^2$; **NR:** $0,0,-2,2\pi,-\pi \wedge -\pi,2,0,0,2\pi$.

15.62. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\ v \neq 0\}$;

1) **TR:** $2,2,-1,-4,0 \wedge 11,1,-8,8,-20$; **NR:** $4,4,8,2,-25 \wedge 8,-8,8,-2,-47$;

2) **TR:** $2,1,1,2,2 \wedge 2,-1,1,-2,6$; **NR:** $2,2,-4,-1,25 \wedge 2,-2,-4,1,23$.

15.63. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$;

1) **TR:** $1,2,1,0,0 \wedge -2,-1,4,3,0$ **NR:** $3,-2,1,0,-6 \wedge 0,1,-2,3,6$;

2) **TR:** $4,0,-3,1,0 \wedge -4,8,-5,1,0$; **NR:** $3,4,4,0,-27 \wedge 0,1,4,12,-114$.

15.64. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\ u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $4,1,0,0,-4 \wedge -32,128,85,51,-240$;

NR: $2,-8,8,8,-1 \wedge -2,8,-32,32,-271$;

2) **TR:** $1,1,0,0,-2 \wedge -1,1,1,0,0$; **NR:** $-1,1,2,2,-4 \wedge -1,1,-2,2,-4$.

15.65. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $1,-1,0,0,-\sqrt{2} \wedge 0,0,-1,1,-\sqrt{2}$;

NR: $-1,-1,1,1,0 \wedge -1,-1,-1,-1,0$;

2) **TR:** $1,\sqrt{3},0,0,-2 \wedge 0,0,1,0,-1$; **NR:** $\sqrt{3},-1,0,-2,0 \wedge \sqrt{3},-1,0,2,0$.

15.66. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\ u \neq 0 \neq v\}$;

1) **TR:** $0,0,1,1,\frac{1}{2}\pi \wedge -2,-2,-1,1,0$; **NR:** $1,0,-1,1,-\frac{1}{4}\pi \wedge 0,1,-1,1,\frac{1}{4}\pi$;

2) **TR:** $0,0,2,2,-\pi \wedge 8,-4\sqrt{3},-4,4,(\sqrt{3}-2)\pi$;

NR: $1, 0, 1, -1, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 4\sqrt{3}, -6, 6, (1-\sqrt{3})\pi$.

15.67. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v);\ u > 0,\ 0 < v < u\}$;

1) **TR:** $-3, -1, -1, 1, -3\lg 3 \wedge -3, -5, 4, 8, 3(\lg 3 - 4\lg 2)$;

NR: $2, 6, 3, 3, -2(\lg 3 + 3\lg 2) \wedge 1, -3, 3, -3, -\lg 3$;

2) **TR:** $0, -2, 1, 2, 2\lg 2 - 3\lg 3 \wedge -36, 8, 14, 1, 64\lg 2 - 15\lg 3$;

NR: $3, 6, 4, 4, -12\lg 2 - 8\lg 3 \wedge 1, -2, 4, -4, 0$.

15.68. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $2, 0, -1, 0, \lg 2 - \frac{1}{2}\pi \wedge 0, 2, 0, -1, \lg 2 - \frac{1}{2}\pi$;

NR: $1, 0, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi - \lg 4 \wedge 0, 1, 0, 2, -\frac{1}{4}\pi - \lg 4$;

2) **TR:** $6, 0, \sqrt{3}, 0, 2\pi - \sqrt{3}\lg 4 \wedge 0, 6, 0, \sqrt{3}, 2\pi - \sqrt{3}\lg 4$;

NR: $1, 0, -2\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3}\lg 4 \wedge 0, 1, 0, -2\sqrt{3}, \frac{1}{3}\pi + 2\sqrt{3}\lg 4$.

15.69. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $0, 0, \sinh 1, -\cosh 1, -1 \wedge 1 + e^2 + e^4 + e^6, 1 - e^2 + e^4 - e^6, 0, 0, 0$;

NR: $-\sinh 1, -\cosh 1, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, -\cosh 1, -\sinh 1, -\sinh 2$;

2) **TR:** $\sinh 1, \cosh 1, 0, 0, 1 \wedge 0, 0, 1 + e^2 + e^4 + e^6, -1 + e^2 - e^4 + e^6, 0$;

NR: $0, 0, -\sinh 1, \cosh 1, 0 \wedge -\cosh 1, \sinh 1, 0, 0, \sinh 2$.

15.70. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $-1, 0, 2\pi, 0, \frac{5}{2}\pi \wedge 0, 5\pi, 0, 8, -10\pi$;

NR: $0, 2, 0, -\frac{5}{4}\pi, -4 \wedge -2\pi, 0, -1, 0, -\frac{5}{4}$;

2) **TR:** $\pi, 0, 0, 1, 2\pi \wedge 0, 1, \pi, 0, 2\pi$; **NR:** $1, 0, 0, -\pi, 2 \wedge 0, -\pi, 1, 0, 2$.

V následujících pěti příkladech má křivý prostor v bodě a trojrozměrnou tečnou nadrovinu a jeho normála je průnikem tří trojrozměrných nadrovin. Normálový vektor je vždy záporným násobkem vektoru $T^1 \times T^2 \times T^3$.

15.71. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \{(u,v,w);\ uvw \neq 0\}$;

1) **TP:** $-1, 0, 0, -1, 2$; **N:** $1, 1, 1, -1, -2 \wedge 1, 1, -1, -1, 0 \wedge 1, -1, -1, -1, 2$;

2) **TP:** $-1, 0, 0, -4, 4$; **N:** $-8, -8, -8, 2, 47 \wedge 8, 8, -8, -2, -15 \wedge -8, 8, 8, 2, -17$.

15.72. $\mathcal{D}(f) = \Omega = \mathbb{R}^3_+$;

1) **TP:** $-2, 1, 1, -1, \frac{1}{2}\pi$; **N:** $1, 2, 0, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge 1, 0, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge -1, 0, 0, 2, \frac{1}{4}\pi$;

2) **TP:** $-2, 1, 1, -1, \frac{1}{2}\pi$;

N: $1, 2, 0, 0, -\frac{1}{4}\pi - 2\lg 2 \wedge 1, 0, 2, 0, -\frac{1}{4}\pi \wedge -1, 0, 0, 2, \frac{1}{4}\pi - 2\lg 2$.

15.73. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$; $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,w);\ w \in \mathbb{R}\}$;

1) **TP:** $\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}, -1, 0$; **N:** $1, \sqrt{3}, 0, 0, -2 \wedge 0, 0, 1, \sqrt{3}, 2 \wedge -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, -1, 0$;

2) **TP:** $1, \sqrt{3}, -2, -2\sqrt{3}, 0$;

N: $\sqrt{3}\,, -1, 0, 0, -4 \wedge 0, 0, \sqrt{3}\,, -1, -2 \wedge 2, 2\sqrt{3}\,, 1, \sqrt{3}\,, 0\,.$

15.74. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$; $\Omega = \{(u, v, w);\ u \neq 0\}$;

1) **TP:** $-\sqrt{3}\,, 3, -1, \sqrt{3}\,, 0$;

N: $-\sqrt{3}\,, -1, 3, \sqrt{3}\,, -4 \wedge 3, \sqrt{3}\,, \sqrt{3}\,, 1, 0 \wedge -1, \sqrt{3}\,, \sqrt{3}\,, -3, 0$;

2) **TP:** $0, 0, 1, \sqrt{3}\,, 0$; **N:** $-\sqrt{3}\,, 1, 0, 0, 2 \wedge 0, 0, -\sqrt{3}\,, 1, 0 \wedge -1, -\sqrt{3}\,, 0, 0, 0\,.$

15.75. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^3$; $\Omega = \{(u, v, w);\ v \not\equiv \frac{1}{2}\pi \bmod \pi,\ w \not\equiv \frac{1}{2}\pi \bmod \pi\}$;

1) **TP:** $-\sqrt{3}\,, -1, -2, -2\sqrt{6}\,, 4\sqrt{2}$;

N: $-1, \sqrt{3}\,, 0, 0, 0 \wedge -\sqrt{3}\,, -1, 2, 0, 0 \wedge -3, -\sqrt{3}\,, -2\sqrt{3}\,, 2\sqrt{2}\,, 0$;

2) **TP:** $-3, \sqrt{3}\,, 0, -2, 4$; **N:** $1, \sqrt{3}\,, 0, 0, 0 \wedge 0, 0, 1, 0, 0 \wedge -\sqrt{3}\,, 1, 0, 2\sqrt{3}\,, 0\,.$

V řešení cvičení 15.76 – 15.100 je pro každou standardní rovnici grafu f uveden příslušný standardní parametrický popis G_f, jeho definiční obor a maximální množinu Ω, v němž je popis hladký; pak následují posloupnosti koeficientů rovnic tečné a normálové nadroviny pro obě volby bodu a. V případech, kdy normálová nadrovina nadplochy má dimenzi 2 nebo 3, bylo vhodné najít co nejjednodušší normálové vektory; omlouvám se proto čtenářům, že jsem při jejich hledání neužíval vždy týž algoritmus, a to ani když šlo o příklady téhož typu.

15.76. $(x, \arcsin x)$; $\mathcal{D}(G_f) = \langle -1, 1\rangle$; $\Omega = (-1, 1)$;

1) **T:** $-6, 3, 3\sqrt{3} - \pi$; **N:** $6, 12, -3\sqrt{3} - 4\pi$;

2) **T:** $-4\sqrt{2}\,, 4, \pi - 4$; **N:** $2\sqrt{2}\,, 4, \pi + 2\,.$

15.77. $(x, \arccos(1 - \sin^4 x)^2)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $0, 1, 0$; **N:** $1, 0, 0$; 2) **T:** $0, 2, -\pi$; **N:** $2, 0, -\pi\,.$

15.78. $(\sqrt{y}\,, y)$; $\mathcal{D}(G_f) = \langle 0, +\infty)$; $\Omega = \mathbb{R}_+$;

1) **T:** $-2, 1, 1$; **N:** $1, 2, -3$; 2) **T:** $-2\sqrt{2}\,, 1, 2$; **N:** $1, 2\sqrt{2}\,, -5\sqrt{2}\,.$

15.79. $(\sqrt{1 - y^2}\,, y)$; $\mathcal{D}(G_f) = \langle -1, 1\rangle$; $\Omega = (-1, 1)$;

1) **T:** $-2\sqrt{2}\,, -1, 3$; **N:** $-1, 2\sqrt{2}\,, 0$; 2) **T:** $-\sqrt{3}\,, -1, 2$; **N:** $-1, \sqrt{3}\,, 0\,.$

15.80. $(x, x^{4/3}, x^{5/3})$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $4, 3, 0, 1 \wedge -3, 4, 5, -2$; **NR:** $3, -4, 5, 12$;

2) **T:** $-8, 3, 0, 16 \wedge -60, -160, 73, 704$; **NR:** $3, 8, 20, -792\,.$

15.81. $(\arcsin z, \arccos z, z)$; $\mathcal{D}(G_f) = \langle -1, 1\rangle$; $\Omega = (-1, 1)$;

1) **T:** $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -3, 3, 4\sqrt{3}\,, 2\sqrt{3} - \frac{5}{2}\pi$; **NR:** $4, -4, 2\sqrt{3}\,, \sqrt{3} + \frac{10}{3}\pi$;

2) **T:** $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 1, 2\sqrt{2}\,, -2$; **NR:** $2, -2, \sqrt{2}\,, -1\,.$

15.82. $(\operatorname{arctg} z, \operatorname{arccotg} z, z)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}$;

1) **T:** $1, 1, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge -1, 1, 1, 1 - \pi$; **NR:** $1, -1, 2, 2 + \pi$;

2) **T:** $1,1,0,-\frac{1}{2}\pi \wedge -2,2,1,\frac{1}{3}\pi-\sqrt{3}$; **NR:** $1,-1,4,-4\sqrt{3}-\frac{1}{6}\pi$.

15.83. $(\cos^2 y, y, \sin^2 y)$; $\mathcal{D}(G_f)=\Omega=\mathbb{R}$;

1) **T:** $-2,-2,0,1+\frac{1}{2}\pi \wedge 2,-2,4,\frac{1}{2}\pi-3$; **NR:** $-1,1,1,-\frac{1}{4}\pi$;

2) **T:** $1,0,1,-1 \wedge 2\sqrt{3},6,-2\sqrt{3},5\pi-\sqrt{3}$; **NR:** $-2\sqrt{3},4,2\sqrt{3},\sqrt{3}+\frac{10}{3}\pi$.

15.84. $(x,\sinh x,\cosh x)$; $\mathcal{D}(G_f)=\Omega=\mathbb{R}$;

1) **T:** $-1,1,0,0 \wedge 0,0,1,-1$; **NR:** $1,1,0,0$;

2) **T:** $0,\sinh 1,\cosh 1,-1 \wedge 1,-\cosh 1,-\sinh 1,1$;

NR: $1,\cosh 1,-\sinh 1,1+\sinh 2$.

15.85. (x_1,x_1^2,x_1^3,x_1^4); $\mathcal{D}(G_f)=\Omega=\mathbb{R}$;

1) **T:** $-2,1,0,0,1 \wedge 0,0,-4,3,1 \wedge 5,10,-3,-4,-8$; **NP:** $1,2,3,4,-10$;

2) **T:** $2,1,0,0,1 \wedge 0,0,4,3,1 \wedge -5,10,3,-4,-8$; **NP:** $1,-2,3,-4,10$.

15.86. $(\lg x_3,\lg^2 x_3,x_3,\lg^3 x_3)$; $\mathcal{D}(G_f)=\Omega=\mathbb{R}_+$;

1) **T:** $0,1,0,0,0 \wedge 0,0,0,1,0 \wedge 1,0,-1,0,11$; **NP:** $1,0,1,0,-1$;

2) **T:** $e,0,-1,0,0 \wedge 0,3,0,-2,-1 \wedge -2,1,-3,e,1+2e$; **NP:** $1,2,e,3,-6-e^2$.

15.87. $(|x_4-1|,|x_4-2|,|x_4-3|,x_4)$; $\mathcal{D}(G_f)=\mathbb{R}$; $\Omega=\mathbb{R}-\{1,2,3\}$;

1) **T:** $1,-1,0,0,1 \wedge 0,0,1,1,-3 \wedge 1,1,-1,1,0$; **NP:** $-1,-1,-1,1,6$;

2) **T:** $1,1,0,0,-1 \wedge 0,0,1,1,-3 \wedge -1,1,-1,1,0$; **NP:** $1,-1,-1,1,0$.

15.88. $(x,y,\sqrt{1+x^2-y^2})$; $\mathcal{D}(G_f)=\{(x,y);\,|y|\le\sqrt{1+x^2}\}$;

$\Omega=\{(x,y);\,|y|<\sqrt{1+x^2}\}$;

1) **TR:** $-1,3,2\sqrt{2},-4$; **N:** $2\sqrt{2},0,1,-\sqrt{2} \wedge 0,2\sqrt{2},-3,0$;

2) **TR:** $1,-1,2,-2$; **N:** $2,0,-1,2 \wedge 0,2,1,0$.

15.89. $\left(x,\dfrac{x^2+z^2}{x^2-z^2},z\right)$; $\mathcal{D}(G_f)=\Omega=\{(x,z);\,z\ne\pm x\}$;

1) **TR:** $0,-1,0,1$; **N:** $1,0,0,-2 \wedge 0,0,1,0$;

2) **TR:** $16,-9,-8,-15$; **N:** $27,48,0,107 \wedge 0,-24,27,14$.

15.90. $(x,\sqrt{x^2+z^2},z)$; $\mathcal{D}(G_f)=\mathbb{R}^2$; $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$;

1) **TR:** $3,-5,4,0$; **N:** $5,3,0,-30 \wedge 0,4,5,-40$;

2) **TR:** $-1,-\sqrt{2},-1,0$; **N:** $\sqrt{2},-1,0,2\sqrt{2} \wedge 0,-1,\sqrt{2},2\sqrt{2}$.

15.91. $(\sqrt{yz},y,z)$; $\mathcal{D}(G_f)=\{(y,z);\,yz\ge 0\}$; $\Omega=\{(y,z);\,yz>0\}$;

1) **TR:** $4,-4,-1,0$; **N:** $1,1,0,-6 \wedge 1,0,4,-36$;

2) **TR:** $12,9,4,0$; **N:** $-3,4,0,34 \wedge -1,0,3,33$.

15.92. $(x,y,\arccos(xy))$; $\mathcal{D}(G_f)=\{(x,y);\,|xy|\le 1\}$; $\Omega=\{(x,y);\,|xy|<1\}$;

1) **TR:** $-2,\sqrt{3},1,2\sqrt{3}-\frac{5}{6}\pi$; **N:** $1,0,2,-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi \wedge 0,\sqrt{3},-3,\sqrt{3}+\frac{5}{2}\pi$;

2) **TR:** $2\sqrt{3},-\sqrt{3},3,2(\sqrt{3}-\pi)$; **N:** $2\sqrt{3},0,-4,\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi \wedge 0,\sqrt{3},1,-\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$.

15.93. $\Big(x, \dfrac{\sin(x+z)}{\sin(x-z)}, z\Big)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x,z);\ x \not\equiv z \bmod \pi\}$;

1) **TR:** $0, -1, 0, 1$; **N:** $1, 0, 0, -\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, 1, -\pi$;

2) **TR:** $-2, -1, 0, 1-\pi$; **N:** $1, -2, 0, 2+\frac{1}{2}\pi \wedge 0, 0, 1, -\frac{1}{4}\pi$.

15.94. $(\lg(1+y^2+z^2) + \operatorname{arctg}(y+z), y, z)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \mathbb{R}^2$;

1) **TR:** $6, -7, -7, 7-\frac{3}{2}\pi - 6\lg\frac{3}{2}$;

N: $7, 6, 0, -3-\frac{7}{4}\pi - 7\lg\frac{3}{2} \wedge 7, 0, 6, -3-\frac{7}{4}\pi - 7\lg\frac{3}{2}$;

2) **TR:** $3, -5, -1, 4-3\lg 3$; **N:** $5, 3, 0, -3-5\lg 3 \wedge 1, 0, 3, 3-\lg 3$.

15.95. $(\sqrt{x_2-x_4}, x_2, \sqrt{x_2+x_4}, x_4)$; $\mathcal{D}(G_f) = \{(x_2,x_4);\ |x_4| \le x_2\}$,
$\Omega = \{(x_2,x_4);\ |x_4| < x_2\}$;

1) **TR:** $0, 1, -6, 1, 9 \wedge -2, 1, 0, -1, 1$; **NR:** $3, 6, 1, 0, -36 \wedge -3, 0, 1, 6, -24$;

2) **TR:** $0, 1, -4, 1, 4 \wedge -8, 1, 0, -1, 16$; **NR:** $1, 8, 2, 0, -88 \wedge -1, 0, 2, 8, 48$.

15.96. $\Big(\sin\dfrac{\pi x_3}{x_4}, \cos\dfrac{\pi x_4}{x_3}, x_3, x_4\Big)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_3,x_4);\ x_3 \ne 0 \ne x_4\}$;

1) **TR:** $1, 0, 0, 0, -1 \wedge 0, 1, 0, 0, -1$; **NR:** $0, 0, 1, 0, -1 \wedge 0, 0, 0, 1, -2$;

2) **TR:** $1, 0, 0, 0, -1 \wedge 0, 2\sqrt{3}, -4\pi, -6\pi, \sqrt{3}$;

NR: $0, 4\pi, 2\sqrt{3}, 0, 2\pi - \sqrt{3} \wedge 0, 9\pi, 0, 3\sqrt{3}, \sqrt{3} + \frac{9}{2}\pi$.

15.97. $(\lg(1+x_2^2-x_3^2), x_2, x_3, \lg(1-x_2^2+x_3^2))$;
$\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_2,x_3);\ x_3^2 - x_2^2 < 1,\ x_2^2 - x_3^2 < 1\}$;

1) **TR:** $1, 0, 0, 1, 0 \wedge -1, 2, -2, 0, 0$; **NR:** $2, 1, 0, -2, -1 \wedge -2, 0, 1, 2, -1$;

2) **TR:** $1, 0, 0, 1, 0 \wedge -1, 6, 6, 0, 0$; **NR:** $6, 1, 0, -6, -3 \wedge 6, 0, 1, -6, 3$.

15.98. $(x_1, x_2, x_3, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2})$;
$\mathcal{D}(G_f) = \{(x_1,x_2,x_3);\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 \le 1\}$; $\Omega = \{(x_1,x_2,x_3);\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 1\}$;

1) **TP:** $1, 1, 1, 1, -2$; **N:** $1, 0, 0, -1, 0 \wedge 0, 1, 0, -1, 0 \wedge 0, 0, 1, -1, 0$;

2) **TP:** $-1, 1, -1, 1, -2$; **N:** $1, 0, 0, 1, 0 \wedge 0, 1, 0, -1, 0 \wedge 0, 0, 1, 1, 0$.

15.99. $\Big(x_1, \dfrac{x_1^2-x_3^2}{x_1^2-x_4^2}, x_3, x_4\Big)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_1,x_3,x_4);\ x_4 \ne \pm x_1\}$;

1) **TP:** $0, 4, -2, 1, -1$; **N:** $1, 0, 0, 0, 0 \wedge 0, 4, 8, 0, -9 \wedge 0, -4, 0, 16, -31$;

2) **TP:** $-1, 4, 1, 0, 0$; **N:** $4, 1, 0, 0, 4 \wedge 0, -1, 4, 0, 4 \wedge 0, 0, 0, 1, -3$.

15.100. $\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{x_2x_3}{x_4}, x_2, x_3, x_4\Big)$; $\mathcal{D}(G_f) = \Omega = \{(x_2,x_3,x_4);\ x_4 \ne 0\}$;

1) **TP:** $-4, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1, \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$;

N: $-3, 4\sqrt{3}, 0, 0, 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi \wedge -3, 0, 4\sqrt{3}, 0, 4\sqrt{3} + \frac{1}{2}\pi \wedge -1, 0, 0, 4, \frac{1}{6}\pi - 4\sqrt{3}$;

2) **TP:** $-4, -2, 1, 1, 2-\pi$;

N: $-1, 2, 0, 0, -2-\frac{1}{4}\pi \wedge 1, 0, 4, 0, \frac{1}{4}\pi + 8 \wedge 1, 0, 0, 4, \frac{1}{4}\pi - 8$.

16. Lokální řešení rovnic

Definice. Zobrazení metrického prostoru X do m. p. Y se nazývá **otevřené**, je-li obrazem každé otevřené množiny $G \subset X$ množina otevřená v Y.

Věta 16.1. *Prosté zobrazení $F : X \to_{\text{na}} Y$ je otevřené, právě když je jeho inverzní zobrazení $F_{-1} : Y \to X$ spojité. Prosté spojité otevřené zobrazení $F : X \to_{\text{na}} Y$ je homeomorfní.*

Definice. Nechť $q \geq p$ jsou přirozená čísla, nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená množina a nechť zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^q$ je třídy C_1 v Ω; říkáme, že F je **regulární v** Ω, je-li hodnost matice $F'(x)$ rovna p pro každé $x \in \Omega$.

Poznámka 16.1. Je-li $q > p$, je regularita F totéž co hladkost nadplochy F; je-li $q = p$, je regularita F v Ω ekvivalentní s podmínkou, že $\det F' \neq 0$ všude v Ω.

Definice. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ otevřená množina, říkáme, že $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ je **difeomorfní zobrazení** (nebo: **difeomorfismus**), je-li prosté a regulární v Ω.

Věta 16.2. *Každé regulární zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je otevřená množina, je otevřené. Je-li zobrazení $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfní, je inverzní zobrazení F_{-1} difeomorfní v $F(\Omega)$ a*

$$\det F'(x) \cdot \det (F_{-1})'(F(x)) = 1 \quad \textit{pro všechna} \quad x \in \Omega . \tag{1}$$

Věta 16.3. (O lokální existenci inverzní funkce.) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a nechť funkce $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ je funkce třídy C_n, kde je buď $n \in \mathbb{N}$, nebo $n = \infty$. Je-li $a \in \Omega$ a $\det F'(a) \neq 0$, existuje otevřená množina $X \subset \Omega$ obsahující bod a tak, že platí:*

1. *$Y := F(X)$ je otevřená množina;*
2. *restrikce $F|X$ je prostá – značme ji krátce F;*[1]
3. *inverzní zobrazení $F_{-1} : Y \to X$ je třídy C_n v Y;*
4. *pro každé $y \in Y$ platí identity*

$$DF_{-1}(y) = (DF(F_{-1}(y)))_{-1} , \quad (F_{-1})'(y) = (F'(F_{-1}(y)))_{-1} . \quad \square \tag{2}$$

První identita v (2) je rovností mezi lineárními formami, druhá mezi maticemi. Na pravé straně první identity je funkce inverzní k diferenciálu funkce F v bodě $F_{-1}(y)$, v druhé identitě je vpravo matice inverzní k matici $F'(F_{-1}(y))$.

Množina X splňující podmínky věty 16.3 (a tedy ani restrikce $F|X$ a funkce k ní inverzní) není určena jednoznačně: Splňuje-li X podmínky věty a je-li $X_1 \subset X$ otevřená množina obsahující bod a, splňuje podmínky věty zřejmě i množina X_1.

[1]) Jen do konce této věty; při označení $F|X$ by byly identity (2) značně nepřehledné.

Splňuje-li však množina X podmínky věty a je-li $\tilde{X}$ další taková množina, je funkce $F|X \cap \tilde{X}$ restrikcí obou funkcí $F|X$, $F|\tilde{X}$, takže příslušná inverzní funkce $(F|X \cap \tilde{X})_{-1}$ je restrikcí obou inverzních funkcí $(F|X)_{-1}$, $(F|\tilde{X})_{-1}$. Protože obě množiny $F(X)$, $F(\tilde{X})$ jsou otevřené, platí totéž i o jejich průniku, takže existuje okolí bodu $F(a)$, v němž je $(F|X)_{-1} \equiv (F|\tilde{X})_{-1}$.

Jsou-li tedy splněny předpoklady věty 16.3 a nazveme-li **lokální inverzní funkcí funkce** F **u bodu** a každou funkci $G := (F|X)_{-1}$, kde X splňuje podmínky této věty, bude $G \equiv \tilde{G}$ v jistém $U(F(a))$ pro každé dvě takové funkce G a $\tilde{G}$.

Dále: Budeme říkat, že zobrazení F z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^p$ je **lokálně difeomorfní u bodu** $a \in \mathbb{R}^p$, existuje-li okolí $U(a)$, v němž je (restrikce) zobrazení F difeomorfní. □

Z V. 16.3 zřejmě plyne, že *funkce* $F : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *třídy* C_1 *je lokálně difeomorfní u každého bodu* $a \in \Omega$*, v němž je* $\det F'(a) \neq 0$*. Funkce regulární v* Ω *je lokálně difeomorfní u každého bodu* $a \in \Omega$*.*

Poznámka 16.2. V. 16.3 bohužel nedává žádný návod, jak lokální inverzní funkci sestrojit. Kombinujeme-li však tuto větu s větou o diferencování superpozice, můžeme v bodě $F(a)$ vypočítat všechny parciální derivace lokální inverzní funkce; je-li F třídy C_n, kde $n \in \mathbb{N}$, mohli bychom (teoreticky) vypočítat i všechny parciální derivace až do řádu n, a u funkcí třídy C_∞ dokonce parciální derivace všech řádů. V dalším ovšem uvidíme, že výpočty jsou obecně tím komplikovanější, čím je řád derivace vyšší, takže prakticky jsme schopni zvládnout jen derivace dosti nízkých řádů. Vysvětleme, jak se při tom postupuje:

Za situace z V. 16.3 označme $G := (F|X)_{-1}$ a pišme opět krátce F místo $F|X$. Protože v X je $G \circ F = \mathrm{Id}$, je $G'(F(x))F'(x) = \mathrm{Id}' = E$, kde E jsme označili jednotkovou matici typu $p \times p$; v její hlavní diagonále jsou jedničky a mimo tuto diagonálu nuly. V X je tedy $G' \circ F = (F')_{-1}$, kde vpravo je matice inverzní k matici F'; z toho plyne, že $G' = (F')_{-1} \circ G$ v Y.

Jak je patrné, derivaci G' dovedeme vypočítat, umíme-li invertovat matici F'; v netriviálních případech to bohužel bude možné jen v bodě a. Parciální derivace vyšších řádů získáme opakovaným diferencováním identity $G \circ F = \mathrm{Id}$, nebo ještě lépe (jak ukazuje početní praxe) identity $F \circ G = \mathrm{Id}$. Ukažme to na příkladech:

Příklad 16.1. Je-li

$$F(x, y) := (e^{xy} \sin x, e^{-xy} \cos y) \text{ pro všechna } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

je funkce F třídy C_∞, přičemž

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} e^{xy}(y \sin x + \cos x) & x e^{xy} \sin x \\ -y e^{-xy} \cos y & -e^{-xy}(x \cos y + \sin y) \end{pmatrix} \tag{4}$$

všude v $\mathbb{R}^2$. Je-li $(a, b) = (0, \frac{1}{2}\pi)$, je $F(a, b) = (0, 0)$ a

$$F'(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det F'(a, b) = -1 \neq 0. \tag{4'}$$

Podle V.16.3 je tedy

$$G'(0,0) = (F'(a,b))_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

takže $\partial_1 G(0,0) = (1,0)$, $\partial_2 G(0,0) = (0,-1)$.

Příklad 16.2. Je-li

$$F(x,y) := (x^3 + xy^2 + y^3, x^2 + xy + y^2) \text{ pro všechna } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{6}$$

a je-li $(a,b) = (1,1)$, je $F(a,b) = (3,3)$. Všude v $\mathbb{R}^2$ je

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 & 2xy + 3y^2 \\ 2x + y & x + 2y \end{pmatrix}, \tag{7}$$

takže

$$\det F'(1,1) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3. \tag{8}$$

Podle V.16.3 existuje u bodu $(1,1)$ lokální inverzní funkce – označme ji G; podle téže věty je

$$G'(3,3) = (F'(1,1))_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Značíme-li (ξ, η) body z Y, znamená to, že

$$\frac{\partial G_1}{\partial \xi} = -1, \; \frac{\partial G_1}{\partial \eta} = \frac{5}{3}, \; \frac{\partial G_2}{\partial \xi} = 1, \; \frac{\partial G_2}{\partial \eta} = -\frac{4}{3} \text{ v bodě } (3,3). \tag{10}$$

Z identity $F(G(\xi,\eta)) \equiv (\xi,\eta)$ platné v Y plyne podle V.14.5 o diferencování superpozice, že v Y je

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G_2}{\partial \xi} \equiv (1,0), \; \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G_2}{\partial \eta} \equiv (0,1); \tag{11}$$

derivace funkce F jsou přitom v bodě $G(\xi,\eta)$, derivace funkce G v bodě (ξ,η). Derivujeme-li první z identit (11) znovu parciálně podle ξ, dostaneme:

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\Big)\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2} + \\ &\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{\partial G_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial G_2}{\partial \xi}\Big)\frac{\partial G_2}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 G_2}{\partial \xi^2} \equiv (0,0). \end{aligned} \tag{12}$$

Abychom z této vektorové rovnice (ekvivalentní se dvěma skalárními rovnicemi) mohli vypočítat $\partial^2 G/\partial \xi^2$, potřebujeme především vědět, že

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (6x, 2), \; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = (2y, 1), \; \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (2x + 6y, 2), \tag{13}$$

a dosadit do hodnot těchto derivací $(1,1)$ za (x,y); užijeme-li dále hodnoty prvních parciálních derivací funkce F v bodě $(1,1)$ a funkce G v bodě $(3,3)$, získáme z (12) (po odstranění závorek) vektorovou rovnici

$$(6,2)(-1)^2+(2,1)(-1)+(4,3)\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi^2}(3,3)+$$
$$(2,1)(-1)+(8,2)\,1^2+(5,3)\,\frac{\partial^2 G_2}{\partial\xi^2}(3,3)=(0,0)$$

neboli

$$4\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi^2}(3,3)+5\,\frac{\partial^2 G_2}{\partial\xi^2}(3,3)+10=0\,,\quad 3\,\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi^2}(3,3)+3\,\frac{\partial^2 G_2}{\partial\xi^2}(3,3)+2=0\,.$$

Tyto dvě lineární rovnice (s determinantem (8)) mají řešení

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial\xi^2}(3,3)=\frac{20}{3}\,,\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial\xi^2}(3,3)=-\frac{22}{3}\,. \tag{14}$$

Kdybychom buď první z identit (11) parciálně derivovali podle η, nebo druhou z nich podle ξ, mohli bychom vypočítat smíšenou parciální derivaci $\partial^2 G/\partial x\partial y=\partial^2 G/\partial y\,\partial x$ v bodě $(3,3)$; parciální derivování druhé z identit (11) podle η by umožnilo najít derivaci $\partial^2 G/\partial\eta^2$ v tomto bodě. Doporučuji čtenáři, který se chce přesvědčit, že správně parciálně derivuje složené funkce, aby výpočet aspoň jedné z uvedených derivací provedl; pro kontrolu uvádím výsledky:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\xi\partial\eta}(3,3)=\Big(-\frac{29}{3}\,,\frac{32}{3}\Big),\quad \frac{\partial^2 G}{\partial\eta^2}(3,3)=\Big(\frac{128}{9}\,,-\frac{142}{9}\Big). \tag{15}$$

Podobně by se postupovalo při výpočtu parciálních derivací třetího, čtvrtého, atd. řádu funkce G v bodě $(3,3)$; jak již bylo řečeno, výpočty jsou obecně stále složitější. K výpočtu derivací n-tého řádu funkce G potřebujeme přitom (mj.) znát všechny parciální derivace všech řádů $<n$ této funkce.

* * *

Předpokládejme situaci z kapitoly 15, kdy byla dána přirozená čísla p, q a permutace $(i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q)$ čísel $(1,\dots,p+q)$, kde $i_1<\dots<i_p$ a $j_1<\dots<j_q$. Body

$$z=(z_1,\dots,z_{p+q})\in\mathbb{R}^{p+q} \tag{16}$$

zapisujme opět ve tvaru (x,y), kde

$$x=(x_1,\dots,x_p)=(z_{i_1},\dots,z_{i_p})\,,\ y=(y_1,\dots,y_q)=(z_{j_1},\dots,z_{j_q})\,, \tag{17}$$

prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ považujme za kartézský součin prostorů $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^q$ generovaných i_1-ní až i_p-tou a j_1-ní až j_q-tou souřadnicovou osou v $\mathbb{R}^{p+q}$.

Je-li $F = (F_1, \dots, F_q)$ zobrazení z $\mathbb{R}^{p+q}$ do $\mathbb{R}^q$ a existují-li (v nějakém bodě nebo na nějaké množině) parciální derivace $\partial F_i / \partial y_j$, kde $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, q$, nazýváme determinant

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_q}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{vmatrix} \tag{18}$$

jakobiánem funkcí $F_1, \dots, F_q$ vzhledem k proměnným (nebo: podle proměnných) $y_1, \dots, y_q$; matice o řádcích napsaných vpravo je tzv. **Jacobiho matice**.

Věta 16.4. (O lokálním řešení rovnic.) *Užívejme právě uvedené označení a předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^q$. Předpokládejme dále, že zobrazení F z $\mathbb{R}^{p+q}$ do $\mathbb{R}^q$ je třídy C_n (kde $n \in \mathbb{N}$ nebo $n = \infty$) v nějakém okolí bodu (a, b); předpokládejme konečně, že $F(a, b) = 0$ $(\in \mathbb{R}^q)$ a že*

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_q)}{\partial(y_1, \dots, y_q)}(a, b) \neq 0 \,. \tag{19}$$

Pak pro každé $\Delta > 0$ existují čísla $\delta \in (0, \Delta)$, $\eta \in (0, \Delta)$ a funkce $g : U(a, \delta) \to U(b, \eta)$ třídy C_n tak, že pro $x \in U(a, \delta)$, $y \in U(b, \eta)$ je rovnost $F(x, y) = 0$ ekvivalentní s rovností $y = g(x)$.

Poznámka 16.3. Právě vyslovená věta je známa spíše pod názvem *věta o implicitních funkcích*. Za jejích předpokladů lze rovnici $F(x, y) = 0$ (kde x a y jsou omezena na jistá vhodně zvolená okolí bodů a a b) jednoznačně vyřešit vzhledem k y v tom smyslu, že množina $\{(x, y);\, F(x, y) = 0\}$ všech nulových bodů funkce F (restringované na kartézský součin zmíněných okolí) je identická s grafem jisté funkce g, takže ji lze popsat rovnicí $y = g(x)$.

Vektorová rovnice $F(x, y) = 0$ je ekvivalentní se soustavou q skalárních rovnic

$$\begin{aligned} &F_1(z_1, \dots, z_{p+q}) = 0 \,, \\ &\dots\dots\dots\dots \,, \\ &F_q(z_1, \dots, z_{p+q}) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

o q neznámých $y_1 = z_{j_1}, \dots, y_q = z_{j_q}$, kterou lze „lokálně jednoznačně řešit“ „v blízkosti bodu“ (a, b), čímž se neznámé y_j, $j = 1, \dots, q$, stanou funkcemi zbývajících p proměnných $x_1 = z_{i_1}, \dots, x_p = z_{i_p}$:

$$\begin{aligned} &y_1 = g_1(x_1, \dots, x_p) \,, \\ &\dots\dots\dots\dots \,, \\ &y_q = g_q(x_1, \dots, x_p) \,. \end{aligned} \tag{21}$$

Za právě popsané situace a při stejném označení budeme říkat, že **rovnice** (20) **definují u bodu** (a, b) **funkce** $y_1, \ldots, y_q$ **implicitně**, a rovnosti (21) budeme nazývat **lokální řešení rovnic** (20) **u bodu** (a, b); funkci g (a rovnost $y = g(x)$) budeme nazývat **lokální řešení rovnice** $F(x, y) = 0$ **splňující podmínky** $b = g(a)$. Budeme pak také stručně říkat, že **rovnici** $F(x, y) = 0$ **lze u bodu** (a, b) **jednoznačně řešit vzhledem k** y.

Poznámka 16.4. Za předpokladů a označení z V. 16.4 je množina

$$\{(x, y) \in U(a, \delta) \times U(b, \eta);\, F(x, y) = 0\} \tag{22}$$

všech kořenů funkce F v kartézském součinu uvedených okolí identická s grafem funkce g; protože funkce F je aspoň třídy C_1, je množina (22) geometrickým obrazem hladké p-rozměrné nadplochy s parametrickým popisem $(x, g(x))$, kde $x \in U(a, \delta)$. $\square$

Ačkoli V. 16.4 neříká, kterých hodnot funkce g nabývá v jednotlivých bodech x příslušného okolí $U(a, \delta)$ (kromě bodu a, v němž je hodnota rovna b), dovoluje spolu s V. 14.5 (o diferencování superpozice) najít všechny parciální derivace prvního řádu funkce g v bodě a. Je-li F třídy C_n, kde $n > 1$, můžeme – aspoň teoreticky, protože délka a obtížnost výpočtů obecně s rostoucím n rychle roste – počítat i parciální derivace vyšších řádů.

Vysvětleme příslušný postup na příkladech:

Příklad 16.3°. Nechť

$$F(x, y) := y^2 e^{x-1} - x^2 e^{1-y} \text{ pro všechna } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{23}$$

a nechť $(a, b) = (1, 1)$; F je třídy C_∞, $F(a, b) = 0$ a

$$F'(x, y) = (y^2 e^{x-1} - 2x e^{1-y},\, 2y e^{x-1} + x^2 e^{1-y}),\ F'(1, 1) = (-1, 3). \tag{24}$$

Vzhledem k tomu, že obě parciální derivace funkce F jsou v bodě (1,1) nenulové, definuje rovnice $F(x, y) = 0$ u bodu $(1, 1)$ implicitně jak x jako funkci y, tak i y jako funkci x.

Vyšetřme třeba druhý z případů: Podle V. 16.4 existují čísla $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \in \mathbb{R}_+$ a funkce $g : (1 - \delta, 1 + \delta) \to (1 - \eta, 1 + \eta)$ třídy C_∞ tak, že $g(1) = 1$ a že pro $(x, y) \in (1 - \delta, 1 + \delta) \times (1 - \eta, 1 + \eta)$ je rovnost $F(x, y) = 0$ ekvivalentní s rovností $y = g(x)$.

Protože identita $F(x, g(x)) \equiv 0$ platí všude v intervalu $(1 - \delta, 1 + \delta)$, je podle V. 14.5 také

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} g' \equiv 0; \tag{24}$$

pamatujme, že derivace funkce F jsou v bodě $(x, g(x))$, derivace funkce g v bodě x. Dosazením $x = 1$ do (24) získáme rovnici $-1 + 3g'(1) = 0$, takže $g'(1) = 1/3$.

Dalším diferencováním identity (24) dostaneme:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,g' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,(g')^2 + \frac{\partial F}{\partial y}\,g'' \equiv 0\,. \tag{25}$$

Protože derivace

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y^2 e^{x-1} - 2e^{1-y}\,,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2ye^{x-1} + 2xe^{1-y}\,,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2e^{x-1} - x^2 e^{1-y} \tag{26}$$

nabývají v bodě $(1,1)$ po řadě hodnot $-1, 4, 1$ a protože již víme, že $g'(1) = \frac{1}{3}$, z (26) snadno vypočteme, že $g''(1) = -16/27$.

Diferencováním (25) získáme identitu

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3\,\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\,g' + 3\,\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2}\,(g')^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\,(g')^3 + \\ &\qquad 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,g'' + 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,g'g'' + \frac{\partial F}{\partial y}\,g''' \equiv 0\,; \end{aligned} \tag{27}$$

protože

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = y^2 e^{x-1},\ \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} = 2ye^{x-1} + 2e^{1-y},\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} = 2e^{x-1} - 2xe^{1-y},\ \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = x^2 e^{1-y}$$

a protože příslušné hodnoty v bodě $(1,1)$ jsou po řadě $1, 4, 0, 1$, je $g'''(1) = 8/9$.

Poznamenejme k tomu, že pro výpočet $g^{(n)}(1)$ potřebujeme znát hodnoty všech parciálních derivací všech řádů $k \le n$ funkce F v bodě $(1,1)$ a všech derivací $g^{(k)}(1)$, kde $k < n$. Všimněme si, že v identitě analogické identitám (24), (25), (27), v níž je však derivací nejvyššího řádu $g^{(n)}(1)$, je u této derivace (pro každé $n \in \mathbb{N}$) koeficient $(\partial F/\partial y)(1,1) \neq 0$; tím je zaručeno, že derivaci $g^{(n)}(1)$ lze z příslušné identity opravdu vypočítat.

Příklad 16.4. Nechť

$$F(x,y,z) := \sin x \cos y \cos z - xyz \ \text{ pro všechna } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \tag{28}$$

a nechť $(a,b,c) = (0,0,0)$; pak je $F(a,b,c) = 0$, funkce F je třídy C_∞ a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}\,(x,y,z) &= \cos x \cos y \cos z - yz\,, \\ \frac{\partial F}{\partial y}\,(x,y,z) &= -\sin x \sin y \cos z - xz\,, \\ \frac{\partial F}{\partial z}\,(x,y,z) &= -\sin x \cos y \sin z - xy\,, \end{aligned} \tag{29}$$

takže $F'(0,0,0) = (1,0,0)$. U počátku lze tedy rovnici $F(x,y,z) = 0$ lokálně rozřešit vzhledem k x, nejsou však splněny předpoklady věty 16.4 pro její lokální řešení ani vzhledem k y, ani vzhledem k z.

Podle V. 16.4 existují čísla $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\eta \in \mathbb{R}_+$ a funkce $g : U((0,0),\delta) \to U(0,\eta)$ třídy C_∞ tak, že množina všech nulových bodů funkce F ležících ve válci $(-\eta,\eta) \times U((0,0),\delta)$ je identická s grafem funkce g.

Z identity $F(g(y,z),y,z) \equiv 0$ platné v kruhu $U((0,0),\delta)$ plyne, že

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 0\,,\ \ \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0\,; \tag{30}$$

protože obě derivace $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ jsou v počátku rovné nule, platí totéž o derivacích funkce g:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0) = 0\,. \tag{31}$$

Derivujeme-li první z identit (30) ještě jednou podle y, dostaneme identitu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \equiv 0\,; \tag{32}$$

protože se všechny tři derivace

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\sin x \cos y \cos z\,,\ \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\cos x \sin y \cos z - z \tag{33}$$

v bodě $(0,0,0)$ anulují, platí totéž o $\partial^2 g/\partial y^2$ v bodě $(0,0)$.

Snadno ověříme, že v bodě $(0,0,0)$ jsou *všechny* parciální derivace druhého řádu funkce F rovny nule a že totéž platí i o všech parciálních derivacích druhého řádu funkce g v bodě $(0,0)$.

Příklad 16.5. Definujme funkci $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rovností $H := (F,G)$, kde pro všechna $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ je

$$F(x,y,z) := 1 - e^{xyz} + x + y + z\,,\ G(x,y,z) := x + 2y + 3z + 3xy + 2xz + yz\,; \tag{34}$$

nechť $(a,b,c) = (0,0,0)$. Funkce H je třídy C_∞, $H(a,b,c) = (0,0)$ a

$$\begin{aligned} H'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 1 - yze^{xyz} & 1 - xze^{xyz} & 1 - xye^{xyz} \\ 1 + 3y + 2z & 2 + 3x + z & 3 + 2x + y \end{pmatrix}, \\ H'(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{35}$$

Jakobiány

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\,,\ \ \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\,,\ \ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \tag{36}$$

jsou v bodě $(0,0,0)$ jsou po řadě rovny 1, 2, 1, takže rovnice $H(x,y,z) = (0,0)$ má podle V. 16.4 u počátku lokální řešení vzhledem ke každé z dvojic (x,y), (x,z), (y,z).

Vyšetřme podrobněji řešení vzhledem k (y,z); je to jistá (vektorová) funkce $g = (g_1, g_2)$ reálné proměnné třídy C_∞ splňující podmínky $g(0) = (0,0)$ a

$$H(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv (0,0) \tag{37}$$

v jistém intervalu $(-\delta, \delta)$, kde $\delta \in \mathbb{R}_+$.

Derivováním (37) dostaneme identitu

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} g_1' + \frac{\partial H}{\partial z} g_2' \equiv (0,0)\,; \tag{38}$$

dosadíme-li sem nalezené hodnoty parciálních derivací funkce H v počátku, získáme rovnice

$$1 + g_1'(0) + g_2'(0) = 0\,,\ 1 + 2g_1'(0) + 3g_2'(0) = 0\,, \tag{39}$$

z nichž plyne, že $g'(0) = (-2, 1)$.

Derivování (38) vede k identitě

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} g_1' + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} g_2'\Big) + \Big(\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} g_1' + \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} g_2'\Big) g_1' + \frac{\partial H}{\partial y} g_1'' + \\ &\Big(\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y} g_1' + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} g_2'\Big) g_2' + \frac{\partial H}{\partial z} g_2'' \equiv (0,0)\,; \end{aligned} \tag{40}$$

protože derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= (-y^2 z^2 e^{xyz}, 0)\,, & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &= (-z(1+xyz)e^{xyz}, 3)\,, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} &= (-y(1+xyz)e^{xyz}, 2)\,, & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= (-x^2 z^2 e^{xyz}, 0)\,, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z} &= (-x(1+xyz)e^{xyz}, 1)\,, & \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} &= (-x^2 y^2 e^{xyz}, 0) \end{aligned} \tag{41}$$

mají v bodě $(0,0,0)$ po řadě hodnoty $(0,0)$, $(0,3)$, $(0,2)$, $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ a protože $g'(0) = (-2,1)$, plyne ze (40), že

$$g_1''(0) + g_2''(0) = 0\,,\quad 2g_1''(0) + 3g_2''(0) = 12\,, \tag{42}$$

takže $g''(0) = (-12, 12)$. $\square$

Definice. Je-li $f : X \to Y$, $A \in Y$ a je-li množina

$$\{x \in X\,;\, f(x) = A\} = f_{-1}(A) \tag{43}$$

neprázdná, nazýváme ji A-**hladinou** funkce f (v X).

Definice. Předpokládejme, že jsou splněny tyto podmínky: 1) $\Omega \subset \mathbb{R}^{p+q}$ je otevřená množina, 2) funkce $F = (F_1, \ldots, F_q) : \Omega \to \mathbb{R}^q$ je třídy C_1 (v Ω), 3) $A \in \mathbb{R}^q$, 4) množina

$$V := \{z \in \Omega;\ F(z) = A\} \tag{44}$$

není prázdná, 5) pro každé $z \in V$ je hodnost matice $F'(z)$ rovna q.

Pak říkáme, že V je p-**rozměrná varieta v** Ω (nebo: **varieta dimenze** p **v** Ω). Je-li $c \in V$ a leží-li *nenulový* vektor N v lineárním obalu vektorů

$$N^j := \operatorname{grad} F_j(c)\,,\ j = 1, \ldots, q\,, \tag{45}$$

říkáme, že N je **normálový vektor variety** V **v bodě** c; každý *nenulový* vektor T ortogonální ke všem vektorům (45) nazveme jejím **tečným vektorem v bodě** c. $\square$

V každém bodě c variety (44) jsou vzhledem k podmínce 5) vektory (45) lineárně nezávislé, a jejich lineární obal je tedy lineární podprostor dimenze q prostoru $\mathbb{R}^{p+q}$; jeho ortogonální doplněk (složený z nulového vektoru a všech tečných vektorů) má dimenzi p, a existují v něm proto báze $\{T^1, \ldots, T^p\}$ složené z p vektorů. Množina

$$\{c + \lambda_1 T^1 + \ldots + \lambda_p T^p;\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\} \tag{46}$$

je na bližší volbě takové báze nezávislá a nazývá se **tečná nadrovina variety** (44) v bodě c; množina

$$\{c + \mu_1 N^1 + \ldots + \mu_q N^q;\ (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q\} \tag{47}$$

je její **normálová nadrovina** v bodě c.

(46) a (47) jsou *parametrické popisy* tečné a normálové nadroviny variety (44) v bodě c; **rovnice** těchto nadrovin jsou

$$((z - c) \cdot \operatorname{grad} F_j(c)) = 0\,,\ j = 1, \ldots, q\,, \quad \text{a} \quad ((z - c) \cdot T^i) = 0\,,\ i = 1, \ldots, p\,. \tag{48}$$

Poznámka 16.5. Normálové vektory N^j variety jsou řádky matice F'; abychom našli p-tici lineárně nezávislých vektorů T^i k nim ortogonálních, stačí rozřešit soustavu rovnic

$$(\operatorname{grad} F_j(c) \cdot T) = 0 \ \text{ pro } \ j = 1, \ldots, q\,. \tag{50}$$

Je-li $p = 1$, je tečným vektorem např. vektor

$$T := \operatorname{grad} F_1(c) \times \ldots \times \operatorname{grad} F_q(c)\,. \tag{51}$$

V konkrétních situacích lze jeden, někdy i dva (lineárně nezávislé) tečné vektory najít „zkusmo“; pokud pak chybí *jediný* tečný vektor, lze jej definovat jako vektorový součin všech normálových vektorů a všech „uhodnutých“ tečných vektorů. [2])

[2]) Ačkoli se nám tato metoda může jevit na první pohled jako „nesystémová“, vede při dobré početní představivosti často nejrychleji k cíli; uvidíme to např. v Př. 16.6.

Poznámka 16.6. Často je dána funkce $F : \Omega^* \to \mathbb{R}^q$ a je třeba najít *maximální* otevřenou množinu $\Omega \subset \Omega^*$, v níž je množina (44) p-rozměrnou varietou; má-li Ω tuto vlastnost, říkáme, že body $z \in \Omega^* - \Omega$, pro něž je $F(z) = A$, jsou **singulární body** A-hladiny funkce F. Takové body buď nemají okolí, v němž je F třídy C_1, nebo je v nich hodnost matice F' menší než q.

Poznámka 16.7. Předpokládejme, že (44) je p-rozměrná varieta. Pak pro každé $c \in \Omega$, pro něž je $F(c) = A$, existuje q sloupců matice $F'(c)$ tak, že příslušný determinant není nulový. Nechť tyto sloupce odpovídají indexům $j_1 < \ldots < j_q$ a nechť $i_1 < \ldots < i_p$ jsou zbývající sloupce.

Pak při označení (16)$-$(17) nastane situace z věty 16.4, v níž je však F třeba nahradit funkcí $F - A$. Píšeme-li bod c ve tvaru (a, b), existují podle V.16.4 okolí $U(a, \delta)$, $U(b, \eta)$ a funkce $g : U(a, \delta) \to U(b, \eta)$ (třídy aspoň C_1) tak, že část množiny (44) ležící v $U(a, \delta) \times U(b, \eta)$ je identická s grafem funkce g, což je hladká p-rozměrná nadplocha. Tuto situaci charakterizujeme slovy, že *každá p-rozměrná varieta v $\mathbb{R}^{p+q}$ je u každého svého bodu lokálně grafem hladké q-rozměrné vektorové funkce p proměnných*. Obecně samozřejmě závisí jak p-tice „nezávislých“ proměnných $z_{i_1} = x_1, \ldots, z_{i_p} = x_p$, tak i q-tice „závislých“ proměnných $z_{j_1} = y_1, \ldots, z_{j_q} = y_q$ na volbě bodu c variety.

Předpokládejme pro jednoduchost, že v jistém bodě c variety (44) je

$$(i_1, \ldots, i_p) = (1, \ldots, p) \quad \text{a} \quad (j_1, \ldots, j_q) = (p + 1, \ldots, p + q), \tag{52}$$

což znamená, že je nenulový jakobián

$$\frac{\partial(F_1, \ldots, F_q)}{\partial(y_1, \ldots, y_q)}(c) = \frac{\partial(F_1, \ldots, F_q)}{\partial(z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})}(c) \tag{53}$$

funkcí $F_1, \ldots, F_q$ podle *posledních* q proměnných.

Funkce $G(x) := (x, g(x))$, $x \in U(a, \delta)$, je standardní parametrický popis grafu funkce g a identita $F(G(x)) \equiv A$ platí všude v $U(a, \delta)$. Jejím diferencováním (pomocí V.15.4) získáme identitu $F'(G(x))G'(x) \equiv 0$, tj. identitu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_p} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_q}{\partial x_p} & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_q}{\partial y_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_q}{\partial x_p} \end{pmatrix} \equiv 0, \tag{54}$$

kde derivace v první matici jsou v bodě $G(x) = (x, g(x))$, ve druhé v bodě x a nula vpravo znamená nulovou matici typu $q \times p$.

Jak víme, jsou sloupce T^i druhé matice vlevo tečné vektory grafu g; v bodě a lze tedy identitu (54) zapsat v ekvivalentním tvaru

$$(\operatorname{grad} F_j(c) \cdot T^i(a)) = 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, p, \ j = 1, \ldots, q. \tag{55}$$

To však znamená, že každý vektor $\operatorname{grad} F_j(c)$ je kolmý ke každému vektoru T^i; protože vektory $\operatorname{grad} F_j(c)$ jsou navíc lineárně nezávislé, generují zaměření normálové nadroviny grafu funkce g v bodě a. Vektory $\operatorname{grad} F_j(c)$ jsou však nezávislé na g; je-li tedy varieta u bodu c grafem jiné funkce h (třeba i jiných p proměnných), generují vektory $\operatorname{grad} F_j(c)$ i zaměření normálové nadroviny grafu funkce h. V důsledku toho jsou stejné i tečné nadroviny grafů funkcí g a h.

Tím jsme dospěli k závažnému poznatku, že *definice tečné a normálové nadroviny variety je v souladu s týmiž pojmy zavedenými pro graf; lokálně je varieta grafem nekonečně mnoha funkcí, ale tečná a normálová rovina každého z těchto grafů je totožná s tečnou a normálovou nadrovinou variety.*

Lokálně je každá varieta grafem a obráceně *grafy funkcí třídy* C_1 *jsou variety.* Pro q-rozměrnou vektorovou funkci f třídy C_1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ je totiž

$$\operatorname{gr} f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{p+q};\, x \in \Omega\} \tag{56}$$

p-rozměrná varieta, protože je to nulová hladina funkce $F(x,y) := y - f(x)$.

Poznámka 16.8. V topologii se p-rozměrnou varietou rozumí neprázdný topologický prostor, v němž má každý bod okolí homeomorfní s otevřenou p-rozměrnou jednotkovou koulí

$$\{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p;\, x_1^2 + \ldots + x_p^2 < 1\}. \tag{57}$$

Jak čtenář snadno nahlédne, je p-rozměrná varieta podle naší definice i topologickou p-rozměrnou varietou.

Příklad 16.6. Pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ je r^2-hladina S_r funkce

$$F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2, \tag{58}$$

tedy sféra v $\mathbb{R}^3$ o středu v počátku a poloměru r, dvojrozměrnou varietou, protože

$$F'(x,y,z) = 2(x,y,z) \neq (0,0,0) \ \text{ všude v } \ S_r. \tag{59}$$

Bod $(a,b,c) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ leží na jednotkové sféře S_1, tj. na 1-hladině funkce F. Jejím normálovým vektorem v tomto bodě je vektor

$$N := F'(a,b,c) = \operatorname{grad} F(a,b,c) = \left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \tag{60}$$

a rovnici $(N \cdot (x-a, y-b, z-c)) = 0$ příslušné tečné roviny lze upravit na tvar $2x + 2y + z = 3$.

Tečné vektory lze snadno „uhádnout“ – hodí se např. vektory $T^1 := (1,-1,0)$ a $T^2 := (1,0,-2)$; snadno též zjistíme, že se rovnice $(T^i \cdot (x-a, y-b, z-c)) = 0$, $i = 1,2$, redukují na $x = y$ a $x = 2z$. Tyto rovnice jsou rovnicemi normály.

Příklad 16.7°. Nulová hladina funkce

$$F(x,y) := (x^2+y^2)^2 + (y^2 - x^2) \tag{61}$$

je tzv. **lemniskata**. Derivace

$$F'(x,y) = (2x(2x^2 + 2y^2 - 1), 2y(2x^2 + 2y^2 + 1)) \tag{62}$$

se anuluje, právě když je buď $x = y = 0$, nebo $2x^2 + 2y^2 = 1$ *a* $y = 0$, tedy $(x,y) = (\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,, 0)$; poslední dva body však na lemniskatě neleží. Z toho plyne, že jediným singulárním bodem lemniskaty je počátek; varieta vznikne z lemniskaty jeho vynecháním. [3])

Snadno ověříme, že bod $(a,b) = \left(\frac{1}{3}\sqrt{5}\,, \frac{1}{3}\right)$ splňuje podmínku $F(a,b) = 0$ a že $N := \frac{9}{2}F'(a,b) = (\sqrt{5}\,, 7)$; rovnici $(N \cdot (x-a, y-b)) = 0$ příslušné tečny upravíme na tvar $\sqrt{5}\,x + 7y = 4$.

Připomeňme, že v rovině platí toto obecné tvrzení:

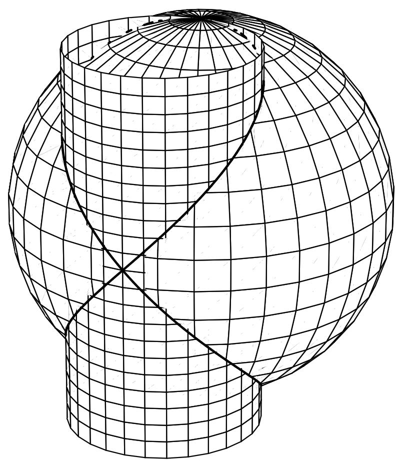
(63) *Je-li $N = (N_1, N_2)$ nenulový vektor, je $T := k(N_2, -N_1)$ pro každé $k \in \mathbb{R}_+$ nenulový vektor k němu ortogonální, přičemž báze $\{T, N\}$ je kladná.*

V našem případě položíme $T := (7, -\sqrt{5}\,)$ a snadno zjistíme, že $7x - \sqrt{5}\,y = 2\sqrt{5}$ je rovnice normály k lemniskatě $F(x,y) = 0$ v bodě (a,b).

Příklad 16.8. Je-li

$$F(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 4\,, \quad G(x,y,z) := (x-1)^2 + y^2 - 1\,, \tag{64}$$

jsou nulové hladiny funkcí F a G sféra o středu v počátku a poloměru 2 a válec o poloměru 1, jehož osa prochází bodem $(1,0,0)$ a je rovnoběžná s osou z. Průnik těchto hladin, tedy $(0,0)$-hladina funkce $H := (F,G)$, se nazývá **Vivianiho křivka**.



Vivianiho křivka

[3]) Je to velmi názorné: Lemniskata $L = F_{-1}(0)$ má tvar ležaté osmičky, a neexistuje tedy množina otevřená v L, obsahující počátek a homeomorfní s intervalem $(-1,1)$ (sr. s Po. 16.8), protože z bodu $(0,0)$ vycházejí čtyři oblouky obsažené v L, které mají společný jen tento bod.

Funkce H je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$H'(x,y,z) = 2\begin{pmatrix} x & y & z \\ x-1 & y & 0 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Všechny tři jakobiány

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = 4y\,, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = 4z\,(1-x)\,, \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = -4yz \tag{66}$$

jsou rovny nule, právě když je buď $y = z = 0$, nebo $x = 1, y = 0$. Bod tvaru $(x,0,0)$ leží v $(0,0)$-hladině funkce H, právě když je $x = 2$; žádný bod tvaru $(1,0,z)$ však v této hladině neleží. Bod $(2,0,0)$ je tedy jediným singulární bodem hladiny. [4])

Snadno se ověří, že bod $(a,b,c) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\,, 1)$ leží na Vivianiho křivce a že

$$N^1 := F'(a,b,c) = (3, \sqrt{3}\,, 2)\,,\ N^2 := G'(a,b,c) = (1, \sqrt{3}\,, 0) \tag{67}$$

jsou příslušné normálové vektory; tečným vektorem je proto

$$T := N^1 \times N^2 = 2(-\sqrt{3}\,, 1, \sqrt{3}\,)\,. \tag{68}$$

Rovnice $(N^1 \cdot (X - A)) = 0$, $(N^2 \cdot (X - A)) = 0$, $(T \cdot (X - A)) = 0$, kde $X := (x,y,z)$, $A := (a,b,c)$, lze upravit na tvar

$$3x + \sqrt{3}\,y + 2z = 8\,, \quad x + \sqrt{3}\,y = 3\,, \quad \sqrt{3}\,x - y - \sqrt{3}\,z = 0\,; \tag{69}$$

první dvě jsou rovnicemi tečny, poslední je rovnicí normálové roviny Vivianiho křivky v bodě (a,b,c).

Příklad 16.9. Dvojrozměrnou analogií Vivianiho křivky je průnik nulových hladin funkcí

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 + x_4^2 - 4\,, \\ G(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= (x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{aligned} \tag{70}$$

v $\mathbb{R}^4$. Protože funkce $H := (F,G)$ je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^4$ a

$$H'(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1-1 & x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

zbývá vypočítat příslušných šest jakobiánů; čtenář se sám přesvědčí, že čtvrtiny jejich hodnot jsou rovny

$$x_2,\ x_3,\ x_4\,(1-x_1),\ 0,\ -x_2x_4,\ -x_3x_4\,. \tag{72}$$

[4]) Vivianiho křivka se v něm „kříží“ podobně jako lemniskata v počátku – nyní ovšem jde o prostorový útvar.

Všechny se anulují právě ve všech bodech tvaru $(1,0,0,x_4)$ nebo $(x_1,0,0,0)$. Pro každé $x_4 \in \mathbb{R}$ je však $G(1,0,0,x_4) = -1$, takže takové body v $(0,0)$-hladině funkce H neleží; protože $H(x_1,0,0,0) = (x_1^2 - 4, x_1(x_1-2))$, leží v této hladině jen bod $(2,0,0,0)$. Jen tento bod je tedy singulární.

Dosazením se přesvědčíme, že na varietě leží např. bod $c = \frac{1}{2}(3,1,\sqrt{2},2)$; normálovými vektory jsou

$$N^1 := 2F'(c) = (3,1,\sqrt{2},2) \quad \text{a} \quad N^2 := 2G'(c) = (1,1,\sqrt{2},0)\,. \tag{73}$$

K tomu, abychom našli dva lineárně nezávislé vektory T^1, T^2 ortogonální v vektorům N^j, není nutné formálně řešit rovnice $(N^j \cdot T) = 0$, $j = 1,2$. Využijeme toho, že čtvrtá složka vektoru N^2 je nulová a po krátké úvaze položíme např.

$$T^1 = (1,-1,0,-1) \quad \text{a} \quad T^2 = (-1,-1,\sqrt{2},1)\,; \tag{74}$$

(neortogonální) báze $\{T^1, T^2, N^1, N^2\}$ je pak kladná.

Značíme-li $X = (x_1,x_2,x_3,x_4)$, budou mít dvojice rovnic $(N^j \cdot (X-c)) = 0$, $j = 1,2$, a $(T^i \cdot (X-c)) = 0$, $i = 1,2$, tečné a normálové roviny tvar

$$3x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 + 2x_4 = 8\,, \quad x_1 + x_2 + \sqrt{2}\,x_3 = 3 \tag{75}$$

a

$$x_1 - x_2 - x_4 = 0\,, \quad x_1 + x_2 - \sqrt{2}\,x_3 - x_4 = 0\,. \tag{76}$$

* * *

Věty z této kapitoly dovolují rozřešit otázku, jak se výraz obsahující parciální derivace různých řádů změní, zavedeme-li nové „nezávisle proměnné“. Začneme však nejsnazším úkolem, kdy nezávisle proměnná je jen jedna (takže derivace jsou obyčejné); zde vystačíme s větami z Úvodu.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a že

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \tag{77}$$

je funkce definovaná pro všechna x z jistého otevřeného intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a pro jistou funkci $y : I \to \mathbb{R}$ třídy C_n v tomto intervalu; x je „nezávisle proměnná“, podle níž se derivuje funkce $y = y(x)$. Předpokládejme dále, že g je funkce třídy C_n v jistém (otevřeném) intervalu $J \subset \mathbb{R}$, přičemž $g(J) = I$. Utvořme funkci $Y := y \circ g$, tj. položme $Y(t) := y(g(t))$ pro všechna $t \in J$.

Předpokládejme, že jsme x ve výrazu (77) nahradili výrazem $g(t)$ a funkci y funkcí Y; naším úkolem je zjistit, jaký výraz $G(t, Y, Y', \ldots, Y^{(n)})$ z výrazu (77) vznikne. Bude přitom přehlednější, budeme-li derivování podle nové „nezávisle proměnné“ t značit tečkou, jak je zvykem např. ve fyzice, znamená-li t čas. [5])

[5]) Pro derivaci funkce f obecného řádu n však bohužel existuje jen jeden symbol, totiž $f^{(n)}$ – bez ohledu na to, jak se „nezávisle proměnná“ jmenuje.

Podle V. 5.4 o diferencování superpozice je

$$\dot{Y}(t) = y'(g(t))\,\dot{g}(t)\,, \quad \ddot{Y}(t) = y''(g(t))\,\dot{g}^2(t) + y'(g(t))\,\ddot{g}(t)\,, \;\ldots\;. \tag{78}$$

Není-li derivace $\dot{g}$ nikde v J rovna nule (takže g je ryze monotónní – viz V. 7.4), lze tyto rovnice vyřešit vzhledem k $y'(g(t))$, $y''(g(t))$, …; dostaneme identity

$$y'(g(t)) = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{g}(t)}\,, \quad y''(g(t)) = \frac{1}{\dot{g}^3(t)}\,(\ddot{Y}(t)\,\dot{g}(t) - \dot{Y}(t)\,\ddot{g}(t))\,, \;\ldots\;. \tag{79}$$

Kdybychom měli takto počítat např. čtvrtou derivaci, mohlo by být řešení příslušných rovnic dost těžkopádné. Z první rovnosti v (79) je však patrné, že

(80) *derivování podle x se redukuje na derivování podle t a dělení výsledku $\dot{g}$;*

derivace y', y'' … můžeme proto počítat přímo, žádné soustavy rovnic není nutné řešit. Máme-li přitom na paměti, že *tyto derivace je třeba složit s g a že podle t derivujeme ve skutečnosti funkci $Y = y \circ g$*, nemusíme se patrně obávat účelného zkráceného zápisu

$$y' = \frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\,, \quad y'' = \frac{1}{\dot{g}}\Big(\frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\Big)^{\!\cdot}\,, \quad y''' = \frac{1}{\dot{g}}\Big(\frac{1}{\dot{g}}\Big(\frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\Big)^{\!\cdot}\Big)^{\!\cdot}\,, \;\ldots \tag{81}$$

– samozřejmě stále za předpokladu, že $\dot{g} \neq 0$. Provedeme-li vyznačené derivování vpravo, získáme identity

$$y' = \frac{\dot{Y}}{\dot{g}}\,, \tag{81_1}$$

$$y'' = \frac{\dot{g}\ddot{Y} - \ddot{g}\dot{Y}}{\dot{g}^3}\,, \tag{81_2}$$

$$y''' = \frac{\dot{g}^2\dddot{Y} - 3\dot{g}\ddot{g}\ddot{Y} + (3\ddot{g}^2 - \dot{g}\dddot{g}\,)\dot{Y}}{\dot{g}^5}\,. \tag{81_3}$$

Dosadíme-li tyto výsledky spolu s $x = g(t)$ do

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x))\,, \tag{77'}$$

dostaneme výraz tvaru

$$G(t, Y(t), \dot{Y}(t), \ddot{Y}(t), \dddot{Y}(t))\,; \tag{82}$$

tím je záměna proměnné x za t provedena.

Příklad 16.10. *Eulerova diferenciální rovnice* řádu 3 má tvar

$$\alpha_0 x^3 y''' + \alpha_1 x^2 y'' + \alpha_2 xy' + \alpha_3 y = 0\,, \tag{83}$$

kde $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou konstanty.

V teorii diferenciálních rovnic se dokazuje, že všechna řešení v $\mathbb{R}_+$ takové rovnice, tj. všechny funkce $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, pro něž je levá strana (83) v $\mathbb{R}_+$ identicky rovna nule, dostaneme, rozřešíme-li rovnici, která z (83) vznikne substitucí $x = g(t) := e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Taková substituce je přípustná, protože funkce exp je třídy C_∞ v $\mathbb{R}$ a její derivace exp je tam všude nenulová.

Protože je $(e^t)^{(k)} = e^t$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, budou mít rovnice $(81_1)-(81_3)$ tvar

$$(84)\qquad y' = e^{-t}\dot{Y}\,,\ y'' = e^{-3t}\cdot e^t(\ddot{Y} - \dot{Y})\,,\ y''' = e^{-5t}\cdot e^{2t}(\dddot{Y} - 3\ddot{Y} + 2\dot{Y})$$

a rovnice (83) přejde v rovnici

$$(85)\qquad \alpha_0\dddot{Y} + (\alpha_1 - 3\alpha_0)\ddot{Y} + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2\alpha_0)\dot{Y} + \alpha_3 Y = 0\,.$$

Tato rovnice patří mezi obyčejné lineární diferenciální rovnice, kterým věnujeme kapitolu 18; tam také uvidíme, že když se nám podaří najít všechny kořeny algebraické rovnice

$$(86)\qquad \alpha_0\lambda^3 + (\alpha_1 - 3\alpha_0)\lambda^2 + (\alpha_2 - \alpha_1 + 2\alpha_0)\lambda + \alpha_3 = 0\,,$$

budeme schopni najít všechna řešení rovnice (85), a tedy i rovnice (83).

Tím je na konkrétním příkladu ilustrován význam „záměny nezávisle proměnné“ ve výrazech typu (77): *Řešení diferenciální rovnice* (83) (*s nekonstantními koeficienty*) *se vhodnou substitucí zredukuje na řešení algebraické rovnice.*

Poznámka 16.9. Není nutné zatěžovat si paměť vzorci $(81_1)-(81_{\ldots})$, ale měli bychom si dobře promyslit princip (80). V každém konkrétním příkladu pracujeme s konkrétní funkcí g a transformační vzorce pro derivace (až do potřebného řádu) odvozujeme pomocí (80) právě s touto konkrétní funkcí. To může být někdy jednodušší než v případě Eulerovy rovnice, ale zpravidla to bude bohužel asi složitější.

* * *

Záměna několika nezávisle proměnných ve výrazu obsahujícím parciální derivace je o dost složitější než záměna jedné proměnné. Protože však jde o metodu, která hraje podstatnou roli např. ve vektorové analýze a v teorii parciálních diferenciálních rovnic, je vhodné, abychom ji zde vyložili.

Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ a že

1) y je funkce třídy C_n proměnných $(x_1, \ldots, x_p)$ v otevřené množině $X \subset \mathbb{R}^p$;

2) F je funkce proměnných $(x_1, \ldots, x_p)$ a parciálních derivací funkce y řádů $k \le n$;

3) g je prostá funkce třídy C_n proměnných $(t_1, \ldots, t_p)$ v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, přičemž $g(\Omega) = X$ a

$$(87)\qquad J := \frac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \neq 0 \text{ všude v } \Omega\,.$$

Položíme-li $Y := y \circ g$ a $t = (t_1, \dots, t_p)$, platí v Ω podle V.14.5 o diferencování superpozice soustava identit

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i}(t) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y}{\partial x_j}(g(t)) \frac{\partial g_j}{\partial t_i}(t), \tag{88}$$

kde $i = 1, \dots, p$; z této soustavy lze vypočítat derivace $\partial y / \partial x_j$, $j = 1, \dots, p$, protože její determinant J je podle předpokladu všude v Ω nenulový. Pamatujme, ve kterých bodech se derivace v (88) počítají a pišme soustavu krátce ve tvaru

$$\frac{\partial Y}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial y}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial t_i}. \tag{88'}$$

Podle Cramerova pravidla je

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial Y}{\partial t_j} A(k, j), \tag{89}$$

kde $A(k, j)$ je algebraický doplněk [6]) prvku $\partial g_k / \partial t_j$ v Jacobiho matici funkcí g_k podle proměnných t_j.

Identity (89) jsou *základní transformační vzorce* pro derivace řádu 1; transformační vzorce pro parciální derivace $\partial^2 y / \partial x_k \partial x_l$, $\partial^3 y / \partial x_k \partial x_l \partial x_m$, ... se z nich získají pomocí dobře známých vět o diferencování, mezi nimiž hraje podstatnou roli věta o diferencování superpozice.

Dosadíme-li do F podle získaných vzorců, dostaneme jistou funkci nové proměnné $t = (t_1, \dots, t_p)$ a parciálních derivací funkce $Y = y(g(t))$ řádů $k \le n$. Ilustrujme to několika užitečnými příklady:

Příklad 16.11. Je-li funkce f třídy C_1 v nějaké otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a znamenají-li x, y kartézské souřadnice, je

$$\| \operatorname{grad} f \|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2; \tag{90}$$

pokusme se tento výraz přetransformovat do **polárních souřadnic**

$$x = r \cos \varphi, \; r \sin \varphi. \tag{91}$$

Zobrazení $g(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ je třídy C_∞ v celé rovině a zobrazuje rovinu na sebe; každý bod roviny kromě počátku má přitom okolí, v němž je funkce g prostá.

---

[6]) Připomeňme, že vynecháním r-tého řádku a s-tého sloupce matice A typu $p \times p$ o prvcích a_{rs} získáme matici, jejíž determinant se nazývá *subdeterminant* determinantu matice A příslušný k prvku a_{rs}; opatříme-li tento subdeterminant znaménkem $(-1)^{r+s}$, získáme příslušný *algebraický doplněk*.

Příslušný jakobián

$$J := \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \tag{92}$$

je roven nule, právě když je $r = 0$, což odpovídá počátku souřadnic. Protože záměna proměnných je lokální operace, je z toho patrné, že

(93) *od kartézských souřadnic k polárním lze přejít všude v* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Označme $F := f \circ g$, tj. položme $F(r,\varphi) := f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Identity (88′) mají za naší situace tvar

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi, \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x}\, r\sin\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\, r\cos\varphi \tag{94}$$

a jejich řešením jsou *identity*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi, \tag{95}$$

které ukazují, jak se derivování podle x a y převádí na derivování podle r a φ.

Snadnou úpravou získáme transformační vzorec

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big)^2 \quad \text{pro všechna } (x,y) \neq (0,0). \tag{96}$$

Příklad 16.12. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ a nechť f je třídy C_2 v Ω; transformujme do polárních souřadnic výraz [7])

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{97}$$

Derivováním první z identit (95) podle x, druhé podle y získáme identity

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\Big)\cos\varphi \\ &\quad - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\Big)\sin\varphi \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\cos^2\varphi - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\sin^2\varphi \\ &\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\sin^2\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi, \end{aligned} \tag{98}$$

[7]) Výraz (97) je (dvojrozměrný) *Laplaceův operátor* Δ aplikovaný na funkci f. Rovnice $\Delta f = 0$ se nazývá *Laplaceova* a je (spolu s obecnější *Poissonovou* rovnicí $\Delta f = u$) jednou z nejznámějších parciálních rovnic druhého řádu. Větší význam však mají analogické rovnice v prostoru; transformace trojrozměrného Laplaceova operátoru do cylindrických a sférických souřadnic jsou předmětem cvičení 16.137 a 16.138.

$$
(99) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi\Big)\sin\varphi \\
&+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial F}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cos\varphi\Big)\cos\varphi \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\sin^2\varphi + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\cos^2\varphi \\
&+ \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\cos^2\varphi - \frac{2}{r^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\sin\varphi\cos\varphi;
\end{aligned}
$$

Sečtením (98) a (99) získáme žádaný přepis výrazu Δf z kartézských souřadnic v rovině do souřadnic polárních:

$$
(100) \qquad \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}.
$$

Poznámka 16.10. V problémech, kterými se právě zabýváme, užíváme označení y, Y a f, F pro odlišení původní a složené funkce; chceme-li striktně dodržovat uznávaná pravidla, jinak ani jednat nemůžeme: Každá z funkcí y, Y (resp. f, F) má obecně jiný definiční obor a je jinou funkcí jiných proměnných.

Dokud vystačíme s jednou změnou nezávisle proměnných, můžeme užít (tak jako nahoře) např. malé a velké písmeno, což zdůrazňuje vzájemnou souvislost mezi y a Y a mezi f a F. Kdybychom však měnili proměnné vícekrát, nutně by se symbolika stala nepřehlednější. Mnohdy přitom nebezpečí z nedorozumění nehrozí a v literatuře se místo striktního rozlišení např. funkcí f a F užívá jen jedno označení f a změna proměnných se doprovodí např. slovy:

Protože f je funkce proměnných x_i a protože každé x_i je funkcí proměnných t_j, budeme f považovat za funkci proměnných t_j.

Katastrofální nedorozumění však hrozí za situace, kdy za některou z původních proměnných dosazujeme funkci jiných původních proměnných, takže některé z původních proměnných mají „stejné jméno“ jako některé nové proměnné.

P ř í k l a d : K úplnému zmatku bychom např. došli, kdybychom do funkce $f(x, y, z)$ dosadili $z = g(x, y)$ a kdybychom vzniklou superpozici nazývali stále f. Původní proměnné by byly x, y, z, nové proměnné x, y; co však potom znamená $\partial f/\partial x$? Parciální derivaci původní funkce $f(x, y, z)$ nebo složené funkce $F(x, y) := f(x, y, g(x, y))$?

Čtenář jistě vidí, že *v podobných situacích je nutné každou z těchto funkcí značit jiným symbolem*. Kdybychom obě funkce značili f, dostali bychom pomocí věty o diferencování superpozice zcela nesmyslnou identitu

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x},
$$

z níž by plynul např. absurdní výsledek, že druhý sčítanec vpravo je (za podobné situace vždy) nulový.

Poznámka 16.11. Jsou-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a $X \subset \mathbb{R}^p$ otevřené množiny a je-li $g : \Omega \to_{\text{na}} X$ prosté zobrazení, existuje pro každý bod $x \in X$ právě jeden bod $t \in \Omega$ tak, že $g(t) = x$. Interpretujeme-li složky x_i, $i = 1, \dots, p$, vektoru x jako kartézské souřadnice, znázorníme je pomocí p navzájem kolmých souřadnicových os protínajících se v počátku souřadnicového systému.

Označme $\mathcal{P}_i$ množinu všech přímek rovnoběžných s i-tou souřadnicovou osou a protínajících X. Snadno nahlédneme, že průnik každé přímky $P_i \in \mathcal{P}_i$ s X je buď celá přímka P_i, nebo spočetné sjednocení jistých otevřených úseček a polopřímek; každá z těchto množin je geometrickým obrazem jisté hladké (dokonce lineární) křivky.

Je-li g difeomorfismus, platí podle věty V.16.2 totéž o inverzním zobrazení $h := g_{-1}$, takže všechny množiny $Q_i := h(P_i \cap X)$ jsou také geometrické obrazy jistých hladkých křivek; označme $\mathcal{Q}_i$ množinu všech Q_i. Pro každý bod $x \in X$ a každé $i = 1, \dots, p$ existuje právě jedna přímka $P_i \in \mathcal{P}_i$ tak, že $\{x\} = P_1 \cap \ldots \cap P_p$; je-li $t = h(x)$, je pak $\{t\}$ průnikem příslušných množin $h(P_i \cap X)$. Poloha každého bodu $t \in \Omega$ je jednoznačně určena p množinami $Q_i \in \mathcal{Q}_i$, $i = 1, \dots, p$, jejichž průnikem je množina $\{t\}$.

Za právě popsané situace a označení se čísla $t_i = h_i(x)$, $i = 1, \dots, p$, nazývají *křivočaré souřadnice* bodu $t = h(x)$ a říká se, že v Ω je zaveden *křivočarý systém souřadnic*, který vznikl z kartézského systému souřadnic (v X) zobrazením h a který se zobrazením g obráceně na kartézský systém přemění.

Z čistě teoretického hlediska je situace zcela symetrická vzhledem ke g a h; nic tedy nebrání považovat souřadnice t_i bodů $t \in \Omega$ za kartézské souřadnice, načež křivočarými souřadnicemi jsou čísla x_i. V problémech, které řeší matematická analýza pro jiné disciplíny, např. pro geometrii nebo fyziku, bývá však a priori jasné, který ze jmenovaných systémů je kartézský. (Tak je tomu např. za situace z příkladů 16.11 a 16.12., kde křivočarým systémem je zcela jistě systém polárních souřadnic; křivočarý systém má zde dokonce i svůj název.)

Cvičení

1. Lokální difeomorfismy v $\mathbb{R}^2$

Pro danou funkci f najděte maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v jejímž každém bodě jsou splněny předpoklady věty 16.3; ověřte, že daný bod a leží v Ω, vypočtěte $A := f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny její parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě A.

	$f(x,y) =$	$a =$
16.01.	$(x^3 - 3xy^2,\ 3x^2y - y^3)$	$(1,-1)$
16.02.	$\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$	$(0,1)$
16.03.	$(\sin x \cosh y,\ \cos x \sinh y)$	$(0,0)$

16.04. $\left(\lg\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)$ $(1,1)$

16.05. $(e^x\cos\pi y\,,\ e^x\sin\pi y)$ $(-1,1)$

16.06. $(x+e^y\,,\ e^x-y)$ $(0,0)$

16.07. $(x+\operatorname{arccotg}y,\ y-\operatorname{arccotg}x)$ $(1,0)$

Pro danou funkci f a daný bod a ověřte předpoklady V. 16.3, vypočtěte hodnotu $A:=f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny její parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě A.

	$f(x,y)=$	$a=$
16.08.	$(xy(x^2-y^2),\ xy(x-y))$	$(1,-1)$
16.09.	$((x^2+x+1)(y^3-1),\ (x^3-x)(y^2-y-1))$	$(0,1)$
16.10.	$(\sin x+\sin y\,,\ \cos x-\cos y)$	$(\frac12\pi,-\pi)$
16.11.	$(x+\lg y\,,\ y-\lg x)$	$(1,1)$
16.12.	$(e^x+\lg(1+y),\ \lg(1+x)-e^y)$	$(0,0)$
16.13.	$(\operatorname{arctg}x+y^2,\ x^2-\operatorname{arctg}y)$	$(0,1)$
16.14.	$(\sin^2 x\cos y\,,\ \cos x\sin^2 y)$	$(\frac12\pi,-\frac12\pi)$
16.15.	$(x^x+\frac12 y^2,\ y^y-\frac12 x^2)$	$(1,1)$

2. Lokální difeomorfismy v $\mathbb{R}^3$

Pro danou funkci f najděte maximální otevřenou množinu $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, v jejímž každém bodě jsou splněny předpoklady V. 16.3 ; ověřte, že daný bod a leží v Ω, vypočtěte $A:=f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny parciální derivace 1. a 2. řádu funkce g v bodě A.

	$f(x,y,z)=$	$a=$
16.16.	$(e^{-x+y+z},\ e^{x-y+z},\ e^{x+y-z})$	$(0,0,0)$
16.17.	$(\cos y+\cos z\,,\ \cos z+\cos x\,,\ \cos x+\cos y)$	$(\frac12\pi,\frac12\pi,\frac12\pi)$
16.18.	$(x^3-y+z\,,\ y^3-z+x\,,\ z^3-x+y)$	$(1,0,-1)$
16.19.	$\dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$	$(1,-1,1)$

16.20. $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z}\,,\ \operatorname{arctg}\dfrac{yz}{x}\,,\ \operatorname{arctg}\dfrac{zx}{y}\right)$ $\qquad (1,-1,-1)$

16.21. $(x-e^{y-z},\ y-e^{z-x},\ z-e^{x-y})$ $\qquad (2,2,2)$

16.22. $\left(\dfrac{x}{y^2+z^2}\,,\ \dfrac{y}{z^2+x^2}\,,\ \dfrac{z}{x^2+y^2}\right)$ $\qquad (1,-1,1)$

16.23. $(\sin x\cos y\,,\ \sin y\cos z\,,\ \sin z\cos x)$ $\qquad (-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{2}\pi)$

Pro danou funkci f a daný bod a ověřte předpoklady V. 16.3, vypočtěte hodnotu $A := f(a)$, označte g lokální inverzní funkci funkce f u bodu a a najděte všechny její parciální derivace 1. a 2. řádu v bodě A.

$f(x,y,z) =$ $\qquad a =$

16.24. $(x^3+xy+z\,,\ y^3+yz+x\,,\ z^3+zx+y)$ $\qquad (0,0,0)$

16.25. $(x+xy+xyz\,,\ y+yz+yzx\,,\ z+zx+zxy)$ $\qquad (1,0,-1)$

16.26. $(x+y^2+e^z,\ y+z^2+e^x,\ z+x^2+e^y)$ $\qquad (0,0,0)$

16.27. $(\lg x-\operatorname{arctg}(yz-1),\ \lg y-\operatorname{arctg}(zx-1),$
$\lg z-\operatorname{arctg}(xy-1))$ $\qquad (1,1,1)$

16.28. $(xy+z+\lg(1+z^2),\ yz+x+\lg(1+x^2),$
$zx+y+\lg(1+y^2))$ $\qquad (1,1,1)$

16.29. $(\sin x-yz,\ \sin y-zx,\ \sin z-xy)$ $\qquad (0,0,0)$

16.30. $(\sin(x+y-z),\ \sin(y+z-x),\ \sin(z+x-y))$ $\qquad (\frac{1}{2}\pi,0,-\frac{1}{2}\pi)$

3. Implicitní funkce – křivky v $\mathbb{R}^2$

Ověřte, zdali daná funkce F dvou proměnných x,y splňuje u daného bodu $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $y=g(x)$ (resp. $x=h(y)$) rovnice $F(x,y)=0$. Pokud ano, vypočtěte derivace $g'(a)$, $g''(a)$, $g'''(a)$ (resp. $h'(b)$, $h''(b)$, $h'''(b)$). [8])

$F(x,y) =$ $\qquad (a,b) =$

16.31$^{\mathbf{o}}$. $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ $\qquad (-1,1)$

16.32$^{\mathbf{o}}$. $x^4-3x^2y^2+2y^4$ $\qquad (1,1)$

---

[8]) Je-li možné z rovnice $F(x,y)=0$ u bodu (a,b) vypočítat jak y jako funkci x, tak x jako funkci y, čtenář se možná omezí jen na jeden z popsaných úkolů; na konci kapitoly však najde obě řešení.

16.33°. $x(y^4 - y^2) - x^4(y^3 - y)$ $(2, 0)$

16.34°. $(x + y)^3 - 2x - 3y$ $(2, -1)$

16.35°. $(x^2 + y)^2 + 2x^2 + 2y - x$ $(-1, -2)$

16.36°. $x^3y + x^2 - xy - y - y^2 + y^3$ $(1, -1)$

16.37°. $xe^y + ye^{-x} + x + y$ $(-1, 1)$

16.38°. $e^{x+y} - e^{x-y} + e^{xy} - e^{x^2-y^2}$ $(0, 0)$

16.39°. $(y + 1)e^{1-x^2} + (x - 1)e^{y+1}$ $(0, 0)$

16.40°. $\operatorname{arctg}(x + 2y) + x + 2y$ $(2, -1)$

V následujících 5 cvičeních stačí najít první a druhé derivace funkcí určených implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ u bodu (a, b).

$F(x, y) =$ $(a, b) =$

16.41°. $\lg(xy) + x^2 - y^2$ $(1, 1)$

16.42°. $\operatorname{arctg}(x + y) + \operatorname{arctg}(x - y) + y - y^2$ $(0, 1)$

16.43°. $\sin x + \sin y - \sin(x - y) + \sin(x + y)$ $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

16.44°. $\sin(\sin(\pi(x + y))) + \sin(\pi\cos(\pi(x - y)))$ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

16.45°. $(y - 1)e^{\operatorname{arctg} x} - x + \lg y$ $(0, 1)$

4. Implicitní funkce – křivky v $\mathbb{R}^3$

Ověřte, zdali daná dvojrozměrná vektorová funkce F tří reálných proměnných x, y, z splňuje u daného bodu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ předpoklady V.16.4 o existenci jednoznačného řešení $(y, z) = g(x)$ (resp. $(x, z) = h(y)$ resp. $(x, y) = i(z)$) rovnice $F(x, y, z) = 0$. Pokud ano, vypočtěte derivace $g'(a)$, $g''(a)$ (resp. $h'(b)$, $h''(b)$ resp. $i'(c)$, $i''(c)$). [9]

$F(x, y, z) =$ $(a, b, c) =$

16.46. $(2x + y^2z + z^3,\ x^3 + 2xy + 3z)$ $(1, 1, -1)$

16.47. $(x^3 + y^3 + z^3,\ 1 + xy + xz + yz)$ $(1, 0, -1)$

16.48. $(ye^x + ze^y,\ xe^z - ye^{x+y})$ $(0, 0, 0)$

[9]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

16.49. $(z - z^3 e^x,\ y - y^3 e^x)$ $\qquad (0, 1, -1)$

16.50. $(\lg(1 + y^2 - z^2),\ y \lg(1 - x^2 + z^2))$ $\qquad (1, -1, 1)$

16.51. $(\operatorname{arctg}(x + y - z),\ \lg(1 + x - y + z))$ $\qquad (0, 1, 1)$

16.52. $(2 \operatorname{arctg}(1 + xy) - \operatorname{arccotg} z,\ 2 \operatorname{arctg}(1 + yz) - \operatorname{arccotg} x)$ $\qquad (0, 0, 0)$

16.53. $(\sinh(x + y) + (y + 2)(z - 2),\ \sinh(y + z) - (x - 2)(z - 2))$ $\qquad (2, -2, 2)$

16.54. $(e^{\sin x - z} + \cos 2y,\ e^{\cos(x-y)} - \cos z)$ $\qquad (\pi, \frac{1}{2}\pi, 0)$

16.55. $(x^y - z^x,\ y^x - z^y)$ $\qquad (1, 1, 1)$

5. Implicitní funkce – křivky v $\mathbb{R}^4$

Ověřte, zdali daná trojrozměrná vektorová funkce F čtyř reálných proměnných x, y, z, u splňuje u daného bodu $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $(y, z, u) = g(x)$ (resp. $(x, z, u) = h(y)$ resp. $(x, y, u) = i(z)$ resp. $(x, y, z) = j(u)$) rovnice $F(x, y, z, u) = (0, 0, 0)$. Pokud ano, vypočtěte derivace $g'(a)$, $g''(a)$ (resp. $h'(b)$, $h''(b)$ resp. $i'(c)$, $i''(c)$ resp. $j'(d)$, $j''(d)$). [10])

$F(x, y, z, u) =$ $\qquad (a, b, c, d) =$

16.56. $(x^2 + y^2 - z + u,\ -x + y^2 + z^2 + u,\ -x + y + z^2 + u^2)$ $\qquad (1, -1, 1, -1)$

16.57. $(x^3 + y^3 + z^3 + u,\ x^3 + y^3 + z + u,\ x^3 + y + z + u)$ $\qquad (-1, 1, -1, 1)$

16.58. $(\sin(x + y + z + u^2),\ \sin(x + y^2 + z - u),$
$\sin(x + y^2 - z - u^2))$ $\qquad (\frac{1}{2}\pi, 0, \frac{1}{2}\pi, 0)$

16.59. $(z \operatorname{arctg}(x + 2y),\ x \operatorname{arctg}(z + 2u),\ \operatorname{arctg}(x + y - z - u))$ $\qquad (2, -1, 2, -1)$

16.60. $(x + y + z - e^{u-x},\ x + y + u + e^{z-y},$
$x + z + u + e^{-x-y-z-u})$ $\qquad (-1, 1, 1, -1)$

6. Implicitní funkce – plochy v $\mathbb{R}^3$

Ověřte, zdali daná reálná funkce F tří reálných proměnných x, y, z splňuje u daného bodu $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $z = g(x, y)$ (resp. $y = h(x, z)$ resp. $x = i(y, z)$) rovnice $F(x, y, z) = 0$. Pokud ano, vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu funkce g (resp. h resp. i) v bodě (a, b) (resp. (a, c) resp. (b, c)). [10])

[10]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

$F(x,y,z) =$ $(a,b,c) =$

16.61. $x + 2y - x^2y - x^3z - yz + xyz^2$ $(1,0,1)$

16.62. $xyz - xy + 2yz - 4xz$ $(1,2,1)$

16.63. $x^3 + x^2 + x + y^3 + 2y^2 + y - x^2z^2 + 2y^2z^2$ $(0,-1,0)$

16.64. $(x^2+y^2+z^2)^2 - 8(x^2+y^2+z^2)$ $(2,0,2)$

16.65. $x + y + z - \lg(1 + x^2 + y^2 + z^2)$ $(0,0,0)$

16.66. $e^{x^2+2y^2+3z} - (x^2 + y^2 + z)$ $(1,1,-1)$

16.67. $\lg(1 + x^2 + y^2 - z^2) - \lg(1 + x + y + z)$ $(1,0,-1)$

16.68. $\sin(\pi xyz) + x\sin(\pi y)$ $(-1,2,3)$

16.69. $e^{\sin x}yz - e^{\sin yz}x$ $(\pi,\pi,1)$

16.70. $y\,\mathrm{arctg}(x+z) - x\,\mathrm{arctg}(y+z) + xyz + 1$ $(1,1,-1)$

7. Implicitní funkce – plochy v $\mathbb{R}^4$

Ověřte, zdali daná dvojrozměrná vektorová funkce F čtyř reálných proměnných x, y, z, u splňuje u daného bodu $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $(z,u) = g(x,y)$ (kde $g = (g_1, g_2)$) resp. $(y,u) = h(x,z)$ resp. $(y,z) = i(x,u)$ resp. $(x,u) = j(y,z)$ resp. $(x,z) = k(y,u)$ resp. $(x,y) = l(z,u)$ rovnice $F(x,y,z,u) = (0,0)$. Pokud ano, vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu příslušné implicitní funkce v příslušném bodě. [11])

$F(x,y,z,u) =$ $(a,b,c,d) =$

16.71. $\bigl(x - y^2 + z^3 - u^4,\; x^4 + y^3 + z^2 + u\bigr)$ $(1,-1,1,-1)$

16.72. $\bigl(x\lg(1 + y^2 - u^2),\; y\lg(1 + x^2 - z^2)\bigr)$ $(2,-1,2,-1)$

16.73. $\bigl(e^{xy-zu} + x + y - z - 2u,\; e^{xu-yz} - xz - yu\bigr)$ $(0,1,0,1)$

16.74. $\Bigl(xyz + \mathrm{arctg}\,\dfrac{x+y}{u},\; (x+y)u + \mathrm{arctg}\,\dfrac{y+u}{x}\Bigr)$ $(-1,1,0,-1)$

16.75. $\Bigl(\dfrac{x + y^2 - 2z}{z + u^2},\; \dfrac{z + u^2 - 2x}{x + y^2}\Bigr)$ $(1,-1,1,-1)$

[11]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

8. Implicitní funkce – křivé prostory v $\mathbb{R}^4$

Ověřte, zdali daná reálná funkce F čtyř reálných proměnných x, y, z, u splňuje u daného bodu $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ předpoklady V. 16.4 o existenci jednoznačného řešení $u = g(x, y, z)$ (resp. $z = h(x, y, u)$ resp. $y = i(x, z, u)$ resp. $x = j(y, z, u)$) rovnice $F(x, y, z, u) = 0$. Pokud ano, vypočtěte parciální derivace prvního a druhého řádu příslušné implicitní funkce v příslušném bodě. [12])

	$F(x,y,z,u) =$	$(a,b,c,d) =$
16.76.	$x^2 - 3xy^2 - 4yz - yu - 2z^2u$	$(1, -1, 1, 2)$
16.77.	$x + u + xy + zu - \lg(1 + xz + yu)$	$(-1, 0, 0, 1)$
16.78.	$e^{x+z} - e^{y-u} + e^{x+u} - e^{y+z}$	$(0, 0, 0, 0)$
16.79.	$x + y + z - u + \cos(\pi x) - 2\cos(\pi z)$	$(-1, 0, 2, -2)$
16.80.	$\lg(2 - xy + zu) - \operatorname{arctg} \dfrac{xz}{yu}$	$(-1, -1, 0, 2)$

9. Variety dimenze 1 v $\mathbb{R}^2$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, v níž je nulová hladina funkce F jednorozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^2$ leží v Ω, a najděte rovnice tečny a normály variety v bodě c.

	$F(x,y) =$	$c =$
16.81^o.	$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2)$	$(1 - \sqrt{2}\,, \sqrt{2} - 1)$
16.82^o.	$(x+1)y^2 + (x-1)x^2$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}\right)$
16.83^o.	$e^x \sin y - e^y \sin x$	$\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi\right)$
16.84^o.	$e^{x-y} + 2\sin(x+y) - 1$	(π, π)
16.85^o.	$e^{x+2y} + x^2 + 3xy + y^2$	$(2, -1)$

10. Variety dimenze 1 v $\mathbb{R}^3$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, v níž je $(0, 0)$-hladina vektorové funkce F jednorozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^3$ leží v Ω, a najděte rovnice tečny a normálové roviny variety v bodě c.

[12]) Na konci kapitoly najde čtenář všechna řešení.

	$F(x,y,z) =$	$c =$
16.86.	$(3x^2 - 4xy + 2xz - z^2 - 1\,,\ x - 2y - z)$	$(1, \frac{1}{2}, 0)$
16.87.	$(e^{x-1} - 2y - z\,,\ e^{y-1} - 2x - z)$	$(1, 1, -1)$
16.88.	$(\lg(xy - z)\,,\ x(y - z))$	$(2, 1, 1)$
16.89.	$\left(\arcsin(xyz - \frac{1}{2})\,,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z} - 1\right)\right)$	$(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2})$
16.90.	$\dfrac{(x + 2y + 3z\,,\ 3x + 2y + z)}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(-1, 2, -1)$

11. Variety dimenze 1 v $\mathbb{R}^4$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, v níž je $(0,0,0)$-hladina vektorové funkce F jednorozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^4$ leží v Ω, a najděte rovnice tečny a (trojrozměrné) normálové nadroviny variety v bodě c.

	$F(x,y,z,u) =$	$c =$
16.91.	$(y(x + u)\,,\ x^2 - z^2,\ yz - xu)$	$(-1, 1, -1, 1)$
16.92.	$(x^3 - y - z\,,\ y^3 - z - u\,,\ z^3 - u - x)$	$(0, 0, 0, 0)$
16.93.	$(e^{x-y} - z - u\,,\ e^{y-z} - u - x\,,\ e^{z-x} - y - u)$	$(1, 1, 1, 0)$
16.94.	$(\lg(y - x) + 2z - u\,,\ \lg(u - z) + 2x - y\,,\ x + y - z - u)$	$(1, 2, 1, 2)$
16.95.	$(\operatorname{arctg}(xy - z)\,,\ \operatorname{arctg}(xz - y)\,,\ \operatorname{arctg}(xu - z))$	$(1, 1, 1, 1)$

12. Variety dimenze 2 v $\mathbb{R}^3$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, v níž je nulová hladina funkce F dvojrozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^3$ leží v Ω, a najděte rovnice tečné roviny a normály variety v bodě c.

	$F(x,y) =$	$c =$
16.96$^{\mathbf{O}}$.	$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1$	$\left(\sqrt{6}, \frac{3}{4}\sqrt{2}\,, \sqrt{2}\right)$
16.97.	$x^2 - 6xy + 4xz + y^2 - 4yz + 2z^2 - 4x + 4z - 3$	$(0, 1, 1)$
16.98.	$x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$	$(1, -1, 0)$

16.99. $e^{x-y} + e^{x-z} - 2\,e^{y-z}$ $\qquad (1, 1, 1)$

16.100. $\operatorname{arctg}(x + y + z) - \lg(1 + (x + y + z)^2)$ $\qquad (0, 2, -2)$

13. Variety dimenze 2 v $\mathbb{R}^4$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, v níž je $(0,0)$-hladina funkce F dvojrozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^4$ leží v Ω, a najděte rovnice tečné a normálové roviny variety v bodě c.

	$F(x, y, z, u) =$	$c =$
16.101.	$(xy - zu\,,\; xz - yu)$	$(1, 2, 2, 1)$
16.102.	$(xyzu - 1\,,\; x + y + z + u)$	$(1, -1, -1, 1)$
16.103.	$(x^2 + y + z^2 + u\,,\; x - y^2 + z - u^2)$	$(1, -1, 1, -1)$
16.104.	$(e^{x-y} - y + z + u\,,\; e^{z-u} - u + x + y)$	$(-1, -1, -1, -1)$
16.105.	$(\lg(x + y) - \lg(z + u), \lg(x + z) - \lg(y - u))$	(e, e, e, e)

14. Variety dimenze 3 v $\mathbb{R}^4$

Najděte 1) maximální otevřenou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^4$, v níž je nulová hladina funkce F trojrozměrnou varietou, 2) množinu všech singulárních bodů této hladiny. Pak ověřte, že daný bod $c \in \mathbb{R}^4$ leží v Ω, a najděte rovnice tečné nadroviny a normály variety v bodě c.

	$F(x, y, z, u) =$	$c =$
16.106.	$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \left(\frac{u}{4}\right)^2 - 1$	$(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2)$
16.107.	$x^2 + 3\,xy + y^2 - z^2 - zu - 3\,u^2$	$(1, 2, -1, 2)$
16.108.	$x^3 + x + xy + y - 4\,xyz - 2\,yz + 3\,zu$	$(1, -1, 2, -2)$
16.109.	$e^{x+y-z} + e^{z+u-x} + x + y - z + 2\,u$	$(1, 1, 2, -1)$
16.110.	$\lg(x^2 + y^2) - \lg(z^2 + u^2) + x + y + z + u$	$(3, 4, -3, -4)$

15. Záměna jedné proměnné

Najděte všechny maximální otevřené intervaly $J \subset \mathbb{R}$, pro něž platí: Všechny koeficienty rovnice $L(y) = 0$ jsou v J spojité a existuje interval $I \subset \mathbb{R}$ tak, že $g(I) = J$ a že $\dot{g} \neq 0$ všude v I. Pak proveďte substituci $x = g(t)$ ($t \in I$, $x \in J$) a ověřte, že rovnice $L(y) = 0$ přejde v rovnici $M(y) = 0$ s konstantními koeficienty.[13])

	$L(y)$	$g(t)$	$M(y)$
16.111.	$x^2y'' + 4xy' - 4y$	$\pm\, e^t$	$\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y$
16.112.	$x^2y'' - 6y$	$\pm\, e^t$	$\ddot{y} - \dot{y} - 6y$
16.113.	$x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + y$	$\pm\, e^t$	$\dddot{y} + y$
16.114.	$x^3y''' - 3x^2y'' + xy' - y$	$\pm\, e^t$	$\dddot{y} - 6\ddot{y} + 6\dot{y} - y$
16.115.	$x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 7x^2y'' + xy' - y$	$\pm\, e^t$	$\ddddot{y} - y$
16.116.	$x^4y^{(4)} - 11x^2y'' + xy' - y$	$\pm\, e^t$	$\ddddot{y} - 6\dddot{y} + 6\dot{y} - y$
16.117.	$xy'' - y' - 6x^3y$	$\pm\sqrt{t}$	$2\ddot{y} - 3y$
16.118.	$xy'' + (2x^2 - 1)\,y' - 4x^3y$	$\pm\sqrt{t}$	$\ddot{y} + \dot{y} - y$
16.119.	$xy'' - (3x^3 + 2)\,y' - 18x^5y$	$\sqrt[3]{t}$	$\ddot{y} - \dot{y} - 2y$
16.120.	$2xy'' + y' + 2y$	t^2	$\ddot{y} + 4y$
16.121.	$2xy''' + 3y'' - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,y$	t^2	$\dddot{y} - 8y$
16.122.	$x^6y''' + 6x^5y'' + x^2\,(6x^2 - 1)\,y'$	t^{-1}	$\dddot{y} - \dot{y}$
16.123.	$x^6y'' + 3x^5y' + 4y$	$\pm\, t^{-1/2}$	$\ddot{y} + y$
16.124.	$(1 - x^2)\,y'' - xy' - 9y$	$\sin t$	$\ddot{y} - 9y$
16.125.	$(1 - x^2)\,y''' - 3xy''$	$\cos t$	$\dddot{y} + \dot{y}$
16.126.	$y'' + (\cos x + \operatorname{tg} x)\,y' + (\cos^2 x)\,y$	$\arcsin t$	$\ddot{y} + \dot{y} + y$
16.127.	$y'' - y' + e^{2x}y$	$\lg t$	$\ddot{y} + y$
16.128.	$y'' + \dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}\,y' - \dfrac{2y}{(x^2 + 1)^2}$	$\operatorname{tg} t$	$\ddot{y} - \dot{y} - 2y$

[13]) V kapitole 18 uvidíme, že se řešení rovnice s konstantními koeficienty (tj. rovnice tvaru $a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny$, kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou *čísla*) redukuje na řešení algebraické rovnice $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Proto má transformace rovnic s nekonstantními koeficienty na rovnice s konstantními koeficienty značný význam.

16.129. $y'' - (2\,\mathrm{tg}\,x)y' - \dfrac{y}{\cos^4 x}$	$\mathrm{arctg}\,t$	$\ddot{y} - y$
16.130. $(x^2+1)y'' + xy' - y$	$\sinh t$	$\ddot{y} - y$

16. Záměna dvou a tří proměnných

16.131. Za situace z Př. 16.12 ověřte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\Big) + \frac{\cos 2\varphi}{r}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\Big).$$

16.132. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2, nechť čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2, j = 1,2)$ splňují podmínku $J := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ a nechť funkce g je definována v $\mathbb{R}^2$ rovností

$$g(u,v) := a_{11}u + a_{12}v\,,\;\; h(u,v) := a_{21}u + a_{22}v\,.$$

Dosazením $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ do $f(x,y)$ definujte funkci $F := f \circ (g,h)$ a ověřte tyto transformační vzorce:

$$\|\,\mathrm{grad}\,f\,\|^2 = \frac{1}{J^2}\Big(\Big(a_{12}\frac{\partial F}{\partial u} - a_{11}\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2 + \Big(a_{22}\frac{\partial F}{\partial u} - a_{21}\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2\Big),$$

$$\Delta f = \frac{1}{J^2}\Big((a_{12}^2 + a_{22}^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2\,(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (a_{11}^2 + a_{21}^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big).$$

16.133. Předpokládejte, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (proměnných x, y) je třídy C_2 a že $F := f \circ (g,h)$, kde $g(u,v) := u^2 + v^2$, $h(u,v) := u^2 - v^2$. Ověřte, že jakobián $\partial(g,h)/\partial(u,v)$ je roven $8uv$, a dokažte, že v množině $\Omega := \{(u,v);\, uv \neq 0\}$ je

$$\|\,\mathrm{grad}\,f\,\|^2 = \frac{1}{8u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1}{8v^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{1}{8u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{8v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1}{8u^3}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{8v^3}\frac{\partial F}{\partial v}\,.$$

16.134. Nechť $g(u,v) := uv$, $h(u,v) := u/v$; ověřte, že v $\Omega := \{(u,v);\, uv \neq 0\}$ je $\partial(g,h)/\partial(u,v) = -2u/v \neq 0$, a odvoďte transformační vzorce

$$\|\,\mathrm{grad}\,f\,\|^2 = \frac{1+v^4}{4v^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1-v^4}{2uv}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1+v^4}{4u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{1+v^4}{4v^2}\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial u}\Big) + \frac{1-v^4}{2uv}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{1+v^4}{4u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} - \frac{1-3v^4}{4u^2 v}\frac{\partial F}{\partial v}\,.$$

16.135. Položte $g(u,v) := u\cosh v$, $h(u,v) := u\sinh v$ a dokažte, že pak je $\partial(g,h)/\partial(u,v) = u$, takže funkce (g,h) je difeomorfní v jistém okolí každého bodu množiny $\Omega := \{(u,v);\, u \neq 0\}$.

Předpokládejte, že $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2, položte $F := f \circ (g,h)$ a dokažte, že v Ω platí tyto identity:

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \cosh 2v \left(\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 \right) - \frac{2\sinh 2v}{u}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\Delta f = \cosh 2v \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) - \frac{2\sinh 2v}{u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v} \right).$$

16.136. Dokažte, že funkce $g(r,\varphi) := (r\cos^2\varphi, r\sin^2\varphi)$ třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ zobrazuje množinu $\Omega := \mathbb{R}_+ \times (0, \frac{1}{2}\pi)$ prostě na otevřený první kvadrant $\mathbb{R}^2_+$, přičemž $\partial(g_1,g_2)/\partial(r,\varphi) = r\sin 2\varphi \neq 0$ v Ω.

Za předpokladu, že f je třídy C_1 v $\mathbb{R}^2_+$ a že $F := f \circ g$, dokažte, že v Ω platí identita

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = 2\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\operatorname{cotg} 2\varphi}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{4r^2}(\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{cotg}^2\varphi)\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2.$$

16.137. Cylindrické souřadnice (r,φ,z) bodu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ jsou definovány rovností

$$(x,y,z) = g(r,\varphi,z) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z). \tag{102}$$

Dokažte, že funkce g je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$ a že všude v $\mathbb{R}^3$ je

$$\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,z)} = r, \tag{103}$$

takže g je difeomorfní v jistém okolí každého bodu z $\mathbb{R}^3$ neležícího na ose z. Nechť $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f \circ g$; dokažte, že pro $r \neq 0$ je

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

16.138. Sférické souřadnice (r,φ,ϑ) bodu $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ jsou definovány rovností

$$(x,y,z) = g(r,\varphi,\vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta). \tag{104}$$

Dokažte, že g je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$ a že všude v $\mathbb{R}^3$ je

$$\frac{\partial(g_1,g_2,g_3)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = r^2\cos\vartheta, \tag{105}$$

takže g je difeomorfní v jistém okolí každého bodu množiny

$$\Omega := \{(r,\varphi,\vartheta);\ r\in\mathbb{R}_+,\ \ \varphi\in\mathbb{R},\ \ \vartheta\not\equiv\tfrac{1}{2}\pi \mod \pi\}, \tag{106}$$

jejímž obrazem při zobrazení g je prostor $\mathbb{R}^3$, z něhož je vynechána osa z.

Nechť $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f\circ g$; dokažte, že všude v Ω platí identity

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\Big(\frac{\partial F}{\partial\varphi}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\Big)^2,$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\vartheta^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{r^2}\,\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\,.$$

16.139. Nechť

$$(x,y,z) = g(u,v,w) := (u-w, u-v, v-2w)$$

pro všechna $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$; dokažte, že g je pak prosté zobrazení $\mathbb{R}^3$ na $\mathbb{R}^3$ třídy C_∞, pro něž je $\partial(g_1,g_2,g_3)/\partial(u,v,w)\equiv 1$ v $\mathbb{R}^3$.

Nechť $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f\circ g$; ověřte, že pak v $\mathbb{R}^3$ platí identity

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = 6\Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + 9\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2 + 3\Big(\frac{\partial F}{\partial w}\Big)^2 + 14\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v} + 8\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial w} + 10\,\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial F}{\partial w},$$

$$\Delta f = 6\,\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 9\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + 3\,\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} + 14\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + 8\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial w} + 10\,\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w}\,.$$

16.140. Dokažte, že jakobián transformace

$$(x,y,z) = g(u,v,w) := (u, uv, uvw)$$

třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$ je roven u^2v, takže g je difeomorfní v jistém okolí každého bodu množiny $\Omega := \{(u,v,w);\ uv\neq 0\}$.

Nechť $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ je třídy C_2 a nechť $F := f\circ g$; ověřte, že pak v Ω platí identity

$$\|\operatorname{grad} f\|^2 = \Big(\frac{\partial F}{\partial u}\Big)^2 + \frac{1+v^2}{u^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v}\Big)^2 + \frac{1+w^2}{u^2v^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial w}\Big)^2 - \frac{2v}{u}\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{2w}{u^2v}\,\frac{\partial F}{\partial v}\,\frac{\partial F}{\partial w},$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1+v^2}{u^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \frac{1+w^2}{u^2v^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} - \frac{2v}{u}\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} - \frac{2w}{u^2v}\,\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial w} + \frac{2v}{u^2}\,\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{2w}{u^2v^2}\,\frac{\partial F}{\partial w}\,.$$

Řešení

Parciální derivace prvního i druhého řádu funkce g v bodě A jsou uvedeny vždy v lexikografickém pořadí, pro funkci dvou proměnných tedy v pořadí $\partial_1 g$, $\partial_2 g$ a $\partial_{11} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{22} g$, pro funkci tří proměnných v pořadí $\partial_1 g$, $\partial_2 g$, $\partial_3 g$ a $\partial_{11} g$, $\partial_{12} g$, $\partial_{13} g$, $\partial_{22} g$, $\partial_{23} g$, $\partial_{33} g$.

Abychom se vyhnuli zlomkům, uvádíme často místo těchto derivací jejich (většinou kladné) násobky: Je-li g např. zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, zápis $\gamma g' : (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ znamená, že $\partial_1 g(A) = (\alpha/\gamma,\, \beta/\gamma)$, $\partial_2 g(A) = (\alpha'/\gamma, \beta'/\gamma)$; podobně pro derivace řádu 2. Jsou-li všechny parciální derivace řádu 1 resp. 2 v bodě A rovny 0, píšeme za „g' :“ resp. za „g'' :“ jen „0“.

Difeomorfismy

16.01. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; $A = (-2,-2)$; $6g' : (0,1), (-1,0)$; $36g'' : (1,1), (-1,1), (-1,-1)$.

16.02. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; $A = (0,-1)$; $g' : (1,0), (0,1)$; $g'' : (0,-2), (2,0), (0,2)$.

16.03. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(\frac{1}{2}(2k+1)\pi, 0);\, k \in \mathbb{Z}\}$; $A = (0,0)$; $g' : (1,0), (0,1)$; $g'' : 0$.

16.04. $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,y);\, y = 0\}$; $A = (\frac{1}{2}\lg 2, \frac{1}{4}\pi)$; $g' : (1,1), (1,-1)$; $g'' : (1,1), (1,-1), (-1,-1)$.

16.05. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $A = (e^{-1}, 0)$; $\pi g : (-\pi e, 0), (0, -e)$; $\pi g'' : (-\pi e^2, 0), (0, -e^2), (\pi e^2, 0)$.

16.06. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $A = (1,1)$; $2g' : (1,1), (1,-1)$; $4g'' : (-1,0), (0,1), (-1,0)$.

16.07. $\Omega = \mathbb{R}^2$; $A = (1 + \frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{4}\pi)$; $3g' : (2,-1), (2,2)$; $27g'' : (4,4), (4,4), (4,4)$.

16.08. $A = (0,-2)$; $12g' : (-3,-3), (-2,2)$; $72g'' : (3,-3), (-9,-9), (-4,4)$.

16.09. $A = (0,0)$; $3g' : (0,1), (3,0)$; $9g'' : (0,-2), (3,-3), (0,0)$.

16.10. $A = (1,1)$; $g' : (0,-1), (-1,0)$; $g'' : (-1,0), (0,0), (0,-1)$.

16.11. $A = (1,1)$; $2g' : (1,1), (-1,1)$; $4g'' : (1,0), (0,1), (1,0)$.

16.12. $A = (1,-1)$; $2g' : (1,1), (1,-1)$; $4g'' : (1,-1), (-1,-1), (1,-1)$.

16.13. $A = (1, -\frac{1}{4}\pi)$; $g' : (1,0), (4,-2)$; $\frac{1}{4}g'' : (-2,1), (-8,4), (-36,17)$.

16.14. $A = (0,0)$; $g' : (0,1), (-1,0)$; $g'' : 0$.

16.15. $A = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$; $2g' : (1,1), (-1,1)$; $4g'' : (-1,-2), (2,-1), (-1,-2)$.

16.16. $\Omega = \mathbb{R}^3$; $A = (1,1,1)$; $2g' : (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$; $2g'' : (0,-1,-1), (0,0,0), (0,0,0), (-1,0,-1), (0,0,0), (-1,-1,0)$.

16.17. $\Omega = \{(x,y,z);\, x \not\equiv 0 \bmod \pi, y \not\equiv 0 \bmod \pi, z \not\equiv 0 \bmod \pi\}$; $A = (0,0,0)$; $2g' : (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$; $g'' : 0$.

16.18. $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$; $A = (0,2,-2)$; $6g' : (1,-2,1), (4,10,-2), (1,4,1)$; $6g'' : (0,1,0), (-1,0,-1), (0,1,0), (-2,8,-2), (-1,0,-1), (0,1,0)$.

16.19. $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$; $A = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; $g' : (1,2,-2), (2,1,2), (-2,2,1)$; $\frac{1}{2}g'' : (-5,-1,1), (-1,1,-4), (1,-4,1), (1,5,1), (-4,1,-1), (1,-1,-5)$.

16.20. $\Omega = \{(x,y,z);\, xyz \neq 0\}$; $A = (\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$;
$g' : (1,-1,0), (0,-1,-1), (1,0,-1)$;
$g'' : (1,-1,0), (0,-1,0), (1,0,0), (0,-1,-1), (0,0,-1), (1,0,-1)$.

16.21. $\Omega = \mathbb{R}^3$; $A = (1,1,1)$; $2g' : (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)$;
$8g'' : (1,1,2), (-1,0,-1), (0,-1,-1), (2,1,1), (-1,-1,0), (1,2,1)$.

16.22. $\Omega = \{(x,y,z);\, x^2+y^2 > 0, y^2+z^2 > 0, z^2+x^2 > 0\}$; $A = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
$g' : (0,1,-1), (1,0,1), (-1,1,0)$;
$2g'' : (-2,-5,5), (-1,1,-2), (1,-2,1), (5,2,5), (-2,1,-1), (5,-5,-2)$.

16.23. $\Omega = \{x,y,z);\, \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z \neq \pm 1\}$; $A = (0,0,0)$;
$g' : (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0)$; $g'' : 0$.

16.24. $A = (0,0,0)$; $g' : (0,0,1), (1,0,0), (0,1,0)$;
$g'' : (0,0,0), (0,-1,0), (-1,0,0), (0,0,0), (0,0,-1), (0,0,0)$.

16.25. $A = (1,0,-2)$; $2g : (2,0,1), (0,-2,-1), (0,0,1)$;
$4g'' : (0,0,-2), (2,0,1), (0,0,-1), (-4,8,0), (2,-4,0), (0,0,0)$.

16.26. $A = (1,1,1)$; $2g' : (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,1,1)$;
$8g'' : (-3,-3,-3), (5,-3,1), (-3,1,5), (-3,-3,-3), (1,5,-3), (-3,-3,-3)$.

16.27. $A = (0,0,0)$; $2g' : (0,-1,-1), (-1,0,-1), (-1,-1,0)$;
$-8g'' : (2,3,3), (3,3,2), (3,2,3), (3,2,3), (2,3,3), (3,3,2)$.

16.28. $A = (2+\lg 2, 2+\lg 2, 2+\lg 2)$; $4g' : (-1,-1,3), (3,-1,-1), (-1,3,-1)$;
$32g'' : (7,7,-9), (7,-17,7), (-17,7,7), (-9,7,7), (7,7,-17), (7,-9,7)$.

16.29. $A = (0,0,0)$; $g' : (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;
$g'' : (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,0,0), (1,0,0), (0,0,0)$.

16.30. $A = (0,0,0)$; $2g' : (-1,-1,0), (0,-1,-1), (1,0,1)$; $g'' : 0$.

Implicitní funkce

Za jmény funkcí g, h, … (a dvojtečkou) jsou napsány derivace řádů 1, 2, … funkcí $g, h, \ldots$ v bodech $a, b, \ldots$; chybí-li u některého čísla cvičení některá z funkcí, znamená to, že neexistuje. Parciální derivace řádu 2 jsou uspořádány lexikograficky vzhledem k proměnným, podle nichž se derivuje. Hodnoty některých derivací jsou vektory; jejich složky jsou pak v okrouhlých závorkách.

16.31. $g: -1, 0, 0;\ h: -1, 0, 0$

16.32. $g: 1, 0, 0;\ h: 1, 0, 0$

16.33. $g: 0, 0, 0$

16.34. $h: 0, -6, 102$

16.35. $h: 0, 2, -24$

16.36. $g: 0, 1, 0$

16.37. $g: -1, 0, 0;\ h: -1, 0, 0$

16.38. $g: 0, 1, -\frac{9}{2}$

16.39. $h: 0, 1, -2$

16.40. $g: -\frac{1}{2}, 0, 0;\ h: -2, 0, 0$

16.41. $g: 3, -26;\ h: \frac{1}{3}, \frac{26}{27}$

16.42. $g: 1, -4;\ h: 1, 4$

16.43. $h: 0, \frac{1}{2}$

16.44. $g: -1, 4\pi^2;\ h: -1, 4\pi^2$

16.45. $g: \frac{1}{2}, -\frac{3}{8};\ h: 2, 3$

16.46. $g: (-1,-1), (-\frac{10}{7}, \frac{2}{7});\ h: (-1, 1), (-\frac{10}{7}, \frac{12}{7});\ i: (-1, 1), (\frac{2}{7}, -\frac{12}{7})$

16.47. $h: (0, 0), (0, 0)$

16.48. $g: (1, -1), (-6, 6);\ h: (1, -1), (6, 0);\ i: (-1, -1), (6, 0)$

16.49. $g: (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4});\ h: (-2, -1), (2, 0);\ i: (2, -1), (2, 0)$

16.50. $g: (-1, 1), (0, 0);\ h: (-1, -1), (0, 0);\ i: (1, -1), (0, 0)$

16.51. $h: (0, 1), (0, 0);\ i: (0, 1), (0, 0)$

16.52. $h: (0, 0), (0, 0)$

16.53. $g: (-1, 1), (2, 0);\ h: (-1, -1), (2, 2);\ i: (1, -1), (0, 2)$

16.54. $g: (1, -1), (-1, 4);\ h: (1, -1), (1, 3);\ i: (-1, -1), (4, 3)$

16.55. $g: (1, 1), (0, 0);\ h: (1, 1), (0, 0);\ i: (1, 1), (0, 0)$

16.56. $g: (1, 1, 1), (4, 0, 4);\ h: (1, 1, 1), (-4, -4, 0);\ i: (1, 1, 1), (0, 4, 4);$
$j: (1, 1, 1), (-4, 0, -4)$

16.57. $g: (0, 0, -3), (0, 0, 6);\ j: (-\frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{2}{9}, 0, 0)$

16.58. $g: (-2, 1, 2), (-8, 0, 8);\ h: (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1), (-1, -1, 0);$
$i: (1, -2, 2), (0, -8, 8);\ j: (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}), (-1, 0, -1)$

16.59. $g: (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}), (0, 0, 0);\ h: (-2, -2, 1), (0, 0, 0);$
$i: (1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (0, 0, 0);\ j: (-2, 1, -2), (0, 0, 0)$

16.60. $g: (0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}), (0, -1, -\frac{5}{4});\ i: (-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}), (-\frac{8}{27}, 0, -\frac{19}{27});$
$j: (2, 0, 3), (10, 0, -19)$

16.61. $g: (-2, 1), (6, -6, 2);\ h: (2, 1), (10, 2, -2);\ i: (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

16.62. $g:(2,-1),(43,-4,3)$; $h:(2,-1),(0,-2,3)$; $i:(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

16.63. $i:(0,0),(2,0,-4)$

16.64. $g:(-1,0),(-1,0,-\frac{1}{2})$; $i:(0,-1),(-\frac{1}{2},0,-1)$

16.65. $g:(-1,-1),(4,2,4)$; $h:(-1,-1),(4,2,4)$; $i:(-1,-1),(4,2,4)$

16.66. $g:(0,-1),(-2,-1,-\frac{3}{2})$; $h:(0,-1),(-2,1,-\frac{3}{2})$

16.67. $g:(-1,1),(0,-2,0)$; $h:(1,1),(4,2,0)$; $i:(1,-1),(-4,2,0)$

16.68. $g:(3,-2),(6,-\frac{3}{2},2)$; $h:(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}),(3,-\frac{3}{8},\frac{1}{4})$; $i:(\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(-\frac{8}{9},-\frac{5}{18},-\frac{2}{9})$

16.69. $g:(\pi^{-1},-\pi^{-1}),(0,-\pi^{-2},2\pi^{-2})$; $h:(1,-\pi),(0,-1,2\pi)$; $i:(1,\pi),(0,1,0)$

16.70. $g:(0,2),(0,1,-8)$; $h:(0,\frac{1}{2}),(0,-\frac{1}{4},1)$

Ve výsledcích cvičení 16.71–16.80 užíváme pro lepší přehlednost podobné značení jako v 16.01–16.30, tj. např. za znaky g' a g'' píšeme parciální derivace prvního a druhého řádu funkce g podle příslušných proměnných v lexikografickém pořadí.

16.71. $g':(-3,2),(-2,1)$; $5g'':(-114,78),(-36,12),(2,-14)$
$2h':(-3,1),(-1,-1)$; $20h'':(-3,39),(39,-27),(1,-13)$
$i':(-2,1),(1,-2)$; $5i'':(26,-14),(-40,40),(14,-26)$
$3j':(-2,-1),(-1,-2)$; $45j'':(-2,38),(-40,40),(-38,2)$
$2k':(-1,-1),(1,-3)$; $20k'':(13,-1),(27,-39),(-39,3)$
$l':(1,-2),(2,-3)$; $5l'':(14,-2),(-12,36),(-78,114)$

16.72. $g':(1,0),(0,1)$; $g'':0$
$i':(0,1),(1,0)$; $i'':0$
$j':(0,1),(1,0)$; $j'':0$
$l':(1,0,(0,1)$; $l'':0$

16.73. $h':(0,1),(0,-1)$; $3h'':(5,4),(-4,-5),(-1,4)$
$i':(0,1),(0,-1)$; $3i'':(-4,-2),(5,1),(-1,4)$
$l':(1,0),(1,0)$; $3l'':(2,-4),(1,1),(-4,5)$

16.74. $g':(-1,-1),(-1,-2)$; $g'':(0,0),(3,-2),(6,-4)$
$h':(-1,1),(-1,2)$; $h'':(0,0),(3,-8),(6,-16)$
$2i':(-1,-1),(-1,1)$; $2i'':(1,-4),(0,0),(-1,4)$
$j':(-1,-1),(-1,1)$; $j'':(0,0),(-3,5),(0,0)$
$k':(-2,1),(-1,1)$; $k'':(4,-10),(2,-5),(0,0)$
$l':(-2,1),(1,-1)$; $l'':(-16,10),(8,-5),(0,0)$

16.75. $4g' : (2,-3), (-4,-2)$; $16g'' : (0,9), (0,6), (16,12)$
$2h' : (1,-2), (-2,1)$; $4h'' : (1,4), (-2,-2), (4,1)$
$2i' : (-3,4), (-4,4)$; $4i'' : (9,0), (12,0), (24,-8)$
$2j' : (4,-4), (4,-3)$; $4j'' : (-8,24), (0,12), (0,9)$
$3k' : (2,-4), (-4,-2)$; $3k'' : (2,4), (0,0), (4,2)$
$4l' : (2,-3), (-4,-2)$; $16l'' : (0,9), (0,6), (16,12)$

16.76. $g' : 1,0,-4$; $g'' : 2,7,4,-6,0,24$
$4h' : -1,0,-1$; $8h'' : 3,14,1,-12,0,3$
$j' : 0,-4,-1$; $j'' : -6,-28,-7,24,4,2$

16.77. $g' : -1,2,-2$; $g'' : 0,-2,2,3,-3,3$
$2h' : -1,2,-1$; $8h'' : -5,0,-1,0,0,3$
$2i' : 1,2,1$; $8i'' : 5,0,1,0,0,-3$
$j' : 2,-2,-1$; $j'' : -5,5,2,-5,-2,0$

16.78. $g' : -1,1,0$; $2g'' : 0,0,-1,0,1,0$
$i' : 1,0,1$; $2i'' : 0,0,0,0,-1,0$
$j' : 1,0,-1$; $2j'' : 0,0,0,0,1,0$

16.79. $g' : 1,1,1$; $g'' : \pi^2,0,0,0,0,2\pi^2$
$h' : -1,-1,1$; $\pi^{-2}h'' : -3,-2,2,-2,2,-2$
$i' : -1,-1,1$; $i'' : -\pi^2,0,0,-2\pi^2,0,0$
$j' : -1,-1,1$; $\pi^{-2}j'' : -1,-1,1,-3,1,-1$

16.80. $3h' : -2,-2,0$; $27h'' : 14,20,15,-10,15,0$
$2i' : -2,-3,0$; $4i'' : -8,-10,0,-5,-5,0$
$2j' : -2,-3,0$; $4j'' : -8,-2,0,7,-5,0$

Variety

Pro množinu všech singulárních bodů užíváme symbol SB; stejně jako v kapitole 15 znamenají symboly **T**, **TR**, **TP**, **N**, **NR** a **NP** po řadě tečnu, tečnou rovinu, tečný prostor, normálu, normálovou rovinu a normálový prostor. Rovnice tvaru $a_1x+a_2y+a_3=0$, $a_1x+a_2y+a_3z+a_4=0$, $a_1x+a_2y+a_3z+a_4u+a_5=0$ nahrazujeme opět sledy příslušných koeficientů a_i; je-li nějaká množina určena několika rovnicemi, píšeme mezi příslušné sledy koeficientů znak $\wedge$.

16.81. $\mathrm{SB}=\{(0,0)\}$; $\Omega=\mathbb{R}^2-\mathrm{SB}$; **T:** $1-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-3, 7\sqrt{2}-10$; **N:** $3-2\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}-4$

16.82. $\mathrm{SB}=\{(0,0)\}$; $\Omega=\mathbb{R}^2-\mathrm{SB}$; **T:** $1, 3\sqrt{3}, 1$; **N:** $9, -\sqrt{3}, -5$

16.83. $\mathrm{SB} = \{(x,x);\ x \equiv \frac{1}{4}\pi \bmod \pi\};\ \Omega = \mathbb{R}^2 - \mathrm{SB};$ **T:** $1,-1,0;$ **N:** $3,3,-\pi$

16.84. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^2;$ **T:** $3,1,-4\pi;$ **N:** $1,-3,2\pi$

16.85. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^2;$ **T:** $1,3,1;$ **N:** $3,-1,-7$

16.86. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **T:** $2,-2,1,-1 \wedge 1,-2,-1,0;$ **N:** $8,6,-4,-11$

16.87. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **T:** $1,-2,-1,0 \wedge 2,-1,1,0;$ **N:** $1,1,-1,-3$

16.88. $\mathrm{SB} = \{(0,-1,-1)\};\ \Omega = \{(x,y,z);\ xy > z\} - \mathrm{SB};$
T: $1,2,-1,-3 \wedge 0,1,-1,0;$ **N:** $1,-1,-1,0$

16.89. $\mathrm{SB} = \{(x,y,z);\ |xyz - \frac{1}{2}| = 1\};\ \Omega = \{(x,y,z);\ |xyz - \frac{1}{2}| < 1,\ z \neq 0\};$
T: $4,1,4,-6 \wedge 1,0,-1,0;$ **N:** $1,-8,1,15$

16.90. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\};$ **T:** $1,2,3,0 \wedge 3,2,1,0;$ **N:** $1,-2,1,6$

16.91. $\mathrm{SB} = \{(0,0,0,u);\ u \in \mathbb{R}\};\ \Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB};$
T: $1,0,0,1,0 \wedge 1,0,-1,0,0 \wedge 1,1,-1,-1,0;$ **N:** $1,-1,1,-1,4$

16.92. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **T:** $0,1,1,0,0, \wedge 0,0,1,1,0 \wedge 1,0,0,1,0;$
N: $1,-1,1,-1,0$

16.93. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **T:** $1,-1,-1,-1,1 \wedge 1,-1,1,1,-1 \wedge 1,1,-1,1,-1;$
N: $1,1,1,-1,-3$

16.94. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \{(x,y,z,u);\ y > x,\ u > z\};$
T: $1,-1,-2,1,1 \wedge 2,-1,-1,1,-1 \wedge 1,1,-1,-1,0;$ **N:** $0,1,0,1,-4$

16.95. $\mathrm{SB} = \{(0,0,0,0),(\pm 1,0,0,0)\};\ \Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB};$
T: $1,1,-1,0,-1 \wedge 1,-1,1,0,-1 \wedge 1,0,-1,1,-1;$ **N:** $0,-1,-1,-1,3$

16.96. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $3\sqrt{3},4,12,-24\sqrt{2};$
N: $8\sqrt{2},-6\sqrt{6},0,-7\sqrt{3} \wedge 0,6\sqrt{2},-2\sqrt{2},-5$

16.97. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $3,1,-2,1;$ **N:** $1,-3,0,3 \wedge 0,2,1,-3$

16.98. $\mathrm{SB} = \{(0,0,0)\};\ \Omega = \mathbb{R}^3 - \mathrm{SB};$ **TR:** $1,1,3,0;$
N: $1,-1,0,-2 \wedge 0,3,-1,3$

16.99. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $2,-3,1,0;$ **N:** $3,2,0,-5 \wedge 0,1,3,-4$

16.100. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^3;$ **TR:** $1,1,1,0;$ **N:** $1,-1,0,2 \wedge 0,1,-1,-4$

16.101. $\mathrm{SB} = \{(x,y,z,u);\ (x = u = 0 \wedge |y| = |z|) \vee (y = z = 0 \wedge |x| = |u|)\};$
$\Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB};$ **TR:** $2,1,-1,-2,0 \wedge 2,-1,1,-2,0;$ **NR:** $1,0,0,1,-2 \wedge 0,1,1,0,-4$

16.102. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **TR:** $1,-1,-1,1,-4 \wedge 1,1,1,1,0;$
NR: $1,0,0,-1,0 \wedge 0,1,-1,0,0$

16.103. $\mathrm{SB} = \emptyset;\ \Omega = \mathbb{R}^4;$ **TR:** $2,1,2,1,-2 \wedge 1,2,1,2,2;$
NR: $1,0,-1,0,0 \wedge 0,1,0,-1,0$

16.104. $\mathrm{SB} = \emptyset$; $\Omega = \mathbb{R}^4$; **TR:** $1, -2, 1, 1, 1 \wedge 1, 1, 1, -2, 1$;
NR: $1, 0, -1, 0, 0 \wedge 0, 1, 1, 1, 3$

16.105. $\mathrm{SB} = \emptyset$; $\Omega = \{(x, y, z, u);\ x + y > 0, z + u > 0, x + z > 0, y + u > 0\}$;
TR: $1, 1, -1, -1, 0 \wedge 1, -1, 1, -1, 0$; **NR:** $1, 1, 1, 1, -4e \wedge 1, 0, 0, 1, -2e$

16.106. $\mathrm{SB} = \emptyset$; $\Omega = \mathbb{R}^4$; **TP:** $12, 6, 4, 3, -24$;
N: $2, -4, 0, 0, 3 \wedge 1, 0, -3, 0, 4 \wedge 2, 0, 0, -8, 15$

16.107. $\mathrm{SB} = \{(0, 0, 0, 0)\}$; $\Omega = \mathbb{R}^4 - \mathrm{SB}$; **TP:** $8, 7, 0, -11, 0$;
N: $0, 0, 1, 0, 1 \wedge 7, -8, 0, 0, 9 \wedge 11, 0, 0, 8, -27$

16.108. $\mathrm{SB} = \emptyset$; $\Omega = \mathbb{R}^4$; **TP:** $11, -10, 0, 6, -9$;
N: $0, 0, 1, 0, -2 \wedge 6, 0, 0, -11, -28 \wedge 0, 3, 0, 5, 13$

16.109. $\mathrm{SB} = \emptyset$; $\Omega = \mathbb{R}^4$; **TP:** $1, 2, -1, 3, 2$;
N: $2, -1, 0, 0, -1 \wedge 1, 0, 1, 0, -3 \wedge 0, 3, 0, -2, -5$

16.110. $\mathrm{SB} = \{(-1, -1, 1, 1)\}$; $\Omega = \{(x, y, z, u);\ x^2 + y^2 > 0, z^2 + u^2 > 0\} - \mathrm{SB}$; **TP:** $31, 33, 31, 33, 0$; **N:** $1, 0, -1, 0, -6 \wedge 0, 1, 0, -1, -8 \wedge 33, -31, 0, 0, 25$

Záměna jedné proměnné

U čísel příkladů uvádíme dvojice intervalů I, J, které bylo při řešení třeba nalézt; ($t \in I$, $x \in J$, $g(I) = J$). Index $\pm$ u $\mathbb{R}$ odpovídá témuž symbolu v zadání příkladu.

16.111 – 16.116. $\mathbb{R} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{\pm}$

16.117 – 16.118. $\mathbb{R}_{+} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{\pm}$

16.119. $\mathbb{R}_{-} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{-}$, $\mathbb{R}_{+} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{+}$

16.120 – 16.121. $\mathbb{R}_{\pm} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{+}$

16.122. $\mathbb{R}_{-} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{-}$, $\mathbb{R}_{+} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{+}$

16.123. $\mathbb{R}_{+} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}_{\pm}$

16.124. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi) \to_{\mathrm{na}} (-1, 1),\ k \in \mathbb{Z}$

16.125. $(k\pi, (k+1)\pi) \to_{\mathrm{na}} (-1, 1),\ k \in \mathbb{Z}$

16.126. $(-1, 1) \to_{\mathrm{na}} (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

16.127. $\mathbb{R}_{+} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}$

16.128. $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi) \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$

16.129. $\mathbb{R} \to_{\mathrm{na}} (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$

16.130. $\mathbb{R} \to_{\mathrm{na}} \mathbb{R}$

17. Extrémy funkcí několika proměnných

Reálná (konečná) funkce f definovaná na neprázdné množině X nabývá svého *maxima* (resp. *minima*) (v X) v bodě $a \in X$, je-li $f(x) \le f(a)$ (resp. $f(x) \ge f(a)$) pro všechna $x \in X$. Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in X$ *extrém*, má-li tam buď maximum, nebo minimum.

Některé funkce svého maxima (minima) nabývají, jiné ne; v dalším proto budeme problému *najít extrémy funkce f na množině X* rozumět takto:

1. Pokud $\max f(X)$ existuje, vypočítat je a najít všechny body z X, v nichž f tohoto maxima nabývá; v opačném případě najít $\sup f(X)$.

2. Pokud $\min f(X)$ existuje, vypočítat je a najít všechny body z X, v nichž f tohoto minima nabývá; v opačném případě najít $\inf f(X)$. $\square$

Úloha najít extrémy funkce f bude mít při této obecnější formulaci problému řešení vždy; může se ovšem stát, že $\sup f(X) = +\infty$, nebo $\inf f(X) = -\infty$. Rovnost $\sup f(X) = +\infty$ (resp. $\inf f(X) = -\infty$) je, jak víme, ekvivalentní s podmínkou, že f není v X shora (resp. zdola) omezená; funkce f pak samozřejmě maximum (resp. minimum) v X nemá. (Dodejme, že z podmínky $X \neq \emptyset$ plyne, že není ani $\sup f(X) = -\infty$, ani $\inf f(X) = +\infty$.) $\square$

Při hledání extrémů funkce hraje velmi často podstatnou roli následující věta, v níž jsou vyjmenovány některé podmínky *nutné* k tomu, aby funkce f měla v určitém bodě množiny $X \subset \mathbb{R}^p$ (kde $p \in \mathbb{N}$) extrém. Zdůrazněme však, že žádná z podmínek věty *není postačující*.

Věta 17.1. *Je-li $X \subset \mathbb{R}^p$ a má-li funkce $f : X \to \mathbb{R}$ v bodě $a \in \operatorname{int} X$ extrém, platí tato dvě tvrzení:*

1) *Všechny směrové derivace $\partial_{(v)} f(a)$, které existují, jsou rovny nule. Speciálně: Všechny parciální derivace $\partial_i f(a)$, které existují, jsou rovny nule.*

2) *Je-li f v bodě a diferencovatelná, je $Df(a) = 0$.*

Důsledek. *Má-li f v bodě $a \in X$ extrém, jsou jen tyto tři možnosti:*

α) $a \in \operatorname{int} X$ a $Df(a) = 0$;

β) $a \in \operatorname{int} X$ *a f není v bodě a diferencovatelná*;

γ) $a \in \partial X$. $\square$

Definice. Je-li $a \in \operatorname{int} X$ a $Df(a) = 0$, říkáme, že a je **stacionární bod** funkce $f : X \to \mathbb{R}$. $\square$

Je-li tedy funkce f třídy C_1 v $\operatorname{int} X$, hledáme extrémy 1) v bodech z $\operatorname{int} X$, v nichž jsou všechny parciální derivace $\partial_i f$ rovny nule, a 2) na hranici množiny X; jinde funkce f extrémních hodnot nenabývá.

Ilustrujme hledání extrémů několika příklady. V prvních třech je množina $X \subset \mathbb{R}^p$ kompaktní, tj. uzavřená a omezená; protože f je v X navíc spojitá, je existence jejího maxima i minima v X zaručena důsledkem věty 12.7.

Příklad 17.1^o. Vyšetřujme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^3 - 2x^2y + 3y^3 \quad \text{v} \quad X := \langle -1, 1\rangle^2. \tag{1}$$

Protože f je třídy C_∞ v celé rovině, najdeme nejdříve všechny její stacionární body. Snadno zjistíme, že funkce

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 9y^2 \tag{2}$$

mají jediný společný kořen, a to bod $(0,0)$. Protože f v něm nabývá hodnoty 0 a protože f je v některých bodech z X kladná, v jiných záporná ($f(\pm1,0) = \pm1$), *nemá f v bodě $(0,0)$ žádný extrém.*

Protože f v $\operatorname{int} X$ ani maxima, ani minima nenabývá, leží oba extrémy na hranici X. Vzhledem k tomu, že ∂X je sjednocením čtyř úseček, vyšetříme funkce

$$g_1(x) := f(x,-1) = x^3 + 2x^2 - 3\,, \quad g_2(x) := f(x,1) = x^3 - 2x^2 + 3\,, \tag{3}$$

$$h_1(y) := f(-1,y) = 3y^3 - 2y - 1\,, \quad h_2(y) := f(1,y) = 3y^3 - 2y + 1\,. \tag{4}$$

Derivace $3x^2 + 4x$ a $3x^2 - 4x$ funkcí (3) [1]) jsou rovny nule po řadě v bodech 0, $-\frac{4}{3}$ a v bodech 0, $\frac{4}{3}$. Protože body $\pm(\frac{4}{3},1)$ neleží v X, počítáme pouze hodnoty

$$f(-1,-1) = -2\,, \quad f(0,-1) = -3\,, \quad f(1,-1) = 0\,, \tag{5'}$$

$$f(-1,1) = 0\,, \qquad f(0,1) = 3\,, \qquad f(1,1) = 2\,. \tag{5''}$$

Derivace $h_1'(y) = h_2'(y) = 9y^2 - 2$ funkcí (4) mají kořeny $\pm c$, kde $c := \frac{1}{3}\sqrt{2}$; protože hodnoty funkce f ve vrcholech čtverce X jsou již uvedeny v ($5'$) a v ($5''$), počítáme jen

$$f(-1,-c) = \tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -0.37\,, \quad f(-1,c) = -\tfrac{4}{9}\sqrt{2} - 1 \doteq -1.63\,, \tag{6'}$$

$$f(1,-c) = 1 + \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 1.63\,, \qquad f(1,c) = 1 - \tfrac{4}{9}\sqrt{2} \doteq 0.37\,. \tag{6''}$$

Porovnáme-li hodnoty z ($5'$) – ($6''$), vidíme, že

$$M := \max f(X) = f(0,1) = 3\,, \quad m := \min f(X) = f(0,-1) = -3\,. \tag{7}$$

Pro všechny body $(x,y) \in X$, pro něž je $(0,1) \neq (x,y) \neq (0,-1)$, platí přitom ostré nerovnosti $m < f(x,y) < M$.

Příklad 17.2^o. Najděme extrémy funkce

$$f(x,y) := 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y \quad \text{v} \quad X := \{(x,y);\, x^2 + y^2 \leq 1\}; \tag{8}$$

f je opět třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2 - 3 = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -12y^2 + 9 = 0 \tag{9}$$

[1]) Funkce (3) buď skutečně derivujeme, nebo (což je zejména ve složitějších případech asi jednodušší) dosadíme do první rovnosti v (2) po řadě $y = -1$ a $y = 1$.

mají 4 řešení $\pm\frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ a $\pm\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$. Protože všechny čtyři body leží v ∂X, nemá f v $\operatorname{int} X$ žádné stacionární body, a tedy ani extrémy.

Abychom našli extrémy funkce f na jednotkové kružnici ∂X, parametrizujme ji křivkou $(\cos t, \sin t)$, $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$ a v souvislosti s tím přejděme od funkce $f(x, y)$ k funkci

$$g(t) := f(\cos t, \sin t) = 4\cos^3 t - 3\cos t - 4\sin^3 t + 9\sin t, \tag{10}$$

jejíž derivace je

$$\begin{aligned} g'(t) &= -12\cos^2 t \sin t + 3\sin t - 12\sin^2 t\cos t + 9\cos t \\ &= 3\cos^3 t\,(-4\operatorname{tg} t + \operatorname{tg} t(1 + \operatorname{tg}^2 t) - 4\operatorname{tg}^2 t + 3(1 + \operatorname{tg}^2 t)). \end{aligned} \tag{11}$$

Uvedená úprava, při níž jsme vytkli $3\cos^3 t$ a užili identitu $\cos^{-2} t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, je korektní, protože $\cos t = 0 \Rightarrow \sin t = \pm 1 \Rightarrow g'(t) \neq 0$.

Položíme-li $\operatorname{tg} t = u$, dostaneme z výrazu v závorkách za $\cos^3 t$ po úpravě polynom $u^3 - u^2 - 3u + 3$, který má kořeny 1 a $\pm\sqrt{3}$. Je-li $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t = 1 \quad &\Leftrightarrow (t = -\tfrac{3}{4}\pi) \vee (t = \tfrac{1}{4}\pi), \\ \operatorname{tg} t = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow (t = -\tfrac{1}{3}\pi) \vee (t = \tfrac{2}{3}\pi), \\ \operatorname{tg} t = \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow (t = -\tfrac{2}{3}\pi) \vee (t = \tfrac{1}{3}\pi); \end{aligned} \tag{12}$$

tato čísla t, krajní body $\pm\pi$ a příslušné hodnoty funkce g srovnejme do tabulky:

$t =$	$\pm\pi$,	$-\frac{3}{4}\pi$,	$-\frac{2}{3}\pi$,	$-\frac{1}{3}\pi$,	$\frac{1}{4}\pi$,	$\frac{1}{3}\pi$,	$\frac{2}{3}\pi$
$g(t) =$	-1,	$-3\sqrt{2}$,	$1 - 3\sqrt{3}$,	$-1 - 3\sqrt{3}$,	$3\sqrt{2}$,	$-1 + 3\sqrt{3}$,	$1 + 3\sqrt{3}$

Funkce g nabývá tedy svého maxima $M = 1 + 3\sqrt{3} \doteq 6.196$ v bodě $\alpha := \frac{2}{3}\pi$ a svého minima $m = -M$ v bodě $\beta := -\frac{1}{3}\pi$. Protože

$$\cos\alpha = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos\beta = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin\beta = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tag{13}$$

nabývá funkce f svého maxima a minima v bodech $\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$ a $\frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})$; pro ostatní body $(x, y) \in X$ platí ostré nerovnosti $m < f(x, y) < M$. $\square$

V následujícím příkladu budeme hledat extrémy polynomu 3. stupně na jednoduché podmnožině prostoru $\mathbb{R}^3$; příklad dobře ilustruje skutečnost, že *délka a většinou i obtížnost příkladu roste rychle spolu s dimenzí.*

Příklad 17.3. Hledejme extrémy funkce

$$f(x, y, z) := x^2 + xz^2 + 2y^2 + yz^2 - \tfrac{1}{2}z^2 - 2x + y \quad \text{v} \quad X := \langle -1, 1 \rangle^3, \tag{14}$$

která je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}^3$ a splňuje tam identitu

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (2x + z^2 - 2,\ 4y + z^2 + 1,\ z(2x + 2y - 1)). \tag{14'}$$

Standardní vyšetření a zápis hodnot ve všech stacionárních bodech funkce f v $\operatorname{int} K$, uvnitř šesti stěn, dvanácti hran a v osmi vrcholech krychle K není obtížné, ale značně zdlouhavé; všechny potřebné údaje však obsahuje následující stručná tabulka, pomocí níž může čtenář snadno ověřit správnost svých výpočtů.

Množina	Charakteristika	Parc. derivace	Stac. body	f
krychle	$(-1,1)^3$	viz nahoře	$\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{3},\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$	$-\frac{13}{12}$
stěna	$x=-1$	$z^2+4y+1, z(2y-3)$	$(-1,-\frac{1}{4},0)$	$\frac{23}{8}$
stěna	$x=1$	$z^2+4y+1, z(2y+1)$	$(1,-\frac{1}{4},0)$	$-\frac{9}{8}$
stěna	$y=-1$	$z^2+2x-2, z(2x-3)$	žádný	
stěna	$y=1$	$z^2+2x-2, z(2x+1)$	žádný	
stěna	$z=-1$	$2x-1, 4y+2$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)$	$-\frac{5}{4}$
stěna	$z=1$	$2x-1, 4y+2$	$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)$	$-\frac{5}{4}$
hrana	$(x,y)=(-1,-1)$	$-5z$	$(-1,-1,0)$	4
hrana	$(x,y)=(-1,1)$	$-z$	$(-1,-1,0)$	6
hrana	$(x,y)=(1,-1)$	$-z$	$(1,-1,0)$	0
hrana	$(x,y)=(1,1)$	$3z$	$(1,1,0)$	2
hrana	$(x,z)=(-1,-1)$	$4y+2$	$(-1,-\frac{1}{2},-1)$	1
hrana	$(x,z)=(-1,1)$	$4y+2$	$(-1,-\frac{1}{2},1)$	1
hrana	$(x,z)=(1,-1)$	$4y+2$	$(1,-\frac{1}{2},-1)$	-1
hrana	$(x,z)=(1,1)$	$4y+2$	$(1,-\frac{1}{2},1)$	-1
hrana	$(y,z)=(-1,-1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},-1,-1)$	$-\frac{3}{4}$
hrana	$(y,z)=(-1,1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},-1,1)$	$-\frac{3}{4}$
hrana	$(y,z)=(1,-1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},1,-1)$	$\frac{13}{4}$
hrana	$(y,z)=(1,1)$	$2x-1$	$(\frac{1}{2},1,1)$	$\frac{13}{4}$
vrchol	$(-1,-1,\pm 1)$			$\frac{3}{2}$
vrchol	$(-1,1,\pm 1)$			$\frac{11}{2}$
vrchol	$(1,-1,\pm 1)$			$-\frac{1}{2}$
vrchol	$(1,1,\pm 1)$			$\frac{7}{2}$

Z tabulky je patrné, že

$$M := \max f(X) = 6 = f(-1,1,0), \quad m := \min f(X) = -\tfrac{5}{4} = f(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\pm 1),$$

zatímco v ostatních bodech $(x,y,z) \in X$ je $m < f(x,y,z) < M$.

Poznámka 17.1. V předcházejících třech příkladech jsme viděli, jak algoritmus hledání extrémů funkce několika proměnných obecně vypadá: V případě rovinné množiny X hledáme stacionární body v $\operatorname{int} X$, hranici množiny X buď parametrizujeme vhodnou křivkou φ, nebo rozložíme na několik množin $X_1, \dots, X_n$, které lze snadno parametricky popsat, a uvnitř těchto množin hledáme opět stacionární body. Nakonec porovnáme hodnoty ve všech nalezených stacionárních bodech a v krajních bodech křivky φ resp. v hraničních bodech všech množin X_i. V případě množiny $X \subset \mathbb{R}^3$ je postup obdobný, jen kroků je více; při každém kroku klesá dimenze vyšetřovaných množin o 1.

Tento postup je jako prakticky každý algoritmus jen obecným návodem; není striktním předpisem, který je nutné za všech okolností a do všech detailů dodržovat. Inteligentní kalkulus musí sice vysvětlit podstatu podobných algoritmů, ale zároveň musí řešitele vést k tomu, aby využíval všech specifických vlastností dané situace. Vzhledem k nekonečné různotvárnosti situací nelze poskytnout obecný návod k jejich řešení; velmi často záleží na pozorovací schopnosti řešitele (získané zpravidla déletrvající početní praxí), zdali odhalí nějaký specifický rys problému, dovolující algoritmus zjednodušit a zkrátit. Ilustrujme to příkladem.

Příklad 17.4. Hledejme extrémy funkce

$$f(x, y, z) := \sin x \sin y \cos z + \sin x \cos y + \cos x \quad \text{v} \quad X := \langle 0, \pi \rangle^3, \tag{15}$$

která je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^3$. Protože její derivace

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin x \sin y \sin z \tag{16}$$

je záporná v $\operatorname{int} X$ [2]) a nulová v ∂X, je $f(x, y, z)$ pro každý bod (x, y) množiny $Y := \langle 0, \pi \rangle^2$ nerostoucí funkcí proměnné z. Podrobněji: Je-li $(x, y) \in \operatorname{int} Y$, tato funkce klesá; je-li $(x, y) \in \partial Y$, je konstantní. Pro všechna $(x, y, z) \in X$ platí proto nerovnosti

$$f(x, y, 0) \geq f(x, y, z) \geq f(x, y, \pi), \tag{17}$$

z nichž plyne, že funkce f nabývá svého maxima na dolní stěně ($z = 0$) krychle X a svého minima na stěně horní ($z = \pi$).

Hledejme proto maximum funkce

$$g(x, y) := f(x, y, 0) = \sin x (\cos y + \sin y) + \cos x \tag{18}$$

a minimum funkce

$$h(x, y) := f(x, y, \pi) = \sin x (\cos y - \sin y) + \cos x \tag{19}$$

ve čtverci Y.

---

[2]) takže f nemá v $\operatorname{int} X$ žádné stacionární body

Protože

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos x(\cos y + \sin y) - \sin x\,, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \sin x(\cos y - \sin y)\,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \cos x(\cos y - \sin y) - \sin x\,, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -\sin x(\cos y + \sin y) \tag{21}$$

a protože v $(0, \pi)$ je $\sin x > 0$, je derivace $\partial g/\partial y$ (resp. $\partial h/\partial y$) v intervalu $(0, \pi)$ rovna nule, právě když je $y = \frac{1}{4}\pi$ (resp. $y = \frac{3}{4}\pi$). Dosazením této hodnoty do $\partial g/\partial x$ (resp. do $\partial h/\partial x$) získáme výraz

$$\sqrt{2}\cos x - \sin x \quad (\text{resp. } -\sqrt{2}\cos x - \sin x)\,, \tag{22}$$

který se v $(0, \pi)$ anuluje, právě když je $x = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$ (resp. $x = \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}$). Bod $(a_1, b_1) := (\operatorname{arctg}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$ (resp. $(a_2, b_2) := (\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$) je tedy jediným stacionárním bodem funkce g (resp. h) v $\operatorname{int} Y$ a snadným výpočtem zjistíme, že

$$g(a_1, b_1) = \sqrt{3} \quad (\text{resp. } h(a_2, b_2) = -\sqrt{3})\,. \tag{23}$$

Protože je $g \equiv h$ v ∂Y, stačí tam vyšetřit např. první z těchto funkcí. Jak zjistíme dosazením, je

$$g(0, y) \equiv 1\,,\ g(\pi, y) \equiv -1\,,\ g(x, 0) = \cos x + \sin x\,,\ g(x, \pi) = \cos x - \sin x\,,$$

přičemž derivace funkce $g(x, 0)$ (resp. $g(x, \pi)$) se v intervalu $(0, \pi)$ anuluje, právě když je x rovno $\frac{1}{4}\pi$ (resp. $\frac{3}{4}\pi$). Uvážíme-li, že

$$g(0,0) = 1,\ g(\tfrac{1}{4}\pi, 0) = \sqrt{2},\ g(\pi, 0) = -1$$
$$(\text{resp. } g(0, \pi) = 1,\ g(\tfrac{3}{4}\pi, \pi) = -\sqrt{2},\ g(\pi, \pi) = -1)\,,$$

vidíme, že všechny hodnoty funkcí g a h v ∂Y leží mezi $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$. Funkce $g|Y$ nabývá proto svého maxima $\sqrt{3}$ jen v bodě (a_1, b_1) a funkce $h|Y$ svého minima $-\sqrt{3}$ jen v bodě (a_2, b_2).

Shrneme-li, vidíme, že funkce f má v X tyto vlastnosti:

$$\begin{gathered} \max f(X) = f(a_1, b_1, 0) = \sqrt{3}\,,\ \min f(X) = f(a_2, b_2, \pi) = -\sqrt{3}\,, \\ (a_1, b_1, 0) \neq (x, y, z) \neq (a_2, b_2, \pi) \Rightarrow -\sqrt{3} < f(x, y, z) < \sqrt{3}\,. \end{gathered} \tag{24}$$

Všimněme si, že jsme funkci f nemuseli vůbec vyšetřovat na čtyřech ze šesti stěn krychle X; bylo to proto, že 1) $f(x, y, z)$ je konstantní funkcí z pro každé $(x, y) \in \partial Y$ a že 2) funkce g (resp. h) nabývá svého maxima (resp. minima) v jistém vnitřním bodě množiny Y, zatímco její hodnoty v ∂Y jsou vesměs menší (resp. větší) než její hodnota v tomto bodě.[3]) Všimněme si dále, že vzhledem k identitě $g \equiv h$ v ∂Y stačilo v této množině vyšetřit jen jednu z funkcí g, h.

[3]) Kdyby však např. funkce g nabývala svého maxima v nějakém bodě $(a, b) \in \partial Y$, nabývala by funkce f své maximální hodnoty ve všech bodech úsečky s krajními $(a, b, 0)$ a (a, b, π).

Poznámka 17.2. Na nekompaktní množině $X \subset \mathbb{R}^p$ nemusí mít maximum (resp. minimum) ani omezená spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ mající stacionární body; příkladem takové funkce v $\mathbb{R}^2$ je $\operatorname{arctg}(x^3y^3)$, jejímiž stacionárními body jsou právě všechny body ležící na některé ze souřadnicových os.

Na žádný problém s extrémy nenarazíme u funkcí $f : X \to \mathbb{R}$ neomezených shora i zdola; je zřejmé, že maximum ani minimum nemají a že $\inf f(X) = -\infty$, $\sup f(X) = +\infty$.

Pro funkci omezenou zdola (resp. shora) se problém existence a nalezení minima (resp. maxima) na nekompaktní množině dá leckdy rozřešit pomocí tohoto jednoduchého tvrzení:

Věta 17.2. *Nechť množiny X a K leží v nějakém metrickém prostoru, přičemž K nechť je neprázdná kompaktní množina splňující podmínku $\operatorname{int} K \subset X$. Funkce $f : (X \cup K) \to \mathbb{R}$ nechť je spojitá v K a nechť existuje bod $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že platí implikace*

$$x \in \partial K \cup (X - K) \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) < f(x_0)). \tag{25}$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$. □

Protože při aplikaci právě vyslovené věty je důležité dobře rozumět jejímu mechanismu, připojíme krátký důkaz, a to pro funkci omezenou zdola; pro funkci omezenou shora je argumentace obdobná:

Minimum funkce $f|K$ existuje podle důsledku věty 12.7; označíme-li je A, je zřejmě $A \le f(x_0)$. Podle (25) nenabývá f hodnoty A nikde v $\partial K \cup (X - K)$; protože $X \cup K = \operatorname{int} K \cup \partial K \cup (X - K)$, plyne z toho, že všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = A$, leží v $\operatorname{int} K$. Z inkluze $\operatorname{int} K \subset X$ ihned plyne, že A je minimem funkce f v X. □

V dalším budeme hledat extrémy jen v případech, kdy X leží v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$. Jak víme, funkce $f : X \to \mathbb{R}$ může nabýt svého minima a maxima v X jen v některém stacionárním bodě ležícím v $\operatorname{int} X$, nebo v některém bodě z $\operatorname{int} X$, v němž f není diferencovatelná, nebo v některém bodě z ∂X. V konkrétních případech zpravidla najdeme v $\operatorname{int} X$ všechny stacionární body funkce f a všechny body, v nichž f není diferencovatelná, a vypočteme hodnoty ve všech těchto bodech; v závislosti na tom pak sestrojíme množinu K splňující předpoklady V. 17.2.

Příklad 17.5°. Vyšetřme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^3 - 3xy + y^3 \quad \text{v} \quad X := \langle 0, +\infty)^2 . \tag{26}$$

Tato funkce je třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$; protože není v X omezená shora, je $\sup f(X) = +\infty$, a zbývá zabývat se jejím minimem.

Rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2 = 0 \tag{27}$$

mají – jak snadno zjistíme – právě dva společné kořeny, a to body $(0,0)$ a $(1,1)$, ale jen druhý z nich leží v $\operatorname{int} X$. Protože $f(1,1) = -1$, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ tak, aby bod $(1,1)$ ležel v $\operatorname{int} K$ a aby f byla např. nezáporná všude v $\partial K \cup (X - K)$; tím dokážeme, že jediným bodem, v němž má funkce $f|X$ minimum, je bod $(1,1)$.

Protože výrazy x^3 a y^3 jsou všude v X nezáporné a v $\operatorname{int} X$ dokonce kladné, je třeba nějak odhadnout vliv nekladného (a v $\operatorname{int} X$ záporného) výrazu $-3xy$. Zřejmě však platí implikace

$$x \geq 3 \Rightarrow f(x,y) \geq x^3 - 3xy \geq 3x(3-y) \geq 0\,, \text{ je-li } y \leq 3\,, \tag{28}$$

a ze symetrie plyne, že

$$f(x,y) \geq 0\,, \text{ je-li } y \geq 3,\ x \leq 3\,; \tag{29}$$

kromě toho platí implikace

$$x \geq 3,\ y \geq 3 \Rightarrow f(x,y) \geq 3(x^2 - xy + y^2) = 3((x-y)^2 + xy) \geq 0\,. \tag{30}$$

Množina $K := \langle 0,3\rangle^2$ má zřejmě všechny žádané vlastnosti, protože každý bod $x \in \partial K \cup (X - K)$ leží buď na některé souřadnicové ose, nebo splňuje některou z podmínek $(x \geq 3) \wedge (y \leq 3)$, $(x \leq 3) \wedge (y \geq 3)$, $(x \geq 3) \wedge (y \geq 3)$; ve všech těchto případech je $f(x,y) \geq 0 > \min f(K) = f(1,1) = -1$.

Příklad 17.6$^{\mathbf{o}}$. Hledejme extrémy funkce

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \quad \text{v} \quad X := \mathbb{R}_+^2\,. \tag{31}$$

Protože $x^2 + xy + y^2 = 0$ jen pro $(x,y) = (0,0)$, je funkce f třídy C_∞ v množině $\Omega := \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$; protože f je v X nezáporná a neomezená shora, budeme se zabývat jen jejím minimem.

Stacionární body funkce f najdeme řešením rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y - \frac{2x+y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x + 2y - \frac{x+2y}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Vynásobíme-li první z rovnic výrazem $(x + 2y)$, druhou výrazem $-(2x + y)$ a sečteme-li výsledky, získáme rovnici $4(x^2 - y^2) = 0$ jako nutnou (ale samozřejmě nikoli postačující) podmínku, aby bod (x,y) byl stacionární. Musí tedy být $y = \pm x$; protože však žádné body tvaru $(x,-x)$ v X neleží, musí být dokonce $y = x$. Dosadíme-li to do (32) a vynásobíme-li výsledek výrazem $3x^3$, získáme rovnici $3x^4 = 1$, která má v $\mathbb{R}_+$ jediný kořen, a to $a := 3^{-1/4} \doteq 0.7598$; jak snadno zjistíme, je $f(a,a) = 2\sqrt{3} \doteq 1.1547$.

Sestrojme kompaktní množinu K tak, že $(a,a) \in \operatorname{int} K \subset X$ a že

$$(33) \qquad (x,y) \in \partial K \cup (X - K) \;\Rightarrow\; f(x,y) \geq 2\,;$$

tím bude podle V.17.2 dokázáno, že existuje $\min f(X)$ a rovná se $f(a,a)$.

Protože nerovnost $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ platí pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ a protože zlomek v (31) je kladný pro všechna $(x,y) \neq (0,0)$, je

$$(34_1) \qquad f(x,y) > x^2 - xy + y^2 \geq \tfrac{1}{2}(x^2+y^2) \geq 2\,, \text{ je-li } x^2+y^2 \geq 4\,.$$

Protože $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ a $0 \leq x^2 + xy + y^2 \leq 2(x^2+y^2)$ všude v $\mathbb{R}^2$, je

$$(34_2) \qquad f(x,y) \geq \frac{1}{x^2+xy+y^2} \geq \frac{1}{2(x^2+y^2)} \geq 2\,, \text{ je-li } 0 < x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\,.$$

Je-li $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$, je

$$(35) \qquad g(x) := f(x,0) = x^2 + \frac{1}{x^2} \;\text{ a }\; h(y) := f(0,y) = y^2 + \frac{1}{y^2}\,;$$

protože $g(0+) = g(+\infty-) = +\infty$ a protože $g'(x) = 2(x - x^{-3}) \neq 0$ v $\mathbb{R}_+ - \{1\}$, nabývá funkce $g|\mathbb{R}_+$ podle V.8.2 v bodě 1 svého minima, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$ je $g(x) \geq g(1) = 2$. Podobně pro funkci h.

Položíme-li tedy

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\; x \geq 0,\, y \geq 0,\, \tfrac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

(tj. je-li K průnik uzavřeného mezikruží $\overline{U((0,0),2)} - U((0,0),\frac{1}{2})$ s uzavřeným prvním kvadrantem), je podmínka (33) splněna. [4])

Příklad 17.7. Hledejme extrémy funkce

$$(36) \qquad f(x,y,z) := (x^3+y^3+z^3)\,e^{-(x^2+y^2+z^2)} \;\text{ v }\; X := \mathbb{R}^3\,.$$

Označme

$$(37) \qquad r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad s := x^3+y^3+z^3$$

a uvažme, že pro každé $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ je $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, $|z| \leq r$, takže

$$|f(x,y,z)| \leq g(r) := 3r^3 \exp(-r^2)\,.$$

Protože funkce g je omezená v $\mathbb{R}$, je funkce f omezená v $\mathbb{R}^3$, a budeme tedy řešit problém obou extrémů této funkce.

[4]) Všimněme si, že nyní *není* $K \subset X$ (na rozdíl od příkladu 17.5), i když slabší podmínka $\operatorname{int} K \subset X$ z věty 17.2 samozřejmě splněna je.

Násobíme-li parciální derivace funkce (36) podle x, y, z nenulovým faktorem $\exp r^2$, získáme funkce

$$f_x(x,y,z) := x\,(3x-2s),\; f_y(x,y,z) := y\,(3y-2s),\; f_z(x,y,z) := z\,(3z-2s)\,, \tag{38}$$

jejichž společné kořeny jsou identické se stacionárními body funkce f. Při hledání těchto kořenů využijeme symetrii $f(x,y,z)$ v proměnných x, y, z.

1) Je zřejmé, že bod $(0,0,0)$ je kořen funkcí (38) a že $f(0,0,0) = 0$.

2) Protože $f_y(x,0,0) = f_z(x,0,0) = 0$ a protože rovnice $f_x(x,0,0) = 3x - 2x^3 = 0$ má kořeny 0 a $\pm u$, kde $u := \sqrt{3/2}$, mají rovnice (38) kromě bodu (0,0,0) řešení $(\pm u, 0, 0)$. Ze symetrie plyne, že stacionárními body funkce f jsou i body

$$(\pm u, 0, 0),\; (0, \pm u, 0),\; (0, 0, \pm u), \tag{39}$$

v nichž f nabývá hodnot

$$\pm\, U := \pm\Big(\frac{3}{2e}\Big)^{3/2} \doteq \pm 0.41\,. \tag{39$'$}$$

3) Protože $f_z(x,y,0) = 0$ pro všechna x, y, řešme za předpokladu, že $x \neq 0 \neq y$, rovnice $f_x(x,y,0) = 0$, $f_y(x,y,0) = 0$, tj. rovnice $x\,(3x-2s) = 0$, $y\,(3y-2s) = 0$. Z nich plyne, že $y = x$; dosadíme-li to do první z rovnic (spolu se $z = 0$), získáme rovnici $x\,(4x^2 - 3) = 0$ s nenulovým řešením $\pm v$, kde $v := \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Z toho a ze symetrie rovnic (38) plyne, že dalšími stacionárními body jsou

$$(\pm v, \pm v, 0),\; (\pm v, 0, \pm v),\; (0, \pm v, \pm v)\,; \tag{40}$$

funkce f v nich nabývá hodnot

$$\pm\, V := \pm\frac{1}{4}\Big(\frac{3}{e}\Big)^{3/2} \doteq \pm 0.29\,. \tag{40$'$}$$

4) Zbývá najít kořeny funkcí (38) za předpokladu, že $xyz \neq 0$. Pak je zřejmě $x = y = z$, a dosadíme-li to do rovnice $f_x(x,y,z) = 0$, získáme rovnici $3x\,(x^2 - 2) = 0$ s nenulovým řešením $\pm w$, kde $w := 1/\sqrt{2}$. Seznam stacionárních bodů uzavírají proto body

$$(\pm w, \pm w, \pm w)\,, \tag{41}$$

v nichž f nabývá hodnot

$$\pm\, W := \pm\frac{3}{(2e)^{3/2}} \doteq \pm 0.24\,. \tag{41$'$}$$

Maximem a minimem hodnot funkce f v nalezených patnácti stacionárních bodech jsou čísla

$$\pm\, U = f(\pm u, 0, 0) = f(0, \pm u, 0) = f(0, 0, \pm u) = \pm\Big(\frac{3}{2e}\Big)^{3/2} \doteq \pm 0.409916\,; \tag{42}$$

abychom dokázali, že tato čísla jsou maximem a minimem množiny $f(X)$ (a že pro všechna (x, y, z) různá od bodů (39) je $|f(x, y, z)| < U$), stačí najít kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^3$, která obsahuje všech 15 stacionárních bodů uvnitř, přičemž

$$(x, y, z) \in \partial K \cup (\mathbb{R}^3 - K) \Rightarrow |f(x, y, z)| < U . \tag{43}$$

Funkce $g(r)$ je kladná v $\mathbb{R}_+$ a má derivaci $g'(r) = 3r^2(3-2r^2)\exp(-r^2)$ zápornou všude v intervalu $(\sqrt{3/2}, +\infty)$, takže tam klesá. Z nerovností $|f(x, y, z)| \leq g(r)$, $e^3 > 20$ plyne, že

$$g(3) = \frac{3^4}{e^9} < \frac{100}{20^3} = \frac{1}{80} = 0.0125 < U ;$$

za K tedy stačí zvolit uzavřenou kouli $\overline{U((0, 0, 0), 3)}$.

Příklad 17.8. Funkce f třídy C_∞ definovaná rovností

$$f(x, y) := 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3} \quad \text{v} \quad X := \mathbb{R}^2_+ \tag{44}$$

je nezáporná a shora neomezená. Jediným společným řešením rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{8y}{x^3} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2} - \frac{81}{y^4} = 0 \tag{45}$$

v X je bod $(x, y) = (2, 3)$, přičemž $f(2, 3) = 10$. Tvrdíme, že *f má v bodě $(2, 3)$ minimum*.

Abychom to dokázali, stačí najít kompaktní množinu $K \subset X$ obsahující bod $(2, 3)$ uvnitř a splňující podmínku

$$(x, y) \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x, y) > 10 . \tag{46}$$

Uvažme především, že všechny tři sčítance na pravé straně (44) jsou v X kladné, takže $f(x, y)$ je větší než kterýkoli z nich. Uvažme konkrétněji, že

1) $f(x, y) > 3x \geq 10$, je-li $x \geq 4$; [5])

2) $0 < x \leq 4 \Rightarrow f(x, y) > 4y/x^2 \geq \frac{1}{4}y \geq 10$ pro všechna $y \geq 40$;

3) $f(x, y) > 27/y^3 \geq 10$, je-li $y^3 \leq 2.7$, tedy jistě pro všechna $y \in (0, 1\rangle$;

4) $y \geq 1 \Rightarrow f(x, y) > 4y/x^2 \geq 4/x^2 \geq 10$, je-li $x^2 < \frac{2}{5}$, tedy jistě pro $x \in (0, \frac{3}{5}\rangle$ (protože $\left(\frac{3}{5}\right)^2 < \frac{2}{5}$).

Z 1)−4) je patrné, že stačí položit

$$K := \langle \tfrac{3}{5}, 4 \rangle \times \langle 1, 40 \rangle . \tag{47}$$

* * *

[5]) Místo „4“ bychom samozřejmě mohli napsat „10/3“, ale pro jednoduchost dalších výpočtů i zápisu se vyhýbáme zbytečným zlomkům. Je zřejmé, že při hledání množiny K máme značnou volnost, a to nejen v tomto konkrétním případě. Je-li (v obecném případě) $a \in X$ jediný bod, pro nějž je $A := \min f(X) = f(a)$, splňuje *každá* kompaktní množina $K \subset X$, obsahující bod a uvnitř, podmínku $x \in X - \operatorname{int} K \Rightarrow f(x) > A$. Hlavním kritériem pro výběr množiny K je proto *jednoduchost ověření této podmínky za situace, kdy existenci minima teprve dokazujeme*.

Mnohdy potřebujeme najít extrémy funkce na množině, která má dimenzi menší, než je dimenze eukleidovského prostoru, v němž pracujeme – např. na elipse v rovině nebo na závitnici v prostoru; omezíme se přitom na extrémy na hladinách (obecně vektorových) funkcí, speciálně tedy na varietách. Pro tyto extrémy se historicky ujal název **vázané extrémy** [6]) a při jejich hledání je mnohdy užitečná tato věta:

Věta 17.3. *Nechť jsou splněny tyto předpoklady: $p < q$ jsou přirozená čísla, $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ je otevřená množina, funkce*

$$F = (F_1, \ldots, F_p) : \Omega \to \mathbb{R}^p \quad \text{a} \quad f : \Omega \to \mathbb{R} \tag{48}$$

jsou třídy C_1 *v* Ω, *množina*

$$V := \{x \in \Omega;\ F(x) = 0\} \tag{49}$$

je neprázdná, hodnost matice $F'(x)$ je rovna p v každém bodě $x \in V$.

Pak pro každý bod $x \in V$, v němž je $f(x)$ rovno buď $\max f(V)$, *nebo* $\min f(V)$, *existují čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tak, že*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \textit{pro} \quad i = 1, \ldots, q. \tag{50}$$

Poznámka 17.3. Jak jsme již řekli, nehledáme nyní extrémy funkce f na celé množině Ω, ale jen na její („méněrozměrné“) části V, charakterizované vektorovou rovnicí $F(x) = 0$ neboli skalárními rovnicemi

$$F_1(x_1, \ldots, x_q) = 0, \ldots, F_p(x_1, \ldots, x_q) = 0, \tag{51}$$

kterým se říká **vazby** – odtud termín „vázaný extrém“. Podle definice je množina V z právě vyslovené věty zřejmě $(q-p)$-rozměrnou varietou v $\mathbb{R}^q$.

Existence maxima a minima dané funkce na dané varietě není obecně zaručena, nejedná-li se o *kompaktní* varietu (a spojitou funkci). Ve větě 17.3 se na „složitost“ variety V neklade žádná podmínka, zatímco vazby, se kterými jsme se setkali v rozřešených příkladech této kapitoly, byly velmi jednoduché. Tak např. horní strana čtverce X v Př. 17.1 byla charakterizována podmínkou $y = 1$, a stačilo tedy do $f(x, y)$ dosadit, abychom získali funkci již jen jedné proměnné. V Př. 17.2 jsme kružnici parametrizovali – opět proto, abychom získali funkci jedné proměnné.

Při hledání extrémů na jednoduchých hladinách lze podobně postupovat i v případech vícedimenzionálních: Máme-li hledat extrémy funkce $f(x, y, z)$ na jednotkové

[6]) S jednoduchými vázanými extrémy jsme se ve skutečnosti již několikrát setkali, a to v případech, kdy jsme při hledání extrémů danou funkci vyšetřovali i na hranici dané množiny. Např. v Př. 17.2 jsme vyšetřovali funkci f dvou proměnných na jednotkové kružnici, tedy na jednorozměrné varietě. Podobné problémy se často řeší např. v dynamice hmotného bodu, je-li jeho pohyb vázán např. na nějakou křivku nebo plochu.

sféře v $\mathbb{R}^3$, můžeme z rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vypočítat např. z a hledat extrémy funkcí

$$g_\pm(x,y) := f(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}\,) \quad \text{v kruhu} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2 \le 1\}\,;$$

lze též přejít ke sférickým souřadnicím, tedy k funkci

$$h(\varphi,\vartheta) := f(\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad \text{v intervalu} \quad \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle\,.$$

Jindy se hodí např. cylindrické nebo jiné křivočaré souřadnice; vždy jde o to, abychom transformací souřadnic získali z f co nejjednodušší funkci.

Právě uvedené poznámky měly naznačit, že při hledání extrémů funkcí na varietách nejsme odkázáni jen na V. 17.3 a že je vhodné pokusit se předem odhadnout, která metoda povede v daném případě k cíli snadněji; protože záleží na specifických vlastnostech příslušné funkce a variety, obecná konkrétnější rada neexistuje. $\square$

Věta 17.3 podává jistou *nutnou* podmínku, kterou musí splňovat každý bod $x \in V$, v němž má $f\,|\,V$ maximum nebo minimum; najdeme-li tedy všechna společná řešení $x = (x_1, \ldots, x_q)$ rovnic (50) – (51), budou mezi nalezenými řešeními všechny body, v nichž má $f\,|\,V$ extrém. [7]) Čísla λ_i, která se v této souvislosti nazývají **Lagrangeovy neurčité koeficienty**, mají jen pomocný charakter. Není nutné je počítat (i když se tomu někdy nevyhneme); spíše se snažíme co nejrychleji je eliminovat. Protože soustava $(p+q)$ rovnic (50) – (51) je obecně nelineární a rovnice nemusí být dokonce ani algebraické, může být její řešení značně netriviální, ne-li nepřekonatelný problém. $\square$

Uveďme dva příklady vázaných extrémů:

Příklad 17.9. Hledejme extrémy funkce $f(x,y) := x^2 + y^2$ na nulové hladině V funkce

$$F(x,y) := 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4\,. \tag{52}$$

Geometrický smysl úlohy: Vhodným otočením souřadnicových os bychom se mohli zbavit „smíšeného členu“ $6xy$, což by ihned prozradilo, že $V = F_{-1}(0)$ je elipsa o středu v počátku. Vzhledem k tomu, že $f(x,y)$ je čtverec vzdálenosti bodu (x,y) od počátku, máme zjistit (bez otáčení os), které její body jsou nejméně a nejvíce vzdálené od počátku; tím zároveň určíme délku a polohu jejích poloos. [8])

Ověření předpokladů věty 17.3 nečiní potíže: Protože např. $F(2/\sqrt{5}\,,0) = 0$, je $V \neq \emptyset$; funkce f a F jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a V je varieta, protože obě derivace

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 10x - 6y\,, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -6x + 10y \tag{53}$$

se anulují jen v počátku, který ve V zřejmě neleží.

[7]) Ještě jednou však zdůrazněme, že věta 17.3 existenci extrémů nezaručuje.

[8]) Náš další postup bude samozřejmě na těchto geometrických představách nezávislý.

Jakožto vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení F je množina V uzavřená. Z rovnosti $F(x,y)=0$ plyne, že $5(x^2+y^2)=4+6xy\le 4+3(x^2+y^2)$, takže nerovnost $2(x^2+y^2)\le 4$ platí pro všechny body $(x,y)\in V$; to dokazuje, že varieta V je omezená. V je tedy kompaktní a existence minima i maxima množiny $f(V)$ je zaručena.

Podle V. 17.3 máme najít všechny body $(x,y)\in V$, k nimž existuje $\lambda\in\mathbb{R}$ tak, že

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\lambda\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0\,; \tag{54}$$

tyto rovnice lze po dosazení $\partial f/\partial x=2x$, $\partial f/\partial y=2y$ upravit na tvar

$$(5\lambda+1)x=3\lambda y,\quad (5\lambda+1)y=3\lambda x\,. \tag{55}$$

Protože nemůže být $\lambda=0=5\lambda+1$, je z těchto rovnic patrné, že 1) $xy=0\Rightarrow x=y=0$; 2) $(\lambda=0)\vee(5\lambda+1=0)\Rightarrow x=y=0$; protože bod $(0,0)$ ve V neleží, plyne z toho, že všechna čtyři čísla λ, $5\lambda+1$, x, y jsou nenulová.

Dělením první rovnice v (55) druhou z nich získáme rovnost $x/y=y/x$ neboli $y^2=x^2$ neboli $y=\pm x$. Dosadíme-li $y=x$ (resp. $y=-x$) do rovnice $F(x,y)=0$, dostaneme rovnici $4x^2=4$ (resp. $16x^2=4$), která má řešení $x=\pm1$ (resp. $x=\pm\frac12$). Všechny body, v nichž funkce $f\,|\,V$ nabývá minima nebo maxima, leží tedy v množině $\{(1,1),\ (-1,-1),\ (\frac12,-\frac12),\ (-\frac12,\frac12)\}$; Lagrangeův koeficient λ nebylo třeba počítat. [9]) Protože $f(1,1)=f(-1,-1)=2$ a $f(\frac12,-\frac12)=f(-\frac12,\frac12)=\frac12$, nabývá $f\,|\,V$ v prvních dvou bodech svého maxima, v druhých dvou svého minima.

Geometricky to znamená, že elipsa $F(x,y)=0$ (o středu v počátku) má poloosy délek $\sqrt2$ a $1/\sqrt2$, přičemž její hlavní osa (procházející body $(1,1)$ a $(-1,-1)$) svírá s osou x úhel $\frac14\pi$.

Příklad 17.10. Najděme extrémy funkce $f(x,y,z):=xyz$ na nulové hladině W vektorové funkce $F=(F_1,F_2)$, kde

$$F_1(x,y,z):=x^2+y^2+z^2-4,\ \ F_2(x,y,z):=(x-1)^2+y^2-1\,. \tag{56}$$

Nulová hladina W funkce F je průnik sféry o středu $(0,0,0)$ a poloměru 2 s válcovou plochou, jejíž osa je rovnoběžná s osou z a jejíž průnik s rovinou xy je kružnice o středu $(1,0)$ a poloměru 1. Jak již víme z Př. 16.8, je tato hladina známa pod názvem *Vivianiho křivka*; je kompaktní, protože je průnikem kompaktní množiny $(F_1)_{-1}(0)$ (sféry) s uzavřenou množinou $(F_2)_{-1}(0)$ (válcem).

Zkontrolujme, zdali platí předpoklady věty 17.3: Obě funkce f a F jsou třídy C_∞, v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x\,,\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y\,,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=2z\,, \tag{57_1}$$

[9]) Pro čtenáře, kteří jsou občas – třeba ze zvědavosti – ochotni vyslechnout nebo udělat i něco zbytečného: V prvním případě je $\lambda=-1/2$, ve druhém $\lambda=-1/8$.

$$(57_2) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - 2\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0\,;$$

v důsledku toho je

$$(58) \qquad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = 4y\,, \quad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, z)} = 4z\,(1 - x)\,, \quad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = -4yz\,.$$

Snadno zjistíme, že jediným bodem $(x, y, z) \in W$, v němž jsou všechny tyto jakobiány rovny nule, je bod $D := (2, 0, 0)$. Tento bod je tedy jediným singulárním bodem hladiny W; hladina W je kompaktní, nekompaktní množina $V := W - \{D\}$ je (jednorozměrná) varieta.[10])

Extrémy funkce f ve V najdeme užitím V. 17.3 ; navíc je však třeba zjistit, zdali f nemá extrém v singulárním bodě hladiny W, tj. vzít v úvahu, že $f(2, 0, 0) = 0$. Protože

$$(59) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = yz\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy\,,$$

budou mít rovnice (50) a (51) tvar

$$(60') \qquad yz + 2x\lambda_1 + 2(x - 1)\lambda_2 = 0\,,\ xz + 2y\lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0\,,\ xy + 2z\lambda_1 = 0\,,$$

$$(60'') \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ (x - 1)^2 + y^2 = 1\,.$$

Eliminací parametrů λ_1, λ_2 z rovnic $(60')$ získáme rovnici $z^2(x - x^2 + y^2) = xy^2$, která má spolu s rovnicemi $(60'')$ těchto sedm řešení (x, y, z):

$$(61) \quad (2, 0, 0)\,,\ (0, 0, \pm 2)\,,\ (\tfrac{6}{5}\,, \pm a, \pm b)\,,\ (\tfrac{6}{5}\,, \pm a, \mp b)\,,\ \text{kde } a := \tfrac{2}{5}\sqrt{6}\,,\ b := 2\sqrt{\tfrac{2}{5}}\,.$$

Hodnoty funkce f v bodech (61) jsou po řadě

$$(62) \qquad 0\,,\ 0\,,\ A\,,\ -A\,,\ \text{kde } A := \frac{48}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} \doteq 1.48723\,.$$

Z toho je patrné, že

$$(63) \qquad \begin{aligned} \min f(W) &= f(\tfrac{6}{5}\,, -a, b) = f(\tfrac{6}{5}\,, a, -b) = -A\,, \\ \max f(W) &= f(\tfrac{6}{5}\,, a, b) \quad\ = f(\tfrac{6}{5}\,, -a, -b) = A\,; \end{aligned}$$

ve všech ostatních bodech $(x, y, z) \in W$ je $-A < f(x, y, z) < A$.

---

[10]) Vivianiho křivka je homeomorfní s lemniskatou a lze ji napsat jako sjednocení dvou oblouků $L_\pm$ s popisem $(x, y) = \frac{1}{2}\left(4 - z^2, \pm z\sqrt{4 - z^2}\right)$, $z \in \langle -2, 2\rangle$. Oblouky $L_\pm$, jejichž krajními body jsou oba póly $(0, 0, \pm 2)$ sféry $(F_1)_{-1}(0)$, se protínají v bodě $D = (2, 0, 0)$; uvedené popisy jsme získali řešením vektorové rovnice $F(x, y, z) = (0, 0)$ vzhledem k (x, y).

Cvičení

A. Najděte extrémy funkce f v intervalu X.

	$f(x,y) =$	$X =$
17.01°.	$x - y - x^2y^3$	$\langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle$
17.02°.	$x^3 - xy + 2y - y^2$	$\langle -1,0\rangle \times \langle 1,2\rangle$
17.03°.	$x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.04°.	$xy(1 - x^2y^2)$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.05°.	$xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$	$\langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$
17.06°.	$x^2 - 3xy - 2y^3$	$\langle -2,2\rangle^2$
17.07°.	$x^3 - 3x^2 + 6xy - 3x + 4y$	$\langle -1,0\rangle^2$
17.08°.	$6x^3 + 2xy + 3x^2y + y^2$	$\langle 0,1\rangle \times \langle -2,0\rangle$
17.09°.	$x^4 - 4xy + y^4$	$\langle -2,1\rangle^2$
17.10°.	$\dfrac{x^2 - y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$	$\langle -2,2\rangle^2$
17.11°.	$\dfrac{x^2 - 5xy + y^2}{x^2 + y^2 - 4}$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.12°.	$\dfrac{x^2 + y^2 + 1}{x^4 + y^4 + 1}$	$\langle -1,1\rangle^2$
17.13°.	$1 - xy\sqrt{x^2 + y^2}$	$\langle -1,1\rangle \times \langle -2,2\rangle$
17.14°.	$x\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2}\,\right)$	$\langle 1,2\rangle \times \langle -1,1\rangle$
17.15°.	$x - y + \sin x \cos y$	$\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle^2$
17.16°.	$\sin x \sin y \sin(x+y)$	$\langle 0,\pi\rangle^2$
17.17°.	$\sin x \sin y \sin(x-y)$	$\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle^2$
17.18°.	$\sin x \cos y + \cos x \sin^2 y$	$\langle 0,\pi\rangle^2$
17.19°.	$\sin x + \cos y + \cos(x-y)$	$\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle^2$
17.20°.	$\cos^3 x \cos y + \sin x \sin^3 y$	$\langle -\pi, 0\rangle^2$
17.21°.	$\sin^2 x + \cos x \sin y - \cos^2 y$	$\langle -\pi,\pi\rangle^2$
17.22°.	$\sin^2(x-y)\cos^2(x+y)$	$\langle 0,\pi\rangle^2$

17.23°.	$\operatorname{arctg} xy - \lg(1 + x^2y^2)$	$\langle 1, 5\rangle \times \langle -2, 2\rangle$
17.24°.	$\lg(1 + x^2y) - \lg(1 + xy^2)$	$\langle 0, 2\rangle^2$
17.25°.	$x^2 - y^2 + \lg(1 + x^2 + y^2)$	$\langle -1, 1\rangle^2$
17.26°.	$(1 - x^2y^2)\, e^{-xy}$	$\langle -1, 1\rangle^2$
17.27°.	$(x^2 - y)\, e^{-xy^2}$	$\langle -1, 2\rangle \times \langle -1, 1\rangle$
17.28°.	$xy^2\, e^{-x-y}$	$\langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$
17.29°.	$e^x \sinh y - e^y \cosh x$	$\langle -1, 1\rangle^2$
17.30°.	$e^x \sin y - e^y \sin x$	$\langle -\pi, \pi\rangle^2$
17.31°.	$\arcsin \dfrac{3xy}{1 + x^2 + y^2}$	$\langle -1, 1\rangle^2$
17.32°.	$\operatorname{arccotg}(xy - x^2 - y^2)$	$\langle -1, 1\rangle^2$

B. Najděte extrémy funkce f v trojúhelníku X s danými vrcholy.

	$f(x, y) =$	vrcholy
17.33.	$3xy - y^2 - 3x + 2y$	$(3, 0), (3, 3), (0, 3)$
17.34.	$x^2 + 3xy - y^2 - 4x$	$(0, 0), (0, 3), (3, 0)$
17.35.	$x^3 - y^3 - 2x + 3y$	$(0, 0), (1, 0), (0, 2)$
17.36.	$x^2 - 3xy + y^2 - 4x - 2y$	$(-1, -1), (3, 0), (0, 3)$
17.37.	$x^2 + 2xy - 2y^2 - 3x + 5y$	$(-2, 0), (2, 0), (2, 2)$
17.38.	$x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$	$(-1, 0), (1, -1), (1, 1)$
17.39.	$xy(x - y - 2)$	$(-1, 1), (0, -2), (2, 0)$
17.40.	$\dfrac{2xy + 1}{3x - 2y - 1}$	$(-1, -1), (0, 0), (-1, 1)$
17.41.	$\dfrac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$	$(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

C. Najděte extrémy funkce f ve čtyřúhelníku X s danými vrcholy.

	$f(x, y) =$	vrcholy
17.42.	$x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + y$	$(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, 1)$
17.43.	$x^3 - y^3 - 3x + 6y$	$(-3, 0), (-1, -2), (1, 0), (-1, 2)$

17.44. $xy(x-y-1)$	$(-1,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$
17.45. $(x^2-y^2)(2x+2y-1)$	$(-1,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$
17.46. $xy(x+y-2)^2$	$(-2,0),(2,0),(1,1),(-1,1)$
17.47. $x^3-2xy+y^2-x+y$	$(-2,0),(0,-1),(1,0),(0,1)$
17.48. $x^3+xy-y^2-2x+3y$	$(-2,0),(0,0),(1,2),(0,2)$
17.49. $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$	$(-1,1),(2,0),(0,0),(0,2)$
17.50. $(x^2-y^2)e^{y^2-x^2}$	$(0,0),(2,-2),(4,0),(2,2)$

D. Najděte extrémy funkce f na množině X dané nerovností nebo nerovnostmi.

$f(x,y) =$	(x,y) splňuje nerovnost(i)
17.51. $(x^2-y^2)e^{y^2-x^2}$	$x^2+y^2\le 1$
17.52. $x^2-\sqrt{3}\,xy+2y^2$	$x^2+y^2\le 1$
17.53. $\dfrac{xy}{x^2+y^2-9}$	$x^2+y^2\le 4$
17.54. $x^2+2\sqrt{3}\,xy-y^2$	$x^2+y^2\le 1$
17.55. $(x^2+y^2+1)(x^2-y^2-1)$	$x^2+y^2\le 1$
17.56. $(x^2+y^2-4)(x^2-2y^2-2)$	$x^2+y^2\le 4$
17.57. $(3x^2+3y^2-1)(x-y^2+1)$	$x^2+y^2\le 1$
17.58. $2x^2-xy+2y^2-x$	$x^2+y^2\le 1$
17.59. $(x^2+4y^2-4)(x^2-2xy+4y^2)$	$x^2+4y^2\le 4$
17.60. $\lg(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$	$x^2+y^2\le 1, x\ne 0$
17.61. $\arccos\dfrac{xy}{x^2+y^2}$	$0<x^2+y^2\le 3$
17.62. $\operatorname{arccotg}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$	$0<x^2+y^2\le 3$

E. Najděte extrémy funkce f na (neomezené) množině $X\subset\mathbb{R}^2$.

$f(x,y) =$	$X =$
17.63^o^. $(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$	$\mathbb{R}^2$
17.64^o^. $(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$	$\mathbb{R}^2$

17.65°. $(x-y)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\mathbb{R}^2$

17.66°. $(x^4+y^4)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\mathbb{R}^2$

17.67°. $(x^2+y^4)\,e^{-(x^2+y^2)}$ $\mathbb{R}^2$

17.68°. $(x^2-y^2)\,e^{-(x^4+y^4)}$ $\mathbb{R}^2$

17.69°. $(x^2-xy+y^2)\,e^{-(x+2y)}$ $\langle 0,+\infty)^2$

17.70°. $(x-4xy+5y)\,e^{-(x+y)}$ $\langle 0,+\infty)^2$

17.71°. $(4x^2+y^2)\,e^{-(2x+y)}$ $\langle 0,+\infty)^2$

17.72°. $x\,\exp(x\,(y^2+1)^2)$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ x\le 0\}$

17.73°. $x^2y^3\,(6-x-y)$ $\langle 0,+\infty)^2$

17.74°. $x^4-4xy+y^4$ $\mathbb{R}^2$

17.75°. $x^4-24xy+9y^3$ $\langle 0,+\infty)^2$

17.76°. x^2-xy+y^2-2x+y $\mathbb{R}^2$

17.77°. $x^4-x^2y^2+4y^4$ $\mathbb{R}^2$

17.78°. $x^2+xy+y^2-4\lg x-10\lg y$ $\mathbb{R}^2_+$

17.79°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{y}+4y$ $\mathbb{R}^2_+$

17.80°. $\dfrac{6}{x}+\dfrac{x}{2y}+\dfrac{y}{3}$ $\mathbb{R}^2_+$

17.81°. $xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$ $\mathbb{R}^2_+$

17.82°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+32xy$ $\mathbb{R}^2_+$

17.83°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+3xy\,(x+y)$ $\mathbb{R}^2_+$

17.84°. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-7xy+2\,(x+y)^2$ $\mathbb{R}^2_+$

17.85°. $\dfrac{3}{xy}+xy\,(3x+y)$ $\mathbb{R}^2_+$

17.86°. $x^2+y^2+\dfrac{1}{xy\,(x^2+y^2)}$ $\mathbb{R}^2_+$

17.87°. $xy^2-2\sin xy$ $\langle 0,+\infty)^2$

17.88°. $x^2y^2-2\operatorname{arctg} xy^2$ $\mathbb{R}^2$

17.89°. $\dfrac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^4+y^4+1}$ $\mathbb{R}^2$

17.90°. $\dfrac{(x^2-1)(y^2-4)}{(x^2+y^2+4)^2}$ $\mathbb{R}^2$

F. Najděte extrémy funkce f na množině $X \subset \mathbb{R}^3$. Ve druhém sloupci je množina X buď přímo napsána, nebo jsou uvedeny nerovnosti, které ji charakterizují. V příkladech 17.99 – 17.102 je X čtyřstěn a jsou uvedeny jeho vrcholy. Pro zkrácení zápisu klademe $R := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

	$f(x,y) =$	$X =$
17.91.	$x^2 + 2xy + y^2 - 2xz - 3y + z$	$\langle 0, 2\rangle^3$
17.92.	$x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 3y + 4z$	$\langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle^2$
17.93.	$x^3 + x - 2y^2 - y + 4z^3 - 4z$	$\langle -1, 1\rangle^3$
17.94.	$6xyz - x - 2y - 3z$	$\langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 2\rangle \times \langle -3, 3\rangle$
17.95.	$z(2x+1) - y(2z+1) - x(2y+1)$	$\langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 2\rangle \times \langle -1, 1\rangle$
17.96.	$2x^3 - 2(y^2 + z^2) - x - y - z$	$\langle -1, 0\rangle^3$
17.97.	$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$	$\langle 0, \pi\rangle^3$
17.98.	$e^{-(x+y+z)}(x-1)(2y-1)(3z-1)$	$\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$
17.99.	$xyz - 3x - 6y - 3z$	$(0,0,0), (9,0,0),$ $(0,9,0), (0,0,9)$
17.100.	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z$	$(-3,0,0), (0,-3,0),$ $(0,0,-3), (1,1,1)$
17.101.	$xy + xz + yz - x - y - z$	$(-2,2,0), (2,2,0),$ $(0,-2,0), (0,0,4)$
17.102.	$xy + 2xz + 3yz - x - y - z$	$(-2,2,1), (-2,-2,-1),$ $(2,0,-1), (0,0,2)$
17.103.	$x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4xz - x - z$	$x^2 + y^2 \le 4, \lvert z\rvert \le 2$
17.104.	$4x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xz + 3z$	$x^2 + y^2 \le 1, \lvert z\rvert \le 1$
17.105.	$x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + z^2$	$R^2 \le 1$
17.106.	$4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 3yz$	$R^2 \le 1$
17.107.	$xy - 2z(x^2 + y^2)$	$R^2 \le 1, y \ge 0$
17.108.	$x^2 - y^2 z$	$x^2 + y^2 \le 4,\ \lvert z\rvert \le 2 - y$
17.109.	$xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z)$	$x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$
17.110.	$R^2 e^{-R^2}$	$\mathbb{R}^3$

17.111. $xyz\,e^{-R^2}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3$

17.112. $R^2 e^{-(x+y+z)}$ $\qquad\qquad$ $\langle 0,+\infty)^3$

17.113. $(x+2y+4z)\,e^{-(x+y+z)}$ $\qquad\qquad$ $\langle 0,+\infty)^3$

17.114. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{16y}{z}+z$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3_+$

17.115. $2xyz+\dfrac{1}{3xyz}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3_+$

17.116. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}+8xyz$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3_+$

17.117. $\lg(R^2-R+1)-R^2+R$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3$

17.118. $\lg R^2-R^2+3R-1$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

17.119. $\operatorname{arctg} R-\lg(R^2+1)$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^3$

17.120. $x^2y^2z^2-\operatorname{arctg}(xy^3z)$ $\qquad\qquad$ $\langle 0,+\infty)^3$

G. Najděte vázané extrémy funkce f na množině X v $\mathbb{R}^2$ nebo v $\mathbb{R}^3$ určené vazbami uvedenými ve druhém sloupci; v příkladech 17.121–17.129 navíc dokažte, že množina X je kompaktní, abyste měli existenci minima i maxima f na X zaručenu. Množina X z Cv. 17.130 kompaktní není a metoda Lagrangeových koeficientů nedává odpověď na otázku, zdali daná funkce na dané hladině extrémy vůbec má; řešte proto tento příklad jinak – viz Po. 17.3.

	$f(x,y)=$	vazba(y)
17.121.	$\sqrt{x^2+y^2}$	$7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2=16$
17.122.	x^2-xy+y^2-y	$x^2+y^2=1$
17.123.	$x-2y$	$13x^2-10xy+13y^2=72$
17.124.	x^2-xy+y^2	$x^4+y^4=16$
17.125.	x^2-xy+y^2	$2x^2-xy+y^2=2$
17.126.	$x^2-xy+y^2-xz+z^2$	$x^2+y^2+z^2=1$
17.127.	xyz	$x^2+2y^2+3z^2=1$
17.128.	$x^3-4y^3-z^3$	$x^2+2y^2+z^2=1$
17.129.	$x+y-2z$	$x^2+y^2=1,\; x^2+z^2=1$
17.130.	$x^2+y^2+z^2$	$x+2y+3z+4=0,\; 4x+3y+2z+1=0$

Řešení

Má-li daná funkce f na dané množině X minimum (maximum), jsou uvedeny všechny body, v nichž tohoto extrému nabývá; nemá-li je, je ve druhém (třetím) sloupci napsáno příslušné infimum (supremum). Připomeňme, že $f(\pm a, \pm b) = c$ znamená, že $f(a,b) = f(-a,-b) = c$, zatímco rovnost $f(\pm a, \mp b) = c$ je ekvivalentní s rovnostmi $f(a,-b) = f(-a,b) = c$. V příkladu 17.127 bylo nutné (z technických důvodů) učinit výjimku; z osmi bodů tvaru $(\pm a, \pm b, \pm c)$ se tam vybírají čtyři s lichým počtem a čtyři se sudým počtem znamének minus.

Cvičení	Minimum	Maximum
17.01.	$f(1,2) = -9$	$f(1,-1) = 3$
17.02.	$f(0,2) = 0$	$f(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{40}{27} \doteq 1.48$
17.03.	$f(1,\pm 1) = -2$	$f(-1,0) = 3$
17.04.	$-\frac{2}{9}\sqrt{3} \doteq -0.385$ v průniku X s hyperbolou $xy = -1/\sqrt{3}$	$\frac{2}{9}\sqrt{3} \doteq 0.385$ v průniku X s hyperbolou $xy = 1/\sqrt{3}$
17.05.	$f(2, \frac{5}{4}) = -105/8$	$f(\frac{1}{6}, 0) = \frac{1}{12}$
17.06.	$f(2,2) = -24$	$f(2,-2) = 32$
17.07.	$f(0,-1) = -4$	$f(-1,-1) = 1$
17.08.	$f(\frac{1}{3}(1+\sqrt{3}), -2) = \frac{20}{9} - \frac{4}{3}\sqrt{3}$ $\doteq -0.087$	$f(1,0) = 6$
17.09.	$f(1,1) = -2$	$f(-2,1) = f(1,-2) = 25$
17.10.	-1, je-li $x = 0$, $\lvert y \rvert \le 2$	$f(\pm 2, 0) = \frac{3}{5}$
17.11.	$f(\pm 1, \mp 1) = -\frac{7}{2}$	$f(\pm 1, \pm 1) = \frac{3}{2}$
17.12.	$= 1$ v bodech $(0,0), (0,\pm 1)$, $(\pm 1, 0), (1, \pm 1), (-1, \pm 1)$	$= \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ v bodech $(a, \pm a)$, $(-a, \pm a)$, kde $a := \sqrt{(\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}$
17.13.	$f(\pm 1, \pm 2) = 1 - 2\sqrt{5} \doteq -3.47$	$f(\pm 1, \mp 2) = 1 + 2\sqrt{5} \doteq 5.47$
17.14.	$f(x,0) = 0$, je-li $1 \le x \le 2$	$f(1, \pm 1) = \sqrt{2}$
17.15.	$f(0, \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}\pi$	$f(\frac{1}{2}\pi, 0) = 1 + \frac{1}{2}\pi$
17.16.	$f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$	$f(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$
17.17.	$f(\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$	$f(-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$
17.18.	$f(\pi, \frac{1}{2}\pi) = f(\frac{1}{2}\pi, \pi) = -1$	$f(\frac{1}{2}\pi, 0) = f(0, \frac{1}{2}\pi) = 1$

17.19.	$f(0, \frac{1}{2}\pi) = 0$	$f(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$
17.20.	$f(0, -\pi) = f(-\pi, 0) = -1$	$f(-\pi, -\pi) = f(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi) =$ $f(0, 0) = 1$
17.21.	$f(0, -\frac{1}{6}\pi) = f(0, -\frac{5}{6}\pi) =$ $f(\pm\pi, \frac{1}{6}\pi) = f(\pm\pi, \frac{5}{6}\pi) = -\frac{5}{4}$	$f(\pm\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi) = f(\pm\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2}\pi) = \frac{5}{4}$
17.22.	$0 = f(0, \pi) = f(\pi, 0) = f(x, y)$, kde $(x, y) \in X$ a $(y = x) \vee$ $(y = \frac{1}{2}\pi - x) \vee (y = \frac{3}{2}\pi - x)$	$1 = f(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi) = f(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$
17.23.	$f(5, -2) = -\operatorname{arctg} 10 - \lg 101$ $\doteq -6.086$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \lg\frac{5}{4} \doteq 0.24$, je-li $(x, y) \in X$ a $xy = \frac{1}{2}$
17.24.	$f(\frac{1}{2}, 2) = -\lg 2 \doteq -0.693$	$f(2, \frac{1}{2}) = \lg 2 \doteq 0.693$
17.25.	$f(0, \pm1) = \lg 2 - 1 \doteq -0.307$	$f(\pm1, 0) = \lg 2 + 1 \doteq 1.693$
17.26.	$f(-1, \pm1) = f(1, \pm1) = 0$	$2ae^a \doteq 1.25$, kde $a := \sqrt{2} - 1$, je-li $(x, y) \in X$ a $xy = -a$
17.27.	$f(-a, 1) = -2ae^a \doteq -1.25$, kde $a := \sqrt{2} - 1$	$f(-1, -1) = 2e$
17.28.	0 v $\langle 0, 2\rangle \times \{0\} \cup \{0\} \times \langle 0, 3\rangle$	$f(1, 2) = 4e^{-3} \doteq 0.199$
17.29.	$f(\pm1, \mp1) = -\cosh 2 \doteq -3.762$	$f(x, x) = -1$, je-li $x \in \langle -1, 1\rangle$
17.30.	$f(\frac{1}{2}\pi, \pi) = f(\pi, -\frac{1}{2}\pi) = -e^{\pi}$ $\doteq -23.14$	$f(-\frac{1}{2}\pi, \pi) = f(\pi, \frac{1}{2}\pi) = e^{\pi}$ $\doteq 23.14$
17.31.	$f(\pm1, \mp1) = -\frac{1}{2}\pi$	$f(\pm1, \pm1) = \frac{1}{2}\pi$
17.32.	$f(0, 0) = \frac{1}{2}\pi$	$f(\pm1, \mp1) = \operatorname{arccotg}(-3) \doteq 2.82$
17.33.	$f(3, 0) = -9$	$f(3, 3) = 15$
17.34.	$f(0, 3) = -9$	$f(\frac{11}{6}, \frac{7}{6}) = \frac{13}{12}$
17.35.	$f(0, 2) = -2$	$f(0, 1) = 2$
17.36.	$f(1.7, 1.3) = -11.45$	$f(-1, -1) = 5$
17.37.	$f(\frac{3}{2}, 0) = -\frac{9}{4}$	$f(-2, 0) = 10$
17.38.	$f(1, -1) = -6$	$f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{26}{9}$
17.39.	$f(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}) = -\frac{128}{243} \doteq -0.527$	$f(-1, 1) = 4$
17.40.	$f(-1, -1) = -\frac{3}{2}$	$f(-1, 1) = \frac{1}{6}$

17.41.	$f(0,0)=f(1,0)=f(0,1)=1$	$f(a,a)=1/2a \doteq 1.366,$ kde $a:=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\doteq 0.366$
17.42.	$f(\frac{3}{4},-\frac{1}{4})=-\frac{11}{8}$	$f(0,1)=4$
17.43.	$f(-3,0)=-18$	$f(-1,\sqrt{2})=2+4\sqrt{2}\doteq 7.66$
17.44.	$f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=-\frac{8}{27}$	$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$
17.45.	$f(-1,0)=-3$	$f(0,-1)=3$
17.46.	$f(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})=-\frac{27}{4}$	$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$
17.47.	$f(-2,0)=-6$	$f(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})=\frac{39}{16}\doteq 2.44$
17.48.	$f(-2,0)=-4$	$f(1,2)=3$
17.49.	$f(0,0)=-1$	$f(0,2)=f(2,0)=\frac{3}{5}$
17.50.	0 na 1. a 4. straně čtverce X	e^{-1} pro $(x,y)\in X,$ pro něž je $x=\sqrt{1+y^2}$
17.51.	$f(0,\pm 1)=-e$	$f(\pm 1,0)=e^{-1}$
17.52.	$f(0,0)=0$	$f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\sqrt{3})=\frac{5}{2}$
17.53.	$f(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})=-\frac{2}{5}$	$f(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})=\frac{2}{5}$
17.54.	$f(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\sqrt{3})=-2$	$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},\pm\frac{1}{2})=2$
17.55.	$f(0,\pm 1)=-4$	$f(\pm 1,0)=0$
17.56.	$f(\pm\sqrt{3},0)=-1$	$f(0,\pm\sqrt{3/2})=\frac{25}{2}$
17.57.	$f(\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1),0)=-\frac{4}{9}(\sqrt{2}+1)$ $\doteq -1.073$	$f(1,0)=4$
17.58.	$f(\frac{4}{15},\frac{1}{15})=-\frac{2}{15}$	$f(-\frac{1}{2}\sqrt{3},\frac{1}{2})=2+\frac{3}{4}\sqrt{3}\doteq 3.299$
17.59.	$f(\pm 1,\mp\frac{1}{2})=-6$	0 v bodě $(0,0)$ a v ∂X
17.60.	$\inf f(X)=-\infty$	$\sup f(X)=\frac{1}{2}\pi$
17.61.	$f(x,x)=\frac{1}{3}\pi,$ je-li $(x,x)\in X$	$f(x,-x)=\frac{2}{3}\pi,$ je-li $(x,-x)\in X$
17.62.	$f(x,x)=\frac{1}{4}\pi,$ je-li $(x,x)\in X$	$f(x,-x)=\frac{3}{4}\pi,$ je-li $(x,-x)\in X$
17.63.	$f(0,0)=0$	$f(x,y)=1/e,$ je-li $x^2+y^2=1$
17.64.	$f(0,\pm 1)=-1/e$	$f(\pm 1,0)=1/e\doteq 0.368$
17.65.	$f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=-1/\sqrt{e}$	$f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=1/\sqrt{e}\doteq 0.6065$

17.66.	$f(0,0)=0$	$f(0,\pm\sqrt{2})=f(\pm\sqrt{2},0)=$ $4e^{-2}\doteq 0.54$
17.67.	$f(0,0)=0$	$f(0,\pm\sqrt{2})=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.68.	$f(0,\pm 1/\sqrt[4]{2})=-1/\sqrt{2e}$	$f(\pm 1/\sqrt[4]{2},0)=1/\sqrt{2e}\doteq 0.43$
17.69.	$f(0,0)=0$	$f(2,0)=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.70.	$f(\frac{5}{2},\frac{3}{2})=-5e^{-4}\doteq -0.0916$	$f(0,1)=5e^{-1}\doteq 1.839$
17.71.	$f(0,0)=0$	$f(1,0)=f(0,2)=4e^{-2}\doteq 0.54$
17.72.	$f(-1,0)=-e^{-1}\doteq -0.368$	$f(0,y)=0$ pro všechna $y\in\mathbb{R}$
17.73.	$\inf f(X)=-\infty$	$f(2,3)=108$
17.74.	$f(\pm 1,\pm 1)=-2$	$\sup f(X)=+\infty$
17.75.	$f(2,\frac{4}{3})=-\frac{80}{3}$	$\sup f(X)=+\infty$
17.76.	$f(1,0)=-1$	$\sup f(X)=+\infty$
17.77.	$f(0,0)=0$	$\sup f(X)=+\infty$
17.78.	$f(1,2)=7-10\lg 2\doteq 0.0685$	$\sup f(X)=+\infty$
17.79.	$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=6$	$\sup f(X)=+\infty$
17.80.	$f(6,3)=3$	$\sup f(X)=+\infty$
17.81.	$f(5,2)=30$	$\sup f(X)=+\infty$
17.82.	$f(\frac{1}{4},\frac{1}{2})=12$	$\sup f(X)=+\infty$
17.83.	$f(\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3})=8/\sqrt{3}\doteq 4.6188$	$\sup f(X)=+\infty$
17.84.	$f(1,1)=3$	$\sup f(X)=+\infty$
17.85.	$f(3^{-3/5},3^{2/5})=5\sqrt[5]{3}\doteq 6.23$ $(3^{-3/5}\doteq 0.52,\ 3^{2/5}\doteq 1.55)$	$\sup f(X)=+\infty$
17.86.	$f(2^{-1/6},2^{-1/6})=3/\sqrt[3]{2}\doteq 2.38$ $(2^{-1/6}\doteq 0.89)$	$\sup f(X)=+\infty$
17.87.	$\inf f(X)=-2$	$\sup f(X)=+\infty$
17.88.	$\inf f(X)=-\pi$	$\sup f(X)=+\infty$
17.89.	$f(\pm a,0)=(0,\pm a)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$ $\doteq -0.207$, kde $a:=(1+\sqrt{2})^{1/2}$ $\doteq 1.55$	$f(0,0)=1$

17.90.	$f(\pm\sqrt{6}, 0) = -\frac{1}{5}$	$f(0,0) = \frac{1}{4}$
17.91.	$f(0, \frac{3}{2}, 0) = -\frac{9}{4}$	$f(2,2,0) = 10$
17.92.	$f(1, \frac{3}{2}, 0) = -\frac{13}{4}$	$f(0,0,2) = f(0,3,2) = f(2,0,2)$ $= 4$
17.93.	$f(-1, 1, \frac{1}{3}\sqrt{3}) = -5 - \frac{8}{9}\sqrt{3}$ $\doteq -6.54$	$f(1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{17}{8} + \frac{8}{9}\sqrt{3}$ $\doteq 3.66$
17.94.	$f(-1,2,3) = -48$	$f(1,-2,-3) = 48$
17.95.	$f(1,2,1) = -8$	$f(1,-2,1) = 12$
17.96.	$f(-1,-1,-1) = -3$	$f(-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\sqrt{6}$ $\doteq 0.52$
17.97.	0 ve všech vrcholech krychle X	$f(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi) = 4$
17.98.	$f(0,0,0) = -1$	$f(0,0,\frac{4}{3}) = 3e^{-4/3} \doteq 0.79$
17.99.	$f(0,9,0) = -54$	$f(0,0,0) = 0$
17.100.	$f(0,0,-3) = -9$	$f(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}) = \frac{36}{5}$
17.101.	$f(0, -\frac{1}{4}, \frac{7}{2}) = -\frac{33}{8}$	$f(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, 0) = \frac{17}{8}$
17.102.	$f(-2,2,-1) = f(2,0,-1) = -5$	$f(-2,-2,-1) = 19$
17.103.	$f(2,0,2) = -28$	$f(-2, 0, \frac{7}{6}) = \frac{121}{12}$
17.104.	$f(\frac{1}{2}, 0, -1) = -5$	$f(1,0,1) = 10$
17.105.	$f\big(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\big) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$	$f\big(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, \mp\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\big) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$
17.106.	$f(0, \pm 3/\sqrt{10}, \pm 1/\sqrt{10}) = -\frac{5}{2}$	$f(\pm 1, 0, 0) = 4$
17.107.	$f(-\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2}) = -\frac{9}{8}$	$f(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, -\frac{1}{2}) = \frac{9}{8}$
17.108.	$f(0,2,4) = -16$	$f(0,-2,-4) = 16$
17.109.	$\inf f(X) = -\infty$	$f(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}) = 7^{-7} \doteq 1.21 \cdot 10^{-6}$
17.110.	$f(0,0,0) = 0$	$f(x,y,z) = e^{-1}$, je-li $R = 1$
17.111.	$f(a, \pm a, \mp a) = f(-a, \pm a, \pm a) =$ $= -A$, kde $a := 1/\sqrt{2}$	$f(a, \pm a, \pm a) = f(-a, \pm a, \mp a)$ $= A := (2e)^{-3/2} \doteq 0.0789$
17.112.	$f(0,0,0) = 0$	$f(2,0,0) = f(0,2,0) = f(0,0,2)$ $= 4e^{-2} \doteq 0.54$
17.113.	$f(0,0,0) = 0$	$f(0,0,1) = 4e^{-1} \doteq 1.47$
17.114.	$f(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, 2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} \doteq 11.31$	$\sup f(X) = +\infty$

17.115.	$f(x,y,z)=\frac{2}{3}\sqrt{6}\doteq 1.63$, je-li $(x,y,z)\in X, xyz=1/\sqrt{6}\doteq 0.408$	$\sup f(X)=+\infty$
17.116.	$f(\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{2})=8\sqrt{2}$	$\sup f(X)=+\infty$
17.117.	$\inf f(X)=-\infty$	$f(x,y,z)=0$, je-li $R\in\{0,1\}$
17.118.	$\inf f(X)=-\infty$	$f(x,y,z)=1+\lg 4\doteq 2.386$, je-li $R=2$
17.119.	$\inf f(X)=-\infty$	$f(x,y,z)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\lg\frac{5}{4}\doteq 0.24$, je-li $R=\frac{1}{2}$
17.120.	$\inf f(X)=-\frac{1}{2}\pi$	$\sup f(X)=+\infty$
17.121.	$f(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{3})=1$	$f(\pm\sqrt{3}, \pm 1)=2$
17.122.	$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})=1-\frac{3}{4}\sqrt{3}\doteq 0.299$	$f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})=1+\frac{3}{4}\sqrt{3}\doteq 2.299$
17.123.	$f(-1/\sqrt{10}, 7/\sqrt{10})=-\frac{3}{2}\sqrt{10}\doteq -4.74$	$f(1/\sqrt{10}, -7/\sqrt{10})=\frac{3}{2}\sqrt{10}\doteq 4.74$
17.124.	$f(\pm\sqrt[4]{8}, \pm\sqrt[4]{8})=2\sqrt{2}\doteq 2.828$	$f(\pm\sqrt[4]{8}, \mp\sqrt[4]{8})=6\sqrt{2}\doteq 8.485$
17.125.	$f(\pm\sqrt{8/7}, \pm\sqrt{2/7})=\frac{6}{7}$	$f(0, \pm\sqrt{2})=2$
17.126.	$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\doteq 0.293$	$f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2})=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\doteq 1.707$
17.127.	$f(x,y,z)=-\frac{1}{18}\sqrt{2}\doteq -0.079$, je-li $(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert, \lvert z\rvert)=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}, 1/3)$ a $xyz<0$	$f(x,y,z)=\frac{1}{18}\sqrt{2}\doteq 0.079$, je-li $(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert, \lvert z\rvert)=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{6}, 1/3)$ a $xyz>0$
17.128.	$f(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)=-\sqrt{2}$	$f(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)=\sqrt{2}$
17.129.	$f(-1/a, -3/a, 3/a)=-a$, kde $a:=\sqrt{10}\doteq 3.16$	$f(1/a, 3/a, -3/a)=a$, kde $a:=\sqrt{10}\doteq 3.16$
17.130.	$f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})=\frac{7}{3}$	$\sup f(X)=+\infty$

18. Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s koeficienty a_k a s pravou stranou b budeme rozumět rovnici

$$(1^*) \qquad L(y) := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, y^{(k)} = b\,,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n, b$ jsou funkce spojité v jistém intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, přičemž $a_0 \not\equiv 0$ v (α, β). Budeme říkat, že L je **lineární diferenciální operátor** n-tého řádu (příslušný k rovnici (1^*)); místo $L(y)$ se často stručněji píše Ly a hodnota $(L(y))(x)$ (resp. $(Ly)(x)$) funkce $Ly \equiv L(y)$ v bodě $x \in (\alpha, \beta)$ se zapisuje i ve zjednodušeném (ale ne zcela korektním) tvaru $Ly(x)$ nebo $L(y(x))$. Rovnice (1^*) obsahuje neznámou funkci y spolu s jejími derivacemi až do řádu n včetně. Jejím **řešením** v intervalu $(\gamma, \delta) \subset (\alpha, \beta)$ nazveme každou funkci $y : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ třídy C_n, pro niž platí rovnost $Ly(x) = b(x)$ pro všechna $x \in (\gamma, \delta)$. **Obecným řešením** rovnice (1^*) (v (γ, δ)) budeme nazývat množinu všech jejích řešení (v (γ, δ)).[1)]

Poznámka 18.1. Definici lineární diferenciální rovnice a jejího řešení jsme formulovali tak obecně, jak to žádají zejména *aplikace* této matematické disciplíny v jiných exaktních vědách. Předpoklad, že koeficient a_0, jímž je v rovnici (1^*) násobena derivace $y^{(n)}$, není v (α, β) identicky roven 0, je však pro *jednoduchou* teorii těchto rovnic příliš slabý. Je-li $a_0 \equiv 0$ v jistém intervalu $(\gamma, \delta) \subset (\alpha, \beta)$, derivace $y^{(n)}$ v (1^*) ve skutečnosti není, což *podstatným způsobem* mění vlastnosti této rovnice. Ale ani v případě, kdy množina všech kořenů funkce a_0 nemá v (α, β) žádný hromadný bod (tj. je-li *izolovaná v* (α, β)), není situace jednoduchá, protože i řešení v blízkosti „izolovaného“ kořenu funkce a_0 může být velmi složité.[2)]

Teorie je jednoduchá jen v případě, že a_0 není *nikde* v (α, β) rovno 0; rovnice (1^*) je pak ekvivalentní s rovnicí, která z ní vznikne dělením funkcí a_0. Předpokládáme-li, že se tak stalo, můžeme se zabývat jen rovnicemi (1^*), v nichž je

$$(2) \qquad a_0 \equiv 1 \ \text{ v } \ (\alpha, \beta)\,.$$

Úmluva. *Nebude-li výslovně uvedeno něco jiného, budeme v dalším předpokládat platnost podmínky* (2). □

Rovnice (1^*) bude mít za tohoto předpokladu tvar

$$(1) \qquad Ly := y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = b\,.$$

---

1) Každému jednotlivému řešení rovnice (1^*) se v literatuře podrobněji, pro výraznější odlišení od řešení obecného, říkává *partikulární řešení*.

2) Jak je patrné, mluvíme jen o celkem přehledných případech; co kdybychom však hledali řešení v $\mathbb{R}$ a množina všech kořenů funkce a_0 byla např. Cantorovo diskontinuum?

Speciálním, ale velmi důležitým případem rovnice (1) je rovnice

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\, y^{(k)} = 0 \tag{3}$$

s nulovou pravou stranou; říká se jí *homogenní* nebo také *bez pravé strany.* [3])

Následující věta obsahuje základní informaci o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice (1).

Věta 18.1. *Pro každý bod* $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *a pro každou* n*-tici čísel* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ *existuje právě jedno řešení* $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *rovnice* (1) *tak, že*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{4}$$

Poznámka 18.2. Ve větě 18.1 je formulován a vyřešen tzv. **Cauchyho problém** pro diferenciální rovnici (1), totiž existence a jednoznačnost jejího řešení za předpokladu, že jsou splněny **počáteční podmínky** (4). Z této věty (jejíž důkaz není jednoduchý) snadno plynou velmi závažné informace např. o obecném řešení rovnice (1); budeme se jimi zabývat později.

* * *

Podle obecné definice lineární nezávislosti elementů lineárního prostoru jsou funkce $y_1, \ldots, y_n$ (např. jako elementy prostoru všech funkcí $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$) *lineárně nezávislé v intervalu* (α, β), platí-li (pro každou n-tici čísel $c_1, \ldots, c_n$) implikace

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) = 0 \text{ pro všechna } x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow c_k = 0 \text{ pro } k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Obráceně, tyto funkce jsou *lineárně závislé* (v (α, β)), existuje-li n-tice čísel $c_1, \ldots, c_n$, z nichž aspoň jedno není rovno 0, pro niž je $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$ funkce (identicky) nulová (v intervalu (α, β)). [4])

n-tice lineárně nezávislých řešení rovnice (3) se nazývá **fundamentální systém** rovnic (3) a (1). Jak ihned uvidíme, hrají takové n-tice v teorii lineárních diferenciálních rovnic zásadní úlohu.

---

[3]) První název není nejvhodnější, protože existují diferenciální rovnice, které se nazývají homogenní, ale nemají s rovnicí (3) nic společného; protože se však tímto typem rovnic v této knize nezabýváme, slovo „homogenní“ pro rovnici (1) s nulovou pravou stranou s ničím nekoliduje. Druhý název užívají s oblibou lidé, kteří matematiku i dnes považují za součást čarodějnického umění, ve kterém *mistři* podstatu kouzel tají, tak aby *nezasvěcenci* byli výsledky jejich čarování co nejvíce zmateni a šokováni. Jedním z cílů je proto zamlžit vše, co zamlžit lze; obyčejný smrtelník se domnívá, že rovnice má vždy dvě strany, zasvěcenec (který si bohužel plete nic s nulou) je schopen řešit i „rovnice“, které mají patrně jen levou stranu – zdalipak mají aspoň rovnítko?

[4]) Lineární kombinaci, v níž jsou všechny koeficienty rovny 0, se říká *triviální*; jejím opakem je kombinace *netriviální*, v níž je nenulový aspoň jeden z koeficientů. V této terminologii jsou funkce $y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé, je-li některá jejich *netriviální* lineární kombinace identicky rovna 0.

Věta 18.2. 1. *Každá rovnice* (3) *má fundamentální systém.*
2. *Je-li*

$$\{y_1, \dots, y_n\} \tag{6}$$

fundamentální systém rovnice (3), *je funkce* $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *řešením této rovnice, právě když je* $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ *pro vhodné konstanty* $c_1, \dots, c_n$. □

Jinými slovy: Známe-li fundamentální systém rovnice (3), známe i její obecné řešení – je jím lineární obal fundamentálního systému. *Obecné řešení rovnice* (3) *je lineární prostor dimenze* n *a fundamentální systém je totéž co jeho báze.*

Z algebry je známo, že je-li (6) bází lineárního prostoru dimenze n, je n-tice $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ elementů tohoto prostoru jeho bází, právě když existuje regulární matice[5]) $\{\lambda_{jk}\}_{1 \le j \le n, 1 \le k \le n}$ tak, že

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} y_k \quad \text{pro} \quad j = 1, \dots, n. \tag{7}$$

První část V. 18.2 můžeme proto zesílit: *Každá rovnice* (3) *má nekonečně mnoho fundamentálních systémů.* □

Doplňme právě uvedené poznatky ještě tímto tvrzením:

Věta 18.3. *Pro každou* n*-tici lineárně nezávislých funkcí* $y_1, \dots, y_n$ *třídy* C_n *v* (α, β) *existuje právě jedna diferenciální rovnice tvaru* (3), *pro niž je tato* n*-tice fundamentálním systémem.*

Poznámka 18.3. Tuto diferenciální rovnici lze získat tak, že determinant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \hdotsfor{5} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} \tag{8}$$

rozvedeme podle posledního sloupce, výsledek položíme rovný nule a dělíme koeficientem

$$W(y_1, \dots, y_n) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \hdotsfor{4} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

u derivace $y^{(n)}$, který se nazývá **Wronského determinant** funkcí $y_1, \dots, y_n$ a je – jak uvidíme ve větě 18.5 – všude v (α, β) nenulový. □

[5]) tj. matice s nenulovým determinantem

Lineární závislost resp. nezávislost n-tic funkcí lze někdy zjistit přímo z definice:

Příklad 18.1. *Funkce* $1\,,\ x\,,\ x^2\,,\ \dots\,,\ x^n$ *jsou pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *lineárně nezávislé v každém intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, protože polynom $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \not\equiv 0$ by v I měl jen konečný počet kořenů; má-li se tedy rovnat 0 v každém bodě $x \in I$, musí to být nulový polynom, tedy polynom, jehož všechny koeficienty c_k jsou nulové.

Příklad 18.2. *Je-li* $n \in \mathbb{N}$ *a jsou-li* $\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\dots\,,\,\lambda_n$ *navzájem různá reálná čísla, jsou funkce* $e^{\lambda_k x}$, $1 \le k \le n$, *lineárně nezávislé v* $\mathbb{R}$. Abychom to dokázali, předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ a že

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}. \tag{10}$$

Dělíme-li funkcí $e^{\lambda_n x}$, dostaneme ekvivalentní identitu $\sum_{k=1}^{n-1} e^{(\lambda_k-\lambda_n)x} + c_n \equiv 0$; limita pro $x \to +\infty$ výrazu vlevo je rovna c_n, protože všechna čísla $\lambda_k - \lambda_n$ jsou záporná. Tím je dokázáno, že $c_n = 0$.

Identitu (10) lze tedy ekvivalentně napsat ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k e^{\lambda_k x} \equiv 0 \ \text{ v } \ \mathbb{R}; \tag{10_1}$$

dělením $e^{\lambda_{n-1} x}$ a přechodem k limitě pro $x \to +\infty$ získáme rovnost $c_{n-1} = 0$.

Je zřejmé, že takto lze pokračovat až do okamžiku, kdy budeme mít místo (10) identitu $c_1 = 0$.

Příklad 18.3. *Funkce* $e^x \cos x$ *a* $e^x \sin x$ *jsou lineárně nezávislé v intervalu* $I := \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$. Je-li totiž $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \equiv 0$ v I, jsou hodnoty levé strany nulové speciálně i v bodech 0 a $\frac{1}{2}\pi$; to vede k rovnostem $c_1 = 0$ a $e^{\pi/2} c_2 = 0$, tedy i $c_2 = 0$. $\square$

Příklad 18.4. *Funkce* $1, \sin^2, \cos^2$ *jsou lineárně závislé v každém intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, protože $1 - \sin^2 - \cos^2 \equiv 0$. $\square$

V příkladech 18.1–18.4 jsme sice lineární nezávislost ověřovali nebo vyvraceli různými způsoby, ale vždy přímo z její definice. *Problém lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí lze někdy řešit i pomocí Wronského determinantu* (9):

Příklad 18.5. Předpokládejme, že $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé funkce třídy C_n v (α, β). Pak existuje n-tice konstant $c_1, \dots, c_n$, z nichž aspoň jedna je nenulová, pro niž je $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) = 0$ všude v (α, β). Derivujeme-li tuto identitu jednou, dvakrát, $\dots$,$(n-1)$-krát, získáme identity

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{(m)}(x) = 0 \ \text{ pro všechna } \ x \in (\alpha, \beta) \ \text{ a pro } \ m = 0, 1, \dots, n-1\,. \tag{11}$$

Protože tato soustava n rovnic má pro každé (pevné) $x \in (\alpha, \beta)$ netriviální řešení $\{c_1, \dots, c_n\}$, je podle známého algebraického tvrzení determinant soustavy, tj. Wronského determinant funkcí $y_1, \dots, y_n$, roven 0 všude v (α, β). $\square$

Dokázali jsme toto tvrzení:

Věta 18.4. *Jsou-li funkce $y_1, \dots, y_n$ třídy C_n lineárně závislé v intervalu (α, β), je jejich Wronského determinant* (9) *v tomto intervalu identicky roven nule.*

Jinými slovy: Je-li determinant (9) *nenulový aspoň v jednom bodě intervalu (α, β), jsou funkce $y_1, \dots, y_n$ v tomto intervalu lineárně nezávislé.*

Poznámka 18.4. Pomocí právě uvedené věty lze zesílit výsledky, které jsme dokázali v příkladech 18.2 a 18.3:

1) Funkce z Př. 18.2 jsou lineárně nezávislé v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}$, protože jejich Wronského determinant

$$e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x} \prod_{1\le j<k\le n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0$$

se nikde v $\mathbb{R}$ nerovná 0. (Vlevo je tzv. *Vandermondův determinant* – sr. s Cv. 2.37.)

2) I funkce $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ z Př. 18.3 jsou lineárně nezávislé v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}$, protože jejich Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = e^{2x}$$

je všude v $\mathbb{R}$ nenulový. $\square$

Jsou-li funkce y_k řešeními rovnice (3), platí toto zesílení věty 18.4:

Věta 18.5. *Jsou-li $y_1, \dots, y_n$ řešení rovnice* (3) *v (α, β), jsou jen tyto dvě možnosti:*

1. *Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé a jejich Wronského determinant je všude v (α, β) nenulový.*

2. *Funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé a jejich Wronského determinant je všude v (α, β) nulový.*

Poznámka 18.5. Právě vyslovená věta slouží hlavně k ověřování lineární závislosti nebo nezávislosti řešení rovnice (3); lze ji však užít i nečekanějším způsobem:

Protože Wronského determinant funkcí x, e^x je zřejmě roven $(x-1)e^x$, což je funkce rovná 0 v bodě 1 a všude jinde nenulová, *není tato dvojice funkcí řešením žádné lineární diferenciální rovnice tvaru $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ v žádném intervalu (α, β) obsahujícím bod* 1. Vysvětlení je jednoduché: Podle věty a poznámky 18.3 je dvojice $\{x, e^x\}$ fundamentálním systémem rovnice $y'' + (xy' - y)/(1-x) = 0$, jejíž dva koeficienty nejsou v bodě 1 definovány (a nelze je tam spojitě dodefinovat).

Poznamenejme ještě, že funkce mohou být v jednom intervalu lineárně nezávislé, v jiném lineárně závislé, a to i v případě, že jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}$: Položíme-li např.

$$y_1(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{v } (-\infty, 0\rangle \\ \exp(-1/x^2) & \text{v } \mathbb{R}_+ \end{matrix} \right\}, \quad y_2(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{v } (-\infty, 0\rangle \\ x\exp(-1/x^2) & \text{v } \mathbb{R}_+ \end{matrix} \right\},$$

snadno nahlédneme, že funkce y_1, y_2 jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}_-$ a lineárně nezávislé v $\mathbb{R}_+$ (kde se jejich Wronského determinant rovná $\exp(-2/x^2)$). $\square$

Další věta charakterizuje obecné řešení rovnice (1):

Věta 18.6. *Je-li* $\{y_1, \dots, y_n\}$ *fundamentální systém rovnice* (1) *a je-li* y_0 *jakékoli její řešení, je*

$$\{\, y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j\, y_j\,;\; c_j \in \mathbb{R} \;\; \textit{pro} \;\; j = 1, \dots, n \,\} \tag{12}$$

obecné řešení rovnice (1).

Geometricky řečeno: Posuneme-li lineární prostor všech řešení rovnice (3) (považovaný např. za podprostor všech funkcí spojitých v (α, β)) o řešení y_0, je příslušný lineární útvar (nadrovina) obecným řešením rovnice s pravou stranou b.

Résumé: *K tomu, abychom mohli napsat všechna řešení rovnice* (1), *stačí najít nějaký její fundamentální systém* (6) *a nějaké její řešení* y_0*; každé řešení rovnice* (1) *má pak tvar*

$$y_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j\, y_j\,, \tag{13}$$

kde c_j *jsou vhodné konstanty. Obráceně:* (13) *je pak řešením rovnice* (1) *při každé volbě konstant* c_j. $\square$

Teoreticky je tedy všechno velmi jednoduché, obecná řešení rovnic (3) a (1) mají velmi jednoduchou algebraickou strukturu. Bohužel však *neexistuje algoritmus, který by v obecném případě umožnil fundamentální systém a řešení* y_0 *najít.* [6])

Poněkud nadějnější je situace, kdy jsou funkce a_k v rovnici (1) konstantní; takové (lineární diferenciální) rovnici se říká **rovnice s konstantními koeficienty** a podle V. 18.1 je její obecné řešení složeno z funkcí s definičním oborem $\mathbb{R}$. Ukazuje se, že úloha najít fundamentální systém se u takové rovnice redukuje na řešení algebraické rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0\,, \tag{14}$$

která se nazývá **charakteristická rovnice** rovnic (1) a (3), zatímco vlevo je tzv. **charakteristický polynom** těchto rovnic. Pomocí fundamentálního systému lze pak (aspoň teoreticky) najít i řešení y_0. Příslušná tvrzení jsou obsahem vět 18.7–18.9, které následují. $\square$

Čtenáři je jistě z algebry známo, že algebraická rovnice s *reálnými* koeficienty má spolu s každým kořenem $\mu = \alpha + i\beta$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, i kořen $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$ s ním komplexně sdružený, přičemž násobnosti obou těchto kořenů jsou stejné.

---

[6]) Není to nic udivujícího; jak známo, neexistuje ani vzorec, který by dovolil najít kořeny obecné *algebraické* rovnice stupně vyššího než 4 na základě jejích koeficientů. Rozumějme dobře: *Bylo dokázáno, že takový vzorec neexistuje*; podobně jako je tomu s kvadraturou kruhu, nejde tedy o to, že naše současné znalosti a schopnosti nejsou dostačující.

Abychom mohli do jednoho tvrzení zahrnout případy, kdy charakteristická rovnice má buď jen reálné, nebo jen imaginární kořeny, *umluvíme se, že symbol tvaru* $\{\gamma_m\}_{m=1}^{0}$ *bude znamenat prázdnou posloupnost.*

Věta 18.7. *Předpokládejme, že členy prosté posloupnosti* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{p}$, *kde* $p \geq 0$, *jsou právě všechny reálné kořeny rovnice* (14) *a že členy prostých posloupností* $\{\mu_k\}_{k=1}^{q}$, $\{\overline{\mu}_k\}_{k=1}^{q}$, *kde* $q \geq 0$, *jsou právě všechny imaginární kořeny této rovnice; nechť* $\alpha_k := \operatorname{Re}\mu_k$, $\beta_k := \operatorname{Im}\mu_k$ *a nechť* r_j (*resp.* s_k) *je násobnost kořenu* λ_j (*resp. kořenů* μ_k *a* $\overline{\mu}_k$).

Pak tvoří funkce

$$
\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 x}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
e^{\lambda_p x}, x e^{\lambda_p x}, \dots, x^{r_p - 1} e^{\lambda_p x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \dots, x^{s_1-1} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\, x^{s_1-1} e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
e^{\alpha_q x}\cos\beta_q x,\, e^{\alpha_q x}\sin\beta_q x, \dots, x^{s_q-1} e^{\alpha_q x}\cos\beta_q x,\, x^{s_q-1} e^{\alpha_q x}\sin\beta_q x
\end{array}
\tag{15}
$$

fundamentální systém rovnice (1).

Poznámka 18.6. I když tvrzení právě uvedené věty vypadá dosti složitě, lze si konstrukci fundamentálního systému za situace, kdy známe všechny kořeny charakteristické rovnice včetně jejich násobností, zapamatovat velmi snadno:

Každý reálný kořen λ násobnosti r rovnice (14) „přispěje" do fundamentálního systému r funkcemi $e^{\lambda x}$, $x e^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x}$. Je-li $\mu = \alpha + i\beta$ imaginární kořen násobnosti s rovnice (14), platí totéž o číslu $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$; kdybychom připustili, že řešení rovnice (3) mohou být i komplexní funkce, byly by (jak se snadno přesvědčíme dosazením) funkce $e^{(\alpha \pm i\beta)x}$ řešeními této rovnice. Reálná řešení z nich získáme rozkladem na reálnou a imaginární část, tedy přechodem k funkcím $e^{\alpha x}\cos\beta x$ a $e^{\alpha x}\sin\beta x$; každou z nich pak postupně vynásobíme mocninami $x^0, x^1, \dots, x^{s-1}$, podobně jako jsme to učinili s funkcí $e^{\lambda x}$ a číslem r v případě reálného kořenu λ.

V (15) odpovídá každému kořenu $\lambda \in \mathbb{R}$ násobnosti r právě r funkcí, každé dvojici $\{\mu, \overline{\mu}\} \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}$ kořenů násobnosti s právě $2s$ funkcí; počet funkcí v (15) je tedy roven součtu násobností všech kořenů rovnice (14), který je jak známo roven n. $\square$

Než přejdeme k ilustrujícím příkladům, vysvětleme dvě metody, jak lze (aspoň teoreticky) pomocí fundamentálního systému najít řešení y_0 rovnice (1); *metodu*, která se nazývá **variace konstant** [7]), *lze užít i v případě, že koeficienty* a_k *rovnice nejsou konstantní*. Na rozdíl od toho *lze druhou metodu aplikovat jen na rovnice s konstantními koeficienty a navíc jen při speciálním tvaru pravé strany* b.

[7]) Obyčejný člověk se domnívá, že konstanty se nazývají konstantami proto, že se nemění („constans" znamená latinsky „stálý", „neměnný"); matematik-čaroděj však pracuje i s měnícími se konstantami („variare" znamená mj. „měnit se"). Historickou genezi slovního protikladu „variace konstant" tedy raději nekomentujme. Racionální jádro metody je však jednoduché: Podobně jako je každé řešení rovnice (3) lineární kombinací funkcí tvořících fundamentální systém (přičemž koeficienty v této kombinaci jsou samozřejmě *čísla*), existují vždy *funkce* $C_1, \dots, C_n$ tak, že $C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ je řešením rovnice (1) – stačí, aby tyto funkce splňovaly jisté podmínky.

Věta 18.8. (Variace konstant.) *Nechť funkce* $y_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, *tvoří fundamentální systém rovnice* (1) *a nechť funkce* $B_k : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, *splňují v* (α, β) *identity*

$$
\begin{aligned}
&B_1 y_1 + \ldots + B_n y_n = 0\,,\\
&B_1 y_1' + \ldots + B_n y_n' = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&B_1 y_1^{(n-2)} + \ldots + B_n y_n^{(n-2)} = 0\,,\\
&B_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + B_n y_n^{(n-1)} = b\,.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Je-li C_k *(pro každé* $k = 1, \ldots, n$*) funkce primitivní k funkci* B_k *v* (α, β)*, je funkce*

$$
y_0 := \sum_{k=1}^{n} C_k y_k \tag{17}
$$

řešením rovnice (1).

Poznámka 18.7. Poznamenejme, že soustava rovnic (16) je vždy řešitelná vzhledem k funkcím $B_1, \ldots, B_n$, protože její determinant je Wronského determinant lineárně nezávislých řešení y_k rovnice (3), což je (podle V. 18.5) funkce nenulová všude (α, β). Podle Cramerova pravidla je přitom každé B_k podílem dvou determinantů: Ve jmenovateli je Wronského determinant funkcí $y_1, \ldots, y_n$, v čitateli determinant, který z $W(y_1, \ldots, y_n)$ vznikne nahrazením k-tého sloupce pravými stranami soustavy (16), tedy funkcemi $0, \ldots, 0, b$. Protože oba determinanty jsou funkce spojité v (α, β), platí totéž i o B_k; funkce C_k k ní primitivní tedy opravdu (pro každé $k = 1, \ldots, n$) existuje.

Teoreticky je tedy vše v pořádku; je-li $\{y_1, \ldots, y_n\}$ fundamentální systém, existují vždy funkce C_k tak, že (17) je řešením rovnice (1). Při aplikaci V. 18.8 však můžeme narazit na dvě zásadní potíže: 1) Soustavu (16) nebudeme umět rozřešit např. proto, že n je příliš velké; 2) k některé z nalezených funkcí B_k nebudeme umět najít funkci primitivní např. proto, že nepatří mezi tzv. elementární funkce. $\square$

Další metoda hledání řešení y_0 rovnice (1) pomocí fundamentálního systému vede mnohdy k cíli rychleji a snadněji než variace konstant, *lze ji však bohužel užít jen pro rovnice s konstantními koeficienty* a pravá strana musí mít navíc tzv. *speciální tvar*, což znamená, že je lineární kombinací funkcí tvaru

$$
p_1(x)\, e^{\lambda x}\,, \quad p_2(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x\,, \quad p_3(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x\,, \tag{18}
$$

kde p_1, p_2, p_3 jsou polynomy, λ, α, β reálná čísla.

Protože z linearity operátoru L ihned plyne, že

$$
L y_1 = b_1\,,\ L y_2 = b_2 \ \Rightarrow\ L(y_1 \pm y_2) = b_1 \pm b_2\,,
$$

můžeme se omezit na vysvětlení, jak najít řešení y_0, pro každou z funkcí (18) zvlášť.

Věta 18.9. *Nechť p je polynom stupně $s \geq 0$, nechť* (3) *je rovnice s konstantními koeficienty a nechť M je její charakteristický polynom. Je-li číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ kořen polynomu M, značme N jeho násobnost; je-li $M(\lambda) \neq 0$, položme $N = 0$.*

Pak – podle toho, zdali je λ reálné, nebo imaginární číslo – platí:

1. *Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ a $b(x) = p(x)\,e^{\lambda x}$, existuje polynom q stupně $\leq s$ tak, že funkce*

$$y_0(x) := x^N q(x)\,e^{\lambda x} \tag{19}$$

je řešením rovnice (1).

2. *Je-li $\lambda = \alpha + i\beta$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$, a je-li $b(x)$ rovno buď $p(x)\,e^{\alpha x} \cos \beta x$, nebo $p(x)\,e^{\alpha x} \sin \beta x$, existují polynomy q a r stupňů $\leq s$ tak, že funkce*

$$y_0(x) := x^N e^{\alpha x}(q(x) \cos \beta x + r(x) \sin \beta x) \tag{20}$$

je řešením rovnice (1).

Příklad 18.6. Rozřešme rovnici

$$y'' - y = \sin x\,, \tag{21}$$

a to nejdříve *variací konstant*. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má kořeny ± 1, takže fundamentální systém tvoří funkce e^x a e^{-x}. Soustava rovnic (16) má nyní tvar

$$B_1(x)\,e^x + B_2(x)\,e^{-x} = 0\,, \quad B_1(x)\,e^x - B_2(x)\,e^{-x} = \sin x \tag{22}$$

a řešení

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \tfrac{1}{2}\,e^{-x} \sin x = (-\tfrac{1}{4}\,e^{-x}(\cos x + \sin x))'\,, \\ B_2(x) &= -\tfrac{1}{2}\,e^{x} \sin x = (\tfrac{1}{4}\,e^{x}(\cos x - \sin x))'\,; \end{aligned} \tag{23}$$

vpravo jsme rovnou napsali primitivní funkce $C_1(x)$ a $C_2(x)$ funkcí $B_1(x)$ a $B_2(x)$.

Podle V. 18.6 je řešením rovnice (21) funkce

$$(-\tfrac{1}{4}\,e^{-x}(\cos x + \sin x))\,e^x + (\tfrac{1}{4}\,e^{x}(\cos x - \sin x))\,e^{-x} = -\tfrac{1}{2}\,\sin x\,,$$

a obecným řešením rovnice (21) je tedy množina

$$\{-\tfrac{1}{2}\,\sin x + c_1\,e^x + c_2\,e^{-x};\; c_1 \in \mathbb{R},\, c_2 \in \mathbb{R}\}\,. \tag{24}$$

Pro porovnání zkusme nyní aplikovat V. 18.9, což je možné, protože (21) je rovnice s konstantními koeficienty, jejíž pravá strana má speciální tvar; *na rozdíl od variace konstant nebudeme muset integrovat:*

Protože $\alpha = 0$, $\beta = 1$ a protože $\lambda = \alpha + i\beta = i$ není kořen charakteristické rovnice, je $N = 0$. Pravá strana rovnice je $p(x) \sin x$, kde $p \equiv 1$ je polynom stupně 0; položíme proto $y_0(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ a hledáme konstanty α, β tak, aby y_0

bylo řešením rovnice (21). Protože $y_0'' = -y_0$, získáme dosazením do (21) identitu $-2\alpha\cos x - 2\beta\sin x = \sin x$; protože funkce $\cos x$, $\sin x$ jsou lineárně nezávislé, musí být $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Řešením rovnice (21) je tedy funkce $y_0(x) := -\frac{1}{2}\sin x$.

Příklad 18.7. Rozřešme rovnici

$$y''' - y'' - y' + y = x^2\,; \tag{25}$$

charakteristická rovnice $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$ má dvojnásobný kořen 1 a jednoduchý kořen -1, takže fundamentální systém tvoří nyní funkce e^x, $x\,e^x$, e^{-x}.

Protože $\lambda = 0$ není kořen charakteristické rovnice, budeme řešení rovnice (25) hledat podle V. 18.9 ve tvaru $y_0(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, kde α, β, γ jsou zatím neznámé konstanty. Dosazením do (25) získáme identitu $\alpha x^2 + (\beta - 2\alpha)x + (\gamma - \beta - 2\alpha) = x^2$, takže $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$. Řešením rovnice (25) je tedy funkce $y_0(x) = x^2 + 2x + 4$ a jejím obecným řešením množina všech funkcí tvaru

$$x^2 + 2x + 4 + (c_1 + c_2 x)\,e^x + c_3\,e^{-x}\,,\ \text{kde } c_1, c_2, c_3 \text{ jsou libovolné konstanty}. \tag{26}$$

Čtenář může sám zkusit metodu variace konstant; řešením příslušné soustavy (16) získá funkce

$$B_1(x) = -\tfrac{1}{4}x^2(2x+1)\,e^{-x}\,,\ B_2(x) = \tfrac{1}{2}x^2\,e^{-x}\,,\ B_3(x) = \tfrac{1}{4}x^2\,e^x\,,$$

které je nutné integrovat, atd.

Aplikace věty 18.9 je v tomto případě zřejmě podstatně výhodnější.

Příklad 18.8. Hledejme nejdříve obecné řešení rovnice

$$y''' - y = 3\,e^x \tag{27}$$

a pak řešení Y, které splňuje počáteční podmínky

$$Y(0) = 1\,,\ Y'(0) = -1\,,\ Y''(0) = 0\,. \tag{28}$$

Charakteristická rovnice $\lambda^3 - 1 = 0$ má kořeny $1, \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}\,), -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}\,)$, a fundamentální systém se tedy skládá z funkcí

$$y_1(x) := e^x\,,\ y_2(x) := e^{-x/2}\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x),\ y_3(x) := e^{-x/2}\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x)\,. \tag{29}$$

Podle V. 18.9 máme řešení rovnice (27) hledat ve tvaru $y_0(x) = \alpha x\,e^x$, protože 1 je jednoduchý kořen charakteristické rovnice a $p \equiv 3$ je polynom stupně 0. Je $y_0'''(x) = \alpha\,(3+x)\,e^x$ a z rovnice $L(y_0) = 3\alpha\,e^x = 3\,e^x$ plyne, že $\alpha = 1$. Obecné řešení rovnice (27) je tedy množina všech funkcí tvaru

$$(x + c_1)\,e^x + e^{-x/2}(c_2\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x) + c_3\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x))\,, \tag{30}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou libovolné konstanty.

Máme-li splnit uvedené počáteční podmínky, je třeba vypočítat první a druhou derivaci funkce (30) a dosadit do nulté až druhé derivace této funkce $x = 0$.[8]) Tím získáme levé strany rovnic

$$c_1 + c_2 = 1\,,\ 1 + c_1 - \tfrac{1}{2}(c_2 - \sqrt{3}\,c_3) = -1\,,\ 2 + c_1 - \tfrac{1}{2}(c_2 + \sqrt{3}\,c_3) = 0\,; \tag{31}$$

jejich pravé strany jsou pravými stranami rovností (28). Rovnice (31) mají řešení $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$, takže hledaným řešením je funkce

$$Y(x) := (x-1)\,e^x + 2\,e^{-x/2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x\right). \tag{32}$$

Příklad 18.9. Je-li $b \equiv 0$, jsou řešeními v $\mathbb{R}$ rovnice

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = b(x) \tag{33}$$

lineárně nezávislé funkce x a x^2. *Protože metoda variace konstant byla formulována jen pro případ, že u derivace nejvyššího řádu je koeficient* 1, přejdeme od (33) k rovnici

$$y'' - \frac{2}{x}\,y' + \frac{2}{x^2}\,y = \frac{b(x)}{x^2}\,, \tag{34}$$

která tuto podmínku splňuje a je ekvivalentní s rovnicí (33) v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$. Rovnice budeme řešit 1) pro $b(x) := 2x^2 \lg x$ a 2) pro $b(x) := x^2\,e^x$.

Ad 1) Řešení hledáme jen v $\mathbb{R}_+$, protože jinde není $\lg x$ definováno. Rovnice

$$x\,B_1(x) + x^2\,B_2(x) = 0\,,\quad B_1(x) + 2x\,B_2(x) = 2\lg x \tag{35}$$

mají řešení $B_1(x) = -2\lg x$, $B_2(x) = 2\lg x/x$ a příslušné primitivní funkce jsou např. $C_1(x) := 2x\,(1 - \lg x)$ a $C_2(x) := \lg^2 x$. Z toho plyne, že řešením rovnic (33) a (34) v $\mathbb{R}_+$ je funkce $y_0(x) := C_1(x)x + C_2(x)x^2 = x^2\,(\lg^2 x - 2\lg x + 2)$ a že jejich obecné řešení je proto množina všech funkcí tvaru

$$c_1x + x^2\,(\lg^2 x - 2\lg x + c_2)\,, \tag{36}$$

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.[9])

Ad 2) Řešení nyní hledáme v $\mathbb{R}_+$ i v $\mathbb{R}_-$, přičemž postup je v obou intervalech stejný. Rovnice

$$x\,B_1(x) + x^2\,B_2(x) = 0\,,\quad B_1(x) + 2x\,B_2(x) = e^x \tag{37}$$

---

[8]) Podrobný výpočet přenechávám čtenáři; přesvědčí se, že najít v obecném řešení rovnice partikulární řešení splňující dané počáteční podmínky vyžaduje – zejména u rovnic vyšších řádů – jistý čas, energii a trpělivost.

[9]) V závorce za x^2 jsme napsali jen c_2 místo konstanty $2 + c_2$, která by vznikla sečtením obecného řešení $c_1x + c_2x^2$ s funkcí $y_0(x)$, protože c_2 probíhá celé $\mathbb{R}$ stejně jako $2 + c_2$. Podobně zjednodušíme obě konstanty v (36′) na následující stránce.

mají nyní řešení $B_1(x) = -e^x$, $B_2(x) = e^x/x$. První z těchto funkcí má primitivní funkci $C_1(x) := -e^x$, druhou integrovat „neumíme“, i když je spojitá jak v $\mathbb{R}_+$, tak i v $\mathbb{R}_-$; primitivní funkce v obou intervalech tedy jistě má, žádná z nich však nepatří mezi tzv. elementární funkce.

Naznačme dvě možnosti řešení vzniklého problému:

A. Ze známého Taylorova rozvoje exponenciální funkce ihned plyne, že

$$B_2(x) = \frac{e^x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \quad \text{pro všechna} \quad x \neq 0\,, \tag{38}$$

a C_2 lze proto v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$ definovat rovností

$$C_2(x) := \lg|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}\,. \tag{39}$$

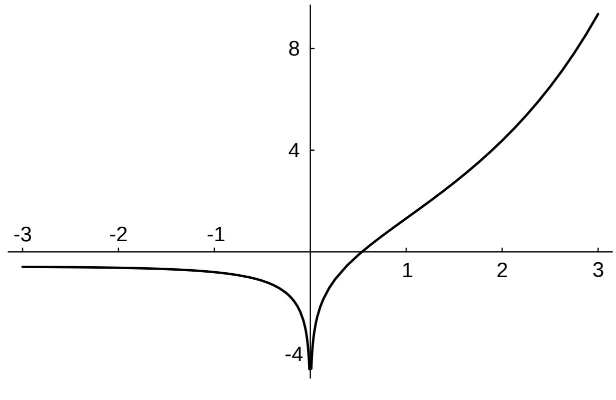
Funkce $y_0(x) := C_1(x)x + C_2(x)x^2$ je pak řešením rovnic (33) a (34) jak v $\mathbb{R}_-$, tak i v $\mathbb{R}_+$; rozvedeme-li xe^x v Taylorovu řadu a výsledek upravíme, zjistíme, že

$$y_0(x) = -xe^x + x^2 \lg|x| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k \cdot k!} = (\lg|x| - 1)\,x^2 - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k\,(k+1)!}\,.$$

Obecné řešení rovnic (33) a (34) v $\mathbb{R}_+$ i v $\mathbb{R}_-$ je proto množina všech funkcí tvaru

$$c_1 x + (c_2 + \lg|x|)\,x^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k\,(k+1)!}\,, \quad \text{kde } c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}. \tag{36'}$$

Poznamenejme, že funkce $\varphi(x) := x^2 \lg|x|$ a $\varphi'(x) = x\,(2\lg|x|+1)$ mají v bodě 0 limitu 0; položíme-li tedy $\varphi(0) = 0$, bude funkce φ třídy C_1 v celém $\mathbb{R}$. *Řešení (36′) lze tedy rozšířit na funkci třídy* C_1 *v celém* $\mathbb{R}$*, ale toto rozšíření není řešením rovnice* (33) *v* $\mathbb{R}$, protože $\varphi''(x) = 2\lg|x| + 3 \to -\infty$ pro $x \to 0$.



Graf funkce $C_2(x)$ z příkladu 18.9

B. Numerická a počítačová matematika nabízí další možnost, jak se vyrovnat s problémem funkce primitivní k funkci e^x/x. Z „předpočítačové" éry máme v knihovnách značné množství informací o různých neelementárních funkcích včetně tabulek jejich hodnot a např. v programu „Mathematica" firmy Wolfram Research najdeme funkci ExpIntegralEi$(x) \equiv C_2(x) + C$, kde $C \doteq 0.5772156649015$ je tzv. **Eulerova konstanta**; v literatuře se tato funkce značí krátce $\mathrm{Ei}(x)$. Program nám přitom poskytne nejen všechny hodnoty funkcí Ei a C_2 s libovolnou přesností, ale i jejich grafy (viz obrázek na str. 219). To umožňuje s oběma funkcemi „počítačově" zacházet jako s kteroukoli elementární funkcí; snadno např. zjistíme, že (jediný) kořen funkce C_2 leží v intervalu $(\xi, \xi + 10^{-13})$, kde $\xi := 0.5379782445744$.

* * *

V aplikacích se velmi často setkáme s diferenciálními rovnicemi druhého řádu; např. v mechanice hmotného bodu je to proto, že síla je úměrná zrychlení, které je druhou derivací funkce udávající polohu. Při řešení rovnic $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ se někdy hodí vzorec umožňující – aspoň teoreticky – najít pomocí jednoho nenulového řešení y_1 této rovnice další řešení y_2 tak, že $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém. Vzorec by bylo samozřejmě možné napsat a čtenář by pak do něj jen dosazoval; dává-li však čtenář před touto mechanickou činností přednost pochopení příslušného principu, může při řešení konkrétních příkladů postupovat podle tohoto obecného algoritmu:

Nechť $y : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ a $y_1 : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R} - \{0\}$ jsou dvě řešení rovnice

$$L(y) := y'' + a_1y' + a_2y = 0\,, \tag{40_1}$$

kde a_1, a_2 jsou funkce spojité v (α, β). Násobme tuto identitu funkcí y_1 a identitu

$$L(y_1) = y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0 \tag{40_2}$$

funkcí y; odečteme-li výsledky, dostaneme identitu

$$(y_1y'' - y_1''y) + a_1(y_1y' - y_1'y) = 0\,. \tag{41_1}$$

Protože výraz v závorkách za a_1 je Wronského determinant $W := W(y_1, y)$ a výraz v prvních závorkách je roven W', lze identitu (41_1) napsat ve tvaru

$$W' + a_1W = 0\,; \tag{41_2}$$

tuto rovnici převedeme vynásobením integračním faktorem $\exp\circ A$, kde $A' = a_1$ v (α, β), na tvar $(W(x)\exp(A(x)))' = 0.$[10]) Derivovaná funkce je tedy konstantní a existuje $d \in \mathbb{R}$ tak, že $W(x) = d\exp(-A(x))$ pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$.

Porovnáme-li výraz $y_1y' - y_1'y$ se vzorcem pro derivaci podílu y/y_1 (který smíme utvořit, protože y_1 se podle předpokladu nikde v (α, β) nerovná 0), vidíme, že

$$\Big(\frac{y(x)}{y_1(x)}\Big)' = d\,\frac{\exp(-A(x))}{y_1^2(x)} = dB'(x)\,, \tag{42}$$

[10]) Viz str. 162 Úvodu.

kde B znamená nějakou funkci primitivní ke zlomku $\exp\circ(-A)/y_1^2$. Funkce y/y_1 a dB se v důsledku toho liší jen o jistou aditivní konstantu c, a položíme-li $y_2 := y_1 B$, vidíme, že identita

$$y(x) = cy_1(x) + dy_2(x) \tag{43}$$

platí všude v (α,β). Každé řešení y rovnice $Ly = 0$ má tedy za naší situace tvar (43); z toho plyne, že funkce y_1, y_2 tvoří její fundamentální systém.

Tím je dokázáno toto užitečné tvrzení:

Věta 18.10. *Nechť $y_1 : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R} - \{0\}$ je řešení rovnice (40_1) a nechť funkce A, B splňují v (α,β) identity*

$$A'(x) = a_1(x)\,,\quad B'(x) = \frac{e^{-A(x)}}{y_1^2(x)}\,. \tag{44}$$

Položíme-li pak $y_2 := y_1 B$, tvoří dvojice $\{y_1, y_2\}$ fundamentální systém řešení rovnice (40_1).

Příklad 18.10. Rovnice

$$x(1+\lg x)y'' - y' = 0 \tag{45}$$

má v $\mathbb{R}_+$ zřejmě řešení $y_1 \equiv 1$; před aplikací V. 18.10 dělíme výrazem $x(1+\lg x)$ a omezíme se na intervaly $I_1 := (0, e^{-1})$ a $I_2 := (e^{-1}, +\infty)$, v nichž tento výraz není nikde roven nule. Protože v obou intervalech je

$$-\frac{1}{x(1+\lg x)} = -(\lg|1+\lg x|)' \quad \text{a} \quad \frac{\exp(\lg|1+\lg x|)}{y_1^2(x)} = \pm(1+\lg x) = \pm(x\lg x)'\,,$$

je funkce $y_2(x) := y_1(x)x\lg x = x\lg x$ řešením rovnice (45), a to zřejmě v celém $\mathbb{R}_+$;[11]) obecným řešením této rovnice v $\mathbb{R}_+$ je tedy množina všech funkcí tvaru $c_1 + c_2 x\lg x$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.

Příklad 18.11. Jak snadno zjistíme, má rovnice

$$y'' + \frac{xy'}{1+x} - \frac{y}{1+x} = 0 \tag{46}$$

v intervalech $I_1 := (-\infty, -1)$ a $I_2 := (-1, +\infty)$ řešení $y_1(x) := x$. Protože první z identit

$$\frac{x}{1+x} = \big(x - \lg|1+x|\big)',\qquad \frac{\exp(\lg|1+x| - x)}{y_1^2(x)} = \pm\frac{1+x}{x^2}\,e^{-x} = \mp\Big(\frac{e^{-x}}{x}\Big)'$$

[11]) „$\pm$“ před výrazem $x\lg x$ zde nehraje žádnou roli, protože $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém, právě když totéž platí o $\{y_1, -y_2\}$; aby funkce y_2 byla třídy C_2, je však nutné zvolit v obou intervalech *stejné znaménko*.

platí v $\mathbb{R} - \{-1\}$, druhá v $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ a protože na znaménku opět nezáleží, je dvojice funkcí $y_1(x) = x$ a $y_2(x) := e^{-x}$ fundamentálním systémem řešení rovnice (46) v každém z intervalů I_1, $I_2' := (-1, 0)$, $I_2'' := \mathbb{R}_+$. Snadno se však přesvědčíme, že bod 0 bylo třeba vyloučit jen „z technických důvodů“ a že jde ve skutečnosti o fundamentální systém v každém z intervalů I_1, I_2.

Poznámka 18.9. V Př. 16.10 jsme Eulerovu diferenciální rovnici řádu 3 převedli na lineární rovnici téhož řádu s konstantními koeficienty; v Př. 18.9 jsme řešili Eulerovu rovnici 2. řádu. Věnujme nyní trochu místa obecným úvahám.

Eulerovou diferenciální rovnicí řádu n nazýváme rovnici tvaru

$$Ly := \alpha_0 x^n y^{(n)} + \alpha_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y = b, \tag{47}$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou konstanty, přičemž $\alpha_0 = 1$ a b je funkce spojitá v jistém intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$.

Zabývejme se nejdříve rovnicí $Ly = 0$ a jejím obecným řešením v $\mathbb{R}_+$. Funkce $g(t) := e^t$ je třídy C_∞ v $\mathbb{R}$ a zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}_+$; lze tedy provést substituci $x = g(t)$, tj. definovat novou neznámou funkci $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rovností $Y(t) := y(e^t)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. [12]) Protože budeme dosazovat za funkci y a za její derivace (podle x), vyjdeme raději z ekvivalentní identity $y(x) = Y(\lg x)$ platné v $\mathbb{R}_+$. Postupným derivováním dostaneme (v $\mathbb{R}_+$) identity

$$y'(x) = \frac{1}{x}\,\dot{Y}(\lg x), \tag{48$_1$}$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2}\,(\ddot{Y}(\lg x) - \dot{Y}(\lg x)), \tag{48$_2$}$$

$$y'''(x) = \frac{1}{x^3}\,(\dddot{Y}(\lg x) - 3\ddot{Y}(\lg x) + 2\dot{Y}(\lg x)) \tag{48$_3$}$$

atd. Snadno nahlédneme (a případnou indukcí snadno ověříme), že výraz $x^k y^{(k)}(x)$ je (pro $k = 1, \ldots, n$) lineární kombinací první až k-té derivace funkce Y v bodě $\lg x$ (neboli t). Z toho ihned plyne, že substitucí $x = e^t$ (neboli $t = \lg x$) přejde rovnice $Ly = 0$ v lineární diferenciální rovnici

$$\tilde{L}(Y) := Y^{(n)} + A_1 Y^{(n-1)} + \ldots + A_n Y = 0 \tag{49}$$

řádu n s konstantními koeficienty A_k pro neznámou funkci Y. Je-li $Y_1, \ldots, Y_n$ její fundamentální systém, tvoří funkce $Y_1 \circ \lg, \ldots, Y_n \circ \lg$ fundamentální systém řešení v $\mathbb{R}_+$ rovnice

$$\alpha_0 y^{(n)} + \frac{\alpha_1}{x}\,y^{(n-1)} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x^n}\,y = 0, \tag{50}$$

která vznikla z rovnice $Ly = 0$ dělením x^n. [13])

[12]) Princip záměny proměnných v „diferenciálních výrazech“ byl vysvětlen v kapitole 16, str. 155 − 156.

[13]) Fundamentální systém jsme definovali jen pro případ, že u derivace nejvyššího řádu je koeficient 1.

Abychom získali fundamentální systém rovnice (49) v $\mathbb{R}_-$, proveďme substituci $x = -e^t$, tj. zaveďme nyní funkci $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rovností $Y(t) := y(-e^t)$, z níž plyne, že $y(x) = Y(\lg(-x))$. Derivujeme-li tuto identitu, dostaneme vzorce

$$(51_1) \qquad y'(x) = \frac{1}{x}\,\dot{Y}(\lg(-x))\,,$$

$$(51_2) \qquad y''(x) = \frac{1}{x^2}\,(\ddot{Y}(\lg(-x)) - \dot{Y}(\lg(-x)))\,,$$

$$(51_3) \qquad y'''(x) = \frac{1}{x^3}\,(\dddot{Y}(\lg(-x)) - 3\ddot{Y}(\lg(-x)) + 2\dot{Y}(\lg(-x)))$$

atd. Rovnice $Ly = 0$ přejde tedy v rovnici (49) *s týmiž koeficienty* jako v případě substituce $x = e^t$, tedy s týmž obecným řešením. Je-li $\{Y_1(t), \dots, Y_n(t)\}$ fundamentální systém rovnice (49), budou v $\mathbb{R}_-$ tvořit fundamentální systém rovnice (50) funkce $Y_1(\lg(-x)), \dots, Y_n(\lg(-x))$.

Poznamenejme ještě, že se zde výjimečně zabýváme rovnicí (47), v níž koeficient u nejvyšší derivace není 1. Protože tímto koeficientem je funkce, která se v bodě 0 rovná 0, hledáme – aspoň zpočátku – řešení jen v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$. Je však možné, že z vhodných dvojic takových řešení lze vykonstruovat řešení y v celém $\mathbb{R}$; stačí, aby funkce y byla řešením v $\mathbb{R}_+$ i v $\mathbb{R}_-$ a měla v bodě 0 spojitou derivaci řádu n.

Résumé: Substituce $x = e^t$ v $\mathbb{R}_+$ a $x = -e^t$ v $\mathbb{R}_-$ vedou od rovnice (47) k téže rovnici (49); je-li ve (47) na pravé straně místo 0 funkce $b(x)$, bude pravá strana rovnice (49) rovna $b(e^t)$ v prvním případě a $b(-e^t)$ ve druhém případě. Pro obecnou funkci b není žádná souvislost mezi $b|\mathbb{R}_+$ a $b|\mathbb{R}_-$; je-li však funkce b např. sudá nebo lichá, lze očekávat, že řešení v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$ budou úzce souviset.

Příklad 18.12. Rozřešme rovnici

$$(52) \qquad x^3y''' + xy' - y = x^2 + x + 1$$

nejdříve v $\mathbb{R}_+$. Dosadíme-li podle $(48_1)-(48_3)$, dostaneme rovnici

$$(53) \qquad (L^*Y)(t) := \dddot{Y}(t) - 3\ddot{Y}(t) + 3\dot{Y}(t) - Y(t) = e^{2t} + e^t + 1\,,$$

kterou budeme řešit v $\mathbb{R}$. Charakteristická rovnice $(\lambda - 1)^3 = 0$ má trojnásobný kořen 1 a fundamentální systém tvoří proto funkce e^t, $t\,e^t$, $t^2\,e^t$. Podle V. 18.9 (a Po. 18.7) má rovnice (53) řešení tvaru $Y_0(t) = \lambda e^{2t} + \mu t^3 e^t + \nu$, kde λ, μ, ν jsou vhodné konstanty; dosadíme-li to do (53), dostaneme po úpravě rovnici $\lambda e^{2t} + 6\mu e^t - \nu = e^{2t} + e^t + 1$, takže $\lambda = 1$, $\mu = \frac{1}{6}$, $\nu = -1$ a $Y_0(t) := e^{2t} + \frac{1}{6}\,t^3 e^t - 1$ je řešením rovnice (53). Protože obecné řešení této rovnice má tvar $(c_1 + c_2 t + c_3 t^2)\,e^t + Y_0(t)$, kde c_1, c_2, c_3 jsou konstanty, má obecné řešení rovnice (52) v $\mathbb{R}_+$ tvar

$$(54_+) \qquad x\,(c_1 + c_2 \lg x + c_3 \lg^2 x) + x^2 + \tfrac{1}{6}\,x \lg^3 x - 1\,.$$

Při řešení rovnice (52) v $\mathbb{R}_-$ užijeme substituci $x = -e^t$, což vede k rovnici $(L^*Y)(t) = e^{2t} - e^t + 1$, která má stejný fundamentální systém jako rovnice (53) a řešení $Y_0(t) = e^{2t} - \frac{1}{6}\,t^3 e^t - 1$. Obecné řešení v $\mathbb{R}_-$ má proto tvar

$$(54_-) \qquad x\,(c_1 + c_2 \lg(-x) + c_3 \lg^2(-x)) + x^2 + \tfrac{1}{6}\,x \lg^3(-x) - 1\,.$$

Je-li funkce $y : \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ řešením rovnice (52) jak v $\mathbb{R}_-$, tak i v $\mathbb{R}_+$ (tj. rovná-li se $y(x)$ v $\mathbb{R}_-$ výrazu (54_-), v $\mathbb{R}_+$ výrazu (54_+), kde c_1, c_2, c_3 jsou nějaká konkrétní čísla – v $\mathbb{R}_-$ obecně jiná než v $\mathbb{R}_+$), lze funkci y spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}$ tím, že položíme $y(0) = -1$ (což je její limita v bodě 0 zprava i zleva). Takto rozšířená funkce však není řešením rovnice (52) v $\mathbb{R}$ např. proto, že $y'(0) = -\infty$.

Příklad 18.13. Rovnice

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' = x^3 \tag{55}$$

přejde substitucí $x = e^t$ v rovnici

$$\dddot{Y} - \dot{Y} = e^{3t}, \text{ kde } Y(t) = y(e^t), \tag{56_+}$$

a substitucí $x = -e^t$ v rovnici

$$\dddot{Y} - \dot{Y} = -e^{3t}, \text{ kde } Y(t) = y(-e^t). \tag{56_-}$$

Charakteristická rovnice $\lambda^3 - \lambda = 0$ má kořeny $-1, 0, 1$, takže fundamentální systém rovnic (56_+), (56_-) je $\{e^{-t}, 1, e^t\}$. Protože číslo 3 není kořen charakteristické rovnice, hledáme řešení rovnic ve tvaru Ae^{3t}, kde $A \in \mathbb{R}$. Jak snadno zjistíme dosazením, je A v prvním případě rovno $1/24$, ve druhém $-1/24$.[14]) Obecné řešení rovnic (56_+) a (56_-) je množina všech funkcí tvaru

$$c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 e^t + \tfrac{1}{24} e^{3t} \;\text{ a }\; d_1 e^{-t} + d_2 + d_3 e^t - \tfrac{1}{24} e^{3t}, \tag{57}$$

kde $c_1, \dots, d_3$ jsou libovolné konstanty. Z toho plyne, že rovnice (55) má v $\mathbb{R}_+$ a v $\mathbb{R}_-$ obecné řešení

$$\frac{c_1}{x} + c_2 + c_3 x + \frac{x^3}{24} \quad \text{a} \quad -\frac{d_1}{x} + d_2 - d_3 x + \frac{x^3}{24}. \tag{58}$$

Je-li $c_1 \neq 0$ ($d_1 \neq 0$), nemá první (druhá) z funkcí (58) v bodě 0 zprava (zleva) konečnou limitu, a řešení tedy nelze rozšířit. Je-li však $c_1 = d_1 = 0$ a $c_2 = d_2$, je v bodě 0 limita první funkce zprava i limita druhé funkce zleva rovna společné hodnotě čísel c_2, d_2 a každá z funkcí tvaru

$$y(x) := \left\{ \begin{array}{ll} c_2 - d_3 x + \frac{1}{24} x^3 & \text{pro } x \in \mathbb{R}_- \\ c_2 & \text{pro } x = 0 \\ c_2 + c_3 x + \frac{1}{24} x^3 & \text{pro } x \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right\} \tag{59}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$.

Rovnosti $y''(x) = \frac{1}{4} x$, $y'''(x) = \frac{1}{4}$ (a tedy i rovnost $x^3 y'''(x) + 3x^2 y''(x) = x^3$) sice platí v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$ při každé volbě konstant c_2, d_2, c_3, d_3, ale *funkce* (59) *není*

[14]) Není nutné dosazovat dvakrát; rovnice je lineární, takže změně znaménka pravé strany odpovídá změna znaménka řešení.

obecně řešením rovnice (55) *v celém* $\mathbb{R}$. Abychom se o tom přesvědčili, je nutné podrobněji vyšetřit i její derivace v bodě 0!

V $\mathbb{R}_-$ (v $\mathbb{R}_+$) je $y'(x) = -d_3 + \frac{1}{8}x^2$ ($y'(x) = c_3 + \frac{1}{8}x^2$); protože funkce y je spojitá v bodě 0 a protože $\lim_{x\to 0-} y'(x) = -d_3$ ($\lim_{x\to 0+} y'(x) = c_3$), platí podle V.5.5 rovnost $y'_-(0) = -d_3$ ($y'_+(0) = c_3$). V důsledku toho derivace $y'(0)$ existuje, právě když je $c_3 = -d_3$; rovná se pak společné hodnotě těchto čísel. Předpokládejme to; protože pak $y'(0) = \lim_{x\to 0} y'(x)$, je y' spojitá v bodě 0. Z rovnosti $y''(x) = \frac{1}{4}x$ v $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ plyne, že y'' má v bodě 0 limitu 0, takže podle V.5.5 je i $y''(0) = 0$, přičemž funkce y'' je v bodě 0 spojitá. V $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$ je $y'''(x) = \frac{1}{4}$, a podle V.5.5 je tedy i $y'''(0) = \frac{1}{4}$.

Dokázali jsme, že *funkce* (59) *je řešením v* $\mathbb{R}$ *rovnice* (55), *právě když je* $c_3 = -d_3$. Z právě rozřešeného příkladu je patrné, že *v některých případech může mít Eulerova diferenciální rovnice nekonečně mnoho řešení v celém* $\mathbb{R}$, *zatímco jiná její řešení v* $\mathbb{R}_-$ *a v* $\mathbb{R}_+$ (*kterých je též nekonečně mnoho*) *se na řešení v* $\mathbb{R}$ *rozšířit nedají.* Tyto komplikace jsou u Eulerovy rovnice (47) způsobeny koeficientem x^n u $y^{(n)}$, který se v bodě 0 anuluje. [15])

* * *

Nyní ještě krátce pojednáme o možnosti řešení lineární diferenciální řadou, i když toto téma patří spíše do komplexní analýzy. Abychom se vyhnuli dosti komplikovaným pojmům, které komplexní analýza v této části matematiky užívá, omezíme se na aplikaci dvou existenčních tvrzení: [16])

Věta 18.11. *Předpokládejme, že koeficienty* $a_1, \dots, a_n$ *rovnice*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = b \tag{60}$$

i její pravá strana b *jsou funkce holomorfní v jistém kruhu* $K(\zeta, R) \subset \mathbb{C}$. *Pak pro každou* n*-tici komplexních čísel* $y_0, \dots, y_{n-1}$ *existuje právě jedna mocninná řada* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\zeta)^k$, *jejíž součet* $y(z)$ *je řešením rovnice* (60) *v* $K(\zeta, R)$ *a splňuje počáteční podmínky*

$$y(\zeta) = y_0\,,\ y'(\zeta) = y_1\,, \dots, y^{(n-1)}(\zeta) = y_{n-1}\,. \tag{61}$$

---

[15]) Na Př. 18.13 lze dobře ilustrovat jeden z nesprávných a zcela nelogických postupů, s nímž se v bezduchém kalkulu bohužel velmi často setkáváme: „Protože $y''(x) = \frac{1}{4}x$ a $y'''(x) = \frac{1}{4}$ a protože pravé strany těchto rovností mají dobrý smysl v celém $\mathbb{R}$, platí uvedené rovnosti zřejmě v celém $\mathbb{R}$; dosazením do rovnice (55) se přesvědčíme, že je opravdu splněna v celém $\mathbb{R}$. O konstanty c_3 a d_3 není nutné se starat, protože první derivace se v rovnici nevyskytuje a při dalším derivování stejně vypadnou." (Tato zcela nesprávná úvaha připomíná pověstné derivování $(\lg(\lg(\operatorname{arccotg} x/\pi)))' = -1/(\lg(\operatorname{arccotg} x/\pi) \cdot \operatorname{arccotg} x \cdot (1+x^2))$, při němž derivovaná funkce nemá smysl nikde a výraz vpravo všude.) Poznamenejme ještě, že podmínku $c_3 = -d_3$ neodhalí zřejmě ani žádný počítačový program, který „umí" derivovat, protože počítá právě jen formálně.

[16]) Znám jen jednu monografii pojednávající o diferenciálních rovnicích v komplexním oboru s přesností a srozumitelností běžnou v reálné analýze; je to Jarníkova kniha [14], na niž zájemce o hlubší pochopení látky v celé její (nemalé) složitosti odkazuji. Věta 18.11 má v této monografii číslo 20a; věta 18.12 plyne z tvrzení uvedených v § 6 kapitoly III. Viz též [20].

Poznámka 18.10. Všechny derivace jsou nyní samozřejmě podle komplexní proměnné, řešením v $K(\zeta, R)$ rozumíme funkci y, která tam rovnici (60) splňuje identicky. Analogicky jako v reálném oboru se zavádí lineární nezávislost funkcí, fundamentální systém, Wronského determinant; koeficienty lineárních kombinací jsou ovšem komplexní. Lze ukázat, že platí analogie vět 18.2–18.6; interval (α, β) se přitom nahradí množinou $K(\zeta, R)$. Pro reálnou analýzu je důležité toto tvrzení:

Dodatek k V. 18.11. *Jsou-li splněny předpoklady* V. 18.11, *je-li* $\zeta \in \mathbb{R}$ *a jsou-li funkce* a_k *a* b *v intervalu* $I := K(\zeta, R) \cap \mathbb{R}$ *reálné, je při reálných počátečních podmínkách i restrikce řešení na interval* I *reálná.*

Poznámka 18.11. Na str. 73 je v bodech 1) – 3) naznačeno, jak „řešení rovnice řadou" probíhá. Jsou-li splněny předpoklady V. 18.11, odpadá ověřování bodu 3), protože věta *zaručuje*, že poloměr konvergence získané řady je $\geq R$.

Věta 18.11 dokonce *umožňuje* (aspoň teoreticky) *získat celý fundamentální systém řešení rovnice* (60). Zvolíme-li totiž jakoukoli regulární matici M typu $n \times n$ a rozřešíme-li rovnici (60) s nulovou pravou stranou a s počátečními podmínkami danými sloupci matice M, budou řešení lineárně nezávislá, protože jejich Wronského determinant bude roven $\det M$ a protože v komplexním oboru platí analogie V. 18.4. (Nejjednodušší regulární matice je přitom matice jednotková, s níž budeme pracovat v následujícím příkladě.)

Příklad 18.14. Abychom našli fundamentální systém $\{y_1, y_2\}$ rovnice

$$y'' + zy' + y = 0\,, \tag{62}$$

stačí najít řešení y_1, y_2 splňující např. počáteční podmínky $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Řešení budeme hledat ve tvaru mocninné řady o středu 0; protože koeficienty (považované za funkce komplexní proměnné z) jsou holomorfní v celém $\mathbb{C}$, budou mít mocninné řady, které získáme, poloměr konvergence rovný $+\infty$ a jejich součty budou řešeními v celém $\mathbb{C}$.

Předpokládejme, že funkce

$$y_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{63_0}$$

je řešením rovnice (62) v $\mathbb{C}$. Derivováním člen po členu získáme identity

$$y_1'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}\,, \tag{63_1}$$

$$y_1''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, c_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, c_{k+2}\, z^k \tag{63_2}$$

platné také v celém $\mathbb{C}$. Dosazením do (62) dostaneme identitu

$$(2c_2 + c_0) + (6c_3 + 2c_1)\, z + \sum_{k=2}^{\infty} ((k+2)(k+1)\, c_{k+2} + (k+1)\, c_k)\, z^k = 0\,; \tag{64}$$

z počátečních podmínek přitom plyne, že $c_0 = y_1(0) = 1$ a $c_1 = y_1'(0) = 0$.

Jak víme, součet mocninné řady je nulová funkce, právě když jsou všechny koeficienty řady rovny nule. Z toho v našem případě plynou rovnosti

$$c_2 = -\tfrac{1}{2}\,,\ c_3 = 0\,,\ (k+2)c_{k+2} + c_k = 0 \ \text{ pro všechna } \ k \geq 2\,, \tag{65}$$

a z nich vzorce

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!!}\,,\quad c_{2k+1} = 0 \ \text{ pro každé } \ k \geq 0\,. \tag{66}$$

Je tedy

$$y_1(z) = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{8} - \frac{z^6}{48} + \frac{z^8}{384} - \frac{z^{10}}{3840} + \frac{z^{12}}{46080} - \dots\,. \tag{67}$$

S řešením $y_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ již nebude tolik práce, protože rekurentní vzorec pro koeficienty již máme; stačí jen uvážit, že nyní je $c_0 = y_2(0) = 0$, $c_1 = y_2'(0) = 1$, z čehož podle (64) plyne, že $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{3}$, takže

$$c_{2k} = 0\,,\quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!!} \ \text{ pro každé } \ k \geq 0\,. \tag{68}$$

Nyní tedy je

$$y_2(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{15} - \frac{z^7}{105} + \frac{z^9}{945} - \frac{z^{11}}{10395} + \frac{z^{13}}{135135} - \dots\,. \tag{69}$$

Najděme ještě řešení y_0 rovnice

$$y'' + zy' + y = z \tag{70}$$

s počátečními podmínkami $y_0(0) = y_0'(0) = 0$.[17)]

Z těchto podmínek plyne, že $c_0 = c_1 = 0$. Protože na pravé straně (64) je nyní třeba napsat z, je $c_2 = 0$ a $c_3 = \frac{1}{6}$. V důsledku toho je

$$c_{2k} = 0 \ \text{ a } \ c_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-1}}{2\,(2k+1)!!} \ \text{ pro každé } \ k \in \mathbb{N}\,, \tag{71}$$

takže

$$y_0(z) = \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{30} + \frac{z^7}{210} - \frac{z^9}{1890} + \frac{z^{11}}{20790} - \frac{z^{13}}{270270} + \dots\,. \tag{72}$$

Obecné řešení rovnice (70) má tvar $y_0 + k_1 y_1 + k_2 y_2$, kde $k_1 \in \mathbb{C}$, $k_2 \in \mathbb{C}$ jsou libovolné konstanty. $\square$

[17)] Kdyby byla pravá strana rovnice (70) rovna 0 (neboli kdybychom stále řešili rovnici (62)), byla by podle V. 18.11 funkce $y \equiv 0$ jediným řešením splňujícím uvedené „nulové“ počáteční podmínky. Protože však pravá strana není identicky rovna 0, vedou nulové počáteční podmínky k řešení, které identicky rovno nule není.

Ve fyzikálních a technických problémech často vystupují cylindrické, sférické, hypergeometrické a další funkce, kterým se spolu s Legendrovými, Hermitovými, Laguerrovými a dalšími polynomy říká *speciální funkce*. Jsou řešeními diferenciálních rovnic druhého řádu, jejichž koeficienty sice nejsou holomorfní, ale od holomorfních funkcí se příliš neliší.

Plně uspokojivá řešení takových rovnic je třeba hledat v komplexní analýze, v níž se pracuje s obecně mnohoznačnými *analytickými funkcemi*, zejména s (nekonečně-značným) komplexním logaritmem a (obecně mnohoznačnou) komplexní obecnou mocninou. Protože to je zcela mimo náš dosah, omezíme se na řešení v intervalech tvaru $(0, R)$; vzhledem k tomu, že koeficienty rovnice budou nyní obecnější než ve větě 18.11, nelze si divit, že i řešení bude komplikovanější.

Věta 18.12. *Nechť funkce A, B jsou holomorfní v kruhu $K(0, R)$ a nechť*

$$\rho(\rho - 1) + A(0)\rho + B(0) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2), \tag{73}$$

kde $\rho_1 \geq \rho_2$ jsou reálná čísla. Pak platí:

1. *Rovnice*

$$y'' + \frac{A(x)}{x}\, y' + \frac{B(x)}{x^2}\, y = 0 \tag{74}$$

má v $(0, R)$ vždy (aspoň jedno) řešení tvaru

$$x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \tag{75$_1$}$$

kde řada vpravo konverguje v $K(0, R)$ a není řadou nulovou.

2. *Není-li $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$, má rovnice (74) v intervalu $(0, R)$ dvě lineárně nezávislá řešení tvaru*

$$x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, \tag{75$_2$}$$

kde obě řady konvergují v $K(0, R)$.

3. *Nemá-li rovnice (74) lineárně nezávislá řešení tvaru (75$_2$), má v intervalu $(0, R)$ fundamentální systém složený z funkcí tvaru*

$$x^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad x^{\rho_1} \lg x \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k + x^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, \tag{76}$$

kde obě řady konvergují v $K(0, R)$.

Poznámka 18.12. Z našich úvah jsme musili vyloučit případ, kdy polynom (73) (tzv. *charakteristický polynom* rovnice (74)) nemá reálné kořeny, protože mocniny s nereálnými exponenty jsme nezavedli; ani v komplexní analýze nepatří jejich definice mezi nejjednodušší.

Jak se čtenář snadno sám přesvědčí, lze polynom (73) získat např. takto: Do levé strany rovnice (74) dosadíme $y = x^\rho$, zkrátíme výrazem $x^{\rho-2}$ a položíme $x = 0$.

V. 18.12 nevylučuje případ, kdy ρ_1 je celé nezáporné číslo; pak je první z řad (75) řadou mocninnou a její součet je (při vhodné volbě koeficientů c_k) řešením rovnice (74) v množině $K(0, R) - \{0\}$.

Při řešení rovnice (74) hledáme nejdříve řešení tvaru $(75_1)-(75_2)$; výrazy tam napsané se nazývají **pseudopotenční řady**. Jak je patrné z 1. části věty, *jedno pseudopotenční řešení $y_1 \not\equiv 0$ existuje vždy*; jestliže kromě násobků funkce y_1 další pseudopotenční řešení y_2 neexistuje, nezbývá než hledat řešení ve tvaru uvedeném ve 3. části věty. *Podmínka, že $\rho_1 - \rho_2$ není celé číslo, je postačující, nikoli nutná k tomu, aby řešení* (75_2) *byla lineárně nezávislá.*

Poznamenejme konečně, že v aplikacích jsou A i B často polynomy, tedy funkce holomorfní v celé rovině $\mathbb{C}$; všechny řady uvedené ve větě 18.12 pak konvergují také všude v $\mathbb{C}$.

Příklad 18.15. Hledejme podle V. 18.12 řešení rovnice

$$Ly := y'' + \frac{y'}{x} + y = 0\,, \tag{77}$$

jejíž koeficienty odpovídají polynomům $A(x) = 1$ a $B(x) = x^2$. Protože $A(0) = 1$, $B(0) = 0$, má polynom (73) nyní tvar $\rho^2 = 0$, takže $\rho_1 = \rho_2 = 0$; z toho plyne existence řešení y_1, které je součtem jisté mocninné řady s poloměrem konvergence $+\infty$, přičemž tento součet bude řešením rovnice (77) v $\mathbb{C} - \{0\}$. Je-li

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \tag{78_0}$$

je

$$\frac{y_1'(x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k\, x^{k-2} = \sum_{k=-1}^{\infty} (k+2) c_{k+2}\, x^k\,, \tag{78_1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k\, x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2}\, x^k\,, \tag{78_2}$$

takže

$$(Ly)(x) = \frac{c_1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + (k+2)^2 c_{k+2})\, x^k\,. \tag{79}$$

Tento výraz je (identicky) roven nule, právě když jsou koeficienty u všech mocnin x rovny nule [18]); je tedy $c_1 = 0$ a pro všechna $k \ge 0$ platí relace $c_k + (k+2)^2 c_{k+2} = 0$. Z ní plyne, že $c_k = 0$ pro všechna lichá k, a zvolíme-li např. $c_0 = 1$, bude

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^2 4^2 \dots (2k)^2} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \quad \text{pro všechna} \quad k \ge 0 \tag{80}$$

[18]) Víme, že podobné tvrzení platí pro mocninné řady; protože vynásobením pravé strany (79) faktorem x dostaneme řadu mocninnou, platí tvrzení i v našem případě.

a funkce

$$y_1(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \tag{81}$$

bude řešením rovnice (77) v $\mathbb{C} - \{0\}$.

Kdybychom tuto rovnici napsali ve tvaru

$$L_1 y := xy'' + y' + xy = 0\,, \tag{77_1}$$

byla by funkce (81) jejím řešením v celém $\mathbb{C}$. Poznamenejme, že jde o nejjednodušší **Besselovu rovnici** a že funkce (81) je (až snad na multiplikativní konstantu) **Besselova funkce** $J_0(x)$.

Zbývá najít řešení y_2 rovnice (77) tak, aby $\{y_1, y_2\}$ byl fundamentální systém; protože z dosavadního postupu je zřejmé, že další řešení ve tvaru pseudopotenční řady neexistuje [19]), užijeme 3. část V.18.12 : Vytvoříme (nyní již jen v $\mathbb{R}_+$) funkci

$$y_2(x) := y_1(x) \lg x + \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, x^k \tag{82}$$

a najdeme koeficienty d_k tak, aby tato funkce byla řešením rovnice (77), nebo – což je v $\mathbb{R}_+$ totéž – rovnice (77_1). Položíme-li $y_3 = y_1 \lg x$, je

$$y_3'(x) = y_1'(x) \lg x + \frac{y_1(x)}{x}\,, \quad y_3''(x) = y_1'' \lg x + 2\,\frac{y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2}\,; \tag{83}$$

uvážíme-li, že $y_1(x)$ je řešením rovnice (77_1), snadno zjistíme, že

$$(L_1 y_3)(x) = 2y_1'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(k+1)!\, k!\, 2^{2k}}\,. \tag{84}$$

Naším úkolem je najít čísla d_k tak, aby funkce $Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, x^k$ splňovala rovnici $2y_1' + L_1 Y = 0$. Protože

$$(L_1 Y)(x) = d_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (d_k + (k+2)^2 d_{k+2})\, x^{k+1} \tag{85}$$

a protože v řadě pro $2y_1'(x)$ jsou jen členy s lichými indexy, je patrné, že $d_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \geq 0$, a zbývá rozřešit nekonečnou soustavu lineárních rovnic

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\, k!\, 2^{2k}} + d_{2k} + 4\,(k+1)^2\, d_{2k+2} = 0,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{86}$$

První rovnice této soustavy je $-1 + d_0 + 4d_2 = 0$, takže když položíme $d_0 = 1$, bude $d_2 = 0$.

---

[19]) Postup, kterým jsme získali funkci (81), je jednoznačný až na multiplikativní konstantu.

Následující rovnice mají pak řešení

$$d_4 = -\frac{1}{128}\,,\ d_6 = \frac{5}{13824}\,,\ d_8 = -\frac{13}{1769472}\,,\ d_{10} = \frac{77}{884736000}\,,\ \dots\,. \tag{87}$$

Obecný vzorec, plynoucí z rekurentních vztahů (86), není zrovna jednoduchý. Doporučuji čtenáři, aby příslušný výpočet provedl a ověřil, že je

$$d_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k}} \sum_{j=1}^{k-1} \Bigl((j+1)!\,j!\prod_{m=j+1}^{k} m^2\Bigr)^{-1} \quad \text{pro každé } \ k \ge 2\,. \tag{88}$$

Hledaným řešením rovnice (77_1) je tedy funkce

$$y_2(x) := y_1(x)\lg x + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} d_{2k}x^{2k} \tag{82'}$$

a $\{y_1, y_2\}$ je fundamentální systém rovnice (71) v $\mathbb{R}_+$. $\square$

Obecnou **Besselovu rovnici** lze napsat ve tvaru

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0\,, \tag{89}$$

kde ν je libovolné (komplexní) číslo. V příkladu 18.15 jsme tuto rovnici, přepsanou na tvar

$$y'' + \frac{y'}{x} + \Bigl(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Bigr)\,y = 0\,, \tag{89_1}$$

vyřešili pro $\nu = 0$.

Příklad 18.16. Buď nyní $\nu = \frac{1}{2}$, takže máme řešit rovnici

$$Ly := y'' + \frac{y'}{x} + \Bigl(1 - \frac{1}{4x^2}\Bigr)\,y = 0\,; \tag{90}$$

ve větě 18.12 to odpovídá volbě $A \equiv 1$ a $B(x) = x^2 - \frac{1}{4}$, takže polynom (73) je roven $\rho^2 - \frac{1}{4}$ a má kořeny $\pm\frac{1}{2}$. Rovnici (90) budeme proto řešit jen v $\mathbb{R}_+$, kde je ekvivalentní s rovnicí

$$L_1y := x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})\,y = 0\,. \tag{90_1}$$

Položíme-li

$$y_1(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,x^k \quad \text{pro všechna } \ x \in \mathbb{R}_+\,, \tag{91}$$

snadno zjistíme, že

$$(L_1y_1)(x) = x^{3/2}\,\bigl(2c_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(c_k + (k+2)(k+3)\,c_{k+2})\,x^{k+1}\bigr)\,, \tag{92}$$

přičemž koeficienty u všech mocnin x^k musí být rovny 0.

Z rovnosti $c_1 = 0$ a z rekurentního vztahu

$$c_k + (k+2)(k+3)\,c_{k+2} = 0 \tag{93}$$

plyne, že $c_{2k+1} = 0$ pro všechna celá $k \geq 0$. Položíme-li $c_0 = 1$, dostaneme z relací (93) snadno vzorec

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad \text{pro všechna celá} \quad k \geq 0\,. \tag{94}$$

To vede k řešení

$$y_1(x) = \sqrt{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,,\ \ x \in \mathbb{R}_+\,. \tag{95}$$

Zkusme najít další řešení $y_2(x)$ rovnice (90_1) ve tvaru pseudopotenční řady odpovídající kořenu $\rho_2 = -\frac{1}{2}$ polynomu $\rho^2 - \frac{1}{4}$, tj. položme

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty} d_k\,x^k\,,\ \ x \in \mathbb{R}_+\,. \tag{96}$$

Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned}(L_1 y_2)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\,d_k\,x^{k-1/2} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k\,x^{k+3/2} \\ &= x^{3/2}\sum_{k=0}^{\infty}\big((k+2)(k+1)\,d_{k+2} + d_k\big)\,x^k\,,\end{aligned} \tag{97}$$

protože v prvním součtu jsou první dva sčítance rovny 0. Položíme-li $d_1 = 0$, bude $d_{2k+1} = 0$ pro všechna k; položíme-li $d_0 = 1$, dostaneme z rekurentního vztahu

$$(k+2)(k+1)\,d_{k+2} + d_k = 0 \tag{98}$$

rovnost

$$d_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \text{pro všechna} \quad k \geq 0\,. \tag{99}$$

Funkce

$$y_2(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \tag{100}$$

je tedy další (pseudopotenční) řešení rovnice (90) v $\mathbb{R}_+$; jistě je zřejmé, že *řešení y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá, a to přesto, že rozdíl kořenů polynomu $\rho^2 - \frac{1}{4}$ je celé číslo.*

Cvičení

A. U každé z uvedených trojic a čtveřic funkcí najděte všechny otevřené intervaly, v nichž jsou lineárně nezávislé (resp. závislé).

18.01. $1, \cos x, \cos^2 x$

18.02. $1, \sinh x, \cosh x$

18.03. $1, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.04. $e^x, \sinh x, \cosh x$

18.05. $e^x, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.06. $e^{2x}, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.07. $e^{2x}, e^{-2x}, \sinh^2 x$

18.08. $1, \sinh x, x \sinh x$

18.09. x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}

18.10. $\lg x, x \lg x, x^2 \lg x$

18.11. $1, \sin x \sinh x, \cos x \cosh x$

18.12. $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x$

18.13. $1, \sin x, \sin^2 x, \sin^3 x$

18.14. $e^{2x}, e^{-2x}, \sinh^2 x, \cosh^2 x$

18.15. $1, \lg(x + \sqrt{x^2 - 1}\,), \lg(x - \sqrt{x^2 - 1}\,)$

B. Ověřte, v jakých maximálních otevřených intervalech jsou uvedené funkce y_1, y_2 lineárně nezávislé a sestrojte lineární diferenciální operátor L druhého řádu s koeficientem 1 u druhé derivace tak, aby rovnice $Ly = 0$ měla fundamentální systém $\{y_1, y_2\}$. Pak najděte obecné řešení rovnice $Ly = b$ s funkcí b uvedenou v posledním sloupci.

	$y_1(x),\ y_2(x)$	$b(x)$
18.16.	$x,\ 1/x$	$\sqrt{x}\,,\ \sin x$
18.17.	$x,\ e^x$	$1,\ x-1,\ (x-1)^2$
18.18.	$x,\ x^4$	$1,\ \sqrt[4]{x}\,,\ 1/x$
18.19.	$x^2,\ e^{-x}$	$x+2,\ x(x+2)$
18.20.	$e^{x^2},\ e^{-x^2}$	$1,\ 8x^4$
18.21.	$\sinh x,\ \cosh x$	$1,\ x,\ e^x$
18.22.	$e^x \sin x,\ e^x \cos x$	$1,\ x,\ e^{-x}$
18.23.	$1,\ \arcsin x$	$1,\ \sqrt{1-x^2}\,,\ 1/\sqrt{1-x^2}$
18.24.	$1,\ \operatorname{tg} x$	$1,\ \sin x,\ \operatorname{tg} x$
18.25.	$\lg x,\ 1/x$	$1,\ 1+\lg x$

18.26. $\lg x$, $x \lg x$	$\lg x,\ \lg^2 x$
18.27. $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$	$x,\ \sqrt[6]{x}$
18.28. $\sqrt{x}$, $1/x$	$1/x,\ \sqrt{x}$
18.29. 1, $\operatorname{arctg} x$	$1,\ 1/(x^2+1)$
18.30. 1, $\operatorname{argsinh} x$	$x,\ 1/(x^2+1)$

C. Najděte maximální otevřené intervaly, v nichž daná trojice funkcí y_1, y_2, y_3 tvoří fundamentální systém rovnice $Ly = 0$, a v nich pak najděte obecné řešení rovnice $Ly = b$ s pravými stranami uvedenými v posledním sloupci.

$y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$	Ly	$b(x)$
18.31. 1, x, $\dfrac{1}{x}$	$xy''' + 3y''$	$\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x^2}$
18.32. x, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x^2}$	$y''' + \dfrac{5y''}{x} + \dfrac{2y'}{x^2} - \dfrac{2y}{x^3}$	$40,\ 90\,(x+8)$
18.33. 1, x, $\lg x$	$xy''' + 2y''$	$48x,\ 576 \lg x$
18.34. 1, x, $\operatorname{arctg} x$	$y''' + \dfrac{3x^2-1}{x\,(x^2+1)}\, y''$	$60x,\ \dfrac{1}{x}$
18.35. x, $\sinh x$, $\cosh x$	$y''' - \dfrac{y''}{x} - y' + \dfrac{y}{x}$	$x,\ 8x \sinh x$

D. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $Ly = b$ s konstantními koeficienty, kde dvě varianty pravé strany b jsou uvedeny v posledním sloupci.

Ly	$b(x)$
18.36. $y'' - 3y' + 2y$	$e^x,\ e^{-x}$
18.37. $y'' - 2y' - 3y$	$16\,e^{3x},\ 64xe^{-x}$
18.38. $y'' + 2y' + y$	$xe^{-x},\ x^2$
18.39. $y'' - y$	$\sinh x,\ x \cosh x$
18.40. $y'' - 4y' + 3y$	$10 \sin x,\ 16 \sinh x$
18.41. $y'' - 2y' + y$	$12\,x^2 e^x,\ 50 \cos^2 x$
18.42. $y'' + 4y' + 3y$	$60 \sinh^2 x,\ (x^2+x)\,e^{-x}$
18.43. $y'' + 4y$	$25xe^x,\ 9x \sin x$

18.44.	$y'' + y$	$x^2,\ 8x\cos x$
18.45.	$y'' + 9y$	$50\,x\,e^x,\ 4\sin^3 x - 3\sin 3x$
18.46.	$y'' - 2y' + 2y$	$\sin x,\ 2x^2$
18.47.	$y'' - 2y' + 5y$	$10\,(\sin x + \cos x),\ 4\,e^x - 8\,e^{-x}$
18.48.	$y''' + 3y'' + 3y' + y$	$6\,e^{-x},\ 48\sinh x$
18.49.	$y''' + y'' + y' + y$	$4\sinh x,\ 8\cos x$
18.50.	$y''' - y'' - 4y' + 4y$	$10\sin x,\ 8x^3$
18.51.	$y''' - y'' + 4y' - 4y$	$8x^2,\ 25\,e^x$
18.52.	$y''' - y'' + y' - y$	$x^2,\ 4xe^x$
18.53.	$y''' - y'' + 2y$	$10\cos x,\ 2x^3$
18.54.	$y^{(4)} - 2y'' + y$	$x^4,\ 16\,e^x$
18.55.	$y^{(4)} - y$	$\sin 2x,\ 8\sinh x$

E. Najděte maximální otevřené intervaly, v nichž mají následující Eulerovy rovnice $Ly = b$ řešení, a sestrojte v nich jejich obecná řešení.

	Ly	$b(x)$
18.56.	$x^2y'' - 2xy' + 2y$	$x^2 + x,\ x\lg x$
18.57.	$x^2y'' + 3xy' + y$	$\dfrac{1}{x},\ \dfrac{\lg x}{x}$
18.58.	$x^2y'' + xy' + y$	$\sin(\lg x),\ x^3$
18.59.	$x^2y'' - 2y$	$\dfrac{1}{x},\ x^2\lg x$
18.60.	$x^2y'' + xy' - 4y$	$x + \dfrac{1}{x},\ \sinh(\lg x)$
18.61.	$x^3y''' + 3x^2y''$	$x^3, \lg x$
18.62.	$x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y$	$x + 1,\ \lg^2 x$
18.63.	$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y$	$x,\ \dfrac{\lg x}{x}$
18.64.	$x^3y''' + 2x^2y'' + 3xy' + 5y$	$\dfrac{1}{x^2}, x\lg^2 x$
18.65.	$x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y$	$\dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x^2}$

F. Na základě známého řešení y_1 diferenciální rovnice $Ly = 0$ druhého řádu a V. 18.10 najděte další řešení y_2 tak, aby $\{y_1, y_2\}$ byl její fundamentální systém. (Je-li u některého příkladu napsán místo y_1 otazník, lze toto řešení snadno uhodnout.)

Pak rozřešte rovnici $Ly = b$, kde b je daná funkce (a u každého řešení samozřejmě uveďte i příslušný obor).

	Ly	$y_1(x)$	$b(x)$
18.66.	$y'' + \operatorname{tg} x \cdot y'$	?	$\cos x$
18.67.	$y'' + 2 \operatorname{cotg} 2x \cdot y' - \dfrac{4y}{\sin^2 2x}$	$\operatorname{tg} x$	$\sin x$
18.68.	$y'' - \dfrac{xy' - y}{x^2(\lg x - 1)}$	?	$\lg x - 1$
18.69.	$y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{cotg} x) y' + 2 \operatorname{cotg}^2 x \cdot y$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$
18.70.	$y'' - \Big(2x + \dfrac{1}{x}\Big) y'$	?	x^2
18.71.	$y'' + 2\, \dfrac{2x^2 + 1}{2x^2 - 1} (xy' - y)$	?	$2x^2 - 1$
18.72.	$y'' + \dfrac{2y' + (2x - 3) y}{1 - 2x}$	e^x	xe^{-x}
18.73.	$y'' - 2 \operatorname{cotg} 2x \cdot y'$	?	$\cos^2 x$
18.74.	$y'' + \dfrac{2 \sin x \cdot y' - (\sin x + \cos x) y}{\cos x - \sin x}$	$\sin x$	$\cos x - \sin x$
18.75.	$y'' + \dfrac{\lg x + 2}{x \lg x} y' + \dfrac{2 (\lg x + 1)}{x^2 \lg^2 x} y$	$\lg x$	$x^2 \lg x$

G. Pro každou z následujících rovnic najděte dvě lineárně nezávislá řešení v některém z tvarů uvedených ve větách 18.11 a 18.12 (vč. oborů v nich uvedených). [20])

	Ly		Ly
18.76.	$y'' + x^2 y' + xy$	**18.77.**	$y'' + x^4 y' + x^3 y$
18.78.	$y'' + xy$	**18.79.**	$y'' + x^2 y$
18.80.	$y'' - \dfrac{y}{x}$	**18.81.**	$y'' + \dfrac{(3x - 2) y' + y}{x (x - 2)}$

[20]) V některých případech bude zřejmé, že nalezená řada je řešením ve větším oboru, než zaručuje např. V. 18.12.

18.82. $y'' - \dfrac{2xy' + 6y}{1 - x^2}$ **18.83.** $y'' - \dfrac{2xy' - y}{1 - x^2}$

18.84. $y'' + \dfrac{(6x-1)\,y' + 2y}{2x\,(x-1)}$ **18.85.** $y'' + \dfrac{3+x}{x}\,y' - \dfrac{3}{x^2}\,y$

Řešení

A. Funkce z cvičení **18.01**, **18.02**, **18.05**–**18.08**, **18.11**–**18.13** jsou lineárně *nezávislé* v každém otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, funkce z cvičení **18.09** (resp. **18.10**) v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$ (resp. $I \subset \mathbb{R}_+$); funkce z cvičení **18.03**, **18.04** a **18.14** jsou lineárně *závislé* v $\mathbb{R}$ (a tedy i v každém intervalu $I \subset \mathbb{R}$). Maximální otevřenou množinou, v níž jsou všechny tři funkce z cvičení **18.15** definovány, je interval $J := (1, +\infty)$ a funkce jsou lineárně *závislé* v každém otevřeném $I \subset J$.

B. Za „**O:**“ následuje diferenciální operátor Ly s příslušnými otevřenými intervaly; za „**Ř:**“ jsou pak uvedena řešení rovnice s první, druhou a popř. třetí pravou stranou.

18.16. **O:** $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{y}{x^2}$ v $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $\frac{4}{21}\,x^{5/2}$; 2) $-\sin x - \dfrac{\cos x}{x}$

18.17. **O:** $y'' - \dfrac{xy'}{x-1} + \dfrac{y}{x-1}$ v $I_1 := (-\infty, 1)$ a $I_2 := (1, +\infty)$;
Ř: 1) $e^{x-1}\,\mathrm{Ei}(1-x) - x\lg|1-x| - 1$ v I_1 a I_2; 2) $-x^2 - x - 1$;
3) $-\frac{1}{2}x^3 - x - 1$

18.18. **O:** $y'' - \dfrac{4y'}{x} + \dfrac{4y}{x^2}$ v $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $-\frac{1}{2}x^2$; 2) $-\frac{16}{35}\,x^{9/4}$;
3) $-\frac{1}{9}x(1 + 3\lg|x|)$

18.19. **O:** $y'' + \dfrac{(x^2-2)\,y'}{x^2+2x} - \dfrac{2\,(x+1)\,y}{x^2+2x}$ v $(-\infty,-2), (-2,0)$ a $\mathbb{R}_+$;
Ř: 1) $x^2\lg|x| - x + 1$; 2) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

18.20. **O:** $y'' - \dfrac{y'}{x} - 4x^2 y$ v $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $\frac{1}{8}\,(e^{x^2}\,\mathrm{Ei}(-x^2) - e^{-x^2}\,\mathrm{Ei}(x^2))$
2) $-2x^2$;

18.21. **O:** $y'' - y$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) -1; 2) $-x$; 3) $\frac{1}{4}e^x(2x-1)$

18.22. **O:** $y'' - 2y' + 2y$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}(x+1)$; 3) $\frac{1}{5}\,e^{-x}$

18.23. **O:** $y'' + \dfrac{xy'}{x^2-1}$ v $(-1,1)$; **Ř:** 1) $\frac{1}{4}(x^2 + \arcsin^2 x)$;
2) $\frac{1}{9}(x^2-7)\sqrt{1-x^2}$; 3) $-\sqrt{1-x^2}$

18.24. **O:** $y'' - (2\,\mathrm{tg}\,x)\,y'$ v intervalech $(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
Ř: 1) $\frac{1}{4}(1 + 2x\,\mathrm{tg}\,x)$; 2) $-\frac{1}{3}\sin x$; 3) $\frac{1}{4}(\mathrm{tg}\,x - 2x)$

18.25. **O:** $y'' + \dfrac{(1+2\lg x)y'}{x(1+\lg x)} - \dfrac{y}{x^2(1+\lg x)}$ v $(0, e^{-1})$ a $(e^{-1}, +\infty)$;

Ř: 1) $F(x)\lg x - x^{-1}G(x) - \frac{1}{3}x^2$, kde $F(x), G(x)$ jsou primitivní funkce funkcí $\dfrac{x}{1+\lg x}, \dfrac{x^2 \lg x}{1+\lg x}$ v uvedených intervalech ; 2) $\frac{1}{18}(2+3\lg x)x^2$

18.26. **O:** $y'' - \dfrac{2y'}{x\lg x} + \dfrac{(2+\lg x)y}{x^2 \lg^2 x}$ v $(0,1)$ a $(1,+\infty)$; **Ř:** 1) $\frac{1}{2}x^2 \lg x$; 2) $\frac{1}{4}(2\lg x - 3)x^2 \lg x$

18.27. **O:** $y'' + \dfrac{y'}{6x} + \dfrac{y}{6x^2}$ v $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) $\frac{3}{20}x^3$; 2) $\frac{18}{55}x^{13/6}$

18.28. **O:** $y'' + \dfrac{3y'}{2x} - \dfrac{y}{2x^2}$ v $\mathbb{R}_+$; **Ř:** 1) x; 2) $\frac{1}{7}x^{5/2}$

18.29. **O:** $y'' + \dfrac{2xy'}{x^2+1}$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) $\frac{1}{6}(x^2 + 2\lg(x^2+1))$; 2) $\frac{1}{2}\lg(x^2+1)$

18.30. **O:** $y'' + \dfrac{xy'}{x^2+1}$ v $\mathbb{R}$; **Ř:** 1) $\frac{1}{9}(x^3+3x)$; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{argsinh}^2 x$

C. Ve sloupcích uvádíme po řadě číslo cvičení, maximální otevřené intervaly, v nichž je daná trojice funkcí fundamentálním systémem dané rovnice, a řešení rovnice $L(y) = b$ s první a druhou pravou stranou.

18.31.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	$\frac{1}{6}x^2$	$\frac{1}{4}x(2\lg\lvert x\rvert - 3)$
18.32.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	x^3	$x^3(x+18)$
18.33.	$\mathbb{R}_+$	x^4	$\frac{16}{3}x^3(6\lg x - 7)$
18.34.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	$x^4 + 8(x^2 - \lg(1+x^2))$	$\frac{1}{6}(x^2 - 3 - 4\lg(1+x^2))$
18.35.	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$	$-(x^2+2)$	$2(x^2-3)\sinh x - 2x\cosh x$

D. Obecné řešení rovnice $Ly = b$ řádu n s konstantními koeficienty je množina všech funkcí (s definičním oborem $\mathbb{R}$) tvaru $y_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, kde y_0 je nějaké řešení rovnice $Ly = b$, $\{y_1, \dots, y_n\}$ fundamentální systém této rovnice a $c_k \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Funkce ve druhém sloupci tvoří fundamentální systém, ve třetím a čtvrtém sloupci jsou řešení y_0 rovnice $Ly = b$ pro první a druhou ze zadaných funkcí b.

18.36.	e^x, e^{2x}	$-e^x(x+1)$	$\frac{1}{6}e^{-x}$
18.37.	e^{-x}, e^{3x}	$e^{3x}(4x-1)$	$-e^{-x}(8x^2+4x+1)$
18.38.	e^{-x}, xe^{-x}	$\frac{1}{6}x^3e^{-x}$	$x^2 - 4x + 6$
18.39.	e^x, e^{-x}	$\frac{1}{2}x\cosh x - \frac{1}{4}\sinh x$	$\frac{1}{8}(2x^2+1)\sinh x - \frac{1}{4}x\cosh x$

18.40.	e^x, e^{3x}	$2\cos x + \sin x$	$-(4x+2)\,e^x - e^{-x}$
18.41.	$e^x, x\,e^x$	$x^4\,e^x$	$25 - 3\cos 2x - 4\sin 2x$
18.42.	e^{-x}, e^{-3x}	$e^{2x} - 15\,e^{-2x} - 10$	$\frac{1}{6}\,x^3 e^{-x}$
18.43.	$\cos 2x, \sin 2x$	$(5x-2)\,e^x$	$3x\sin x - 2\cos x$
18.44.	$\cos x, \sin x$	$x^2 - 2$	$(2x^2-1)\,\sin x + 2x\cos x$
18.45.	$\cos 3x, \sin 3x$	$(5x-1)\,e^x$	$\frac{2}{3}\,x\cos 3x + \frac{3}{8}\sin x -$ $\frac{1}{9}\sin 3x$
18.46.	$e^x\cos x, e^x\sin x$	$\frac{1}{5}\,(2\cos x + \sin x)$	$(x+1)^2$
18.47.	$e^x\cos 2x, e^x\sin 2x$	$3\cos x + \sin x$	$2\sinh x$
18.48.	$e^{-x}, x\,e^{-x}, x^2 e^{-x}$	$x^3 e^{-x}$	$3\,e^x - 4x^3 e^{-x}$
18.49.	$e^{-x}, \cos x, \sin x$	$\sinh x - (x+\frac{1}{2})\,e^{-x}$	$(3-2x)\,\cos x +$ $(1+2x)\,\sin x$
18.50.	e^x, e^{2x}, e^{-2x}	$\sin x + \cos x$	$2x^3 + 6x^2 + 15x + 15$
18.51.	$e^x, \cos 2x, \sin 2x$	$-(2x^2+4x+3)$	$(5x-2)\,e^x$
18.52.	$e^x, \cos x, \sin x$	$-x\,(x+2)$	$(x-1)^2\,e^x$
18.53.	$e^{-x}, e^x\cos x, e^x\sin x$	$3\cos x - \sin x$	$x^3 + 3x - 3$
18.54.	$e^x, x\,e^x, e^{-x}, x\,e^{-x}$	$x^4 + 24x^2 + 72$	$(2x^2 - 4x + 3)\,e^x$
18.55.	$e^x, e^{-x}, \cos x, \sin x$	$\frac{1}{15}\,\sin 2x$	$2x\cosh x - 3\sinh x$

E. Místo obecného řešení uvádíme (ve 2. sloupci) jen funkce tvořící fundamentální systém a (ve 3. sloupci) řešení při obou volbách pravých stran; obecné řešení se z nich vykonstruuje (v uvedených maximálních intervalech) pomocí V. 18.6.

18.56.	x, x^2	1) $x\,((x-1)\lg\lvert x\rvert - (x+1))$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $-\frac{1}{2}\,x\,(\lg^2 x + 2\lg x + 2)$ v $\mathbb{R}_+$
18.57.	$\dfrac{1}{x}, \dfrac{\lg\lvert x\rvert}{x}$	1) $\dfrac{\lg^2\lvert x\rvert}{2x}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\dfrac{\lg^3 x}{6x}$ v $\mathbb{R}_+$
18.58.	$\cos(\lg\lvert x\rvert), \sin(\lg\lvert x\rvert)$	1) $\frac{1}{4}\sin(\lg x) - \frac{1}{2}\cos(\lg x)\,\lg x$ v $\mathbb{R}_+$, 2) $\frac{1}{10}\,x^3$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$
18.59.	$\dfrac{1}{x}, x^2$	1) $-\dfrac{1+3\lg\lvert x\rvert}{9x}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\frac{1}{54}\,x^2\,(9\lg^2 x - 6\lg x + 2)$ v $\mathbb{R}_+$

18.60.	$\dfrac{1}{x^2}, x^2$	1) $-\dfrac{1}{3}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big)$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\dfrac{1}{6}\Big(\dfrac{1}{x}-x\Big)$ v $\mathbb{R}_+$
18.61.	$1, x, \dfrac{1}{x}$	1) $\frac{1}{24}x^3$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $-(1+\frac{1}{2}\lg^2 x)$ v $\mathbb{R}_+$
18.62.	$x, \cos(\lg\lvert x\rvert)$, $\sin(\lg\lvert x\rvert)$	1) $\frac{1}{2}(x\lg\lvert x\rvert - x - 2)$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $-(2+\lg x)\lg x$ v $\mathbb{R}_+$
18.63.	$x, x\lg\lvert x\rvert, \dfrac{1}{x}$	1) $\frac{1}{8}x(2\lg^2\lvert x\rvert - 2\lg\lvert x\rvert + 1)$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\dfrac{2\lg^2 x + 4\lg x + 3}{16x}$ v $\mathbb{R}_+$
18.64.	$\dfrac{1}{x}, x\cos(2\lg\lvert x\rvert)$, $x\sin(2\lg\lvert x\rvert)$	1) $-\dfrac{1}{13x^2}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $\frac{1}{8}x\lg x(\lg x - 1)$ v $\mathbb{R}_+$
18.65.	$\dfrac{1}{x}, \dfrac{\lg\lvert x\rvert}{x}, \dfrac{\lg^2\lvert x\rvert}{x}$	1) $\dfrac{\lg^3\lvert x\rvert}{6x}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$, 2) $-\dfrac{1}{x^2}$ v $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$

F. Ve druhém sloupci je napsána dvojice funkcí tvořící fundamentální systém dané rovnice, ve třetím je řešení rovnice $Ly = b$ s předepsanou pravou stranou b. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny všechny maximální otevřené intervaly, v nichž má jak diferenciální rovnice, tak i její řešení smysl.

18.66.	$1, \sin x$	$\cos x + x\sin x$	$(\frac{1}{2}(2k-1)\pi, \frac{1}{2}(2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
18.67.	$\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$	$\frac{1}{3}\cos x \operatorname{cotg} x$	$(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
18.68.	$x, \lg x$	$\frac{1}{2}x^2(\lg x - 2)$	$(0, e)$, $(e, +\infty)$
18.69.	$\sin x, \sin^2 x$	$-\sin x\cos x$	$(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
18.70.	$1, e^{x^2}$	$-\frac{1}{4}(x^2+1)$	$\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+$
18.71.	x, e^{x^2}	$-\frac{1}{2} - x^2$	$(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$
18.72.	e^x, xe^{-x}	$2x+1$	$(-\infty, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, +\infty)$
18.73.	$1, \cos^2 x$	$\frac{1}{8}\cos 2x +$ $\frac{1}{2}\sin^2 x\lg\lvert\sin x\rvert$	$(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$
18.74.	$\sin x, e^x$	$x\sin x +$ $\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$	$((k-\frac{3}{4})\pi, (k+\frac{1}{4})\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
18.75.	$\lg x, x^2\lg x$	$\frac{1}{4}x^2\lg x(2\lg x - 1)$	$(0, 1), (1, +\infty)$

G. Ve druhém sloupci jsou napsána lineárně nezávislá řešení $y_1(x)$, $y_2(x)$ dané rovnice, ve třetím sloupci je definice koeficientů c_k, v posledním sloupci obor, v němž je podle věty 18.11 nebo 18.12 příslušná funkce $y_j(x)$ určitě řešením. (Jak již bylo uvedeno, součet příslušné řady může být řešením ve větší množině.) $U(0,r)$ (resp. $P(0,r)$) je kruhové (resp. prstencové) okolí 0 v rovině $\mathbb{C}$.

18.76.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k}$	$\frac{(-1)^k}{(3k)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-2)^2$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k+1}$	$\frac{(-1)^k}{(3k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-1)^2$	$\mathbb{C}$
18.77.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{5k}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{5j-4}{5j(5j-1)}$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{5k+1}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{5j-3}{5j(5j+1)}$	$\mathbb{C}$
18.78.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k}$	$\frac{(-1)^k}{(3k)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-2)$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k+1}$	$\frac{(-1)^k}{(3k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (3j-1)$	$\mathbb{C}$
18.79.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{4k}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{4j(4j-1)}$	$\mathbb{C}$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{4k+1}$	$(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{4j(4j+1)}$	$\mathbb{C}$
18.80.	$y_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!\,(k-1)!}$		$\mathbb{C} - \{0\}$
	$y_2(x) = y_1(x) \lg x + 1 - \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k$	$\frac{k}{(k!)^2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2j+1)}{j(j+1)}$	$\mathbb{R}_+$
18.81.	$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{2}{2-x}$		$P(0,2)$
	$y_2(x) = y_1(x) \lg x$		$(0,2)$
18.82.	$y_1(x) = 3x^2 - 1$		$U(0,1)$
	$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{4k^2-1} x^{2k+1}$		$U(0,1)$

18.83. $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}$ $\quad \frac{1}{(2k)!} \prod_{j=1}^{k} (4j^2 - 6j + 3)$ $\quad U(0,1)$

$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k+1}$ $\quad \frac{1}{(2k+1)!} \prod_{j=1}^{k} (4j^2 - 2j + 1)$ $\quad U(0,1)$

18.84. $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!\,(2x)^k}{(2k-1)!!}$ $\quad P(0,1)$

$y_2(x) = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} x^k$ $\quad (0,1)$

18.85. $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(4+k)!}$ $\quad \mathbb{C} - \{0\}$

$y_2(x) = \frac{6 - 6x + 3x^2 - x^3}{6x^3}$ $\quad \mathbb{C} - \{0\}$

19. Lebesgueův integrál

„Integrál funkce f přes množinu M“ je skupina slov, která nemá smysl, není-li např. ze souvislosti patrné, který integrál máme na mysli. Definic integrálu je totiž celá řada a může se stát, že integrál funkce f přes množinu M podle jedné definice existuje, podle jiné ne. (Pokud však tento integrál existuje podle dvou definic, příslušné hodnoty bývají většinou stejné.)

Zásadní otázkou inteligentního kalkulu je, který z integrálů máme vybrat pro početní praxi? Jsem přesvědčen, že v $\mathbb{R}$ se neobejdeme bez integrálu Newtonova, protože pomocí (vhodným způsobem zobecněné) primitivní funkce se počítá převážná část jednorozměrných integrálů, vč. integrálu Riemannova. Oproti Riemannovu integrálu má integrál Newtonův ještě další výhody: jeho definice a výpočet nezávisí na tom, zdali je integrand a integrační obor omezený nebo ne, a není tedy třeba budovat (pro studenty dosti nudnou) teorii tzv. nevlastních integrálů.

Jak je to však s integrály funkcí dvou, tří, ... proměnných přes množiny obsažené v $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... ? Máme na vybranou např. mezi Riemannovým, Newtonovým, Lebesgueovým, Kurzweilovým, Perronovým integrálem. V bezduchém kalkulu se často integruje bez ověřování, zda a kdy je to dovoleno, a je asi jedno, která z definic integrálu se předstírá – výsledky budou kromě notoricky známých příkladů (které se pak snad ani nemusí řešit, protože se najdou ve sbírkách vzorců) nezaručené a často nesprávné. Má-li se však integrál užít v nové situaci (např. při výzkumné práci), měla by správnost výsledku zaručit kvalifikovaná aplikace vět dokázaných o zvoleném druhu integrálu.

Ctitelé kalkulu se evidentně zamilovali do Riemannova integrálu; odůvodňují to např. tím, že definice tohoto integrálu je jednoduchá. Je však jednoduchost definice správným kritériem výběru? Definici přece zavádíme jen jednou, zatímco numerických příkladů a teoretických úvah, v nichž využíváme vlastnosti integrálu, je nepřeberné množství, protože integrál je jedním z nejdůležitějších nástrojů analýzy a jejích aplikací. Vhodnějším kritériem výběru integrálu je pro každého, kdo při práci s ním ověřuje předpoklady aplikovaných tvrzení, jejich *jednoduchost a obecnost*. Pak Riemannův integrál soutěž prohraje např. proto, že riemannovsky nelze integrovat žádnou neomezenou (nebo „příliš nespojitou“) funkci a že ani zcela jednoduché funkce nelze integrovat přes neomezený obor; zobecněný Riemannův integrál, který by podobné situace měl řešit, má v prostorech dimenze větší než 1 značně problematickou již samu definici.

Jsem přesvědčen, že *rozhodneme-li se pro větší obecnost a jednoduchou aplikovatelnost, vybereme mezi všemi známými integrály integrál Lebesgueův jako optimální.* Jeho vadou – ale jen „jednorázovou“ – je složitější definice, kterou však bohatě vyvažuje jeho obecnost. Integrovat lze např. každou efektivně [1]) sestrojitelnou nezápornou funkci přes každou efektivně [1]) sestrojitelnou množinu a jeho vlastnosti jsou podstatně jednodušší než vlastnosti např. Riemannova integrálu.

[1]) tj. bez užití axiomu výběru

Pro čtenáře, kteří se s Lebesgueovou definicí integrálu nesetkali na vysoké škole (nebo v literatuře), vysvětlím stručně jeden z možných postupů vedoucích k definici tohoto integrálu a zavedu všechny potřebné pojmy. Pak čtenáře seznámím (bez důkazu) s větami, které jsou pro práci s Lebesgueovým integrálem (ať již je to v teorii, nebo v praxi) podstatné. Ilustrující příklady celou věc čtenáři jistě přiblíží; nebude asi na závadu při vhodných příležitostech upozornit na konkrétní vady Riemannova integrálu – snad některý z jeho dosavadních uživatelů uzná, že *Lebesgueův integrál je daleko vhodnější matematický nástroj.*

Na první pohled není rozdíl mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem nijak velký – oba integrály pracují se součty tvaru

$$\sum_{k=1}^{p} f_k \mu(M_k), \tag{1}$$

kde čísla f_k nějak souvisejí s integrovanou funkcí, množiny M_k tvoří rozklad integračního oboru M a μ je funkce zobecňující délku, obsah a objem jednoduchých geometrických útvarů v $\mathbb{R}$, v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$. Na rozdíl od riemannovských součtů (1), kdy množiny M_k jsou zpravidla intervaly, jsou v případě Lebesgueova integrálu tyto množiny daleko obecnější.

Naším prvním úkolem bude popsat, přes které množiny se lebesgueovsky integruje a jak se definuje jejich (Lebesgueova) míra, tj. zmíněné zobecnění délky, obsahu a objemu. Protože se v příslušné teorii často setkáme se součty spočetně mnoha *nezáporných* čísel, bude užitečné trochu pozměnit definici součtu zobecněné řady:

Úmluva. Nechť A je spočetná množina, pro každé $\alpha \in A$ nechť je $a_\alpha \geq 0$ a nechť podle původní definice řada

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha \tag{2}$$

diverguje; pak budeme říkat, že **součet** řady (2) je roven $+\infty$.[2])

* * *

Intervalem v $\mathbb{R}^p$ (nebo p-**rozměrným intervalem**) budeme – pokud nebude výslovně řečeno něco jiného – rozumět *kompaktní* interval, tedy kartézský součin

$$I = I_1 \times \ldots \times I_p \tag{3}$$

p jednorozměrných kompaktních (tj. omezených uzavřených) intervalů I_j.

p-**rozměrný objem** $v_p(I)$ **intervalu** (3) je definován jako součin délek intervalů I_j. Je-li tedy $I_j = \langle a_j, b_j \rangle$, je

$$v_p(I) := \prod_{j=1}^{p} (b_j - a_j); \tag{4}$$

[2]) V původní definici na str. 219 prvního dílu jsme divergentním zobecněným řadám žádný součet nepřiřadili, protože tehdy šlo o co nejtěsnější souvislost mezi konvergencí zobecněných řad a absolutní konvergencí „obyčejných“ řad. Nyní se nám hodí zobecněným řadám $\sum_{\alpha \in A} a_\alpha$ s nezápornými členy, pro něž je $\sup\{\sum_{\alpha \in K} a_\alpha\,;\ K \subset A \text{ je konečná}\} = +\infty$, přiřadit součet $+\infty$.

zřejmě jde o zobecnění délky úsečky, obsahu obdélníka a objemu kvádru. Protože v dalším budeme často dlouhou dobu pracovat jen v prostoru $\mathbb{R}^p$ s pevně daným p, budeme místo v_p psát krátce v a mluvit stručně o „objemu".

Než přikročíme k definici objemu otevřené množiny, zaveďme tento pojem: Říkáme, že **intervaly** $I \subset \mathbb{R}^p$, $J \subset \mathbb{R}^p$ **se nepřekrývají**, je-li $\operatorname{int} I \cap \operatorname{int} J = \emptyset$. Říkáme, že $\mathcal{S}$ je **systém nepřekrývajících se intervalů**, je-li složen z intervalů, z nichž žádné dva (různé) se nepřekrývají.

Definice objemu otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^p$ je založena na této větě:

Věta 19.1. *Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^p$ je sjednocením jistého spočetného systému $\mathcal{S}$ nepřekrývajících se intervalů. Jsou-li $\mathcal{S}_1 = \{I_m\}$ a $\mathcal{S}_2 = \{J_n\}$ dva takové systémy, je*

$$\sum_m v(I_m) = \sum_n v(J_n)\,. \quad \square \tag{5}$$

Prázdná množina je ovšem sjednocením prázdného systému intervalů; neprázdná otevřená množina je vždy sjednocením nekonečného systému nepřekrývajících se intervalů, protože konečné sjednocení by bylo kompaktní a kromě prázdné množiny v $\mathbb{R}^p$ neexistuje množina zároveň kompaktní a otevřená.

Je zřejmé, že z jednoho takového rozkladu (neprázdné množiny) lze rozdělováním jeho intervalů sestrojit nekonečně mnoho dalších rozkladů. Věta 19.1 přináší dva důležité poznatky: 1) Rozklady na nepřekrývající se intervaly existují. 2) Pro každé dva takové rozklady je součet objemů příslušných intervalů stejné číslo – někdy konečné, jindy nekonečné. [3])

Z toho plyne korektnost této definice:

Objemem otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^p$ rozumíme číslo

$$v(G) := \sum_{I \in \mathcal{S}} v(I)\,, \tag{6}$$

kde $\mathcal{S}$ je systém nepřekrývajících se intervalů, jejichž sjednocením je G. Protože žádný interval není otevřenou množinou, definice objemu intervalu a objemu otevřené množiny nekolidují a pro objem lze v obou případech užívat týž symbol v. $\square$

Je jistě zřejmé, že *pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^p$ je $0 \le v(G) \le +\infty$, přičemž $v(G) = 0$, právě když je $G = \emptyset$.* Příkladem otevřené množiny, jejíž objem je roven $+\infty$, je $\mathbb{R}^p$.

Označení. Systém všech otevřených podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$ budeme v dalším značit $\mathcal{T}_p$ nebo krátce $\mathcal{T}$.

Příklad 19.1$^{\mathbf{o}}$. Popišme jeden ze způsobů, jak lze k rozkladu z věty 19.1 dojít; pro jednoduchost to provedeme v rovině, v $\mathbb{R}^p$ je postup analogický, jen indexů je více.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $\mathcal{A}_n$ systém všech čtverců

$$I_{n;jk} := \left\langle \frac{j}{2^n}\,, \frac{j+1}{2^n} \right\rangle \times \left\langle \frac{k}{2^n}\,, \frac{k+1}{2^n} \right\rangle,$$

[3]) Zde poprvé užíváme úmluvu zavedenou na předcházející stránce.

kde $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. [4]) Označme $\mathcal{S}_1$ systém všech čtverců z $\mathcal{A}_1$, které jsou částí G, a buď B_1 jejich sjednocení. Jsou-li pro některé $n \in \mathbb{N}$ sestrojeny systémy $\mathcal{S}_m$ a množiny B_m, kde $1 \leq m \leq n$, buď $\mathcal{S}_{n+1}$ systém všech intervalů z $\mathcal{A}_{n+1}$, které jsou částí G, ale nejsou částí množiny $B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Tím jsou indukcí sestrojeny systémy $\mathcal{S}_n$ a příslušné množiny B_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a z konstrukce je patrné, že

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_n \cup \ldots$$

je systém nepřekrývajících se intervalů. Každý bod $x \in G$ leží pro každé $n \in \mathbb{N}$ v některém z intervalů $I_n \in \mathcal{A}_n$, a protože G je otevřená množina, je $I_n \subset G$ pro skoro všechna n; zvolíme-li nejmenší n tak, že $x \in I_n \subset G$, je $I_n \in \mathcal{S}_n$, takže $x \in B_n$. Sjednocením všech množin B_n, tj. sjednocením všech intervalů patřících do některého $\mathcal{S}_n$, je tedy celá množina G. [5])

* * *

Každá množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je podmnožinou nějaké otevřené množiny (např. $\mathbb{R}^p$) a každá otevřená množina má nějaký objem. Obecně sice neexistuje nejmenší otevřená množina G obsahující M, ale vždy můžeme vytvořit číslo

$$\mu^*(M) := \inf\{v(G);\ M \subset G \in \mathcal{T}\}, \tag{7}$$

které se nazývá **vnější** (**Lebesgueova**) **míra** množiny M.

Věta 19.2. *Vnější míra má tyto vlastnosti:*

$$\mu^*(M) \geq 0 \text{ pro každou množinu } M \subset \mathbb{R}^p; \tag{8}$$

$$M \subset N \Rightarrow \mu^*(M) \leq \mu^*(N); \tag{9}$$

$$\mu^*\Big(\bigcup_k M_k\Big) \leq \sum_k \mu^*(M_k) \text{ pro každý spočetný systém množin } M_k. \tag{10}$$

(8) konstatuje, že μ^* je nezáporná množinová funkce, definovaná na systému všech podmnožin prostoru $\mathbb{R}^p$, který budeme v dalším značit $\exp(\mathbb{R}^p)$. [6]) Vlastnost (9) je tzv. **monotonie** vnější míry, vlastnost (10) je její σ-**subaditivita**; kdybychom v (10) nahradili slovo „spočetný“ slovem „konečný“, dostali bychom slabší podmínku, které se říká **subaditivita**.

Z (10) ihned plyne, že pro každé dvě množiny $M \subset \mathbb{R}^p$, $N \subset \mathbb{R}^p$ platí nerovnost $\mu^*(M \cup N) \leq \mu^*(M) + \mu^*(N)$; *rovnost však bohužel neplatí ani v případě, že množiny M, N jsou disjunktní.* To je *zásadní vada vnější míry.*

---

[4]) Čtverce $I_{n;jk}$ získáme tím, že rozdělíme rovinu vodorovnými přímkami o rovnicích $y = j/2^n$, $j \in \mathbb{Z}$, a svislými přímkami o rovnicích $x = k/2^n$, $k \in \mathbb{Z}$. Systém $\mathcal{A}_{n+1}$ vznikne ze systému $\mathcal{A}_n$ tím, že každý čtverec z $\mathcal{A}_n$ rozdělíme na 4 shodné čtverce.

[5]) Konstrukce je velmi názorná; doporučuji čtenáři, aby si nakreslil nějakou (nejlépe omezenou) otevřenou množinu $G \neq \emptyset$ a pak zakresloval množiny $B_1, B_2, \ldots$ a sledoval, jak se množina G postupně zaplňuje.

[6]) Označení $\exp(X)$ pro systém všech podmnožin množiny X není v literatuře jediné, ale lze se s ním setkat poměrně často.

Je jistě zřejmé, že $\mu^*(G) = v(G)$ *pro každou otevřenou množinu* G; čtenář bude jistě sám umět dokázat, že i

$$(11) \qquad \textit{pro každý interval } I \textit{ je } \ \mu^*(I) = v(I).$$

Vnější míra tedy zobecňuje pojem objemu (intervalů a otevřených množin) na celý systém $\exp(\mathbb{R}^p)$. Ukazuje se, že neplatnost rovnosti $\mu^*(M \cup N) = \mu^*(M) + \mu^*(N)$ pro (některé) disjunktní množiny M, N *není důsledkem nesprávné metody zobecňování objemu, ale přílišné velikosti systému* $\exp(\mathbb{R}^p)$. (Lze dokázat, že *žádné* zobecnění objemu na systém $\exp(\mathbb{R}^p)$ nesplňuje uvedenou rovnost pro všechny dvojice disjunktních množin.) „Naštěstí“ však lze od systému $\exp(\mathbb{R}^p)$ přejít k několika dostatečně rozsáhlým podsystémům, v nichž žádaná rovnost (pro disjunktní množiny) platí.

Podsystém bychom samozřejmě chtěli zvolit tak, aby výsledek běžných množinových operací provedených na jeho elementech ležel opět v tomto podsystému. Jako nejvhodnější se proto jeví nějaká σ-**algebra**, což je neprázdný systém $\mathcal{A}$ podmnožin (jakékoli) množiny X mající tyto vlastnosti:

$$(12) \qquad X \in \mathcal{A};$$

$$(13) \qquad M \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{A} \Rightarrow M - N \in \mathcal{A};$$

$$(14) \qquad \text{pro každý spočetný systém množin } M_k \in \mathcal{A} \text{ je } \bigcup_k M_k \in \mathcal{A}.$$

Z de Morganových vzorců pak snadno plyne, že

$$(15) \qquad \text{pro každý spočetný systém množin } M_k \in \mathcal{A} \text{ je } \bigcap_k M_k \in \mathcal{A}.$$

Snadno nahlédneme, že

(16) *průnik libovolného systému σ-algeber obsažených v* $\exp(X)$ *je σ-algebra*.

Z toho ihned plyne, že *existuje nejmenší σ-algebra $\mathcal{B}$ obsahující systém $\mathcal{T}$*; je to samozřejmě průnik *všech* σ-algeber obsahujících všechny otevřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$. Vzhledem k (12) a (13) obsahuje $\mathcal{B}$ i všechny uzavřené množiny. V této σ-algebře, jejíž prvky se nazývají **borelovské množiny**, bychom sice mohli celkem dobře pracovat, ale dáme přednost jiné, ještě rozsáhlejší σ-algebře $\mathcal{M}$ tzv. (*lebesgueovsky*) *měřitelných množin*.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^p$ se nazývá (**lebesgueovsky**) **měřitelná**, jestliže

(17) *pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje množina $G \in \mathcal{T}$ tak, že $M \subset G$ a $\mu^*(G - M) < \varepsilon$.*

Názorně řečeno: *Množina M patří do $\mathcal{M}$, právě když ji lze pokrýt otevřenou množinou G tak, že vnější míra „přečnívající“ části $G - M$ množiny G je libovolně malá.* Měřitelné jsou tedy nejen všechny otevřené množiny, ale všechny množiny, které se v tomto smyslu od otevřených množin „málo liší“.

Definice. (**Lebesgueovou**) **mírou** $\mu(M)$ měřitelné množiny M nazveme její vnější míru; definujeme tedy

$$\mu(M) := \mu^*(M) \text{ pro každou množinu } M \in \mathcal{M}. \quad \square \tag{18}$$

Než přejdeme k vyjmenování základních vlastností míry, zaveďme dvě užitečná **označení**: Symbol

$$M_k \nearrow M \quad (\text{resp. } M_k \searrow M) \tag{19}$$

bude znamenat, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $M_k \subset M_{k+1}$ (resp. $M_k \supset M_{k+1}$), přičemž

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \quad \Big(\text{resp. } M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k\Big). \tag{20}$$

Věta 19.3. *Systém $\mathcal{M}$ všech měřitelných množin je σ-algebra obsahující všechny otevřené a všechny uzavřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$. Pro všechny množiny M, N a M_k z $\mathcal{M}$ přitom platí:*

$$M \subset N \Rightarrow \mu(M) \le \mu(N); \tag{21}$$

$$M \subset N,\ \mu(M) < +\infty \Rightarrow \mu(N - M) = \mu(N) - \mu(M); \tag{22}$$

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big) = \sum_k \mu(M_k) \text{ pro každý disjunktní spočetný systém množin } M_k; \tag{23}$$

$$M_k \nearrow M \Rightarrow \mu(M_k) \to \mu(M); \tag{24}$$

$$M_k \searrow M,\ \mu(M_1) < +\infty \Rightarrow \mu(M_k) \to \mu(M). \tag{25}$$

Jak je patrné, je míra μ monotónní nezáporná množinová funkce definovaná v $\mathcal{M}$; vlastnost (23) je její σ-**aditivita**. Tato vlastnost je silnější než tzv. **aditivita**, definovaná platností implikace

$$M \cap N = \emptyset \Rightarrow \mu(M \cup N) = \mu(M) + \mu(N); \tag{26}$$

aditivita je ovšem také ekvivalentní s podmínkou, která vznikne z (23), nahradíme-li tam slovo „spočetný“ slovem „konečný“.

Cvičení 19.1. Nechť $I_k \subset \mathbb{R}$ je pro každé $k = 1, \ldots, p$ interval *libovolného typu* (uzavřený, otevřený, polouzavřený, omezený, neomezený) s krajními body $a_k < b_k$. Dokažte, že pak je

$$I := I_1 \times \ldots \times I_p \in \mathcal{M} \text{ a } \mu(I) = \prod_{k=1}^{p} (b_k - a_k); \tag{27}$$

součin vpravo je přitom $+\infty$, právě když je některý z intervalů I_k neomezený.

Cvičení 19.2. Je-li $\mu(M) = +\infty$, rovnost (22) neplatí, protože její pravá strana $+\infty - (+\infty)$ nemá smysl. Uvedením protipříkladu dokažte, že předpoklad konečnosti $\mu(M_1)$ je pro platnost tvrzení (25) také podstatný.
Rada: Položte např. $M_k = (k, +\infty)$. $\diamond$

Než podáme další charakteristiky měřitelnosti množin, zaveďme tři nové pojmy:

Definice. Říkáme, že **množina** $M \subset \mathbb{R}^p$ **má míru** 0, je-li $\mu^*(M) = 0$. Říkáme, že množina $M \subset \mathbb{R}^p$ je **typu** G_δ, je-li průnikem spočetně mnoha otevřených množin $M_k \subset \mathbb{R}^p$; říkáme, že množina $N \subset \mathbb{R}^p$ je **typu** F_σ, je-li sjednocením spočetně mnoha uzavřených množin $N_k \subset \mathbb{R}^p$. $\square$

Protože $\mathcal{M}$ je σ-algebra obsahující všechny otevřené a všechny uzavřené podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$, *jsou i všechny množiny typů* F_σ *a* G_δ *měřitelné.*

Cvičení 19.3. Dokažte tato tvrzení:

(28) *každá množina míry* 0 *je měřitelná*;

(29) *každá podmnožina množiny míry* 0 *má míru* 0;

(30) *sjednocení spočetně mnoha množin míry* 0 *má míru* 0;

(31) *každá spočetná množina má míru* 0.

Cvičení 19.4. Dokažte, že *množina* $M \subset \mathbb{R}^p$ *je typu* F_σ, *právě když je* $\mathbb{R}^p - M$ *typu* G_δ. Dokažte dále, že *množina* $\mathbb{Q}$ *všech racionálních čísel je typu* F_σ, *množina všech iracionálních čísel typu* G_δ.

Cvičení 19.5. Dokažte, že *každá otevřená množina je typu* F_σ, *každá uzavřená množina typu* G_δ.
Rada: V prvním případě užijte V. 19.1, ve druhém de Morganovy vzorce. $\diamond$

Věta 19.4. *K tomu, aby množina* $M \subset \mathbb{R}^p$ *byla měřitelná, je nutné a stačí, aby byla splněna kterákoli z těchto podmínek:*

1. *Existuje množina* $H \supset M$ *typu* G_δ *tak, že* $\mu(H - M) = 0$.
2. *Existuje množina* $K \subset M$ *typu* F_σ *tak, že* $\mu(M - K) = 0$.

Poznámka 19.1. Protože systém $\mathcal{M}$ všech měřitelných množin je σ-algebra obsahující všechny otevřené množiny a systém $\mathcal{B}$ všech borelovských množin je nejmenší taková σ-algebra, je $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. Lze ukázat, že $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$; nejen to: mohutnost systému $\mathcal{M}$ je „daleko větší“ než mohutnost systému $\mathcal{B}$. [7])

Přitom jsou měřitelné množiny v jistém smyslu „blízké“ borelovským množinám; k otevřeným množinám mají mnohé z nich ještě „dost daleko“ (viz definici (17)), ale *jakoukoli měřitelnou množinu lze získat z vhodné množiny typu* G_δ *odebráním vhodné množiny míry* 0 *a z vhodné množiny typu* F_σ *naopak přidáním vhodné*

---

[7]) Pro čtenáře, který se setkal s *mohutností* množin a s *kardinálními čísly*: $\mathcal{B}$ má „jen“ mohutnost kontinua $\mathfrak{c}$ (což je zároveň mohutnost prostoru $\mathbb{R}^p$), kdežto mohutnost systému $\mathcal{M}$ je rovna $2^{\mathfrak{c}}$, což je mohutnost systému všech podmnožin množiny mohutnosti $\mathfrak{c}$ (tedy speciálně mohutnost systému $\exp(\mathbb{R}^p)$). I systém všech množin míry 0 má mohutnost $2^{\mathfrak{c}}$.

množiny míry 0. Nepředstavitelnou rozmanitost měřitelných množin je tedy třeba přičíst množinám míry 0, přes něž má – jak se ukáže později – každá funkce Lebesgueův integrál rovný 0, takže je lze k integračnímu oboru přidávat, nebo je od něj odebírat, aniž se integrál (jak co do existence, tak co do hodnoty) změní. Poznamenejme ještě, že v početní praxi se při integraci nesetkáme s integračním oborem, který by nebyl typu F_σ nebo G_δ.

Představa, že bychom se mohli blíže seznámit se všemi množinami míry 0, je iluzorní. [8]) Nebude však na škodu představit čtenáři nejznámější nespočetnou množinu míry 0, tzv. Cantorovo diskontinuum, protože to je množina, která hraje podstatnou roli v nejrůznějších příkladech i tvrzeních nejen analýzy, ale především topologie.

Příklad 19.2. Cantorovo diskontinuum $\mathcal{D}$ je definováno jako množina všech čísel tvaru

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_k}{3^k}\,,\quad \text{kde}\ \ i_k\in\{0,1\}\ \ \text{pro každé}\ \ k\in\mathbb{N}\,. \tag{32}$$

Přiřadíme-li číslu (32) číslo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i_k}{2^k}\,, \tag{32$'$}$$

je tím zřejmě definováno zobrazení množiny $\mathcal{D}$ *na* interval $\langle 0,1\rangle$, protože každé číslo z tohoto intervalu lze napsat ve tvaru (32′). *Protože každý interval je nespočetná množina, platí totéž nutně i o* $\mathcal{D}$.

Zvolíme-li (na chvíli pevně) posloupnost $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$, označíme-li x součet příslušné řady (32) a položíme-li

$$s_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{i_k}{3^k} \tag{33}$$

pro každé $n\in\mathbb{N}$, platí zřejmě nerovnosti

$$0\le x-s_n\le 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3^n}\,,$$

takže $x\in\langle s_n, s_n+3^{-n}\rangle$.

Utvoříme-li tedy pro každé $n\in\mathbb{N}$ a každou posloupnost $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ nul a jedniček interval

$$I(i_1,\dots,i_n)=\langle s_n, s_n+3^{-n}\rangle\,, \tag{34}$$

leží $\mathcal{D}$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ ve sjednocení D_n všech 2^n těchto intervalů. Protože každý z nich má délku 3^{-n} (a protože jsou disjunktní), je $\mu(D_n)=p_n:=(2/3)^n$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ je tedy $\mu^*(\mathcal{D})\le p_n$, a protože $p_n\to 0$ pro $n\to\infty$, je $\mu^*(\mathcal{D})=0$. $\mathcal{D}$ *je tedy* (podle (28)) *měřitelná množina a její míra* $\mu(\mathcal{D})$ *je rovna* 0.

---

[8]) Např. proto, že je jich $2^{\mathfrak{c}}$.

Protože při každé volbě čísel $i_k \in \{0,1\}$, $k \in \mathbb{N}$, je zřejmě

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(i_1,\ldots,i_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{3^k}\,,$$

je $\mathcal{D}$ průnikem všech množin D_n; *protože každá z množin D_n je kompaktní, platí totéž o $\mathcal{D}$.* D obsahuje spočetnou množinu krajních bodů všech intervalů $I(i_1,\ldots,i_n)$, ale kromě těchto bodů obsahuje $\mathcal{D}$ nespočetně mnoho dalších bodů.

Obsahuje-li nějaká množina nějaký interval, má zřejmě kladnou vnější míru. *Cantorovo diskontinuum* proto žádný interval neobsahuje, a nemá tedy žádné vnitřní body; protože je uzavřené, *je řídké v* $\mathbb{R}$.

Popišme intervaly $I(i_1,\ldots,i_n)$ geometricky: Intervaly $I(0) = \langle 0, \frac{1}{3}\rangle$ a $I(1) = \langle \frac{2}{3}, 1\rangle$ vzniknou tím, že interval $I = \langle 0,1\rangle$ rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly a prostřední otevřený interval $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ vynecháme. Intervaly $I(i_1,0)$ a $I(i_1,1)$ vzniknou obdobně: Každý z intervalů $I(i_1)$ rozdělíme na tři stejně dlouhé intervaly a prostřední otevřené intervaly $J(i_1)$ vynecháme. Obecně je interval $J(i_1,\ldots,i_n)$ „prostřední otevřená třetina" intervalu $I(i_1,\ldots,i_n)$. Sjednocení všech intervalů

(35) $$J,\ J(i_1),\ \ldots,\ J(i_1,\ldots,i_n),\ \ldots$$

je otevřená množina $\langle 0,1\rangle - \mathcal{D}$ s mírou rovnou 1, přičemž *tyto intervaly jsou nejen disjunktní, ale mají dokonce disjunktní uzávěry.* Z toho plyne další pozoruhodná vlastnost Cantorova diskontinua: *$\mathcal{D}$ nemá žádný izolovaný bod, $\mathcal{D} = \operatorname{der}\mathcal{D}$.* (Kdyby totiž bod x byl izolovaným bodem množiny D, existovalo by okolí $P(x,\delta)$ disjunktní s $\mathcal{D}$, interval $(x-\delta, x)$ by byl částí některého z intervalů J' napsaných v (35) a jakýsi jiný interval J'' z této posloupnosti by obsahoval interval $(x, x+\delta)$. Bod x by tedy ležel v uzávěru dvou různých intervalů J', J''.) $\square$

„Zdravý selský rozum" by nám mohl našeptávat, že Cantorovo diskontinuum má míru 0 proto, že je řídké; uvedl by nás tím v naprostý omyl. V následujících dvou příkladech se čtenář přesvědčí, že *řídkost a hustota s mírou vůbec nesouvisí.*

Příklad 19.3. Ukažme, že

(36) *pro každé $\varepsilon \in (0,1)$ existuje řídká množina $H \subset \langle 0,1\rangle$ s mírou $> 1-\varepsilon$.*

Nechť posloupnost čísel $a_k \in (0,1)$ obsahuje (jako členy) všechna racionální čísla ležící v $(0,1)$ a nechť $\varepsilon \in (0,1)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ buď I_k otevřený interval délky $< \varepsilon/2^k$, pro nějž je $a_k \in I_k \subset (0,1)$. Pak je $G := \bigcup_k I_k \subset (0,1)$ otevřená množina a $\mu(G) \le \sum_k \mu(I_k) < \sum_k \varepsilon/2^k = \varepsilon$. Množina $H := \langle 0,1\rangle - G$ je kompaktní a má míru $> 1-\varepsilon$. Protože množina $A := \{a_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ je hustá v intervalu $\langle 0,1\rangle$, platí totéž o množině G; její doplněk H je proto řídký (sr. s V.12.14).

Příklad 19.4. Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel je hustá v $\mathbb{R}$, ale má míru 0, protože je spočetná.

Poznámka 19.2. Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^p$ má ještě jednu důležitou vlastnost: *Měřitelnost množiny a její míra jsou invariantní vůči posunutí, otočení (kolem kteréhokoli bodu) a zrcadlení (podle jakékoli nadroviny dimenze $p-1$):*

Jinými slovy: *Znamená-li rovnost $y = f(x)$ soustavu rovností*

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 + \ldots + \lambda_{1p}x_p + b_1\,,\\
&y_2 = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{2p}x_p + b_2\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
&y_p = \lambda_{p1}x_1 + \lambda_{p2}x_2 + \ldots + \lambda_{pp}x_p + b_p\,,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

kde matice čísel λ_{jk} má determinant rovný ± 1 a kde b_j jsou libovolná čísla, je $M \subset \mathbb{R}^p$ měřitelná, právě když je měřitelná množina $f(M)$, načež $\mu(M) = \mu(f(M))$.

* * *

Úmluva. Až do konce této kapitoly bude slovo „funkce“ znamenat zobrazení do $\mathbb{R}^*$; zobrazením do $\mathbb{R}$ budeme v případě potřeby říkat „konečné funkce“. $\square$

Na začátku kapitoly 3 jsme zavedli algebraické operace s $\pm\infty$; dvě z nich je vhodné v teorii Lebesgueova integrálu modifikovat: Zatímco jsme dosud říkali, že součin $a_1 \ldots a_n$ nemá smysl, je-li jeden z faktorů 0 a jiný $\pm\infty$, **definujme** nyní, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každou n-tici čísel $a_1, \ldots, a_n$ z $\mathbb{R}^*$ je

$$
a_1 a_2 \ldots a_n := 0\,,\ \textit{je-li } a_k = 0 \textit{ pro některé } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\,,
\tag{38}
$$

a to i v případě, že jiný faktor a_j je roven $\pm\infty$. [9])

Kromě toho položme

$$
(+\infty)^{\alpha} := +\infty \ \ \textit{a} \ \ (+\infty)^{-\alpha} := 0 \ \ \textit{pro všechna} \ \ \alpha \in \mathbb{R}_+\,. \quad \square
\tag{39}
$$

Integrovat budeme jen tzv. *měřitelné funkce* přes měřitelné množiny; podobně jako je tomu u měřitelných množin, kde výsledek spočetného sledu spočetných operací provedených na otevřených nebo uzavřených množinách je měřitelná (dokonce borelovská) množina, i zde bude platit, že *výsledek spočetného sledu spočetných operací provedených na spojitých funkcích je měřitelná funkce.* [10])

Definice. Říkáme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}^*$ je **měřitelná (v** M**)**, je-li $M \in \mathcal{M}$ a je-li množina

$$
\{x \in M\,;\ f(x) > c\}
\tag{40}
$$

měřitelná pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Věta 19.5. *Funkce f spojitá na měřitelné množině M je v M měřitelná.*

---

[9]) Součinu $0 \cdot (\pm\infty)$ se v elementární analýze nepřiřazuje žádná hodnota, protože by to např. platnost tvrzení „$\lim(a_k \cdot b_k) = \lim a_k \cdot \lim b_k$, *má-li pravá strana smysl*“, stejně nezaručilo. Zde však je definice (38) výhodná, protože se dosti často vyskytují situace, kdy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ i $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou *neklesající posloupnosti nezáporných konečných čísel* (*nebo funkcí*), a v tom případě právě vyslovené tvrzení o limitě součinu platí, protože pak $\lim a_k = 0 \Rightarrow a_k b_k = 0$ pro všechna k.

[10]) „Prakticky“ se tedy nikdy nesetkáme ani s neměřitelnou množinou, ani s neměřitelnou funkcí, protože důkaz jejich existence je založen na *axiomu výběru* a příslušná konstrukce je neefektivní.

Množinu (40) lze totiž napsat ve tvaru $f_{-1}((c,+\infty))$, což je podle Cv. 12.31 množina otevřená v M, tedy průnik $M \in \mathcal{M}$ s jistou množinou otevřenou v $\mathbb{R}^p$.

Cvičení 19.6. Dokažte, že *měřitelnost funkce f v M je ekvivalentní se třemi výroky, které získáme, nahradíme-li v definici měřitelnosti symbol $>$ kterýmkoli ze symbolů $\geq$, $<$, $\leq$.*

Rada: Uvažte, že např.

$$\{x \in M\,;\, f(x) \geq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in M\,;\, f(x) > c + \tfrac{1}{n}\}\,. \diamond$$

Cvičení 19.7. Dokažte, že *z měřitelnosti funkce f v M plyne měřitelnost množin*

$$\{x \in M\,;\, f(x) = c\} \text{ pro všechna } c \in \mathbb{R}^*\,. \tag{41}$$

Rada: Užijte Cv. 19.6. $\diamond$

Cvičení 19.8. Dokažte, že *pro každé dvě funkce f, g měřitelné v M jsou měřitelné i tyto množiny*:

$$\{x \in M\,;\, f(x) < g(x)\}\,,\quad \{x \in M\,;\, f(x) \leq g(x)\}\,,\quad \{x \in M\,;\, f(x) = g(x)\}\,. \tag{42}$$

Rada: Uvažte, že první z množin je sjednocením přes všechna racionální čísla r průniků $\{x \in M\,;\, f(x) < r\} \cap \{x \in M\,;\, g(x) > r\}$. Druhá z množin je doplňkem množiny $\{x \in M\,;\, g(x) < f(x)\}$, třetí z nich je průnikem dvou množin prostředního typu. $\diamond$

Cvičení 19.9. Dokažte, že *pro každou funkci f měřitelnou v M a pro každou měřitelnou množinu $N \subset M$ je i restrikce $f\,|\,N$ měřitelná.*

Cvičení 19.10. Dokažte toto tvrzení: *Je-li každá ze spočetně mnoha množin M_k měřitelná, je-li $M = \bigcup_k M_k$ a je-li funkce $f : M \to \mathbb{R}^*$ měřitelná v každé z množin M_k, je měřitelná i v M.*

Cvičení 19.11. Dokažte toto tvrzení: *Je-li $N \subset M$, kde M, N jsou měřitelné množiny, je-li funkce f měřitelná v M a klademe-li*

$$g(x) := \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & \text{pro všechna } x \in N \\ 0 & \text{pro všechna } x \in M - N \end{array} \right\}, \tag{43}$$

je funkce g měřitelná v M.

Rada: Užijte výsledky z předcházejících dvou cvičení. $\diamond$

Cvičení 19.12. Dokažte, že

$$\mu(M) = 0\,,\ f : M \to \mathbb{R}^* \ \Rightarrow\ f \text{ je měřitelná v } M\,. \tag{44}$$

Rada: Uvažte, že všechny množiny (40) mají nyní míru 0. $\diamond$

Algebraické operace s měřitelnými funkcemi vedou sice opět k měřitelným funkcím, ale je třeba vždy uvážit, na jaké části původní množiny jsou definovány.

Věta 19.6. *Nechť funkce f, g jsou měřitelné v M. Pak platí:*

1. *Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je funkce αf měřitelná v M.*

2. *Funkce $f + g$ je měřitelná v množině $M - \{x \in M\,;\ f(x) = -g(x) = \pm\infty\}$, funkce $f - g$ v množině $M - \{x \in M\,;\ f(x) = g(x) = \pm\infty\}$.*

3. *Funkce fg, $\max(f, g)$ a $\min(f, g)$ jsou měřitelné v M. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}_+$, je v M měřitelná i funkce $|f|^\alpha$.*

4. *Funkce f/g je měřitelná na množině*

$$M - (\{x \in M\,;\ g(x) = 0\} \cup \{x \in M\,;\ f(x) = \pm\infty \wedge g(x) = \pm\infty\}). \quad \square$$

Jak je patrné, *všechny funkce uvedené v předcházející větě jsou měřitelné na maximální podmnožině množiny M, na níž mají smysl.* $\square$

Je-li $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ posloupnost čísel (z $\mathbb{R}^*$) nebo funkcí (definovaných na jisté množině M), je její **limes inferior** a **limes superior** definován rovností

$$(45) \qquad \liminf_{k\to\infty} f_k := \lim_{n\to\infty} \inf\{f_k\,;\ k \geq n\}, \quad \limsup_{k\to\infty} f_k := \lim_{n\to\infty} \sup\{f_k\,;\ k \geq n\}.$$

Připomeňme, že (jak pro posloupnosti čísel, tak i funkcí) *platí vždy nerovnost* $\liminf f_k \leq \limsup f_k$ a že $\lim f_k$ *existuje, právě když je* $\liminf f_k = \limsup f_k$.

Věta 19.7. *Je-li funkce f_k měřitelná v M pro každé $k \in \mathbb{N}$, jsou v M měřitelné i funkce*

$$\inf\{f_k\,; k \in \mathbb{N}\},\ \sup\{f_k\,; k \in \mathbb{N}\},\ \liminf_{k\to\infty} f_k\,,\ \limsup_{k\to\infty} f_k\,.$$

Funkce $\lim_{k\to\infty} f_k$ je měřitelná na množině $\{x \in M\,;\ \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existuje$\}$.

Poznámka 19.3. Funkce spojité na měřitelné množině M se v teorii funkcí nazývají **funkce nulté Bairovy třídy**; podle V.19.5 jsou měřitelné. Funkce, které jsou v M limitami posloupností spojitých funkcí, jsou **funkce první Bairovy třídy**, funkce, které jsou v M limitami posloupností funkcí první Bairovy třídy, jsou **funkce druhé Bairovy třídy** atd.

Vztah mezi měřitelností funkce a možností aproximovat je funkcemi různých Bairových tříd je podobný vztahu mezi měřitelnými množinami a množinami otevřenými (kterým se v teorii množin říká *borelovské množiny nulté třídy*) a typu F_σ a G_δ (což jsou *borelovské množiny první třídy*):

Věta 19.8. *Konečná funkce f je měřitelná v (měřitelné množině) M, právě když platí jedna z těchto ekvivalentních podmínek:*

1. *Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje otevřená množina G míry menší než ε tak, že restrikce $f\,|\,(M - G)$ je spojitá v $M - G$.*

2. *Existuje množina H míry 0 tak, že restrikce $f\,|\,(M - H)$ je první Bairovy třídy v $M - H$.*

Dodatek. *Pro každou konečnou funkci f měřitelnou v M existuje funkce g druhé Bairovy třídy v M a množina N míry 0 tak, že v $M - N$ je $f = g$.* $\square$

Charakteristická funkce χ_M množiny $M \subset \mathbb{R}^p$ je definována podmínkami

$$\chi_M := \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ pro všechna } x \in M \\ 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^p - M \end{array} \right\}. \tag{46}$$

Cvičení 19.13. Dokažte, že

$$\text{množina } M \subset \mathbb{R}^p \text{ je měřitelná, právě když je měřitelná funkce } \chi_M . \quad \square \tag{47}$$

V teorii Lebesgueova integrálu hrají důležitou úlohu tzv. *monotónní limitní přechody*, a to jak pro posloupnosti čísel, tak i funkcí.

Je-li $a_k \in \mathbb{R}^*$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, budeme psát

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k \nearrow a \\ a_k \searrow a \end{array} \right\}, \text{ je-li } a_k \to a \text{ a je-li } \left\{ \begin{array}{l} a_k \leq a_{k+1} \\ a_k \geq a_{k+1} \end{array} \right\} \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N}. \tag{48}$$

Je-li buď $a_k \nearrow a$, nebo $a_k \searrow a$, budeme říkat, že **limitní přechod** $a_k \to a$ **je monotónní**.

Definice symbolu $f_k \nearrow f$ v M (resp. $f_k \searrow f$ v M) je zcela analogická; výrok „$f_k \leq f_{k+1}$ v M“ (resp. „$f_k \geq f_{k+1}$ v M“) přitom samozřejmě znamená, že je $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ (resp. $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$) pro všechna $x \in M$.

Je-li buď $f_k \nearrow f$ nebo $f_k \searrow f$ v M, budeme (podobně jako u posloupností čísel) říkat, že **limitní přechod** $f_k \to f$ **je v** M **monotónní**.

Cvičení 19.14. Dokažte, že (pro libovolné množiny M, N, M_k) platí:[11])

$$N \subset M \Rightarrow \chi_N \leq \chi_M ; \tag{49}$$

$$M = \bigcup_k M_k , \ N = \bigcap_k M_k \Rightarrow \chi_M = \max\{\chi_{M_k} ; k\}, \ \chi_N = \min\{\chi_{M_k} ; k\}; \tag{50}$$

$$M = \bigcup_k M_k, \text{ kde } M_k \text{ jsou disjunktní množiny } \Rightarrow \chi_M = \sum_k \chi_{M_k} ; \tag{51}$$

$$M_k \nearrow M \Rightarrow \chi_{M_k} \nearrow \chi(M); \tag{52}$$

$$M_k \searrow M \Rightarrow \chi_{M_k} \searrow \chi(M). \quad \square \tag{53}$$

Zavedeme ještě poslední pojem, s nímž je nutné seznámit se před definicí Lebesgueova integrálu: **Jednoduchou funkcí v** M budeme nazývat každou konečnou nezápornou funkci f, měřitelnou v M, pro niž je množina $f(M)$ konečná.

[11]) Je-li ve znaku pro sjednocení, průnik a součet místo dolní meze jen k, znamená to, že k probíhá od 1 buď do nějakého přirozeného čísla, nebo do ∞.

Příkladem jednoduchých funkcí v $\mathbb{R}^p$ jsou funkce tvaru

$$f = \sum_{k=1}^{q} a_k \chi_{M_k}, \tag{54}$$

kde $q \in \mathbb{N}$, kde $M_1, \ldots, M_q$ jsou měřitelné podmnožiny prostoru $\mathbb{R}^p$ a kde $a_1, \ldots, a_q$ jsou konečná nezáporná čísla.

Každá kladná hodnota $f(x)$ takové funkce má zřejmě tvar $a_{k_1} + \ldots + a_{k_r}$, kde k_j, $1 \le j \le r$, jsou právě všechny indexy, pro něž je $x \in M_{k_j}$, $a_{k_j} > 0$. Jsou-li množiny M_k disjunktní, je každá hodnota funkce (54) rovna některému z čísel $0, a_1, \ldots, a_q$. $\square$

Nechť f jej jednoduchá funkce na množině $M \neq \emptyset$ a nechť $a_1 < \ldots < a_q$ jsou právě všechny její hodnoty; pak jsou množiny $M_k := f_{-1}(a_k)$, $1 \le k \le q$, neprázdné a disjunktní, a podle Cv. 19.7 navíc měřitelné. Jsou funkcí f určeny jednoznačně a jejich sjednocení je M. Funkci f lze opět napsat ve tvaru (54), *nyní jsou však sčítance vpravo určeny funkcí f jednoznačně – dokonce i co do pořadí.*

Rovnost (54) budeme za právě popsané situace nazývat **kanonický rozklad** nebo **kanonické vyjádření** jednoduché funkce f.

Cvičení 19.15. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $f_1, \ldots, f_n$ jsou jednoduché funkce na množině M. Ověřte, že pak jsou jednoduché i funkce

$$\sum_{k=1}^{n} f_k, \quad \prod_{k=1}^{n} f_k, \quad \min\{f_k;\, 1 \le k \le n\}, \quad \max\{f_k;\, 1 \le k \le n\}. \tag{55}$$

* * *

Lebesgueův integrál budeme definovat ve čtyřech etapách.

I. Lebesgueův integrál jednoduché funkce. Je-li (54) kanonické vyjádření jednoduché funkce f v M, položíme

$$\int_M f := \sum_{k=1}^{q} a_k\, \mu(M_k). \tag{56}$$

Integrál (56) je zřejmě nezáporné číslo. Je-li $\mu(M) = +\infty$, je $\mu(M_k) = +\infty$ pro jeden nebo několik indexů k; je-li $a_k > 0$ pro některý z těchto indexů k, je součet vpravo rovný $+\infty$, a totéž tedy platí i o levé straně.

Poznámka 19.4. Součet na pravé straně rovnosti (56) má celkem jednoduchý geometrický význam: Kdyby byla množina $M \subset \mathbb{R}^2$ sjednocením disjunktních kruhů M_k, byla by pravá strana (56) rovna součtu objemu válců o základnách M_k a výškách a_k. (Objemem „degenerovaného válce o výšce 0“ rozumíme 0.) Jak uvidíme později (viz V. 19.13), je k-tý sčítanec na pravé straně (56) roven $(p+1)$-rozměrné míře množiny $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+1};\, x \in M_k, 0 \le y \le a_k\}$, tedy $(p+1)$-rozměrnému objemu válce, jehož základnou je nyní měřitelná množina M_k.

Cvičení 19.16. Dokažte, že

$$\int_M c = c\mu(M) \text{ pro každé } c \in \langle 0, +\infty\rangle \text{ a každé } M \in \mathcal{M}, \tag{57}$$

a to i v případě, že $c = 0$ a $\mu(M) = +\infty$. Dokažte dále, že

$$\mu(M) = 0 \Rightarrow \int_M f = 0 \text{ pro každou jednoduchou funkci } f \text{ v } M. \tag{58}$$

Věta 19.9. *Nechť f, g jsou jednoduché funkce v M; pak platí:*

$$f \le g \text{ v } M \Rightarrow \int_M f \le \int_M g; \tag{59}$$

$$N \in \mathcal{M},\ N \subset M \Rightarrow \int_N f \le \int_M f; \tag{60}$$

$$\alpha \in \langle 0, +\infty),\ \beta \in \langle 0, +\infty) \Rightarrow \int_M (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_M f + \beta \int_M g; \tag{61}$$

$$A \in \mathcal{M},\ B \in \mathcal{M},\ A \cap B = \emptyset,\ M = A \cup B \Rightarrow \int_M f = \int_A f + \int_B f. \tag{62}$$

II. Lebesgueův integrál měřitelné nezáporné funkce. K jeho definici potřebujeme dvě věty:

Věta 19.10. *Pro každou nezápornou funkci f měřitelnou v $M \subset \mathbb{R}^p$ existuje posloupnost jednoduchých funkcí f_k tak, že $f_k \nearrow f$ v M.*

Věta 19.11. *Jsou-li f_k, g_k jednoduché funkce v M, pro něž je $f_k \nearrow f$, $g_k \nearrow f$, je*

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f_k = \lim_{k\to\infty} \int_M g_k. \quad \square \tag{63}$$

Za situace z V. 19.10 je posloupnost $\{\int_M f_k\}$ (podle (59)) neklesající, a má tedy (konečnou nebo nekonečnou) limitu, kterou budeme moci prohlásit za integrál funkce f přes množinu M, protože podle V. 19.11 *nezávisí na bližší volbě posloupnosti* $\{f_k\}$.[12])

Definice. Je-li $f : M \to \langle 0, +\infty\rangle$ měřitelná funkce, položíme

$$\int_M f := \lim_{k\to\infty} \int_M f_k, \tag{64}$$

kde $\{f_k\}$ je (jakákoli) posloupnost jednoduchých funkcí, pro niž je $f_k \nearrow f$ v M. $\square$

[12]) Až na případ $f \equiv 0$ existuje přitom k dané funkci f takových posloupností nekonečně mnoho.

Zobecnění je korektní, protože pro jednoduchou funkci f lze klást $f_k = f$ pro všechna k.

Protože zobecňování definice Lebesgueova integrálu bude ještě pokračovat, omezme se na tři tvrzení, která jsou zvláště jednoduchá pro nezáporné funkce, a na větu charakterizující geometrický význam Lebesgueova integrálu nezáporné (měřitelné) funkce:

Věta 19.12. 1. *Jsou-li nezáporné funkce f, g měřitelné v $M \subset \mathbb{R}^p$ a jsou-li α, β konečná nezáporná čísla, je*

$$\int_M (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_M f + \beta \int_M g \,. \tag{65}$$

2. *Je-li $\{M_k\}$ konečná nebo nekonečná posloupnost disjunktních měřitelných množin, je-li M sjednocení všech M_k a je-li f nezáporná funkce měřitelná v M, je*

$$\int_M f = \sum_k \int_{M_k} f \,. \tag{66}$$

3. *Jsou-li f_k nezáporné funkce měřitelné v M, platí implikace*

$$f_k \nearrow f \quad \text{v } M \Rightarrow \int_M f_k \nearrow \int_M f \,. \tag{67}$$

Poznámka 19.5. *V Lebesgueově teorii má každá nezáporná měřitelná funkce integrál* (který ovšem může mít i hodnotu $+\infty$); to je jedna z velice podstatných výhod např. proti *Riemannově teorii, v níž můžeme integrovat* (*přes omezené množiny M, jejichž hranice má míru* 0) *jen funkce omezené, jejichž množina bodů nespojitosti ležících v* $\operatorname{int} M$ *má míru* 0.[13])

P ř í k l a d : Dirichletovu funkci

$$f(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & \text{pro všechna } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{pro všechna } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{matrix} \right\}, \tag{68}$$

která nemá Riemannův integrál přes žádný jednorozměrný interval (protože je všude nespojitá), zintegrujeme lebesgueovsky velmi snadno třeba přes celé $\mathbb{R}$: Rozdělíme $\mathbb{R}$ na množinu $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel a množinu $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel. Integrál přes $\mathbb{Q}$ se rovná nule, protože $\mathbb{Q}$ má jakožto spočetná množina míru 0; přes $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ je integrál rovný nule, protože integrand je v ní identicky nulový.

Lebesgueův integrál Dirichletovy funkce přes $\mathbb{R}$ se tedy rovná 0 *a podobné tvrzení platí i pro její integrál přes jakoukoli měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}$.*

---

[13]) Nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu je obsahem věty 161 z Jarníkovy knihy [13]. Uvážíme-li, že při „praktickém počítání“ se setkáváme jen s borelovskými množinami první třídy a s funkcemi druhé Bairovy třídy, vidíme, že (lebesgueovsky) integrovat nezápornou funkci můžeme „prakticky zcela bez obav“, že by snad integrál neexistoval.

Věta 19.13. (Geometrický význam integrálu.) *Pro každou nezápornou funkci f, měřitelnou v množině $M \subset \mathbb{R}^p$, je*

$$\int_M f = \mu_{p+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1};\, x \in M,\, 0 \le y \le f(x)\}). \quad \square \tag{69}$$

Množině vpravo se říkává **množina pod grafem funkce** f, i když tento název plně nevystihuje její dosti složitý popis: *Je to množina všech bodů $(x,y) \in M \times \mathbb{R}$, které leží nad nadrovinou $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ prostoru $\mathbb{R}^{p+1}$, určenou jeho prvními p souřadnicovými osami, nebo na ní, a v případě, že $f(x) \in \mathbb{R}_+$, i pod grafem*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1};\, x \in M,\, y = f(x)\} \tag{70}$$

funkce f nebo na něm. [14])

III. Lebesgueův integrál obecné měřitelné funkce. Před dalším zobecněním definice integrálu je třeba zavést dva nové symboly: Je-li $x \in \mathbb{R}^*$, budeme čísla

$$x^+ := \max(x,0)\,,\ x^- := \max(-x,0) \tag{71}$$

nazývat **kladná** a **záporná část čísla** x.

Obě jsou nezáporná, (aspoň) jedno z nich je rovno 0 a platí pro ně rovnosti

$$x = x^+ - x^-\,,\ |x| = x^+ + x^-\,. \tag{72}$$

Podobně pro funkce:

$$f^+ := \max(f,0)\,,\ f^- := \max(-f,0) \tag{73}$$

je **kladná** a **záporná část funkce** f. *Je-li f definována v M, jsou tam definovány i funkce f^+, f^- a platí pro ně nejen analogie rovností (72), ale i toto tvrzení:*

(74) *Funkce f je měřitelná v M, právě když to platí o funkcích f^+ a f^-.*

Lebesgueův integrál přes množinu M obecné funkce f měřitelné v M je definován rovností

$$\int_M f := \int_M f^+ - \int_M f^-\,,\ \textit{má-li pravá strana této rovnosti smysl.} \tag{75}$$

(Zobecnění je korektní, protože $f \ge 0 \Rightarrow f^+ = f,\ f^- = 0$.)

Protože oba integrály na pravé straně (75) existují, *integrál vlevo neexistuje, právě když jsou oba integrály vpravo rovny $+\infty$. Je-li (aspoň) jeden z integrálů vpravo konečný, integrál vlevo existuje*; je-li konečný první (resp. druhý) z integrálů vpravo, je $\int_M f < +\infty$ (resp. $\int_M f > -\infty$).

[14]) Délka právě uvedeného popisu „množiny pod grafem funkce“ je jistě příčinou, proč se tento ne zcela výstižný, ale podstatně kratší název užívá.

Jak víme z V.19.12, jsou integrály na pravé straně (75), geometricky řečeno, $(p+1)$-rozměrné míry množin pod grafy funkcí f^+ a f^-; integrál vlevo existuje, dají-li se tyto míry odečíst, tj. je-li (aspoň) jedna z nich konečná.

Ještě trochu jinak: Rozložíme-li množinu M na množiny

$$M^+ := \{x \in M\,;\, f(x) \ge 0\} \ \text{ a } \ M^- := \{x \in M\,;\, f(x) \le 0\},$$

je na pravé straně (75) rozdíl měr $\mu_{p+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1}\,;\, x \in M^+, 0 \le y \le f(x)\})$ a $\mu_{p+1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^{p+1}\,;\, x \in M^-, 0 \ge y \ge -f(x)\})$ (tedy míry množiny pod grafem funkce $f\,|\,M^+$ a míry množiny „nad grafem" funkce $f\,|\,M^-$). Obě míry lze odečíst, právě když je (aspoň) jedna z nich konečná.

4. Závěrečná zobecnění. Pro Lebesgueovu teorii integrálu je charakteristické, že v ní lze na většině míst zanedbávat množiny míry nula. Abychom se mohli účelně vyjadřovat, zavedeme několik nových pojmů.

Definice. Budeme říkat, že výrok $V(x)$ týkající se bodů prostoru $\mathbb{R}^p$ platí **skoro všude v množině** $M \subset \mathbb{R}^p$ (nebo: **pro skoro všechna** $x \in M$), existuje-li množina $N \subset M$ tak, že $\mu(N) = 0$ a že $V(x)$ platí pro každé $x \in M - N$. Slova „skoro všude" a „skoro všechna" budeme zpravidla zkracovat na „s. v.".

Definice. Je-li $f(x) = g(x)$ pro s. v. $x \in M$, píšeme $f \sim g$ v M a říkáme, že f, g jsou **funkce ekvivalentní v** M. [15])

Definice. Symetrická diference množin A, B je definována rovností

$$\Delta(A,B) := (A - B) \cup (B - A)\,; \tag{76}$$

je-li $\mu(\Delta(A,B)) = 0$, budeme říkat, že **množiny** A, B jsou **ekvivalentní** a psát $A \sim B$. $\square$

Symetrická diference množin A, B je množina všech bodů, které leží právě v jedné z množin A, B; lze ji napsat i ve tvaru

$$\Delta(A,B) = (A \cup B) - (A \cap B)\,. \tag{76'}$$

Snadno nahlédneme, že *implikace*

$$A \in \mathcal{M},\ A \sim B \ \Rightarrow\ B \in \mathcal{M},\ \mu(A) = \mu(B) \tag{77}$$

platí pro každé dvě množiny $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^p$ a že *tvrzení*

$$f \text{ je měřitelná v } M,\ f \sim g \text{ v } M \ \Rightarrow\ g \text{ je měřitelná v } M\,, \tag{78}$$

$$f \sim g \text{ v } M,\ \int_M f \text{ existuje } \ \Rightarrow\ \int_M g \ \text{ existuje a rovná se } \int_M f \tag{79}$$

jsou platná pro všechny dvojice funkcí f, g definovaných všude v M.

[15]) Z definice je patrné, že (reflexivní, symetrická a tranzitivní) relace $f \sim g$ v M nevyžaduje, aby tyto dvě funkce byly definovány všude v M; stačí, aby byly definovány *skoro všude v M*.

Je-li funkce f definována s. v. v M, má množina M_1 všech bodů $x \in M$, v nichž není $f(x)$ definováno, míru 0. Rozšíříme-li funkci f z $M - M_1$ na M všemi možnými způsoby, jsou (podle (78)) jen tyto dvě krajní možnosti:

1) *všechna* rozšíření jsou funkce měřitelné v M;
2) *žádné* z nich není v M měřitelné.

Z toho je patrné, že je korektní toto **zobecnění definice měřitelné funkce**: Říkáme, že **funkce** f definovaná s. v. na měřitelné množině M je **měřitelná v** M, je-li *nějaké* její rozšíření na M měřitelné v M v dosavadním smyslu. □

Z tvrzení (79) ihned plyne, že je korektní toto **zobecnění definice integrálu**: Nechť f je definována skoro všude na měřitelné množině M a nechť některé její rozšíření f^* na M má Lebesgueův integrál podle dosud platné definice; pak definujeme

$$\int_M f := \int_M f^* . \quad \square \tag{80}$$

Poznámka 19.6. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ interval s krajními body $a < b$, budeme užívat běžné označení

$$\int_a^b f := \int_M f ; \tag{81}$$

protože jednobodové množiny mají míru 0, není nutné specifikovat, o jaký typ intervalu (otevřený, polouzavřený, uzavřený) se jedná. Kromě toho je užitečné zavést integrál od a do b i v případě, že $a \geq b$, a to takto:

$$\textit{Pro každou funkci } f \textit{ a pro každé } a \in \mathbb{R}^* \textit{ je } \int_a^a f := 0 . \tag{82}$$

$$\textit{Je-li } a > b, \textit{ je } \int_a^b f := -\int_b^a f, \textit{ existuje-li integrál vpravo.} \quad \square \tag{83}$$

Zvlášť důležité jsou funkce, které mají *konečný* integrál; množina všech takových funkcí má proto i své (víceméně standardní) označení:

$$\mathcal{L}(M) := \{f \textit{ je definována s. v. v } M ; \int_M f \in \mathbb{R}\}. \tag{84}$$

Pro stručnost zápisu lze užívat např. i označení

$$\mathcal{L}^*(M) := \{f \textit{ je definována s. v. v } M ; \int_M f \textit{ existuje}\}. \tag{85}$$

Je-li M celý prostor $\mathbb{R}^p$, píšeme místo $\mathcal{L}(M)$ a $\mathcal{L}^*(M)$ někdy jen $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^*$.

* * *

Integrál závisí na integrované funkci (neboli integrandu) a na integračním oboru; základní tvrzení o integrálu proto rozdělíme na dvě skupiny.

A. Integrál jako funkce integrandu:

Věta 19.14. *Jsou-li f, g funkce měřitelné v M, platí implikace*

$$f \le g \ \text{ s.v. v } M \Rightarrow \int_M f \le \int_M g, \ \textit{existují-li oba integrály.} \tag{86}$$

Speciálně:

$$f \ge 0 \ \text{ s.v. v } M \Rightarrow \int_M f \ge 0, \tag{86'}$$

přičemž

$$f \ge 0 \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M f = 0 \Rightarrow f = 0 \ \text{ s.v. v } M. \tag{86''}$$

Důsledek. *Pro každé dvě funkce f, g měřitelné v M platí:*

$$f \le g \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M g < +\infty \Rightarrow \int_M f < +\infty; \tag{87$^+$}$$

$$f \ge g \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M g > -\infty \Rightarrow \int_M f > -\infty; \tag{87$^-$}$$

$$|f| \le g \ \text{ s.v. v } M, \ g \in \mathcal{L}(M) \Rightarrow f \in \mathcal{L}(M), \ \left|\int_M f\right| \le \int_M |f| \le \int_M g; \tag{88}$$

$$f \in \mathcal{L}(M) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}(M). \tag{89}$$

Vlastnost (89) se nazývá **absolutní konvergence** Lebesgueova integrálu; jak víme, *Newtonův integrál analogickou vlastnost nemá*, protože i pro spojitou funkci f může $(\mathcal{N})\int_a^b f$ existovat, aniž existuje $(\mathcal{N})\int_a^b |f|$. (Příklad: Newtonův integrál od 0 do $+\infty$ funkce $(\sin x)/x$ existuje, příslušný integrál z absolutní hodnoty neexistuje.)

Poznámka 19.7. Označíme-li $I_k := (k\pi, (k+1)\pi)$ pro každé celé číslo $k \ge 0$, je funkce $f(x) := (\sin x)/x$ v intervalu I_k kladná pro každé sudé k a záporná pro každé liché k; *Newtonův* integrál od 0 do $+\infty$ funkce f je roven součtu alternující řady $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f$, jejíž k-tý člen konverguje k nule. Newtonův integrál existuje proto, že se při sčítání řady každý člen se sudým indexem částečně ruší s následujícím lichým členem, a to tak, že limita $\sum_{k=0}^{n} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f$ (pro $n \to \infty$) je konečná.

Definice Lebesgueova integrálu (jakékoli funkce) je založena na tom, že nejdříve integrujeme kladnou část, pak zápornou část integrandu a druhý výsledek odečteme od prvního, pokud je to možné. V případě, který nyní vyšetřujeme, to odpovídá integraci přes sjednocení I^+ všech intervalů I_{2k} a integraci přes sjednocení I^- všech intervalů I_{2k+1}. Protože je

$$\int_{I_{2k}} \frac{\sin x}{x}\, dx \ge \frac{2}{(2k+1)\pi}, \quad \int_{I_{2k+1}} \frac{-\sin x}{x}\, dx \ge \frac{2}{(2(k+1))\pi}$$

pro každé celé $k \ge 0$, jsou příslušné řady divergentní, takže $\int_{I^+} f = \int_{I^-} f = +\infty$.

Z toho plyne, že

$$(90)\qquad (\mathcal{L})\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \ \ \textit{neexistuje}, \quad (\mathcal{L})\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = +\infty\,;$$

písmeno $\mathcal{L}$ před integrály samozřejmě znamená, že jde o Lebesgueovy integrály, písmeny $\mathcal{N}$ a $\mathcal{R}$ od nich odlišíme integrály Newtonovy a Riemannovy. $\square$

Z V. 19.14 ihned plynou tato dvě velmi často užívaná tvrzení:

(91) *Je-li f měřitelná a omezená na množině M konečné míry, je $f \in \mathcal{L}(M)$.*

(92) *Je-li f měřitelná a omezená v M a je-li $g \in \mathcal{L}(M)$, je i $fg \in \mathcal{L}(M)$.*

* * *

Tzv. (konečná) **aditivita integrálu** vzhledem k integrandu a **linearita integrálu** jsou obsahem tohoto tvrzení:

Věta 19.15. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je*

$$(93)\qquad \int_M \Big(\sum_{k=1}^n f_k\Big) = \sum_{k=1}^n \int_M f_k\,, \ \textit{má-li pravá strana rovnosti smysl.}$$

Obecněji: Jsou-li $c_1, \dots, c_n$ konečná reálná čísla, je

$$(94)\qquad \int_M \Big(\sum_{k=1}^n c_k f_k\Big) = \sum_{k=1}^n \Big(c_k \int_M f_k\Big), \ \textit{má-li pravá strana rovnosti smysl.} \quad \square$$

V Lebesgueově teorii hrají důležitou úlohu limitní přechody za znamením integrálu; následující věta jedná o **monotónních limitních přechodech**, další věta o tzv. **majorizovaném limitním přechodu**.

Věta 19.16. *Nechť funkce f_k jsou měřitelné v M; pak platí:*

$$(95)\qquad f_k \nearrow f \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M f_1 > -\infty \ \Rightarrow \ \int_M f_k \nearrow \int_M f\,;$$

$$(96)\qquad f_k \searrow f \ \text{ s.v. v } M, \ \int_M f_1 < +\infty \ \Rightarrow \ \int_M f_k \searrow \int_M f\,.$$

Věta 19.17. *Nechť funkce f_k jsou měřitelné v M a nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $|f_k| \le g$ s.v. v M. Pak*

$$(97)\qquad f_k \to f \ \text{ s.v. v } M \ \Rightarrow \ \int_M f_k \to \int_M f\,. \quad \square$$

Funkce g se v kontextu vět, jako je V. 19.17, nazývá **integrovatelná majoranta** posloupnosti funkcí f_k; protože v této souvislosti slovo „integrovatelná“ znamená, že má *konečný* integrál, budeme raději mluvit o **„majorantě z $\mathcal{L}(M)$“** nebo krátce **„z $\mathcal{L}$“**, je-li zřejmé, o kterou množinu M jde. [16])

Poznámka 19.8. Pozorný čtenář si jistě všiml, že výrok „pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $|f_k| \leq g$ s.v. v M“ by mohl mít dvě interpretace:

A. Pro každé k existuje množina N_k míry 0 tak, že nerovnost $|f_k(x)| \leq g(x)$ platí pro všechna $x \in M - N_k$.

B. Existuje množina N míry 0 tak, že nerovnost $|f_k(x)| \leq g(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$ a všechna k.

To je samozřejmě pravda; protože však sjednocení spočetně mnoha množin míry nula je množina míry nula, jsou výroky A a B ekvivalentní. (Výrok B je jen *zdánlivě* silnější; abychom jej dokázali pomocí výroku A, stačí položit $N := \bigcup_k N_k$.)

Poznámka 19.9. Ani jedna z předcházejících dvou vět nemá v Riemannově teorii obdobu, ani kdybychom např. doplnili předpoklad, že všechny zúčastněné funkce jsou omezené a že M je kompaktní jednorozměrný interval.

P ř í k l a d : Srovnejme všechna racionální čísla z intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$ do prosté posloupnosti $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ a definujme posloupnost funkcí $f_k : I \to \mathbb{R}$ podmínkami $f_k(x) := 1$, je-li $x \in \{r_1, \ldots, r_k\}$, a $f_k(x) := 0$ jinak.

Pak je $f_k \nearrow f$, kde f je Dirichletova funkce; jde přitom zároveň o majorizovanou posloupnost, protože $|f_k| \leq 1$ v I pro všechna k a $\int_0^1 1 = 1$. Čtenář, který zná Riemannův integrál, ihned vidí, že je $\int_0^1 f_k = 0$ pro každé k, zatímco funkce f integrál nemá. V Lebesgueově teorii je vše v pořádku, protože jak funkce f_k, tak i funkce f mají přes I integrál rovný nule. $\square$

Přímým důsledkem vět o limitním přechodu za znamením integrálu jsou mj. tato tvrzení o **integraci řad člen po členu**:

Věta 19.18. *Nechť posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ funkcí měřitelných v M splňuje buď podmínku*

$$f_k \geq 0 \;\; \text{s.v. v } M \text{ pro všechna } k, \tag{98}$$

nebo nechť

$$\text{existuje funkce } g \in \mathcal{L}(M) \text{ tak, že } \Big|\sum_{k=1}^{n} f_k\Big| \leq g \;\; \text{s.v. v } M \text{ pro všechna } n; \tag{99}$$

pak je

$$\int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k . \quad \square \tag{100}$$

[16]) Na rozdíl od některých cizích jazyků nemá čeština krátký název pro funkce mající konečný integrál, zatímco např. ve francouzštině slova „intégrable“ a „sommable“ dovolují obě podmínky – existenci a konečnost – jednoduše odlišit. V češtině je logické spojovat slovo „integrovatelná“ (funkce) s *existencí* integrálu, nikoli s jeho konečností. Snažme se proto vyvarovat nedorozumění.

Mezi věty o integraci řady člen po členu patří i následující tvrzení, které je zároveň jedním z **integrálních kritérií konvergence řady funkcí**.

Věta 19.19. *Je-li* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *posloupnost funkcí měřitelných v* M *a je-li*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f_k| < +\infty, \tag{101}$$

konverguje $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *absolutně s.v. v* M*, její součet leží v* $\mathcal{L}(M)$ *a platí rovnost*

$$\int_M \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_M f_k . \tag{102}$$

B. Integrál jako funkce integračního oboru:

Věta 19.20. *Je-li* $N \subset M$ *měřitelná množina a existuje-li* $\int_M f$*, platí tato tvrzení:*

$$\int_M f < +\infty \ \Rightarrow \int_N f < +\infty, \quad \int_M f > -\infty \ \Rightarrow \int_N f > -\infty, \tag{103}$$

$$f \in \mathcal{L}(M) \ \Rightarrow \ f \in \mathcal{L}(N), \tag{104}$$

$$f \geq 0 \ \text{ s.v. v } M \ \Rightarrow \int_N f \leq \int_M f . \tag{105}$$

Vlastnost (105) Lebesgueova integrálu se někdy nazývá **monotonie integrálu nezáporné funkce vzhledem k integračnímu oboru**.

Věta 19.21. *Je-li* $n \in \mathbb{N}$ *a je-li* M *sjednocením disjunktních měřitelných množin* $M_1, \ldots, M_n$*, je*

$$\int_M f = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_k} f, \ \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl.} \tag{106}$$

Důsledek. *Je-li* $M \in \mathcal{M}$*, je-li* f *definována s.v. v* M *a položíme-li* $f(x) := 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}^p - M$*, je*

$$\int_M f = \int_{\mathbb{R}^p} f, \ \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl.} \quad \square \tag{107}$$

Hlavní část V. 19.21 popisuje tzv. (konečnou) **aditivitu integrálu** vzhledem k integračnímu oboru. V následující větě bude množin M_k spočetně mnoho a příslušné tvrzení se nazývá σ-**aditivita integrálu**. Pozor však! *Předpoklady pro platnost rovnosti* (108) *nejsou již symetrické vůči oběma stranám rovnosti, jak tomu bylo v případě rovnosti* (106)!

Věta 19.22. *Nechť $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost disjunktních měřitelných množin a nechť M je jejich sjednocením. Pak je*

$$(108) \qquad \int_M f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f\,, \text{ existuje-li integrál vlevo.}$$

Poznámka 19.10. *K existenci $\int_M f$ nestačí, aby měla smysl pravá strana rovnosti* (108); *ani když je součet vpravo roven nule, nemusí integrál vlevo existovat!*

P ř í k l a d : Buď $M_k := (k, k+1\rangle$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ nechť je $f \equiv 1/k$ v M_{2k-1} a $f \equiv -1/k$ v M_{2k}. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ pak je

$$\int_{2k-1}^{2k} f = \frac{1}{k}\,, \quad \int_{2k}^{2k+1} f = -\frac{1}{k}\,, \quad \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{M_k} f = \frac{1}{n}\,, \quad \sum_{k=1}^{2n} \int_{M_k} f = 0\,,$$

takže $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f = 0$. Integrál z funkce f^+ (resp. f^-) přes interval $M = (1, +\infty)$, který je sjednocením všech intervalů M_k, $k \in \mathbb{N}$, je roven součtu integrálů této funkce přes všechny množiny M_{2k-1} (resp. M_{2k}), tj. součtu $+\infty$ harmonické řady. Lebesgueův integrál funkce f přes M tedy neexistuje. (Snadno přitom nahlédneme, že příslušný Newtonův integrál existuje a je roven nule.)

Poznámka 19.11. Riemannovým integrálem se zde sice nezabýváme, ale pro čtenáře, který jej zná (i ve vícerozměrných eukleidovských prostorech), uveďme toto důležité tvrzení (věta 157 z [13]):

Existuje-li $(\mathcal{R}) \displaystyle\int_M f$, *existuje i* $(\mathcal{L}) \displaystyle\int_M f$ *a oba integrály mají touž hodnotu.*

Lebesgueův integrál je tedy zobecněním integrálu Riemannova; *není však zobecněním tzv. zobecněného Riemannova integrálu ani integrálu Newtonova!* (Příklad jsme již uvedli: Funkce $(\sin x)/x$ má Newtonův i zobecněný Riemannův integrál od 0 do $+\infty$, ale příslušný Lebesgueův integrál neexistuje.)

Riemannův integrál se skoro nikdy nepočítá podle definice, ale jako integrál Newtonův, protože platí: *Existuje-li Riemannův i Newtonův integrál funkce f od a do b, mají oba integrály touž hodnotu*. Podobně je to s Lebesgueovým integrálem; k jeho výpočtu přes jednorozměrný interval lze často užít toto závažné tvrzení:

$$(109) \qquad \textit{Rovnost } (\mathcal{L})\int_a^b f = (\mathcal{N})\int_a^b f \textit{ platí, existují-li oba integrály.}$$

V jednoduchých případech nebude tedy výpočet Lebesgueova integrálu přes jednorozměrný interval činit potíže. *Jak se však počítá vícerozměrný Lebesgueův integrál?*

Zásadní význam při řešení této otázky mají dvě tvrzení: *Fubiniho věta* a *věta o substituci*. V Lebesgueově teorii mají celkem jednoduchý a dobře aplikovatelný tvar, zatímco v Riemannově teorii bychom jednoduchou a dobře aplikovatelnou verzi těchto vět hledali marně.

Abychom mohli první z uvedených vět vyslovit v přehledném tvaru, je třeba zavést řadu označení a úmluv:

1. Prostor $\mathbb{R}^{p+q}$ ztotožníme s kartézským součinem $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ a v souvislosti s tím budeme body $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ psát ve tvaru

$$z = (x, y), \text{ kde } x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \; y = (y_1, \dots .y_q) \in \mathbb{R}^q . \tag{110}$$

Protože nyní budeme pracovat ve třech eukleidovských prostorech $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ a $\mathbb{R}^{p+q}$ s příslušnými mírami, budeme muset dávat někdy větší pozor na výroky závislé na míře. Pokud by hrozilo nedorozumění, budeme proto říkat např. „μ_p-měřitelná množina“ místo podrobnějšího „množina obsažená v $\mathbb{R}^p$ a měřitelná při míře μ_p“; „výrok V platí μ_{p+q}-skoro všude v M“ bude znamenat, že „výrok $V(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$, kde $M \cup N \subset \mathbb{R}^{p+q}$ a $\mu_{p+q}(N) = 0$“.

Integrál funkce f resp. g přes množinu $A \subset \mathbb{R}^p$ resp. $B \subset \mathbb{R}^q$ budeme často značit

$$\int_A f(x)\, dx \quad \text{resp.} \quad \int_B g(y)\, dy .$$

2. Je-li $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, označíme

$$M_{p\leftarrow} := \{x \in \mathbb{R}^p ; \text{ existuje } y \in \mathbb{R}^q \text{ tak, že } (x, y) \in M\}, \tag{111}$$

$$M_{\rightarrow q} := \{y \in \mathbb{R}^q ; \text{ existuje } x \in \mathbb{R}^p \text{ tak, že } (x, y) \in M\} \tag{112}$$

(ortogonální) **průměty** množiny M do prostoru $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$ (prvních p resp. posledních q souřadnic). Pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ a každé $x \in \mathbb{R}^p$ kromě toho položíme

$$M(\cdot, y) := \{x \in \mathbb{R}^p ; (x, y) \in M\} \text{ a } M(x, \cdot) := \{y \in \mathbb{R}^q ; (x, y) \in M\} . \tag{113}$$

Nazveme-li **řezem** množiny M příslušným k y (resp. k x) průnik množiny M s nadrovinou $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} ; x \in \mathbb{R}^p\}$ (resp. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} ; y \in \mathbb{R}^q\}$) dimenze p (resp. q), rovnoběžnou s nadrovinou generovanou p prvními (resp. q posledními) souřadnicovými osami, je první (resp. druhá) z množin (113) ortogonálním průmětem tohoto řezu do $\mathbb{R}^p$ (resp. do $\mathbb{R}^q$).

(114) *Množina $M(\cdot, y)$ (resp. $M(x, \cdot)$) je neprázdná, právě když je neprázdný příslušný řez a také právě když je $y \in M_{\rightarrow q}$ (resp. $x \in M_{p\leftarrow}$).*

3. Pro každou funkci f proměnných x, y (tj. pro každé zobrazení z $\mathbb{R}^{p+q}$ do $\mathbb{R}^*$) budeme definovat funkce $f(\cdot, y)$ a $f(x, \cdot)$ takto: Při každém pevném $y \in \mathbb{R}^q$ je

$$(f(\cdot, y))(x) := f(x, y) \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}^p, \text{ pro něž má pravá strana smysl}, \tag{115}$$

a při každém pevném $x \in \mathbb{R}^p$ je

$$(f(x, \cdot))(y) := f(x, y) \text{ pro všechna } y \in \mathbb{R}^q, \text{ pro něž má pravá strana smysl;} \tag{116}$$

některé z těchto funkcí mohou mít samozřejmě prázdný definiční obor.

Věta 19.23. *Platí tato tvrzení:*

1. *Kartézský součin měřitelných množin $A \subset \mathbb{R}^p$ a $B \subset \mathbb{R}^q$ je měřitelný, přičemž*

$$\mu_{p+q}(A \times B) = \mu_p(A) \cdot \mu_q(B). \tag{117}$$

2. *Pro každou μ_{p+q}-měřitelnou množinu $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ jsou μ_q-skoro všechny množiny $M(\cdot, y) \subset \mathbb{R}^p$ a μ_p-skoro všechny množiny $M(x, \cdot) \subset \mathbb{R}^q$ měřitelné, přičemž*

$$\mu_{p+q}(M) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu_p(M(\cdot, y))\, dy = \int_{\mathbb{R}^p} \mu_q(M(x, \cdot))\, dx. \tag{118}$$

3. *Rovnost $\mu_{p+q}(M) = 0$ platí, právě když je $\mu_p(M(\cdot, y)) = 0$ pro μ_q-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ a také právě když je $\mu_q(M(x, \cdot)) = 0$ pro μ_p-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$.*

4. *Nechť f je měřitelná v množině $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$. Pak je funkce $f(\cdot, y)$ měřitelná v $M(\cdot, y)$ pro μ_q-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ a funkce $f(x, \cdot)$ je měřitelná v $M(x, \cdot)$ pro μ_p-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$.*

5. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^p$ měřitelná množina a je-li $f = (f_1, \dots, f_q) : A \to \mathbb{R}^q$ funkce, jejíž všechny složky $f_k : A \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné, je $\mu_{p+q}(\operatorname{gr} f) = 0$.*

Poznámka 19.12. Názorný význam první rovnosti (118) možná lépe vynikne, nahradíme-li množiny $M(\cdot, y)$ příslušnými řezy: Pro každé $y \in \mathbb{R}^q$ nejdříve „přeneseme“ míru μ_p z $\mathbb{R}^p$ do nadroviny $N(y) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q};\ x \in \mathbb{R}^p\}$ tím, že definujeme $\nu(W) := \mu_p(W_{p\leftarrow})$ pro každou množinu $W \subset N(y)$, jejíž průmět $W_{p\leftarrow}$ do $\mathbb{R}^p$ je měřitelný. Je-li $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, je pak $\mu_p(M(\cdot, y))$ rovno $\nu(M(y))$, kde $M(y)$ znamená řez množiny M příslušný k y, a míru množinu M získáme integrací („podle y přes $\mathbb{R}^q$“) měr $\nu(M(y))$ řezů množiny M. (Podobně pro druhou z rovností (118).)

P ř í k l a d . Je-li $M := U((0, 0), 1)$ (otevřený jednotkový kruh v rovině), lze jeho obsah získat takto: Uvážíme především, že řez kruhu M příslušný k y je prázdný (takže $\nu(M(y)) = 0$), je-li $|y| \geq 1$. Je-li naopak $|y| < 1$, je řez (otevřená) úsečka s krajními body $(\pm\sqrt{1 - y^2}, y)$, takže nyní je $\nu(M(y)) = 2\sqrt{1 - y^2}$. Integrace funkce $\nu(M(y))$ přes $\mathbb{R}$ se redukuje na integraci přes interval $(-1, 1)$ a její výsledek $\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - y^2}\, dy = \pi$ je hledaný obsah kruhu M. (Vidíme přitom, že „přenášení“ měr z ménědimenzionálního prostoru do prostoru větší dimenze není např. v geometrii nic neobvyklého: Délku úsečky definujeme jako vzdálenost jejích krajních bodů v prostoru jakékoli dimenze.)

Příklad 19.5. V rovině mají nulovou míru např. všechny přímky (a tím spíše všechny polopřímky a úsečky), všechny kuželosečky, lemniskata, ale např. také kartézský součin Cantorova diskontinua s $\mathbb{R}$ a grafy všech měřitelných reálných funkcí jedné proměnné.

V $\mathbb{R}^3$ mají nulovou míru nejen všechny roviny a přímky (a jejich části), ale i všechny kvadriky (sféry, pláště válců a kuželů, paraboloidy, hyperboloidy) a např. i množiny $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q}$, Cantorovo diskontinuum kartézsky násobené $\mathbb{R}^2$ a grafy všech měřitelných reálných funkcí dvou proměnných, stejně jako grafy všech měřitelných zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$.

Věta 19.24. (Fubiniho věta.) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ a nechť existuje integrál $\int_M f$. Pak pro μ_p-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^p$ resp. pro μ_q-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^q$ existuje integrál*

$$G(x) := \int_{M(x,\cdot)} f(x,\cdot) \quad \textit{resp.} \quad H(y) := \int_{M(\cdot,y)} f(\cdot,y) \tag{119}$$

a platí rovnosti

$$\int_M f = \int_{\mathbb{R}^p} G = \int_{\mathbb{R}^q} H\,. \tag{120}$$

Dodatek. *Je-li $A \subset \mathbb{R}^p$ resp. $B \subset \mathbb{R}^q$ měřitelná množina obsahující průmět $M_{p\leftarrow}$ resp. $M_{\to q}$ množiny M do $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$, je*

$$\int_M f = \int_A G \quad \textit{resp.} \quad \int_M f = \int_B H\,. \tag{121}$$

Poznámka 19.13. V teorii musíme být opatrní, protože např. ortogonální průmět μ_2-měřitelné množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ do osy x nemusí být μ_1-měřitelný: Stačí zvolit nějakou neměřitelnou množinu $N \subset \mathbb{R}$ a definovat $M := \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 ;\, x \in N\}$. Protože M je částí přímky o rovnici $y = x$, je $\mu_2(M) = 0$; M je tedy μ_2-měřitelná množina, jejíž ortogonální průmět N do osy x je μ_1-neměřitelný.

V početní praxi však většinou integrujeme přes množiny $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$, jejichž hranice má míru 0*; pak je*

$$\int_M f = \int_{\operatorname{int} M} f\,, \ \textit{existuje-li jeden z integrálů},$$

a průměty otevřené množiny $\operatorname{int} M$ (do $\mathbb{R}^p$ i do $\mathbb{R}^q$) jsou zřejmě otevřené. *Místo přes množiny A, B lze pak ve* (121) *integrovat přímo přes průměty $M_{p\leftarrow}$ a $M_{\to q}$.*

Poznámka 19.14. Tvrzení vyslovená ve větě 19.24 jsou sice po formální stránce zcela korektní, ale v početní praxi, kdy jsou integrandy dány „předpisy“ resp. „vzorci“, kterými se hodnoty funkcí vypočítávají z hodnot „nezávisle proměnných“ x, y, dáváme přednost stručnějšímu znění a názornějšímu zápisu:

Je-li ortogonální průmět $M_{p\leftarrow}$ resp. $M_{\to q}$ množiny $M \subset \mathbb{R}^{p+q}$ do prostoru $\mathbb{R}^p$ resp. $\mathbb{R}^q$ měřitelný, je

$$\iint_M f(x,y)\,dxdy = \int_{M_{p\leftarrow}} \Big(\int_{M(x,\cdot)} f(x,y)\,dy \Big) dx\,, \ \textit{existuje-li integrál vlevo}, \tag{122_1}$$

resp.

$$\iint_M f(x,y)\,dxdy = \int_{M_{\to q}} \Big(\int_{M(\cdot,y)} f(x,y)\,dx \Big) dy\,, \ \textit{existuje-li integrál vlevo}. \tag{122_2}$$

Integrál vlevo se nazývá **dvojný**, integrály vpravo jsou **dvojnásobné**. Nedělitelný symbol $dxdy$ vlevo znamená, že integrál je dvojný a integrační proměnné se jmenují

x, y. Symboly dx, dy na pravých stranách ukazují, „podle které proměnné zrovna integrujeme“. V prvním případě tedy funkci $f(x, y)$ integrujeme nejdříve podle y při pevném, ale libovolném $x \in M_{p\leftarrow}$ přes příslušnou množinu $M(x, \cdot)$ a výsledky těchto integrací pak zintegrujeme podle x přes průmět $M_{p\leftarrow}$ množiny M do $\mathbb{R}^p$.

Podobně lze samozřejmě popsat dvojnásobnou integraci i ve druhém případě; vymění se jen x a y.

POZOR VŠAK! *Pro platnost rovností* (122_1) *a* (122_2) *je* (*v obou případech*) *podstatné, že existuje integrál vlevo; existence integrálů vpravo nestačí!*

Příklad 19.6. Položme

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \tag{123}$$

a vypočítejme oba dvojnásobné integrály přes otevřený čtverec $M := (0, 1) \times (0, 1)$. Snadno zjistíme, že

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = \frac{1}{1 + x^2}\,, \quad \int_0^1 f(x, y)\, dx = -\frac{1}{1 + y^2}\,; \tag{124}$$

z toho je patrné, že

$$\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dy\Big) dx = \frac{\pi}{4}\,, \quad \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x, y)\, dx\Big) dy = -\frac{\pi}{4}\,. \tag{125}$$

Protože dvojnásobné integrály mají různé hodnoty, dvojný integrál neexistuje.

Tento velice jednoduchý příklad (v němž je integrand racionální funkce dvou proměnných, spojitá v integračním oboru) by proto měl být důrazným varováním – předpoklady aplikovaných vět se vyplácí ověřovat! [19]) „Prakticky“ je ovšem třeba dát pozor jen na integraci funkcí měnících znaménko, protože integrál z měřitelné nezáporné (resp. nekladné) funkce přes měřitelnou množinu existuje vždy.

Cvičení 19.17. Dokažte (přímým výpočtem), že dvojný integrál z předcházejícího příkladu neexistuje proto, že integrand je v otevřeném trojúhelníku s vrcholy (0,0), (1,0), (1,1) kladný, přičemž příslušný integrál je roven $+\infty$, zatímco integrál přes otevřený trojúhelník s vrcholy (0,0), (0,1), (1,1), v němž je integrand záporný, je roven $-\infty$. (Důsledek: $\int_M f^+ = \int_M f^- = +\infty$.)

[19]) Vzpomínám si, že kdysi dávno skupina vysokoškolských učitelů, uctívačů (bezduchého) kalkulu, diskutovala o otázce, čemu že se vlastně v tomto případě rovná integrál funkce f přes M: Prvnímu, nebo druhému výsledku ze (125), nebo snad jejich aritmetickému průměru? Nezbývá než doufat, že se podobné „problémy“ již na vysokých školách neřeší. V současné době je však třeba *dát pozor při integraci pomocí počítačových programů*, protože např. dvojná integrace se v nich nahrazuje dvojnásobnou; omezíme-li se tedy např. na první z integrálů (125), ujde nám, že druhý se mu nerovná, a nezjistíme, že dvojný integrál vůbec neexistuje. Je to ovšem ještě daleko horší: *Ani když se oba dvojnásobné integrály nějaké funkce rovnají* 0, *neplyne z toho existence integrálu dvojného!* (Stačí zvolit funkci $f(x, y) \cdot \operatorname{sgn} x$ místo funkce (123) a integrovat přes $(-1, 1) \times (0, 1)$.)

Poznámka 19.15. Aplikaci Fubiniho věty lze ovšem (v případě, že $p+q \geq 3$) opakovat tak dlouho, až dostaneme samé jednorozměrné integrály (které pak můžeme počítat jako integrály Newtonovy, jsou-li splněny příslušné podmínky). Podobně jako při integraci přes množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ rozlišujeme dvojný a dvojnásobný integrál, mluvíme v případě množiny $M \subset \mathbb{R}^3$ o integrálu **trojném** a **trojnásobném**.

Příklad 19.7. Vypočítejme trojný integrál

$$\iiint\limits_M (x^2+y^2)\,dxdydz\,, \text{ kde } M := \{(x,y,z);\, x^2+y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1-x\}\,, \tag{126}$$

který má fyzikální význam momentu setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa M (s hustotou rovnou 1), kde M je – geometricky řečeno – válec $x^2+y^2 \leq 1$ „seříznutý“ rovinami $z = \pm(1-x)$ (jejichž poloroviny, určené nerovností $x \leq 1$, tvoří „klín“).

Konstatujme především, že M je kompaktní množina a že integrand je spojitá nezáporná funkce; integrál tedy jistě existuje. Trojrozměrnou integraci rozdělíme na dvojrozměrnou (vně) a jednorozměrnou (uvnitř). Průmětem množiny M do roviny xy je kruh $K := \{(x,y);\, x^2+y^2 \leq 1\}$, protože pro každý bod $(x,y) \in K$ je např. $(x,y,0) \in M$, ale žádný bod (x,y,z), pro nějž je $x^2+y^2 > 1$, v M zřejmě neleží. Je-li $(x,y) \in K$, je $|x| \leq 1$ a bod (x,y,z) leží v M, právě když je $-(1-x) \leq z \leq 1-x$.

Dvojný integrál přes K převedeme v dalším kroku na dvojnásobný; průmětem množiny K do osy x je interval $\langle -1,1\rangle$ a řez příslušný číslu x z tohoto intervalu je charakterizován nerovnostmi $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.[20])

Integrál (126) se tedy rovná[21])

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \Big(\int_{x-1}^{1-x} (x^2+y^2)\,dz\Big)\,dxdy = 2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)(1-x)\,dxdy \tag{127}$$

a to je dále rovno

$$2\int_{-1}^{1}\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)(1-x)\,dy\Big)dx = \tfrac{4}{3}\int_{-1}^{1}(1-x)\sqrt{1-x^2}\,(1+2x^2)\,dx = \pi\,, \tag{127$'$}$$

jak čtenář, který naše výsledky přepočítává, po jisté námaze jistě také zjistil.[22])

* * *

[20]) Množiny M a K z tohoto příkladu si lze velmi dobře představit a geometrický názor nám pomůže najít i potřebné průměty a řezy; protože však u složitějších množin, daných nerovnostmi, geometrická představa často selhává, je vhodné učit se průměty a řezy hledat „aritmeticky“, pouze na základě příslušných nerovností a podle definice průmětů a řezů.

[21]) Aby se nezaváděla zbytečná nová označení, často se podmínka nebo podmínky, které integrační obor definují, píší přímo pod integrál.

[22]) Vypočítat poslední integrál (asi substitucí $x = \sin t$) chvilku trvá; za chvíli se však vrátíme ke druhému z integrálů (127) a ukážeme, jak lze postupovat ekonomičtěji. (V této chvíli nemáme k dispozici potřebný nástroj – větu o substituci pro vícerozměrné integrály.)

Protože věta o substituci operuje s difeomorfismy, je důležité vědět, že jak měřitelnost množiny, tak i měřitelnost funkce je vůči nim invariantní a že obrazy (i vzory, protože zobrazení inverzní k difeomorfismu je také difeomorfní) množin míry 0 mají také míru 0:

Věta 19.25. *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a je-li $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfismus, platí tato tvrzení:*

1. *Je-li $X \subset \Omega$ měřitelná množina, je i množina $\Phi(X)$ měřitelná.*

2. *Je-li $X \subset \Omega$, $\mu_p(X) = 0$, je i $\mu_p(\Phi(X)) = 0$.*

3. *Je-li funkce f měřitelná v množině $Y \subset \Phi(\Omega)$, je funkce $f \circ \Phi$ měřitelná v množině $\Phi_{-1}(Y)$.*

Věta 19.26. (Věta o substituci.) *Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ a je-li $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ difeomorfismus, platí tato dvě tvrzení:*

$$(128) \quad M \subset \Omega \Rightarrow \int\limits_{\Phi(M)} f = \int\limits_{M} (f \circ \Phi)\,|\det \Phi'\,|, \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl;}$$

$$(129) \quad N \subset \Phi(\Omega) \Rightarrow \int\limits_{N} f = \int\limits_{\Phi_{-1}(N)} (f \circ \Phi)\,|\det \Phi'\,|, \text{ má-li jedna strana rovnosti smysl.}$$

Poznámka 19.16. Pro „výpočetní praxi“ je důležité promyslit si tyto principy:

1. Protože rovnosti (128) a (129) platí, má-li jedna jejich strana smysl, *nemusíme ověřovat existenci integrálů vlevo, tedy před substitucí.* Substituci přirozeně provádíme proto, aby se integrál zjednodušil, a *stačí, abychom ověřili existenci integrálu vpravo*, tedy integrálu, u něhož by ověření mělo být jednodušší. Nelze pochopitelně vyloučit, že substituce prokáže *neexistenci* integrálu vlevo (viz např. Cv. 19.50).

2. *Není nutné, aby integrály v* (128) *a* (129) *byly konečné*, věta 19.26 nic podobného nežádá. To je prakticky důležité zejména v případě, že integrujeme měřitelnou nezápornou funkci (např. majorantu jiné funkce), která má (konečný nebo nekonečný) integrál vždy; teprve po aplikaci Fubiniho věty nebo věty o substituci se leckdy dodatečně dozvíme, zdali integrál konverguje nebo ne. [23])

Vše, co bylo právě uvedeno, platí samozřejmě jen *za předpokladu, že substituující funkce Φ i množina M resp. N splňuje předpoklady věty o substituci.* □

---

[23]) Učebnic a monografií zabývajících se integrály je velmi mnoho a jejich kvalita není stejná. Integrální počet pojatý jako kalkulus se o přesné znění vět mnohdy nestará a jen počítá a počítá. Monografie o teorii integrálu se spíše zabývají elegantním zavedením definic, odvozováním vlastností různých integrálů a porovnáváním jejich existence, než aby čtenáři dávaly návody, jak počítat konkrétní příklady. V případě Lebesgueova integrálu se autoři často omezují na konečné integrály, protože se s nimi daleko jednodušeji pracuje. Máme-li však při aplikaci Fubiniho věty a věty o substituci nejdříve dokazovat, že počítaný integrál je konečný, můžeme mít značné potíže. Pro čtenáře jsou proto asi nejcennější knihy, v nichž se podle vyložené teorie dobře počítá. Jsem přesvědčen, že knihou, v níž jsou metody výpočtu Lebesgueových integrálů vyloženy vynikajícím způsobem, je Jarníkova učebnice [13], v níž jsou patrně poprvé v celosvětové literatuře obě citované věty dokázány *bez předpokladu konečnosti příslušných integrálů.* A jen takto formulované věty umožňují v řadě případů výpočet kvalifikovaně odstartovat.

Stejně jako je pro výpočet jednorozměrných integrálů nutné znát některé běžné substituce, ani v případě vícerozměrných integrálů se bez explicitní znalosti některých difeomorfismů Φ neobejdeme [24]); u nejčastěji užívaných difeomorfismů se vyplatí pamatovat si i determinanty příslušných matic Φ'.

Příklad 19.8. *Permutace souřadnic* je jedním z nejjednodušších difeomorfismů $\mathbb{R}^p$ na $\mathbb{R}^p$. Je to zobrazení definované rovností

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p) := (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}), \tag{130}$$

kde p-tice $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ je permutací p-tice $(1, 2, \ldots, p)$. Je pak $\det \Phi' = \pm 1$ a tato rovnost značně zjednodušuje pravé strany rovností (128) – (129). Protože permutaci souřadnic lze provést v každém integrálu, který existuje, je zřejmé, že *při převádění vícerozměrného integrálu na integrály méněrozměrné nezáleží na pořadí proměnných, podle nichž se postupně integruje.*

Ve Fubiniho větě samé není tedy nutné, aby se $p + q$ souřadnic bodů $z \in \mathbb{R}^{p+q}$ rozdělovalo na p-tici prvních a q-tici posledních souřadnic – lze zvolit jakoukoli permutaci $(k_1, \ldots, k_p, k_{p+1}, \ldots, k_{p+q})$ čísel $1, \ldots, p, p+1, \ldots, p+q$ a bod z napsat jako dvojici (x, y), kde $x := (z_{k_1}, \ldots, z_{k_p})$, $y := (z_{k_{p+1}}, \ldots, z_{k_{p+q}})$.

Příklad 19.9. Obecnějším difeomorfismem prostoru $\mathbb{R}^p$ na sebe, než je permutace souřadnic, je *lineární zobrazení* Φ, pro něž rovnost $y = \Phi(x)$ znamená totéž jako platnost rovností (37), kde matice Λ koeficientů λ_{jk} je regulární. Na pravých stranách rovností (128) – (129) je pak $\det \Phi' = \det \Lambda \neq 0$. Z algebry je známo, že pro tzv. *ortogonální transformace* (zachovávající ortogonalitu souřadnicových os a neměnící měřítka na nich) je $\det \Phi' = \pm 1$ jako v případě permutací souřadnic, protože ty jsou jen speciálním případem ortogonálních transformací.

Příklad 19.10. Jedna z nejužitečnějších nelineárních substitucí v $\mathbb{R}^2$ souvisí s *přechodem od kartézských souřadnic x, y k polárním souřadnicím r, φ*; je $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, a příslušné zobrazení je tedy

$$\Phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; \tag{131}$$

Φ je třídy C_∞ v celé rovině $\mathbb{R}^2$, přičemž determinant

$$\det \Phi'(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \tag{132}$$

je nenulový všude kromě počátku.

Označíme-li

$$P_\alpha := \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha);\ r \in \mathbb{R}_+^0\}, \quad \Omega_\alpha := \mathbb{R}_+ \times (\alpha, \alpha + 2\pi) \tag{133}$$

pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, snadno zjistíme, že

$$\textit{Φ zobrazuje množinu Ω_α difeomorfně na množinu $\mathbb{R}^2 - P_\alpha$.} \tag{134}$$

[24]) Na rozdíl od kapitoly 16 půjde nyní o „globální“, nikoli „lokální“ difeomorfismy.

Protože polopřímka P_α má (dvojrozměrnou) míru 0, lze z integračního oboru N v rovnosti (129) vynechat všechny body ležící v P_α, aniž se cokoli podstatného změní. Z toho plyne tento velmi důležitý závěr:

(135) *Při transformaci kartézských souřadnic na polární lze tvrzení* (128) a (129) *užít s libovolnými měřitelnými množinami* $M \subset \mathbb{R}^2$ a $N \subset \mathbb{R}^2$.

Podobné tvrzení platí zřejmě i pro cylindrické souřadnice r, φ, z *v prostoru* $\mathbb{R}^3$, *které ponechávají beze změny třetí kartézskou souřadnici* z *a jejichž vztah ke dvěma prvním kartézským souřadnicím* x, y *je dán rovnostmi* $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

Příklad 19.7 – ekonomičtější řešení. Vraťme se k (127) a v integrálu vpravo přejděme k polárním souřadnicím:

$$(127^*) \qquad 2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)(1-x)\,dxdy = 2\iint\limits_{\substack{0<r<1\\0<\varphi<2\pi}} r^3\,(1-r\cos\varphi)\,drd\varphi =$$

$$2\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} r^3\,(1-r\cos\varphi)\,d\varphi\Big)dr = 4\pi\int_0^1 r^3\,dr = \pi\,,$$

protože $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$.

Příklad 19.11. Trojrozměrnou analogií polárních souřadnic jsou v $\mathbb{R}^3$ *sférické souřadnice* r, φ, ϑ, jejichž vztah ke kartézským souřadnicím je dán rovnostmi

$$(136) \qquad (x,y,z) = \Phi(r,\varphi,\vartheta) := (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,.$$

Φ je třídy C_∞v celém $\mathbb{R}^3$ a determinant

$$(137) \qquad \det\Phi'(z,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

je nenulový, právě když je $r \ne 0$ a $\vartheta \not\equiv \frac{1}{2}\pi \bmod \pi$.

Snadno se ověří, že 1) restrikce zobrazení Φ na množinu

$$(138) \qquad \Omega := \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$$

je prostá, 2) r je vzdálenost bodu (136) od počátku, 3) úhly φ, ϑ odpovídají (při pevném r) zeměpisné délce (měřené od 0° do 360°) a zeměpisné šířce (měřené od −90° do +90°), 4) množina $\Phi(\Omega)$ neobsahuje žádný bod (x,y,z), kde $x \ge 0, y = 0$, ale obsahuje všechny body ostatní body $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Z toho plyne, že

(139) Φ *zobrazuje množinu* Ω *difeomorfně na prostor* $\mathbb{R}^3$, *z něhož je vynechána uzavřená polorovina ohraničená osou* z *a obsahující kladnou poloosu osy* x, *tj. množinu všech bodů* $(x,0,0)$, *kde* $x \in \mathbb{R}_+$.

Uvážíme-li, že vynechaná množina má trojrozměrnou míru 0, vidíme, že

(140) *zobrazení Φ lze ve větě o substituci užívat bez omezení, tj. pro jakýkoli (měřitelný) integrační obor obsažený v* $\mathbb{R}^3$.

Interval $(0, 2\pi)$ *v* (138) *lze přitom nahradit jakýmkoli otevřeným intervalem délky* 2π. Zvolíme-li např. interval $(-\pi, \pi)$, budeme „zeměpisnou délku" počítat od $-180°$ do $+180°$ a vynechána bude polorovina ohraničená osou z a obsahující zápornou poloosu osy x.

Příklad 19.12. Ověřme známý vzorec pro výpočet objemu koule. Protože Lebesgueova míra je invariantní vůči posunutím, lze předpokládat, že středem koule K o poloměru $R \in \mathbb{R}_+$ je bod $(0, 0, 0)$. Přejdeme-li od kartézských souřadnic ke sférickým a užijeme-li V. 19.26 spolu s V. 19.24, získáme rovnosti

$$\mu_3(K) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le R} 1 \, dxdydz = \iiint\limits_{\substack{0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi \\ -\pi/2<\vartheta<\pi/2}} r^2 \cos\vartheta \, dr d\varphi d\vartheta =$$

$$\int_0^R \Big(r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \Big) d\vartheta \Big) dr = 2\pi \cdot 2 \int_0^R r^2 \, dr = \tfrac{4}{3}\pi R^3 .$$

Aplikace věty o substituci a Fubiniho věty proběhla zcela bez potíží; integrand 1 je spojitý a nezáporný a transformaci do sférických souřadnic lze provádět bez omezení. Protože integrand v posledním integrálu v první řádce nezávisel na φ, integrovali jsme nejdříve (= uvnitř) podle φ, pak podle ϑ a nakonec podle r; všechny jednorozměrné integrály jsme počítali (v souladu se (109)) jako Newtonovy.

Příklad 19.13. Vypočtěme tzv. **Laplaceův integrál**

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx , \tag{141}$$

který elementárními metodami založenými na primitivní funkci počítat nelze, protože primitivní funkce integrandu nepatří mezi tzv. elementární funkce.

Protože funkce $e^{-(x^2+y^2)}$ je spojitá a kladná ve čtvrtrovině $\Omega := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, lze aplikovat Fubiniho větu:

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \int_0^{+\infty} \Big(e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy \Big) dx = \int_0^{+\infty} I \, e^{-x^2} \, dx = I^2 .$$

Všechny integrály jsou samozřejmě Lebesgueovy; *jejich konečnost dokazovat nemusíme, protože Fubiniho větu lze aplikovat i na integrály rovné* $\pm\infty$. (Nebylo by to však nijak obtížné, protože (141) je podle vět 10.3 a 10.11 zároveň integrálem Newtonovým – majorantou integrandu je v intervalu $\langle 1, +\infty)$ např. funkce x^{-2}.) Ani k přechodu k polárním souřadnicím informaci o konečnosti integrálu (141) nepotřebujeme.

Věta o substituci spolu s Fubiniho větou vedou k rovnostem

$$I^2 = \iint_\Omega e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\substack{0<r<+\infty\\ 0<\varphi<\pi/4}} r\,e^{-r^2}\,dr d\varphi = \int_0^{+\infty}\Bigl(r\,e^{-r^2}\int_0^{\pi/4} d\varphi\Bigr)dr =$$

$$\tfrac14\pi\bigl[-\tfrac12 e^{-r^2}\bigr]_0^{+\infty} = \tfrac14\pi\,.$$

Protože $f \geq 0$, je i $I \geq 0$; z toho je patrné, že

$$\text{(141*)} \qquad I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac12\sqrt{\pi}\,.$$

Poznámka 19.17. Čtenář si jistě všiml, že jsme v předcházejících příkladech několikrát vytkli před integrál skoro všude nenulovou funkci proměnné, podle které se zrovna neintegruje. Dodejme, že integrál ze součinu dvou funkcí, z nichž každá závisí jen na jedné proměnné, lze někdy napsat jako součin integrálů:

Pro každé dvě množiny $A \subset \mathbb{R}^p$, $B \subset \mathbb{R}^q$ platí rovnost

$$\text{(142)} \qquad \iint_{A\times B} f(s)\,g(t)\,dsdt = \int_A f(s)\,ds \cdot \int_B g(t)\,dt$$

za předpokladu, že je buď $f \in \mathcal{L}(A)$ a $g \in \mathcal{L}(B)$, nebo že obě funkce jsou měřitelné a nezáporné (skoro všude v A resp. v B).

POZOR VŠAK! *K platnosti rovnosti* (142) *nestačí, aby její pravá strana měla smysl:* Položme totiž $A = (-1,2)$, $B = \mathbb{R}_+$, $C = A \times B$, $f(x) = x$, $g(y) \equiv 1$; v množině $C^+ = \langle 0,2) \times \mathbb{R}_+$ (resp. $C^- = (-1,0) \times \mathbb{R}_+$) je pak $fg \geq 0$ (resp. $fg < 0$). Na pravé straně (142) je

$$\int_{-1}^2 x\,dx \cdot \int_0^{+\infty} 1\,dy = \tfrac32 \cdot (+\infty) = +\infty\,,$$

ale integrál vlevo neexistuje, protože

$$\int_C (fg)^+ = \int_{C^+} x\,dxdy = \int_0^2 x\,dx \cdot \int_0^{+\infty} 1\,dy = 2\cdot\mu(\mathbb{R}_+) = +\infty\,,$$

$$\int_C (fg)^- = \int_{C^-} (-x)\,dxdy = \int_{-1}^0 (-x)\,dx \cdot \int_0^{+\infty} 1\,dy = \tfrac12\cdot\mu(\mathbb{R}_+) = +\infty\,.$$

(Kdybychom byli položili $A = (-1,1)$, byl by na pravé straně rovnosti (142) součin $0\cdot(+\infty) = 0$, což by mohlo vést k domněnce, že příčinou neplatnosti (142) je „nesprávná definice“ tohoto součinu. Taková domněnka by však byla mylná, protože pro *nezáporné* funkce f, g rovnost (142) platí i v případě, že vpravo je $0\cdot(+\infty)$.)

* * *

Z Fubiniho věty je odvozena výpočetní metoda nazývaná **integrace podle parametru**: *V jednorozměrném integrálu napíšeme integrand nebo jeho vhodnou část ve tvaru integrálu a změníme integrační pořadí;* někdy se stane, že integrál lze pak vypočítat. Ilustrujme to na jednom Lebesgueově a na jednom Newtonově integrálu:

Příklad 19.14. Předpokládejme, že $0 < a < b < +\infty$, a v integrálu

$$I(a,b) := \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\, dx \tag{143}$$

z nezáporné funkce (což zaručuje jeho existenci) přepišme integrand ve tvaru[25])

$$\frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x} = \Big[\frac{\operatorname{arctg} xy}{x}\Big]_{y=a}^{b} = \int_a^b \frac{dy}{1+x^2y^2}\,. \tag{144}$$

Je tedy

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \Big(\int_a^b \frac{dy}{1+x^2y^2}\Big)\, dx \tag{145}$$

a rádi bychom věděli, 1) zdali lze pořadí integrace podle y a x obrátit a 2) zdali to k něčemu bude.[26])

Dvojný integrál funkce $1/(1+x^2y^2)$ přes $(0,+\infty)\times(a,b)$ existuje (protože integrand je spojitá nezáporná funkce) a je (podle Fubiniho věty) roven nejen integrálu (145), ale i integrálu

$$\int_a^b \Big(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2y^2}\Big)\, dy = \int_a^b \Big[\frac{\operatorname{arctg} xy}{y}\Big]_{x=0}^{+\infty} dy = \int_a^b \frac{\pi}{2y}\, dy = \frac{\pi}{2}\lg\frac{b}{a}\,. \tag{146}$$

Tím je dokázáno, že pro všechna konečná kladná čísla $a < b$ je

$$I(a,b) := \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\lg\frac{b}{a}\,; \tag{143*}$$

je však zřejmé, že předpoklad $a < b$ (který se nám hodil při výpočtu) je zbytečný.

* * *

Ačkoli všechny limity (v metrických prostorech) lze převést na limity posloupností, je převádění limity, např. $\lim_{x\to a} f(x)$), na limity posloupností $\lim_{k\to\infty} f(x_k)$, kde $a \neq x_k \to a$, mnohdy zbytečnou komplikací problému. Ve druhém příkladu na integraci podle parametru (ale nejen tam) se spíše než věta 19.17 (o limitním přechodu za znamením integrálu pro majorizovanou *posloupnost*) hodí jiná verze této věty:

---

[25]) Jednou z potíží integrace podle parametru je nalézt vhodný přepis integrandu nebo jeho části; pomůže buď hledání v paměti, nebo v tabulkách integrálů.

[26]) Protože podmínka 2) asi v neznámé situaci nebude na první pohled patrná, je lépe nejdříve zkusit, zdali změnou pořadí integrace něčeho dosáhneme, a jen v případě, že ano, ověřit dodatečně korektnost postupu.

Věta 19.17*. (O limitním přechodu za znamením integrálu – 2. verze.) *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a $M \subset \mathbb{R}^p$; nechť existuje okolí $P(c)$ tak, že pro každé $z \in P(c)$ je funkce $f(x,z)$ proměnné x měřitelná v M, a nechť existuje funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ a množina $N \subset M$ míry 0 tak, že nerovnost $|f(x,z)| \le g(x)$ platí pro všechna $x \in M - N$ a všechna $z \in P(c)$. Pak*

$$\lim_{z \to c} f(x,z) = F(x) \text{ pro všechna } x \in M - N \Rightarrow \lim_{z \to c} \int_M f(\cdot, z) = \int_M F. \tag{147}$$

Analogická tvrzení platí pro limitu zprava a zleva v bodech $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Příklad 19.15. Vypočítejme Newtonův integrál

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,, \tag{148}$$

jehož integrand nemá elementární primitivní funkci. Postupujme nejdříve ryze formálně, abychom viděli, zdali náš postup k něčemu povede.

Uvážíme-li, že rovnost

$$\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy$$

platí pro každé $x \in \mathbb{R}_+$, vidíme, že (148) lze napsat ve tvaru

$$I = \int_0^{+\infty} \Big(\sin x \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy \Big)\, dx\,. \tag{149}$$

Kdybychom obrátili pořadí integrace podle x a y, dostali bychom integrál

$$\int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx \Big)\, dy = \tag{150}$$

$$\int_0^{+\infty} \Big[-e^{-xy}\, \frac{\cos x + y \sin x}{1+y^2} \Big]_{x=0}^{+\infty} dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Zřejmě tedy zbývá dokázat rovnost integrálů (149) a (150). Pořadí integrací podle x a y lze podle V. 19.24 změnit, existuje-li příslušný dvojný integrál; *ten ovšem v našem případě zcela určitě neexistuje*, protože kdyby existoval, byly by všechny napsané integrály absolutně konvergentní, a integrál (148) konverguje jen neabsolutně. [27])

Neabsolutní konvergence integrálu (148) je způsobena jeho horní mezí, protože integrál od 0 do z funkce $(\sin x)/x$ konverguje pro každé $z \in \mathbb{R}_+$ absolutně. Důkaz, že pro každé takové z konverguje dvojný integrál

$$\iint\limits_{\Omega} e^{-xy} \sin x\, dx dy\,, \text{ kde } \Omega := (0,z) \times \mathbb{R}_+\,, \tag{151}$$

[27]) Tato situace nastane tedy vždy, když se v Lebesgueově teorii snažíme neabsolutně konvergentní integrál počítat integrací podle parametru.

zjistíme pomocí majoranty; na první pohled nejjednodušší majoranta e^{-xy} bohužel nepatří do $\mathcal{L}(\Omega)$, protože

$$(152) \qquad \iint\limits_{\Omega} e^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^z \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy \Big)\,dx = \int_0^z \frac{dx}{x} = +\infty\,.$$

„Vinna“ je ovšem tentokrát dolní mez; u počátku jsme funkci $e^{-xy}\sin x$ odhadli příliš hrubě, protože funkce $\sin x$ je „blízko nuly“ „daleko menší“ než 1. Užijeme proto lepší odhad $|\sin x| \le x$; počítáme-li podobně jako v (152), zjistíme, že $\iint_\Omega x e^{-xy} = z$; dvojný integrál (151) tedy skutečně konverguje.[28]) Podle Fubiniho věty se rovná dvojnásobným integrálům

$$(153_1) \qquad \int_0^z \Big(\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dy \Big)\,dx = \int_0^z \frac{\sin x}{x}\,dx$$

a

$$(153_2) \qquad \int_0^{+\infty} f(y,z)\,dy\,, \ \text{ kde } \ f(y,z) := \int_0^z e^{-xy} \sin x\,dx\,.$$

Abychom získali integrál (148), stačí ve (153_1) provést limitní přechod $z \to +\infty$; totéž je proto třeba provést i s integrálem (153_2), kde se však limitní přechod musí provést za znamením integrálu.

Aplikujme proto větu 19.17*: Je

$$f(y,z) = \Big[-e^{-xy}\,\frac{\cos x + y \sin x}{1+y^2} \Big]_{x=0}^{z} = \frac{1 - e^{-yz}(\cos z + y \sin z)}{1+y^2}\,,$$

přičemž absolutní hodnota čitatele posledního zlomku je menší než 3, protože

$$|e^{-yz} \cos z| \le 1\,, \quad |e^{-yz} y \sin z| \le yz e^{-yz} \le \max\{w e^{-w};\, w \in \mathbb{R}_+\} = e^{-1} < 1\,.$$

Funkce $3/(1+y^2)$ ležící v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ je tedy majorantou funkce $f(y,z)$ a podle věty 19.17* můžeme limitní přechod $z \to +\infty$ za znamením integrálu provést. Protože $\lim_{z\to+\infty} f(y,z) = 1/(1+y^2)$ (pro všechna $y \in \mathbb{R}_+$), je tedy opravdu

$$(148^*) \qquad I = \lim_{z\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(y,z)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

* * *

Značný význam mají v teorii i při výpočtu různých integrálů tato dvě tvrzení:

[28]) Všimněme si opět, jak zásadní význam má platnost Fubiniho věty i v případě, že se dvojný integrál rovná $+\infty$. V nejrůznějších situacích, stejně jako v příkladu právě řešeném, zkoušíme různé majoranty, abychom dokázali konvergenci integrálu, jehož integrand mění znaménko. Při běžném počítání jsou majoranty jistě měřitelné a z definice jsou nezáporné; existence jejich dvojného integrálu je tedy zaručena, ale teprve po převedení na dvojnásobný integrál jsme schopni zjistit, zdali je dvojný integrál konečný nebo ne.

Věta 19.27. (O spojitosti integrálu závislého na parametru.) *Nechť $M \subset \mathbb{R}^p$, nechť (X, ρ) je metrický prostor a nechť $A \subset X$. Nechť funkce f proměnných $x \in \mathbb{R}^p$ a $\alpha \in A$ splňuje tyto předpoklady:*

1. *Pro každé $\alpha \in A$ je funkce $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná v M.*
2. *Pro skoro všechna $x \in M$ je funkce $f(x, \cdot)$ spojitá v A.*
3. *Pro každé $\alpha \in A$ existuje $\delta > 0$ a funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že*

$$\alpha' \in A,\ \rho(\alpha', \alpha) < \delta \Rightarrow |f(x, \alpha')| \le g(x) \text{ pro skoro všechna } x \in M. \tag{154}$$

Pak je integrál $\int_M f(\cdot, \alpha)$ spojitou funkcí parametru α v A.

Věta 19.28. (O derivování integrálu podle parametru.) *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a nechť f je funkce proměnných $x \in M \subset \mathbb{R}^p$ a $\alpha \in I$. Nechť dále platí:*

1. *Integrál $\int_M f(x, \alpha)\, dx$ konverguje aspoň pro jedno $\alpha \in I$.*
2. *Pro každé $\alpha \in I$ je funkce $f(\cdot, \alpha)$ měřitelná v M.*
3. *Existuje systém $\mathcal{S}$ otevřených intervalů, jejichž sjednocením je I, tak, že pro každý interval $J \in \mathcal{S}$ existuje funkce $g \in \mathcal{L}(M)$ a množina $N \subset M$ míry 0 tak, že*

$$x \in M - N,\ \alpha \in J \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \le g(x). \tag{155}$$

Pak integrál $F(\alpha) := \int_M f(x, \alpha)\, dx$ konverguje pro všechna $\alpha \in I$ a je

$$F'(\alpha) = \int_M \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}\, dx \quad \text{pro každé } \alpha \in I. \tag{156}$$

Poznámka 19.18. Píšeme-li $x = (x_1, \dots, x_p)$, vystupují ve větě 19.28 reálné proměnné $x_1, \dots, x_p$, podle nichž se integruje, a proměnná α, podle níž se neintegruje a která se v této souvislosti nazývá *parametr*. Třetí předpoklad věty 19.28 znamená, že parciální derivace $\partial f / \partial \alpha$ funkce f podle parametru α má majorantu $g \in \mathcal{L}(M)$ nezávislou na α „*lokálně*“, tedy v jistém okolí každého bodu $\alpha \in I$. Tento předpoklad odpovídá tomu, že derivování je lokální operace; případ $\mathcal{S} = \{I\}$, kdy má derivace majorantu z $\mathcal{L}$ nezávislou na parametru v celém I, není samozřejmě „zakázán“, ale v konkrétních příkladech jde spíše o výjimku. □

Věta 19.28 se hodí k rychlejšímu a elegantnějšímu výpočtu některých elementárních integrálů i k výpočtu některých integrálů, jejichž integrand nepatří mezi elementární funkce. Ukažme to na několika příkladech.

Příklad 19.16. Vyjdeme-li z rovnosti

$$\int_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha + 1}, \quad \text{kde } \alpha \in (-1, +\infty) \tag{157_0}$$

a kde vlevo je Lebesgueův integrál, který je zároveň integrálem Newtonovým, a uvážíme-li, že parciální derivaci $x^\alpha \lg x$ integrandu podle α lze v každém intervalu

$$J := (\beta, +\infty), \quad \text{kde } \beta \in (-1, +\infty), \tag{158}$$

majorizovat funkcí $x^\beta |\lg x|$, která leží v $\mathcal{L}((0,1))$ (protože např. pro $\gamma := \frac{1}{2}(\beta+1)$ je $|\lg x| = O(x^{-\gamma})$ pro $x \to 0+$, tedy $x^\beta |\lg x| = O(x^{\beta-\gamma})$, a $\int_0^1 x^{\beta-\gamma} dx$ konverguje, protože $\beta - \gamma = \frac{1}{2}(\beta - 1) > -1$); za $\mathcal{S}$ lze tedy ve větě 19.28 zvolit systém všech intervalů (158). Protože i ostatní předpoklady věty 19.28 jsou zřejmě splněny, je

$$\int_0^1 x^\alpha \lg x \, dx = \int_0^1 \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} \, dx = \Big(\frac{1}{\alpha+1}\Big)' = -\frac{1}{(\alpha+1)^2} \tag{157$_1$}$$

pro každé $\alpha \in (-1, +\infty)$.

Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R}_+$ je

$$\frac{\partial^n x^\alpha}{\partial \alpha^n} = x^\alpha \lg^n x \tag{159}$$

a protože tato funkce má pro α z intervalu (158) majorantu $x^\beta |\lg^n x|$ patřící (podobně jako $x^\beta |\lg x|$) do $\mathcal{L}((0,1))$, dostaneme opakovanou aplikací věty 19.28 rovnost

$$\int_0^1 x^\alpha \lg^n x \, dx = \Big(\frac{1}{\alpha+1}\Big)^{(n)} = (-1)^n \, \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}} \tag{157$_n$}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ (a každé $\alpha \in (-1, +\infty)$). [29])

Příklad 19.17. Ze známého výsledku

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+ \text{ a všechna } b \in \mathbb{R} \tag{160}$$

získáme (zatím formálním) derivováním podle parametru a rovnost

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2} \tag{161}$$

a derivováním podle parametru b rovnost

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\,. \tag{162}$$

Protože ostatní předpoklady V. 19.28 jsou zřejmé, zabývejme se jen majorantami: V prvním případě je $|x e^{-ax} \sin bx| \le x e^{-cx}$, je-li $0 < c < a$, takže systém $\mathcal{S}$ všech intervalů $(c, +\infty)$, kde $c \in \mathbb{R}_+$, splňuje předpoklad 3. Ve druhém případě je to ještě jednodušší, protože majorantou k funkci $x e^{-ax} \cos bx$, nezávislou na parametru b, je funkce $x e^{-ax}$. Protože uvedené majoranty patří do $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, platí rovnosti (161) a (162) pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ a všechna $b \in \mathbb{R}$. [30])

[29]) Tento výsledek lze sice získat i elementárně, integrací per partes, ale derivováním podle parametru to jde elegantněji a rychleji.

[30]) Integrály (161), (162) lze opět počítat elementárně (integrací per partes), ale zde uvedený postup je elegantnější a kratší.

Příklad 19.18. Integrál

$$I(a,b) := \int_0^{+\infty} \frac{\lg(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\,dx\,, \text{ kde } a \in \mathbb{R}_+^0,\ b \in \mathbb{R}_+\,, \tag{163}$$

zřejmě konverguje, protože integrand je $O(x^{-3/2})$ pro $x \to +\infty$. Elementárními metodami jej počítat nelze, můžeme se však o to pokusit derivováním podle parametru a, protože tím odstraníme logaritmus, který elementárnímu výpočtu brání.

Je-li $0 < a_1 < a < a_2 < +\infty$, je

$$\Big|\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{\lg(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\Big)\Big| = \Big|\frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\Big| \le \frac{2a_2x^2}{(1+a_1^2x^2)(1+b^2x^2)}\,, \tag{164}$$

přičemž poslední funkce patří do $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$ a intervaly (a_1, a_2) pokrývají $\mathbb{R}_+$. Z toho plyne, že pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ je

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \int_0^{+\infty} \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\,dx\,; \tag{165}$$

podle V. 19.27 je tato funkce proměnné a navíc spojitá v $\mathbb{R}_+$.

Je-li $b \neq a$, je

$$\frac{2a}{b^2-a^2}\Big(\frac{1}{1+a^2x^2} - \frac{1}{1+b^2x^2}\Big)$$

rozklad posledního integrandu na jednoduché zlomky, takže

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a} = \frac{2a}{b^2-a^2}\Big[\frac{\operatorname{arctg} ax}{a} - \frac{\operatorname{arctg} bx}{b}\Big]_{x=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{b(a+b)} \tag{165'}$$

pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ různá od b. Protože však posledně napsaná funkce je spojitá v $\mathbb{R}_+$ stejně jako funkce (165), je výsledek správný pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$.

Integrací podle a z něj (pro $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}_+$) získáme rovnost

$$I(a,b) = \frac{\pi}{b}\,\lg(a+b) + c, \tag{166}$$

kde c je vhodná konstanta nezávislá na a (ale obecně závislá na b). Abychom ji našli, uvažme, že integrand ve (163) je spojitou funkcí $(x,a) \in \mathbb{R}_+ \times \langle -1, 1\rangle$ a má tam majorantu $\lg(1+x^2)/(1+b^2x^2)$ nezávislou na a a ležící v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$; podle V. 19.27 je tedy integrál (163) spojitou funkcí parametru $a \in \langle -1, 1\rangle$.[31]) Z toho, z platnosti rovnosti (166) pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ a ze spojitosti její pravé strany v bodě 0 zprava ihned plyne, že $c = -(\pi \lg b)/b$, protože $I(0,b) = 0$ (pro všechna $b \in \mathbb{R}_+$).

Tím je dokázáno, že pro všechna $a \in \mathbb{R}_+^0$, $b \in \mathbb{R}_+$ je

[31]) Ve skutečnosti je spojitou funkcí parametru a v celém $\mathbb{R}$, ale nikde to nepotřebujeme.

$$(163^*) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\lg(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\,dx = \frac{\pi}{b}\,\lg\frac{a+b}{b}. \quad \square$$

Někdy vede výpočet integrálu derivováním podle parametru k diferenciální rovnici:

Příklad 19.19. Při každém (pevném, ale libovolném) $a \in \mathbb{R}_+$ konverguje integrál

$$(167) \qquad I(b) := \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx$$

pro všechna $b \in \mathbb{R}$, protože majoranta $\exp(-ax^2)$ integrandu (nezávislá na b) leží v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$. Formálním derivováním podle parametru získáme rovnost

$$(168) \qquad I'(b) = -\int_0^{+\infty} x\,e^{-ax^2}\sin bx\,dx\,;$$

protože integrand má majorantu $x\exp(-ax^2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$, platí rovnost (168) podle V. 19.28 pro všechna $b \in \mathbb{R}$. Integrací per partes získáme diferenciální rovnici

$$(169) \qquad I'(b) = \frac{1}{2a}\Big[e^{-ax^2}\sin bx\Big]_0^{+\infty} - \frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = -\frac{b}{2a}\,I(b)\,.$$

Rovnice $I' + bI/2a = 0$ má integrační faktor $\exp(b^2/4a)$ a řešení

$$(170) \qquad I(b) = C\,e^{-b^2/4a}\,,$$

kde C nezávisí na b, ale může záviset na a. Provedeme-li v integrálu (141^*) substituci $\sqrt{a}\,x = t$, zjistíme, že

$$(141^{**}) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \textit{pro každé } a \in \mathbb{R}_+\,;$$

této konstantě se rovná i $C = I(0)$. Z toho plyne, že

$$(167^*) \qquad I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\exp\Big(-\frac{b^2}{4a}\Big)$$

pro všechna $a \in \mathbb{R}_+$ a všechna $b \in \mathbb{R}$.

* * *

Na závěr uveďme několik vlastností **funkce gamma**, která je definována rovností

$$(171) \qquad \Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx \quad \text{pro všechna } s \in \mathbb{R}_+\,,$$

a **funkce beta**, která je definována rovností

$$\mathrm{B}(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad \text{pro všechna } p \in \mathbb{R}_+,\ q \in \mathbb{R}_+ . \tag{172}$$

Mělo by být zřejmé, že *pro uvedené hodnoty parametrů s, p, q Lebesgueovy integrály* (171) *a* (172) *konvergují a že existují též jako integrály Newtonovy.*

Cvičení 19.18. Dokažte integrací per partes, že je

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \quad \textit{pro všechna } s \in \mathbb{R}_+ ; \tag{173}$$

pak uvažte, že $\Gamma(1) = 1$ a odvoďte ze (173) rovnost

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \textit{pro všechna celá čísla } n \geq 0 . \tag{174}$$

Cvičení 19.19. Pro $s = \frac{1}{2}$ proveďte v (171) substituci $x = t^2$ a užijte Př. 19.13; tím dokážete, že

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} . \tag{175}$$

Kombinací tohoto výsledku se (173) ověřte, že

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad \textit{pro všechna celá čísla } n \geq 0 . \quad \square \tag{176}$$

Bez důkazu[32]) uveďme ještě identitu

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \textit{pro všechna } s \in (0,1) , \tag{177}$$

známou pod názvem **doplňková věta**, a poznamenejme, že *funkci gamma lze právě jedním způsobem holomorfně rozšířit z $\mathbb{R}_+$ na množinu $\Omega := \mathbb{C} - \{n \in \mathbb{Z};\, n \leq 0\}$. Po tomto rozšíření platí identita* (177) *pro všechna $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, identita* (173) *pro všechna $s \in \Omega$.*

Příklad 19.20. Dokažme, že je

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \textit{pro všechna } p \in \mathbb{R}_+,\ q \in \mathbb{R}_+ . \tag{178}$$

Součin $\Gamma(p)\,\Gamma(q)$ lze podle Po. 19.16 napsat ve tvaru

$$\Big(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx\Big)\Big(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y}\,dy\Big) = \iint\limits_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}\,dx dy ; \tag{179}$$

[32]) Důkaz není jednoduchý; lze jej najít např. v [13] nebo v [6].

ověřme, že v posledním integrálu lze provést substituci

$$\Phi(u,v) := (u(1-v), uv), \quad \text{kde } (u,v) \in \Omega := \mathbb{R}_+ \times (0,1). \tag{180}$$

Protože Φ je v Ω třídy C_∞ a splňuje tam podmínku

$$\Phi'(u,v) = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u \neq 0,$$

je v Ω regulární. Je-li $x = u(1-v)$, $y = uv$, $(u,v) \in \Omega$, je $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$; obráceně, je-li $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$, je $u = x + y \in \mathbb{R}_+$ a $v = y/(x+y) \in (0,1)$. Φ je tedy difeomorfní zobrazení množiny Ω na množinu $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

Protože jsou splněny předpoklady věty o substituci, je (179) rovno integrálu

$$\iint\limits_{\Omega} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u}\, du dv =$$

$$\Big(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u}\, du\Big)\Big(\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv\Big) = \Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p,q);$$

tím je (178) dokázáno. □

Poznámka 19.19. Funkce $\omega(t) := \sin^2 t$ zobrazuje prostě interval $(0, \frac{1}{2}\pi)$ na interval $(0,1)$, je třídy C_∞ v celém $\mathbb{R}$ a $\omega'(t) = 2\sin t \cos t \neq 0$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Substituce $x = \omega(t)$ vede k identitě

$$\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t\, dt; \tag{181}$$

položíme-li ještě $2p = \alpha$ a $2q = \beta$ a užijeme-li (178), dostaneme rovnost

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t \cos^{\beta-1} t\, dt = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2}\beta)}{2\,\Gamma(\frac{1}{2}(\alpha+\beta))} \quad \textit{pro všechna } \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \beta \in \mathbb{R}_+. \tag{182}$$

Protože hodnoty funkce Γ jsou podrobně tabelovány a každý dobrý počítačový program zabývající se tzv. vyšší matematikou a jejími aplikacemi funkci gamma „zná", dává rovnost (182) možnost efektivního výpočtu všech konvergentních integrálů typu uvedeného na její levé straně. Pro všechna přirozená čísla α, β hodnoty pravé strany známe (viz (174) a (176)) a můžeme si tak ušetřit zdlouhavý výpočet integrálů vlevo např. integrací per partes.

Cvičení 19.20. Pomocí (182) ověřte rovnosti

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^6 t\, dt = \frac{3\pi}{512}\,, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} t}\, dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,. \tag{183}$$

Cvičení

Existuje-li integrál funkce f přes množinu $M \subset \mathbb{R}^2$, vypočtěte jej. Uvažte, že integrál omezené měřitelné funkce f přes měřitelnou množinu M konečné míry (speciálně: přes omezenou měřitelnou množinu) *konverguje* a že integrál nezáporné měřitelné funkce f přes (každou) měřitelnou množinu M *existuje*. Nabývá-li funkce f jak kladných, tak i záporných hodnot, lze *konvergenci* jejího integrálu často dokázat pomocí vhodné majoranty z $\mathcal{L}$.

	$f(x,y) =$	$M =$
19.21.	$x^3y + xy^3$	$(0,1)^2$
19.22.	x^y	$(0,1)^2$
19.23.	$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$	$(0,1)^2$
19.24.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$(-1,1)^2$
19.25.	$y \sin xy$	$(0,\sqrt{\pi})^2$
19.26.	$\sin(x+y) + \cos(x-y)$	$(0,\pi) \times (0,\frac{1}{2}\pi)$
19.27.	$x \sin xy - y \cos xy$	$(0,\pi) \times (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$
19.28.	$\dfrac{y}{1+x^2y^2}$	$(0,1) \times (-1,0)$
19.29.	$\dfrac{y}{1-x^2y^2}$	$(0,1)^2$
19.30.	$\dfrac{1}{1+x+y^2}$	$(-1,1) \times (-\sqrt{2},\sqrt{2})$
19.31.	$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$	$(1,2) \times (0,1)$
19.32.	$(x+y)\lg(1+x+y)$	$(-1,1) \times (0,1)$
19.33.	$xy \lg(x^2+y^2)$	$(0,1)^2$
19.34.	$\dfrac{\lg(x+y)}{x+y}$	$(0,1)^2$
19.35.	$\sqrt[3]{\operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 y}$	$(0,\frac{1}{2}\pi) \times (0,\frac{1}{2}\pi)$
19.36.	$x \operatorname{arctg} xy$	$(0,1)^2$
19.37.	$y \arcsin \dfrac{x}{y}$	$(0,1) \times (1,2)$
19.38.	$\dfrac{1}{\cosh x - \cosh y}$	$(1,2)^2$

19.39. $\dfrac{1}{1+x^2y^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.40. $\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.41. $\dfrac{x \operatorname{arctg} x^2y^2}{1+x^4y^4}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+ \times (1, +\infty)$

19.42. $y\, e^{-(x+y^2)}$ $\qquad$ $(0,1) \times \mathbb{R}_+$

19.43. $xy\, e^{-(x^2+y^2)}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.44. $x^2y^3\, e^{-(x+y)}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.45. $(x^2+y^2)\, e^{-xy}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.46. $\dfrac{\sqrt{y}}{e^{xy}(e^{xy}+1)}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+ \times (0,1)$

19.47. $\dfrac{1}{\cosh xy}$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+ \times (0,1)$

19.48. $xy^2\, e^{-xy} \sin xy$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+ \times (0,1)$

19.49. $\sqrt{y}\, e^{-xy} \sin x$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

19.50. $e^{-xy^2} \cos xy$ $\qquad$ $\mathbb{R}_+^2$

Vypočtěte $\int_M f$, je-li M trojúhelník resp. čtyřúhelník s uvedenými vrcholy.

$f(x,y) =$	vrcholy:
19.51. $\sin(x+y)$	$(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(0, \pm\frac{1}{2}\pi)$
19.52. $\sin(x+y) - \cos(x-y)$	$(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0,\pi)$
19.53. $x\, e^{x+y}$	$(\pm 1, 0)$, $(0,1)$
19.54. $\lg \dfrac{x}{x^2+y^2}$	$(0,0)$, $(1,\pm 1)$
19.55. $\operatorname{arctg}(x+y)$	$(-1,0)$, $(0,\pm 1)$
19.56. e^{x-y}	$(\pm 1, 0)$, $(0,\pm 1)$
19.57. $\dfrac{1}{1+\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$	$(\pm 1, 0)$, $(0,\pm 1)$
19.58. $\lg(1+\lvert x\rvert+\lvert y\rvert)$	$(\pm 1, 0)$, $(0,\pm 1)$
19.59. x^2y^2	$(\pm 2, 0)$, $(0,\pm 1)$
19.60. x^2-y^2	$(-2,0)$, $(0,\pm 1)$, $(1,0)$

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ a nechť

$$M_1 := U((0,0),1), \quad M_2 := U((1,0),1), \quad M_3 := U((-1,0),1),$$
$$M_4 := M_1 \cap \{(x,y);\, y > 0\}, \quad M_5 := M_1 \cap \{(x,y);\, x > 0\}, \quad M_6 := M_2 \cup M_3\,,$$
$$M_7 := \Big\{(x,y);\ \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 < 1\Big\}, \quad M_{ij} := M_i \cap M_j,\ \text{je-li}\ 1 \le i < j \le 5\,.$$

Zjistěte, zdali existuje integrál $\int_M f$, a v případě, že ano, vypočtěte jeho hodnotu.

	$f(x,y) =$	$M =$		$f(x,y) =$	$M =$
19.61.	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	M_1	**19.62.**	$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$	M_2
19.63.	$(x^2+y^2)x^\alpha y^\beta$	M_{45}	**19.64.**	$(x^2+y^2)\lg(x^2+y^2)$	M_1
19.65.	$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x+y)^2}$	M_{45}	**19.66.**	$(x^2+y^2)\,e^{x^2+y^2}$	M_1
19.67.	$\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$	M_{34}	**19.68.**	$\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}$	M_{12}
19.69.	$\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	M_{24}	**19.70.**	$xy\,e^{-x^2-y^2}$	M_{34}
19.71.	$\dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{7/2}}$	$M_4 - M_6$	**19.72.**	$\sqrt{\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2+\Big(\dfrac{y}{b}\Big)^2}$	M_7
19.73.	$\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$	$M_4 - M_6$	**19.74.**	$\dfrac{x^2y^2}{\Big(\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^2+\Big(\dfrac{y}{b}\Big)^2\Big)^2}$	M_7

V dalších příkladech bude úkolem vypočítat *obsah* neboli *dvojrozměrnou Lebesgueovu míru* množiny M dané buď *aritmeticky* (jednou nebo několika nerovnostmi), nebo *geometrickým popisem* (např. že M je množina ohraničená hyperbolami o rovnicích $y = \pm\sqrt{1+x^2}$ a přímkami o rovnicích $x = \pm a$, kde $a \in \mathbb{R}_+$); ve druhém případě je na čtenáři, aby dané podmínky „zaritmetizoval“.

Čtenář ví, že integrace výrazů obsahujících $x^2 + y^2$ se často zjednoduší přechodem k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Podobně lze však transformovat např. součet $x + y$ nebo $x^{2/3} + y^{2/3}$; v prvním případě můžeme zkusit substituci $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, ve druhém substituci $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$. Kromě výpočtu příslušného jakobiánu je ovšem třeba zjistit, v jaké oblasti je taková substituce difeomorfismem; [33]) po substituci se často hodí vzorec (182).

[33]) V právě uvedených dvou příkladech je to např. oblast $\mathbb{R}_+ \times (0, \frac{1}{2}\pi)$, která transformací přechází v první otevřený kvadrant.

V Př. 19.75 – 19.100 jsou $a < b$ a $c < d$ čísla z $\mathbb{R}_+$. Je-li (f, g) difeomorfismus a je-li množina M dána nerovnostmi $a < f(x, y) < b$, $c < g(x, y) < d$, může vést k řešení příkladu substituce $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, protože transformovaná množina je pak interval $(a, b) \times (c, d)$. Poznamenejme ještě, že v příkladech 19.75, 19.77, 19.78 a 19.81 počítáme po řadě obsah smyčky lemniskaty, astroidy, strofoidy a Descartova listu; i když z obrázků nic neodvozujeme, není geometrická představa integračního oboru M v jednotlivých příkladech vůbec na škodu.

M je dána nerovnostmi nebo nerovností

19.75. $(x^2 + y^2)^2 < 2a^2(x^2 - y^2)$, $x > 0$

19.76. $(x + y)^3 < xy$, $x > 0$, $y > 0$

19.77. $x^{2/3} + y^{2/3} < a^{2/3}$

19.78. $x(x^2 + y^2) < x^2 - y^2$, $x > 0$

19.79. $(x^2 + y^2)^2 < xy$, $x > 0$, $y > 0$

19.80. $(x^2 + y^2)^3 < xy^2$

19.81. $x^3 + y^3 < xy$, $x > 0$, $y > 0$

19.82. $x^4 + y^4 < x^2 y$, $x > 0$

19.83. $x^4 + y^4 < x^2 + y^2$

19.84. $ax^2 < y < bx^2$, $cy^2 < x < dy^2$

19.85. $a < \sqrt{x}\, y < b$, $c\sqrt{x} < y < d\sqrt{x}$

19.86. $ax^3 < y^2 < bx^3$, $cy^3 < x^2 < dy^3$

19.87. $ax^3 < y < bx^3$, $cy^3 < x < dy^3$

M je množina ohraničená křivkami s popisem

19.88. $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$, $x = \pm a$

19.89. $y = a\sqrt{x}$, $y = b\sqrt{x}$, $xy = c$, $xy = d$

19.90. $y = \sinh x$, $y = 2\sinh x$, $y = e^{-x}$

19.91. $y = \sinh x$, $y = 2\sinh x$, $y = e^{-x}$, $y = 2e^{-x}$

19.92. $y = 2\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $xy = 1$, $xy = 4$

19.93. $x^2 + y^2 = p^2$, $(x - 2)^2 + y^2 = q^2$, $p = 1, 2$, $q = 1, 2$

19.94. $(x, y) = (\cos \pi t, t), (x, y) = (1 + \sin \pi t, t)$, $0 \le t \le \frac{3}{2}$

19.95. $(x \pm 4)^2 + y^2 = 9$, $x^2 + (y \pm 3)^2 = 4$

19.96. $x^2 y = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{x}$

19.97. $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, $x > 0$

19.98. $y = |\sin \pi x| \sinh x$, $y = |\sin \pi x| \cosh x$, $x > 0$

19.99. $y = \lg(1 + x^2)$, $y = \lg(2 + x^2)$

19.100. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctg} 2x$, kde $x \geq 0$

Existuje-li $\int_M f$, vypočtěte jej, v opačném případě odůvodněte, proč neexistuje.

	$f(x,y) =$	M je množina určená podmínkami
19.101.	$\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$	$0 < x < 2$, $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < y < \sqrt{x}$
19.102.	$\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$
19.103.	$\dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^a}$, kde $a \in \mathbb{R}$	$(x-1)^2 + y^2 < 1$
19.104.	$\dfrac{y}{x^a}$, kde $a \in \mathbb{R}$	$x > 1$, $0 < y < x$
19.105.	$\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	$x > 1$, $0 < y < \dfrac{1}{x}$
19.106.	$\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$	$\frac{1}{2}x < y < 2x$, $xy < 1$, $x > 0$
19.107.	$\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}}$	$(x-1)^2 + y^2 < 1$, $y > 0$
19.108.	$x^2 + y^2$	$(x^2 + y^2)^2 < 2(x^2 - y^2)$
19.109.	$\dfrac{xy}{x^2 + y^2}$	$(x^2 + y^2)^2 < 2(x^2 - y^2)$, $x > 0$, $y > 0$
19.110.	$\dfrac{x}{x^2 + y^2}$	$0 < x < 1$, $x^2 < y < \sqrt{x}$

Mezi příklady na trojrozměrnou integraci budou i příklady na výpočet objemu; bude se nám proto hodit vzorec pro výpočet *objemu rotačního tělesa*: Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina a nechť $f : A \to \langle 0, +\infty)$ je měřitelná funkce; označíme-li

(184) $$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in A,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

„množinu pod grafem funkce f" v rovině xy, bude

(185) $$B_x := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x \in A,\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

množina, která vznikne z B rotací kolem osy x. Tato množina je opět měřitelná, a zavedeme-li v rovině yz polární souřadnice $(y,z)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, vidíme, že její *objem je roven*

$$\mu_3(B_x)=\iiint\limits_{B_x} dx\,dy\,dz=\int\limits_A \Big(\iint\limits_{\substack{0<r<f(x)\\0<\varphi<2\pi}} r\,dr d\varphi\Big)dx=\pi\int\limits_A f^2. \quad \square \tag{186}$$

Ve Cv. 19.111 − 19.140 budou a,b,c,d čísla z $\mathbb{R}_+$ a ve Cv. 19.111 − 19.130 bude cílem vypočítat objem (neboli trojrozměrnou Lebesgueovu míru) množiny $M\subset\mathbb{R}^3$.

19.111. M je elipsoid ohraničený plochou o rovnici

$$\Big(\frac{x}{a}\Big)^2+\Big(\frac{y}{b}\Big)^2+\Big(\frac{z}{c}\Big)^2=1\,.$$

Rada: Přejděte k „zobecněným sférickým souřadnicím“

$$x=ra\cos\varphi\cos\vartheta\,,\ y=rb\sin\varphi\cos\vartheta\,,\ z=rc\sin\vartheta\,.\ \diamond$$

19.112. M je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$.

19.113. M je pětistěn (pyramida) s vrcholy $(\pm1,1,0)$, $(\pm1,-1,0)$, $(0,0,1)$.

19.114. M je průnik válce $(x-R)^2+y^2\le R^2$ s koulí $x^2+y^2+z^2\le 4R^2$ (kde $R\in\mathbb{R}_+$), tedy tzv. *Vivianiho těleso*.

Rada: Integrujte nejdříve podle z a pak zaveďte polární souřadnice; pozor při odmocňování! $\diamond$

19.115. $M=\{(x,y,z);\ (x^2+y^2+z^2)^2<8(x^2+y^2-z^2)\}$.

19.116. M je *paraboloid* vzniklý rotací úseče paraboly $y^2\le 2cx$, $0\le x\le a$, kolem osy x .

19.117. M je část *eliptického kužele* $(x/a)^2+(y/b)^2\le z^2$, kde $0\le z\le c$.

19.118. M je lineární obal obdélníka $\langle -a,a\rangle\times\langle -b,b\rangle\times\{0\}$ v rovině xy a úsečky s krajními body $(\pm c,0,d)$, kde $c<a$; podobá se klínu.

Rada: Klín je ohraničen pěti rovinami a jeho objem je roven čtyřnásobku jeho průniku s prvním oktantem. Průmět tohoto průniku do roviny xy je sjednocením lichoběžníku s trojúhelníkem, přes něž je třeba integrovat odděleně. $\diamond$

19.119. M je *anuloid* (neboli *torus*) vzniklý rotací kruhu $x^2+(z-R)^2\le r^2$, kde $0<r<R<+\infty$, kolem osy x.

Rada: Je-li x vodorovná, z svislá osa, vypočtete objem anuloidu jako rozdíl objemů těles, která vzniknou rotací množin pod horní a pod dolní půlkružnicí ohraničující uvedený kruh. $\diamond$

19.120. Množina M vznikla rotací množiny pod částí hyperboly $xy=1$, odpovídající $x\ge\frac{1}{2}$, kolem osy x.

19.121. Množina M vznikla rotací vnitřku astroidy $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ kolem osy x.

19.122. Množina M vznikla rotací množiny pod částí řetězovky $y = \cosh x$, $-a \le x \le a$, kolem osy x (tzv. *katenoid*).

19.123. Množina M vznikla rotací množiny pod grafem funkce $\sin^n x$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $0 \le x \le \pi$, kolem osy x.

19.124. Množina M („sud s kruhovými dužinami“) vznikla rotací množiny pod obloukem kružnice $(y+4)^2 + x^2 = 36$, $|x| \le 3$, kolem osy x.

19.125. Množina M („sud s parabolickými dužinami“) vznikla rotací množiny pod parabolou $y = 6 - x^2/25$, $|x| \le 5$, kolem osy x.

19.126. $M = \{(x,y,z);\, (x^2+y^2+z^2)^2 < xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

19.127. M je množina ohraničená *eliptickým paraboloidem* $(x/a)^2 + (y/b)^2 = z$ a rovinou $z = c$.

19.128. M je část *eliptického válce* $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1$ ohraničená rovinami $z = \pm(x-a)$.

19.129. $M = \{(x,y,z);\, x^2+y^2 \le R^2,\ y^2+z^2 \le R^2\}$ (průnik dvou válců).

19.130. M je průnik elipsoidu $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 \le 1$ s eliptickým válcem $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le \frac{1}{4}$.

* * *

Hmotnost tělesa (= měřitelné množiny) $M \subset \mathbb{R}^3$, jehož hustota je dána nezápornou měřitelnou funkcí $\rho(x,y,z)$, je definována rovností

$$\operatorname{hm}(M) := \iiint_M \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,. \tag{187}$$

Konverguje-li integrál

$$\operatorname{stm}_{\mathrm{yz}}(M) := \iiint_M \rho(x,y,z)\,x\,dx\,dy\,dz\,, \tag{188}$$

definuje tzv. *statický moment tělesa M vzhledem k rovině* yz; *statické momenty* $\operatorname{stm}_{\mathrm{xz}}(M)$ a $\operatorname{stm}_{\mathrm{xy}}(M)$ vzhledem k rovinám xz a xy se definují analogicky, jako integrály funkcí ρy a ρz. *Těžiště* tělesa M je definováno jako bod

$$\frac{(\operatorname{stm}_{\mathrm{yz}}(M),\, \operatorname{stm}_{\mathrm{xz}}(M),\, \operatorname{stm}_{\mathrm{xy}}(M))}{\operatorname{hm}(M)} \tag{189}$$

za předpokladu, že statické momenty existují a hmotnost je konečná kladná.

Konverguje-li integrál

$$\iiint_M \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\,, \tag{190}$$

nazývá se jeho hodnota *moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k ose* z; *momenty setrvačnosti vzhledem k osám* x a y získáme ze (190), píšeme-li (y^2+z^2) a (z^2+x^2) místo (x^2+y^2).

19.131. Vypočítejte hmotnost koule $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, je-li hustota ρ rovna a) $1/r$, b) $1/r^2$, c) $1/(r^2+1)$, kde $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

19.132. Vypočítejte hmotnost elipsoidu $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2 \le 1$, je-li hustota rovna $x^2+y^2+z^2$.

19.133. Najděte těžiště krychle $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$, je-li $\rho(x,y,z) = xy^2z^3$.

19.134. Najděte těžiště části *rotačního paraboloidu* $x^2+y^2 \le 2z \le 2c$, je-li $\rho \equiv 1$.

19.135. Najděte těžiště *rotačního kužele* $x^2+y^2 \le \frac{1}{4}z^2$, $0 \le z \le c$, v případě, že $\rho(x,y,z) = z$.

19.136. Najděte moment setrvačnosti koule $(x-R)^2+y^2+z^2 \le R^2$ vzhledem k ose z, je-li $\rho \equiv 1$.

19.137. Při $\rho \equiv 1$ najděte moment setrvačnosti vzhledem k ose y části dutého válce $R_1^2 \le x^2+z^2 \le R_2^2$ $(0 < R_1 < R_2 < +\infty)$ mezi rovinami $y=0$ a $y=c$.

19.138. Najděte moment setrvačnosti kvádru $\langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle 0,c\rangle$ vzhledem k ose z, je-li $\rho(x,y,z) = xyz$.

19.139. Najděte moment setrvačnosti *eliptického kužele* $(x/a)^2 + (y/b)^2 \le z^2$, $0 \le z \le c$, vzhledem k ose z, je-li hustota rovna 1.

19.140. Najděte moment setrvačnosti *eliptického paraboloidu* $(x/a)^2+(y/b)^2 \le z \le c$ vzhledem k ose z, je-li hustota rovna 1.

* * *

19.141. Vyjděte z rozvoje funkce $1/(x^2+1)$ v Taylorovu řadu o středu 0 (která konverguje, právě když je $|x| < 1$) a dokažte rovnost

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{pro všechna } x \in \langle -1, 1\rangle .$$

Rada: Ověřte, že částečné součty (alternující) řady pro $1/(x^2+1)$ leží mezi 0 a 1 a užijte V. 19.18. $\diamond$

19.142. Integrací člen po členu řady pro $1/\sqrt{1-x^2}$ ověřte platnost identity

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{pro všechna } x \in \langle -1, 1\rangle .$$

Rada: Řada pro $1/\sqrt{1-x^2}$ má nezáporné členy; užijte V. 19.18. $\diamond$

19.143. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)^2} .$$

19.144. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\lg(1-x)}{x}\, dx = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} .$$

Poznámka: V kapitole 20 zjistíme, že součet řady vpravo je roven $\frac{1}{6}\pi^2$.

19.145. Dokažte, že

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{1}{k^2}\,.$$

Rada: Ukažte, že částečné součty Taylorova rozvoje integrandu leží mezi $\frac{1}{2}$ a 1. $\diamond$

19.146. Ověřte, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} x\,e^{-kx}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

19.147. Indukcí a derivováním podle parametru a ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} x^n\,e^{-ax} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+ \text{ a všechna celá čísla } n \ge 0\,.$$

19.148. Indukcí a derivováním podle parametru y ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^1 x^y\,\lg^n x\,dx = \frac{(-1)^n\,n!}{(y+1)^{n+1}} \quad \text{pro všechna } y > -1 \text{ a všechna celá čísla } n \ge 0\,.$$

19.149. Indukcí a derivováním podle parametru a ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(2n-3)!!\,\pi}{2\,(2n-2)!!\,a^{n-1/2}} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+ \text{ a všechna } n \in \mathbb{N}\,.$$

19.150. Indukcí a derivováním podle parametru a ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} x^{2n}\,e^{-ax^2}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\,a^{n+1/2}}\,\sqrt{\pi} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+ \text{ a všechna celá } n \ge 0\,.$$

19.151. Předpokládejte, že $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$, užijte výsledky z Př. 19.17 a derivováním podle parametru ukažte, že

$$\int_0^{+\infty} x^2\,e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{2b\,(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3}\,, \quad \int_0^{+\infty} x^2\,e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{2a\,(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}\,.$$

19.152. Derivováním podle parametru dokažte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2} = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+\,.$$

19.153. Rovnost uvedenou v příkladě 19.152 dokažte integrací podle parametru.

Rada: Uvažte, že integrand je při $a < b$ roven $\int_a^b e^{-x^2 y}\,dy$; při $a > b$ stačí vyměnit oba parametry, případ $a = b$ je triviální. $\diamond$

19.154. Derivováním podle parametru ověřte platnost rovnosti

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}.$$

Rada: O něco výhodnější je derivovat podle b. ◇

19.155. Derivováním podle parametru nejdříve ověřte, že

$$\int_0^{\pi} \frac{\lg(1 + a\cos x)}{\cos x}\,dx = \pi \arcsin a \quad \text{pro všechna} \quad a \in (-1, 1).$$

Pak dokažte, že integrál vlevo je spojitý v intervalu $\langle -1, 1\rangle$; protože i pravá strana je v $\langle -1, 1\rangle$ spojitá, platí rovnost i v krajních bodech, takže

$$\int_0^{\pi} \frac{\lg(1 \pm \cos x)}{\cos x}\,dx = \pm\tfrac{1}{2}\pi^2.$$

Rada: Lokální majoranta derivace integrandu:

$$|a| \le b < 1 \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{1 + a\cos x} \le \frac{1}{1 - b}.$$

Hodnoty funkce $\lg(1 + a\cos x)$ leží mezi $\lg(1 - \cos x)$ a $\lg(1 + \cos x)$ a obě funkce $\lg(1 \pm \cos x)/\cos x$ leží v $\mathcal{L}(\langle -1, 1\rangle)$; to spolu s dalšími, snadno ověřitelnými podmínkami zaručí podle V.19.27 spojitost integrálu v $\langle -1, 1\rangle$. ◇

19.156. Dokažte, že

$$I(a) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos ax\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-a^2/4} \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Rada: Derivujte podle parametru (majoranta $xe^{-x^2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$), výsledek integrujte per partes a vyřešte vzniklou lineární diferenciální rovnici 1. řádu; $I(0)$ je Laplaceův integrál. ◇

19.157. Integrací podle parametru ověřte, že

$$\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\lg(1 + \sqrt{2}\,).$$

Rada: Je $\operatorname{arctg} x/x = \int_0^1 (1 + x^2y^2)^{-1}\,dy$, aplikace Fubiniho věty nedělá potíže; substituujte $x = \sin t$. ◇

19.158. Integrací podle parametru ověřte, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lg(1 + b^2x^2) - \lg(1 + a^2x^2)}{x^2}\,dx = \pi(|b| - |a|) \quad \text{pro všechna} \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}.$$

Rada: Pro $a < b$ je integrand je roven integrálu od a do b funkce $2y/(1 + x^2y^2)$, aplikace Fubiniho věty nečiní potíže, pozor však na znaménko. ◇

19.159. Integrací podle parametru dokažte, že

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{1-\cos x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lg\frac{a^2+1}{a^2} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}_+ .$$

Rada: Integrand lze napsat ve tvaru $\int_0^1 e^{-ax} \sin xy\,dy$, majoranta e^{-ax} integrandu právě napsaného integrálu leží v $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+ \times (0,1))$. $\diamond$

19.160. Integrací podle parametru dokažte, že

$$I := \int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,;$$

uvažte při tom, že *integrál* (jeden z tzv. *Fresnelových integrálů*) *je Newtonův, nikoli Lebesgueův.*

Rada: Substituce $x = \sqrt{t}$ (v Newtonově integrálu!) vede k rovnosti

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt, \quad \text{přičemž} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-ty^2}\,dy$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}_+$. Funkce $f(t,y) := e^{-ty^2} \sin t$ *nemá* Lebesgueův integrál přes $\mathbb{R}_+^2$ (proč ?), ale má konečný integrál přes množinu $(0,A) \times \mathbb{R}_+$ pro každé $A \in \mathbb{R}_+$ – majoranta e^{-ty^2} má přes tuto množinu integrál rovný $\sqrt{A\pi}$. Fubiniho věta dává rovnost

$$\int_0^A \Big(\int_0^{+\infty} f(t,y)\,dy\Big)dt = \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^A f(t,y)\,dt\Big)dy\,;$$

limitní přechod $A \to +\infty$ vlevo vede k I, týž limitní přechod vpravo je nutné provést za znamením integrálu, podle V. 19.17*. (Vnitřní integrál vpravo vypočítáme a pak odhadneme např. funkcí $(y^2+2)/(y^4+1) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_+)$.) $\diamond$

Řešení

19.21. $\frac{1}{4}$

19.22. $\lg 2$

19.23. 4

19.24. $8 \operatorname{argsinh} 1$

19.25. $\sqrt{\pi}$

19.26. 4

19.27. 0

19.28. $\frac{1}{4}(2\lg 2 - \pi)$

19.29. $\lg 2$

19.30. $\sqrt{2}\,(\pi + 2\lg 2)$

19.31. $4\lg 2 - 2\sqrt{2} - 6\lg(\sqrt{2}-1)$

19.32. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\lg 2$

19.33. $\frac{1}{2}\lg 2 - \frac{3}{8}$

19.34. $\lg 2\,(\lg 2 - 2)$

19.35. $\pi^2/\sqrt{3}$

19.36. $\frac{1}{2}(1-\lg 2)$

19.37. $\frac{1}{12}\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{7}{3}$

19.38. neexistuje

19.39. $+\infty$

19.40. $\frac{1}{4}\pi$

19.41. $\frac{1}{16}\pi^2$

19.42. $(e-1)/2e$

19.43. $\frac{1}{4}$

19.44. 12

19.45. $+\infty$

19.46. $2(1-\lg 2)$

19.47. $+\infty$

19.48. $\frac{1}{2}$

19.49. $\pi/\sqrt{2}$

19.50. neexistuje

19.51. 1

19.52. $\pi - 2$

19.53. $\frac{1}{2}\sinh 1 - 1/e$

19.54. $\frac{1}{2}(5-\pi) - \lg 2$

19.55. $\frac{1}{4}(2-\pi)$

19.56. $2\sinh 1$

19.57. $4(1-\lg 2)$

19.58. 1

19.59. $\frac{8}{45}$

19.60. 1 $\square$

19.61. $\dfrac{\pi}{1-\alpha}$ pro $\alpha < 1$; $+\infty$ pro $\alpha \geq 1$

19.62. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2\alpha-1}(1-\alpha)}\,\dfrac{\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)}$ pro $\alpha < 1$; $+\infty$ pro $\alpha \geq 1$,

19.63. $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(1+\alpha))\,\Gamma(\frac{1}{2}(1+\beta))}{2(4+\alpha+\beta)\,\Gamma(1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta))}$, je-li $\alpha > -1$, $\beta > -1$; $+\infty$ jinak

19.64. $-\frac{1}{4}\pi$

19.65. 1

19.66. π

19.67. $-\infty$

19.68. $\frac{3}{16}\sqrt{3} + \frac{1}{12}\pi$

19.69. $\frac{11}{24}$

19.70. $(3-2e)/16e$

19.71. $\frac{1}{12}$

19.72. $\frac{2}{3}\pi ab$

19.73. 1

19.74. $\frac{1}{8}\pi a^3 b^3$

$\square$

19.75. a^2

19.76. $\frac{1}{60}$

19.77. $\frac{3}{8}\pi a^2$

19.78. $2 - \frac{1}{2}\pi$

19.79. $\frac{1}{4}$

19.80. $\frac{1}{3}\pi$

19.81. $\frac{1}{6}$

19.82. $\pi/(16\sqrt{2}\,)$

19.83. $\pi\sqrt{2}$

19.84. $\dfrac{(b-a)(d-c)}{3abcd}$

19.85. $\frac{4}{3}\,(\sqrt{b^3}-\sqrt{a^3}\,)\Big(\dfrac{1}{\sqrt{c}}-\dfrac{1}{\sqrt{d}}\Big)$

19.86. $\dfrac{(b-a)(d-c)}{5abcd}$

19.87. $\dfrac{(\sqrt{b}-\sqrt{a}\,)(\sqrt{d}-\sqrt{c}\,)}{2\sqrt{abcd}}$

$\square$

19.88. $2\,(a\sqrt{1+a^2}+\operatorname{argsinh} a)$

19.89. $\frac{2}{3}\,(d-c)\lg\dfrac{b}{a}$

19.90. $2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}\doteq 0.0964$

19.91. $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{5}\doteq 0.132$

19.92. $1+\frac{4}{3}\lg 2\doteq 1.924$

19.93. $2\arcsin\frac{1}{4}+8\arcsin\frac{7}{8}+\sqrt{15}-2\sqrt{3}-\frac{7}{3}\pi\doteq 2.107$

19.94. $\frac{3}{2}+\frac{2}{\pi}\doteq 2.1366$

19.95. $24+10\arcsin\frac{4}{5}-9\pi\doteq 4.9986$

19.96. $\frac{10}{3}$

19.97. 1

19.98. $\dfrac{\pi\,(e+1)}{(1+\pi^2)(e-1)}\doteq 0.625$

19.99. $2\,(\sqrt{2}-1)\,\pi\doteq 2.6026$

19.100. $+\infty$

$\square$

19.101. $\frac{1}{4}\,(2-\lg 3)$

19.102. $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{8}\lg(3+2\sqrt{2}\,)$

19.103. 0 pro $\alpha<2$, neexistuje pro $\alpha\ge 2$

19.104. $\dfrac{1}{2\,(\alpha-3)}$ pro $\alpha>3$, $+\infty$ pro $\alpha\le 3$

19.105. $\frac{2}{3}$

19.106. $2\lg 2$

19.107. π

19.108. $\frac{1}{2}\pi$

19.109. $\frac{1}{12}\,(4-\sqrt{2}\,)$

19.110. $1-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\lg 2\quad\square$

19.111. $\frac{4}{3}\,\pi abc$

19.112. $\frac{1}{6}\,abc$

19.113. $\frac{4}{3}$

19.114. $\frac{16}{9}\,(3\pi-4)\,R^3$

19.115. $4\pi^2$

19.116. πa^2c

19.117. $\frac{1}{3}\,\pi abc^3$

19.118. $\frac{2}{3}\,bd\,(2a+c)$

19.119. $2\pi^2Rr^2$

19.120. 2π

19.121. $\frac{32}{105}\,\pi a^3$

19.122. $\pi\,(a+\sinh a\cosh a)$

19.123. $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\pi^2$

19.124. $(294-72\sqrt{3}-48\pi)\,\pi$

19.125. 322π

19.126. $\frac{1}{1440}$

19.127. $\frac{1}{2}\pi abc^2$

19.128. $2\pi a^2 b$

19.129. $\frac{16}{3}R^3$

19.130. $(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3})\pi abc \quad \square$

19.131. $2\pi R^2$, $4\pi R$, $4\pi(R - \operatorname{arctg} R)$

19.132. $\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2 + b^2 + c^2)$

19.133. $\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{3}{4}b,\ \frac{4}{5}c\right)$

19.134. $(0,\ 0,\ \frac{2}{3}c)$

19.135. $(0,\ 0,\ \frac{4}{5}c)$

19.136. $\frac{28}{15}\pi R^5$

19.137. $\frac{1}{2}\pi c\,(R_2^4 - R_1^4)$

19.138. $\frac{1}{16}a^2b^2c^2(a^2 + b^2)$

19.139. $\frac{1}{20}\pi abc^5(a^2 + b^2)$

19.140. $\frac{1}{12}\pi abc^3(a^2 + b^2)$

20. Fourierovy řady

Úmluva. V této kapitole bude „funkce“ znamenat *konečnou reálnou funkci.* $\square$

Hlavním problémem této kapitoly je otázka, *za jakých podmínek lze konečnou 2π-periodickou funkci $f(x)$ rozvinout v (nekonečnou) řadu, jejímž k-tým členem je lineární kombinace funkcí* $\cos kx$, $\sin kx$. [1])

Abychom získali představu, jak by koeficienty těchto kombinací měly vypadat, řešme celý problém od konce: Předpokládejme, že (pro jistá čísla a_k, b_k) je

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

v celém $\mathbb{R}$ a že řada vpravo tam navíc konverguje stejnoměrně. Protože

(2) *součet stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce*,

může tato situace nastat jen v případě, že funkce f je spojitá (v $\mathbb{R}$).

V dalším kroku budeme potřebovat toto užitečné tvrzení (viz Důsledek věty 13.12):

(3) *Konverguje-li řada $\sum_k f_k$ stejnoměrně v M a je-li g funkce omezená v M, konverguje i řada $\sum_k f_k g$ stejnoměrně v M.*

Vynásobíme-li identitu (1) po řadě funkcemi $\cos jx$ a $\sin jx$, konverguje podle tohoto tvrzení řada vpravo opět stejnoměrně (v $\mathbb{R}$) a podle V.13.7 ji můžeme integrovat člen po členu např. přes interval $\langle 0, 2\pi\rangle$. (Protože *pro každou 2π-periodickou funkci h platí implikace*

$$\xi \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_0^{2\pi} h = \int_{\xi-\pi}^{\xi+\pi} h\,, \ \textit{má-li jedna strana rovnosti smysl}, \tag{4}$$

dojdeme k témuž výsledku, integrujeme-li přes jakýkoli interval délky 2π.)

Uvážíme-li, že pro všechna celá nezáporná čísla j, k platí identity

$$\int_0^{2\pi} \cos kx\,dx = \begin{Bmatrix} 2\pi & \text{pro} & k = 0 \\ 0 & \text{pro} & k \neq 0 \end{Bmatrix}, \ \int_0^{2\pi} \sin kx = \int_0^{2\pi} \sin jx \cos kx\,dx = 0\,, \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx\,dx = \pi\,, \ \text{je-li } k > 0\,, \tag{6}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin jx \sin kx\,dx = 0, \ \text{je-li } j \neq k\,, \tag{7}$$

[1]) Fyzikálně řečeno, periodický pohyb chceme rozložit na jednodušší periodické pohyby.

dostaneme z identity (1) násobené funkcemi $\cos jx$, $\sin jx$ integrací od 0 do 2π tyto hodnoty koeficientů a_k, b_k:

$$(8) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx\,;$$

první rovnost platí pro všechna $k \ge 0$, druhá pro všechna $k > 0$.[2]) Podle (4) však pro každé $\xi \in \mathbb{R}$ platí i rovnosti

$$(8') \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_\xi^{\xi+2\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_\xi^{\xi+2\pi} f(x)\sin kx\,dx\,.$$

Résumé: *Platí-li identita* (1) *v* $\mathbb{R}$ *a konverguje-li tam řada vpravo stejnoměrně, jsou koeficienty dány rovnostmi* (8) (*a také rovnostmi* (8′) *pro každé* $\xi \in \mathbb{R}$). $\square$

Z toho samozřejmě neplyne, že když do (1) *dosadíme podle* (8), *bude řada konvergovat v* $\mathbb{R}$ *stejnoměrně a její součet bude* $f(x)$. Příklad (nepatřící k nejjednodušším), že takové tvrzení neplatí ani pro spojité funkce f, najde čtenář např. v [13], str. 516 − 517. V dalším budeme proto řešit problém, *kdy, kde a jak řada* (1) *s koeficienty* (8) *konverguje a jaká je pak souvislost jejího součtu s funkcí* f. $\square$

Označení. $\mathcal{P}(2\pi)$ bude znamenat množinu všech 2π-periodických funkcí f, pro něž je $f\,|\,(0, 2\pi) \in \mathcal{L}((0, 2\pi))$. $\square$

Pro funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ se čísla (8) a (8′) nazývají **Fourierovy koeficienty** funkce f a řada (1) s těmito koeficienty je její **Fourierova řada**. *Tato řada nemusí konvergovat, a i když v jistém bodě x konverguje, nemusí být její součet roven* $f(x)$.

Je-li řada na pravé straně (1) Fourierovou řadou funkce vlevo, píšeme

$$(9) \qquad f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \quad \square$$

Nejdůležitější kritérium konvergence Fourierovy řady je založeno na pojmu *variace funkce*:

Definice. Variaci funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ **v intervalu** $\langle a, b\rangle$ definujeme jako supremum množiny čísel

$$(10) \qquad v(f; D) := \sum_{k=1}^{p} |\,f(x_k) - f(x_{k-1})\,|\,,$$

kde $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$ probíhá množinu všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pro každou funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je $0 \le V(f; a, b) \le +\infty$; je-li $V(f; a, b) < +\infty$, říkáme, že f je **funkce s konečnou variací** (v $\langle a, b\rangle$).

[2]) Nyní je patrné, proč jsme pravou stranu rovnosti (1) napsali v uvedeném tvaru: Mají-li být koeficienty a_k určeny stejným vzorcem pro všechna $k \ge 0$, je pro $k = 0$ nutné napsat $\frac{1}{2}a_0$; výraz $b_k \sin kx$ pro $k = 0$ nepíšeme, protože je identicky nulový.

Cvičení 20.01. Přímo z definice dokažte toto tvrzení:

(11) $\quad$ *f je monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle \Rightarrow V(f; a, b) = |f(b) - f(a)| < +\infty$.*

Rada: Je-li f monotónní funkce, je součet (10) absolutních hodnot jejích přírůstků roven absolutní hodnotě součtu těchto přírůstků. ◇

Cvičení 20.02. Dokažte, že *pro každé dvě funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ s konečnou variací a pro každá dvě čísla $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ platí nerovnost*

(12) $$V(\alpha f \pm \beta g; a, b) \le |\alpha| V(f; a, b) + |\beta| V(g; a, b).$$

D ů s l e d e k : *Lineární kombinace funkcí s konečnou variací má konečnou variaci.*

Rada: Napište součet (10) pro funkci $\alpha f \pm \beta g$, užijte trojúhelníkovou nerovnost a přejděte k supremům nejdříve vpravo, pak vlevo. ◇

Cvičení 20.03. Dokažte, že *pro každou funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a pro každý interval $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$ platí nerovnosti*

(13) $$V(f; c, d) \le V(f; a, b), \quad V(|f|; a, b) \le V(f; a, b).$$

D ů s l e d e k : *Má-li funkce f konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$, mají konečnou variaci i funkce $f|\langle c, d\rangle$ a $|f|$.*

Rada: Uvažte, že přidáním bodů a, b k libovolnému dělení D intervalu $\langle c, d\rangle$ vznikne dělení D^* intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $v(f; D) \le v(f; D^*) \le V(f; a, b)$. Dále uvažte, že nerovnost $||u| - |v|| \le |u - v|$ platí pro každá dvě čísla u, v z $\mathbb{R}$. ◇

Cvičení 20.04. Dokažte, že

(14) $\quad$ *každá funkce s konečnou variací v $\langle a, b\rangle$ je $\langle a, b\rangle$ omezená.*

Rada: Je-li $x \in \langle a, b\rangle$ a je-li D dělení s dělicími body a, x, b, je

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x) - f(a)| \le |f(a)| + v(f; D) \le |f(a)| + V(f; a, b). \diamond$$

Cvičení 20.05. Dokažte, že

(15) $$V(f; a, b) < +\infty,\ V(g; a, b) < +\infty \Rightarrow V(fg; a, b) < +\infty.$$

Rada: Podle (14) jsou obě funkce f, g omezené; pro vhodnou konstantu $K \in \mathbb{R}_+$ je proto

$$|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \le K(|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})|). \diamond$$

Cvičení 20.06. Dokažte, že *pro každou funkci $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a pro každé číslo $c \in (a, b)$ platí rovnost*

(16) $$V(f; a, b) = V(f; a, c) + V(f; c, b).$$

D ů s l e d e k : *Je-li $V(f;a,b) < +\infty$, je funkce V_f definovaná podmínkami*

$$V_f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{pro } x = a \\ V(f;a,x) & \textit{pro } x \in (a,b\rangle \end{array} \right\} \tag{17}$$

neklesající v $\langle a,b\rangle$.

Rada: Označme PS a LS pravou a levou stranu rovnosti (16) a místo $v(f,D)$ pišme jen $v(D)$. Jsou-li D_1 a D_2 dělení intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a je-li dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$ složeno právě ze všech bodů dělení D_1 a D_2, je $v(D_1) + v(D_2) = v(D) \leq LS$; z toho plyne nerovnost $PS \leq LS$. Je-li D libovolné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a označíme-li D' dělení, které z něj vznikne přidáním bodu c, bude podle trojúhelníkové nerovnosti $v(D) \leq v(D')$. Označíme-li D_1 a D_2 dělení intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ složené právě ze všech bodů dělení D' ležících v $\langle a,c\rangle$ a v $\langle c,b\rangle$, bude $v(D) \leq v(D') = v(D_1) + v(D_2) \leq PS$; z toho plyne, že $LS \leq PS$. $\diamond$

Je-li $V(f;a,b) < +\infty$, platí pro každé dva body $x_1 < x_2$ z $\langle a,b\rangle$ relace

$$f(x_2) - f(x_1) \leq |\,f(x_2) - f(x_1)| \leq V(f;x_1,x_2) = V_f(x_2) - V_f(x_1);$$

z toho je patrné, že funkce $V_f - f$ je neklesající v $\langle a,b\rangle$. Funkce $f = V_f - (V_f - f)$ je tedy rozdílem dvou neklesajících funkcí. Z toho a ze Cv. 20.2 plyne tato charakteristika funkcí s konečnou variací:

Věta 20.1. *Funkce f má konečnou variaci v $\langle a,b\rangle$, právě když je rozdílem dvou funkcí neklesajících v $\langle a,b\rangle$.*

Důsledek 1. *Pro každou funkci f s konečnou variací v $\langle a,b\rangle$ existuje konečná limita $f(x-)$ pro každé $x \in (a,b\rangle$ a konečná limita $f(x+)$ pro každé $x \in \langle a,b)$.*

Důsledek 2. $V(f;a,b) < +\infty \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{L}((a,b))$. $\square$

Dodejme, že *ze spojitosti funkce f* (a z podmínky $V(f;a,b) < +\infty$) *plyne spojitost funkce V_f* (viz [13], věta 121). *Spojitá funkce s konečnou variací je tedy rozdílem dvou spojitých neklesajících funkcí.*

POZOR VŠAK! *Ze spojitosti funkce f, a dokonce ani z existence konečné derivace f' všude v $\langle a,b\rangle$, neplyne konečnost její variace:*

Příklad 20.1. *Funkce f definovaná v $\mathbb{R}$ předpisem*

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cc} x^2 \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{array} \right\} \tag{18}$$

má konečnou derivaci všude v $\mathbb{R}$, ale $V(f;0,1) = +\infty$.

Konečnost funkce f' v $\mathbb{R}$ je jistě zřejmá. Označíme-li $x_k = \sqrt{1/k\pi}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a je-li $D_n : 0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < x_0 := 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je

$$v(f;D_n) \geq \sum_{k=2}^{n} \left| \frac{\cos k\pi}{k\pi} - \frac{\cos (k-1)\pi}{(k-1)\pi} \right| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} \right) \text{ pro každé } n \geq 2,$$

protože $\cos k\pi = (-1)^k = -(-1)^{k-1} = -\cos(k-1)\pi$. Protože poslední součet má pro $n \to \infty$ limitu $+\infty$, je $V(f; a, b) \geq \sup\{v(f; D_n);\ n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. $\square$

V předcházejícím příkladu měla funkce f sice konečnou, ale (v každém okolí nuly) *neomezenou* derivaci; následující cvičení ukáže, že jen proto mohla mít nekonečnou variaci.

Cvičení 20.07. Dokažte toto tvrzení:

(19) *Je-li funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je-li f' omezená v (a, b), je $V(f; a, b) < +\infty$.*

Rada: Přírůstky $f(x_k) - f(x_{k-1})$ přepište pomocí věty o přírůstku funkce. $\diamond$

Patrně nejdůležitějším kritériem[3]) konvergence Fourierových řad je tato věta:

Věta 20.2. (Dirichlet–Jordanovo kritérium.) *Má-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ konečnou variaci v jistém intervalu $\langle a, b\rangle$, platí tato tvrzení:*

1. *Pro každé $x \in (a, b)$ je součet $s(x)$ Fourierovy řady funkce f v bodě x roven $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$; je-li f v bodě x spojitá, je $s(x) = f(x)$.*

S p e c i á l n ě : Je-li $b - a \geq 2\pi$, má Fourierova řada funkce f uvedený součet v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

2. *Je-li f v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, konverguje její Fourierova řada v (a, b) lokálně stejnoměrně.*

S p e c i á l n ě : Je-li $b - a \geq 2\pi$, konverguje Fourierova řada funkce f stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$. $\square$

Konečnost variace zaručují např. (dosti silné) předpoklady tvrzení (19). Následující tvrzení, podle něhož lze variaci v některých případech i vypočítat, nepředpokládá (na rozdíl od tvrzení (19)) spojitost dané funkce.

Věta 20.3. *Má-li funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (konečné nebo nekonečné) limity $f(a+)$ a $f(b-)$, je*

$$V(f; a, b) = |f(a) - f(a+)| + \lim_{\substack{a' \to a+ \\ b' \to b-}} V(f; a', b') + |f(b) - f(b-)|. \tag{20}$$

Důsledek. *Je-li funkce $V(f; a', b')$ omezenou funkcí intervalu $\langle a', b'\rangle \subset (a, b)$ a existují-li konečné limity $f(a+)$, $f(b-)$, má funkce f v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci.*

S p e c i á l n ě : Je-li $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ v intervalu (a, b) monotónní, je

$$V(f; a, b) = |f(a) - f(a+)| + |f(b-) - f(a+)| + |f(b) - f(b-)|. \quad \square \tag{20'}$$

Příklad 20.2. Je-li např. $f(x) := x$ v $(-\pi, \pi)$ a $f(\pm\pi) := 0$, je $V(f; -\pi, \pi) = \pi + 2\pi + \pi = 4\pi$.

[3]) Vystačíme s ním jak v příkladech vyřešených v textu, tak i v příkladech, jejichž řešení je přenecháno čtenářům jako cvičení.

Jak víme, lze člen po členu integrovat jen některé řady funkcí; je proto jistě pozoruhodné, že *integrovat člen po členu lze každou (tedy i divergentní!) Fourierovu řadu*. Vysvětleme, co se tím míní:

Věta 20.4. (O integraci Fourierovy řady člen po členu.) *Nechť $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ a nechť*

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{9}$$

Pak má funkce F, definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ rovností

$$F(x) := \int_0^x f \; - \; \tfrac{1}{2}a_0 x, \tag{21}$$

periodu 2π, její Fourierova řada

$$\tfrac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}, \quad kde \;\; \tfrac{1}{2}A_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}, \tag{22}$$

konverguje stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ a má tam součet $F(x)$.

Poznámka 20.1. Aby integrací relace (9) vznikla 2π-periodická funkce, je třeba před integrací převést konstantu $\frac{1}{2}a_0$ na levou stranu; periodicita funkce F je pak důsledkem rovnosti

$$F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} f - \pi a_0 = 0,$$

která plyne z definice čísla a_0. Integrujeme-li pak od 0 do x zbylý součet na pravé straně (9) člen po členu, dostaneme výraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \frac{\sin kx}{k} + b_k \Big(\frac{1}{k} - \frac{\cos kx}{k} \Big) \Big),$$

z něhož je patrné, že číslo $\frac{1}{2}A_0$ je dáno vzorcem uvedeným v (22).

Přestože se konvergence řady v (9) *nepředpokládá, vznikne právě popsaným postupem řada* (22) *se součtem $F(x)$, konvergující stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$.* $\square$

Zmiňme se ještě o jednom velmi důležitém důsledku V. 20.4 : Ve větě 93 v [13] je uvedeno, že *pro každý interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a*

(23) *pro každou funkci $f \in \mathcal{L}((a, b))$ má funkce $F(x) := \int_a^x f$, kde $x \in (a, b)$, derivaci rovnou $f(x)$ pro skoro všechna $x \in (a, b)$.*

Jsou-li za situace a označení z V. 20.4 všechny Fourierovy koeficienty funkce f nulové, platí vzhledem k (22) totéž o Fourierových koeficientech funkce $F(x) = \int_0^x f$; její Fourierova řada má tedy součet 0, ale podle V. 20.4 i součet $F(x)$. Z toho a z tvrzení (23) vyplývá, že $f(x) = 0$ skoro všude v $(0, 2\pi)$, a v důsledku periodicity skoro všude v $\mathbb{R}$.

Provedeme-li analogickou úvahu s funkcí $f - g$, vidíme, že platí tato *věta o jednoznačnosti*:

Věta 20.5. *Jsou-li Fourierovy koeficienty funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ identické s Fourierovými koeficienty funkce $g \in \mathcal{P}(2\pi)$, je $f(x) = g(x)$ skoro všude v $\mathbb{R}$.* $\square$

Platnost (neplatnost) rovnosti $f(x) = g(x)$ skoro všude v $\mathbb{R}$ lze tedy zjistit pomocí Fourierových řad těchto funkcí, a to i v případě, že (někde nebo všude) divergují.

Poznámka 20.2. Je-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ lichá (resp. sudá), platí totéž o každé z funkcí $f(x)\cos kx$, zatímco všechny funkce $f(x)\sin kx$ jsou sudé (resp. liché). Uvážíme-li, že Fourierovy koeficienty lze získat i integrací přes interval $(-\pi, \pi)$ (sr. s (8′)) a že pro sudé funkce je integrál přes tento interval dvojnásobkem integrálu od 0 do π, zatímco pro liché funkce je nulový, vidíme, že platí tato dvě tvrzení:

Je-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ lichá, je $a_k = 0$ pro všechna $k \geq 0$, zatímco

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kx\,dx \quad \textit{pro každé} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Je-li funkce $f \in \mathcal{P}(2\pi)$ sudá, je naopak $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, zatímco

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx \quad \textit{pro každé} \quad k \geq 0. \quad \square \tag{25}$$

Je-li

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (\text{resp. } f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx), \tag{9′}$$

tj. je-li $a_k = 0$ pro všechna $k \geq 0$ (resp. $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$), mluvíme o **liché** neboli **sinové** (resp. o **sudé** neboli **kosinové**) Fourierově řadě funkce f.

Poznámka 20.3. Každou funkci $f \in \mathcal{L}((c, c + 2\pi))$, kde $c \in \mathbb{R}$, lze 2π-periodicky rozšířit na celé $\mathbb{R}$; Fourierovu řadu takto rozšířené funkce nazýváme **Fourierovou řadou funkce f v intervalu** $(c, c + 2\pi)$. Koeficienty této řady jsou dány vzorci

$$a_k = \int_c^{c+2\pi} f(x)\cos kx\,dx \;\; \text{pro} \;\; k \geq 0, \quad b_k = \int_c^{c+2\pi} f(x)\sin kx\,dx \;\; \text{pro} \;\; k > 0. \tag{26}$$

Podle V.20.2 platí: *Je-li $f : \langle c, c + 2\pi\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá funkce s konečnou variací, konverguje její Fourierova řada lokálně stejnoměrně v $(c, c + 2\pi)$ a její součet se v $(c, c+2\pi)$ rovná $f(x)$, zatímco v bodech c a $c+2\pi$ je roven $\frac{1}{2}(f(c) + f(c+2\pi))$.*

Podobně lze každou funkci f definovanou (skoro všude) v intervalu $(0, \pi)$ (resp. v intervalu $(-\pi, 0)$) rozšířit jak na lichou, tak i na sudou 2π-periodickou funkci definovanou v celém $\mathbb{R}$. Je-li navíc integrál $\int_0^\pi f$ (resp. integrál $\int_{-\pi}^0 f$) konečný, nazýváme příslušnou Fourierovu řadu **lichou** resp. **sudou Fourierovou řadou** původní funkce f.

Poznámka 20.4. Protože za situace z V. 20.2 můžeme součet s_f Fourierovy řady funkce f napsat bez znalosti jejích koeficientů, budeme tak v konkrétních případech skutečně postupovat:

1. Má-li f konečnou variaci v intervalu $\langle c, c + 2\pi\rangle$, je ($2\pi$-periodický) součet $s_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ příslušné Fourierovy řady definován v intervalu $\langle c, c+2\pi\rangle$ podmínkami

$$(27) \qquad s_f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{pro } x \in (c, c+2\pi) \\ \frac{1}{2}(f(c+) + f(c+2\pi-)) & \text{pro } x = c \text{ a } x = c+2\pi \end{array} \right\}.$$

2. Sudá Fourierova řada funkce f s konečnou variací v $\langle 0, \pi\rangle$ má (2π-periodický) součet s_f, definovaný v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$(27')) \qquad s_f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} f(0+) & \text{pro } x = 0 \\ \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{pro } x \in (0, \pi) \\ f(\pi-) & \text{pro } x = \pi \\ s_f(-x) & \text{pro } x \in \langle -\pi, 0\rangle \end{array} \right\}.$$

(Podobně pro funkci $f : \langle -\pi, 0\rangle \to \mathbb{R}$.)

3. Lichá Fourierova řada funkce f s konečnou variací v $\langle 0, \pi\rangle$ má (2π-periodický) součet s_f, definovaný v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$(27'') \qquad s_f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{pro } x = 0 \text{ a } x = \pm\pi \\ \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-)) & \text{pro } x \in (0, \pi) \\ -s_f(-x) & \text{pro } x \in (-\pi, 0) \end{array} \right\}.$$

(Podobně pro funkci $f : \langle -\pi, 0\rangle \to \mathbb{R}$.)

* * *

V následujících příkladech se konečnost variace zúčastněných funkcí snadno ověří podle (19) nebo podle V. 20.3; přenecháme to proto čtenáři a soustředíme se na aplikaci Dirichlet–Jordanova kritéria a na numerickou stránku příkladů.

Příklad 20.3. 1. Nejdříve najdeme *Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x$ *v intervalu* $(0, 2\pi)$. Funkce s_f z Po. 20.4 bude v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ definována podmínkami

$$s_f(x) = x \ \text{ pro všechna } \ x \in (0, 2\pi), \quad s_f(0) = s_f(2\pi) = \pi;$$

bude součtem hledané Fourierovy řady, jejíž koeficienty jsou

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2}{k}, \ \text{ je-li } \ k \in \mathbb{N}.$$

Podle V. 20.2 je tedy

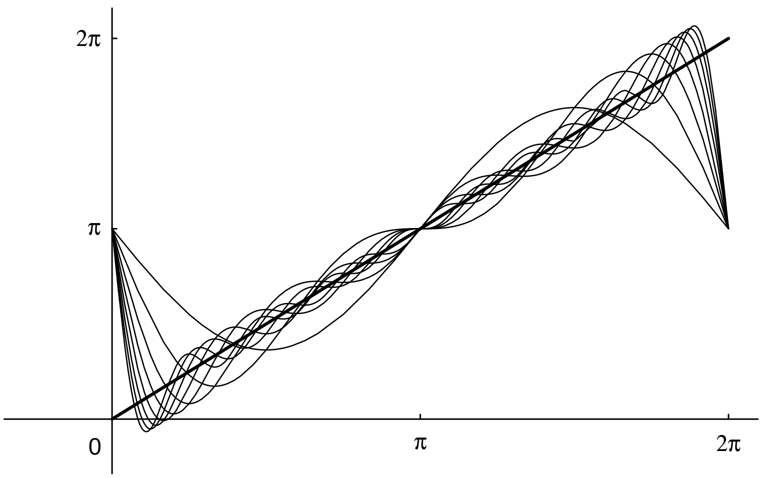
$$s_f(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

z čehož ihned plyne, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \textit{pro všechna} \quad x \in (0, 2\pi); \tag{29}$$

v bodech 0 a 2π je součet řady vlevo roven 0.

Vzhledem k periodicitě je konvergence řad v (28) a (29) *lokálně stejnoměrná* v intervalu $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a *nestejnoměrná* v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$, protože funkce s_f je v těchto bodech nespojitá.



Grafy funkce x a prvních 8 částečných součtů její Fourierovy řady v $(0, 2\pi)$

2. Nyní najdeme *sudou a lichou Fourierovu řadu funkce* $f(x) = x$, $x \in (0, \pi)$. Funkce $s_f(x)$ je v případě sudého rozvoje rovna $|x|$ v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$; protože

$$\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi^2}{2} \quad \text{a} \quad \int_0^{\pi} x \cos(2k+1)x\, dx = -\frac{2}{(2k-1)^2} \quad \text{pro všechna} \quad k \in \mathbb{N},$$

je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad \text{v} \quad \langle -\pi, \pi \rangle. \tag{30}$$

Řada vpravo konverguje přitom stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ a její součet je tam roven funkci $s_f(x)$, která je 2π-periodickým rozšířením funkce $|x|$ z $\langle -\pi, \pi \rangle$ na $\mathbb{R}$.

V případě lichého rozvoje je $s_f(x) = x$ v $(-\pi, \pi)$ a $s_f(\pm\pi) = 0$, přičemž

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx = (-1)^{k-1} \frac{2}{k}\,,$$

takže

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\pi, \pi)\,. \tag{31}$$

Řada vpravo konverguje v každém intervalu $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně, konvergence však není stejnoměrná v žádném levém ani pravém prstencovém okolí žádného lichého násobku čísla π; všude v $\mathbb{R}$ řada součet $s_f(x)$.

3. Jestliže v (30) položíme $x = \pi$, dostaneme po evidentní úpravě rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{32}$$

Poznámka 20.5. U řad z (29) a (31) jsme byli dosud schopni vyšetřit jen (neabsolutní, lokálně stejnoměrnou) konvergenci; nyní jsme našli jejich součty a podařilo se nám sečíst i číselnou řadu (32). V dalších příkladech (řešených i ponechaných čtenáři jako cvičení) sečteme další řady čísel a funkcí; *nezodpovězena však bohužel zůstane otázka, kterou funkci máme rozvinout, abychom získali součet předem dané číselné řady.* Nezbývá asi nic jiného než rozvinout co nejvíce funkcí a hledat mezi výsledky řadu, jejíž součet bychom rádi znali.

Příklad 20.4. *Fourierova řada funkce* $f(x) = x^2$ *v intervalu* $I := (0, 2\pi)$ má, jak zjistíme standardním výpočtem, tyto koeficienty:

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3}\,, \quad a_k = \frac{4}{k^2}\,, \quad b_k = -\frac{4\pi}{k} \quad \text{pro} \quad k \in \mathbb{N};$$

2π-periodická funkce $s_f(x)$ se přitom rovná x^2 v I a $\frac{1}{2}(f(0)+f(2\pi)) = 2\pi^2$ v bodech 0 a 2π. Podle V.20.2 je

$$s_f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R}; \tag{33}$$

první řada vpravo konverguje (podle srovnávacího kritéria) stejnoměrně v $\mathbb{R}$, druhá lokálně stejnoměrně v každém intervalu $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně ve všech levých i pravých prstencových okolích bodů $2n\pi$.

Dosadíme-li $x = 0$, bude vlevo $s_f(0) = 2\pi^2$ a jednoduchou úpravou získáme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{34}$$

Odečteme-li od (32) rovnost (34) dělenou čtyřmi, dostaneme rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,. \tag{35}$$

Dosadíme-li do (33) podle (29), dostaneme (po jednoduché úpravě) identitu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad \textit{v intervalu} \;\; (0, 2\pi) \tag{36}$$

a dosazením se přesvědčíme, že tato identita platí i v bodech 0 a 2π. Integrujeme-li obě strany od 0 do $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ podle V. 20.4, získáme identitu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3} = \frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \tag{37}$$

Integrujeme-li znovu a uvážíme-li, že $\int_0^x \sin kx\, dx = (1 - \cos kx)/k$, dojdeme k rovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k^4} = \frac{x^4 - 4\pi x^3 + 4\pi^2 x^2}{48} \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,; \tag{38}$$

dosadíme-li $x = \pi$ a uvážíme-li, že $1 - \cos k\pi = 1 - (-1)^k$ je rovno 0 pro sudá k a 2 pro lichá k, dostaneme další součet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,. \tag{39}$$

Protože

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}\,, \quad \text{tedy} \quad \frac{15}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}\,,$$

je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{90}\,, \tag{40$'$}$$

takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{16}\,\frac{\pi^4}{90} = \frac{7\pi^4}{720}\,. \tag{40$''$}$$

Dosadíme-li (40) do (38), snadno zjistíme, že je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^4} = \frac{8\pi^4 - 60\pi^2 x^2 + 60\pi x^3 - 15x^4}{720} \quad \textit{pro všechna} \;\; x \in \langle 0, 2\pi \rangle\,. \tag{41}$$

Příklad 20.5. Rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\lg \left|2 \sin \frac{x}{2}\right| \quad \textit{pro všechna} \quad x \in \mathbb{R} - \{2n\pi;\, n \in \mathbb{Z}\} \tag{42}$$

dokážeme tím, že *funkci* $f(x) := \lg |2 \sin(\frac{1}{2}x)|$ *rozvedeme ve Fourierovu řadu*.

Funkce f je zřejmě definována v množině uvedené v (42), je sudá a má periodu 2π. Kromě toho je $f \in \mathcal{L}((0, 2\pi))$, protože pro $x \to 0+$ je $f(x) \asymp \lg x \in \mathcal{L}((0, \pi))$ a protože vzhledem k identitě $f(2\pi - x) = f(x)$ je $\int_\pi^{2\pi} f = \int_0^\pi f$. Funkce f má Fourierovu řadu (protože patří do $\mathcal{L}((0, 2\pi))$), ale větu 20.2 nebude možné užít v celém intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ (protože f není v $(0, 2\pi)$ omezená), ale jen v intervalech $\langle a, b\rangle \subset (0, 2\pi)$ (protože v nich má konečnou variaci).

Koeficienty b_k jsou všechny rovny 0, protože f je sudá funkce; zbývá proto najít koeficienty a_k. Začneme výpočtem koeficientu

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f = \frac{1}{\pi} \Big(\int_0^\pi f + \int_\pi^{2\pi} f \Big) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lg(2 \sin(\tfrac{1}{2}x))\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \Big(\int_0^\pi \lg 2\, dx + \int_0^\pi \lg(\sin(\tfrac{1}{2}x)\, dx \Big) = 2 \lg 2 + \frac{2I}{\pi}, \end{aligned} \tag{43}$$

kde

$$\begin{aligned} I := \int_0^\pi \lg(\sin(\tfrac{1}{2}x))\, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \lg(\sin u)\, du = 2 \int_0^{\pi/2} \lg(2 \sin(\tfrac{1}{2}u) \cos(\tfrac{1}{2}u))\, du \\ &= \pi \lg 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \lg(\sin(\tfrac{1}{2}u))\, du + 2 \int_0^{\pi/2} \lg(\cos(\tfrac{1}{2}u))\, du \\ &= \pi \lg 2 + 2 \int_0^\pi \lg(\sin(\tfrac{1}{2}x))\, dx = \pi \lg 2 + 2I; \end{aligned} \tag{44}$$

druhý integrál jsme získali z prvního substitucí $x = 2u$, ve druhém integrálu ve druhé řádce jsme provedli substituci $u = \pi - x$. Porovnáme-li začátek a konec (44), vidíme, že $I = -\pi \lg 2$, tedy $2I/\pi = -2 \lg 2$; podle (43) je v důsledku toho $a_0 = 0$.

Než začneme počítat koeficienty a_k pro $k \in \mathbb{N}$, uvažme, že

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \quad \text{pro všechna} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ (a každé $x \in \mathbb{R}$) je

$$\begin{aligned} 2 \sin(\tfrac{1}{2}x) \Big(\tfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \Big) &= \sin(\tfrac{1}{2}x) + \sum_{k=1}^n \big(\sin(k + \tfrac{1}{2})x - \sin(k - \tfrac{1}{2})x \big) \\ &= \sin(n + \tfrac{1}{2})x. \end{aligned}$$

Protože první výraz je roven poslednímu i pro $n = 0$ a protože $\int_0^\pi \cos kx\, dx = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, plyne z této identity dělením výrazem $2 \sin(\frac{1}{2}x)$ a integrací, že

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{1}{2}x)}\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \quad \textit{pro všechna celá čísla} \quad n \geq 0. \tag{46}$$

Integrací per partes a užitím vzorce (46) získáme pro každé $k \in \mathbb{N}$ tento výsledek:

$$
\begin{aligned}
(47) \qquad a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lg\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \lg\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\cos kx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\lg\left(2\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)\,\frac{\sin kx}{k}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\sin kx\,dx \\
&= 0 - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}\,dx = -\frac{1}{k}\,.
\end{aligned}
$$

(První integrál v prvním řádku jsme rozložili na integrál od 0 do π a od π do 2π a v druhém z takto získaných integrálů jsme substituovali $x = 2\pi - t$. Druhý z integrálů v první řádce jsme integrovali per partes, v posledním řádku jsme užili identitu (46).)

Résumé. Fourierovy koeficienty b_k a a_0 funkce f jsou rovny 0, zatímco $a_k = -1/k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože funkce f je spojitá v intervalu $(0, 2\pi)$ a má konečnou variaci v každém intervalu $\langle a, b\rangle \subset (0, 2\pi)$, je podle V.20.2 součet její Fourierovy řady roven $f(x)$ v každém bodě $x \in (0, 2\pi)$ a řada konverguje lokálně stejnoměrně v $(0, 2\pi)$.[4] Tvrzení (42) odtud plyne v důsledku 2π-periodicity obou stran.

Příklad 20.6. *Fourierova řada funkce $f(x) := e^{-x/2}$ v intervalu $I := (\pi, 3\pi)$ má koeficienty*

$$
(48) \qquad a_k = \frac{4(-1)^k\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi e^{\pi}(4k^2+1)}\,, \quad b_k = \frac{8(-1)^k k\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi e^{\pi}(4k^2+1)}
$$

a řada

$$
(49) \qquad \frac{4\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi e^{\pi}}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2+1}(\cos kx + 2k\sin kx)\Big)
$$

konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu $((2n-1)\pi, (2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí každého lichého násobku π. Její součet je 2π-periodická funkce $s_f(x)$ rovná $f(x)$ v I a

$$
\tfrac{1}{2}\left(e^{-3\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) = e^{-\pi}\cosh\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) \doteq 0.11
$$

v krajních bodech tohoto intervalu.

Dosadíme-li tedy do (49) po řadě $x = \pi$ a $x = 2\pi$, dostaneme součty $s_f(\pi) = e^{-\pi}\cosh\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ a $s_f(2\pi) = e^{-\pi}$. Z toho snadno plyne, že

$$
(50) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2+1} = \frac{\pi\,\mathrm{cotgh}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{4} - \frac{1}{2}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2+1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\right)}\,;
$$

přibližné numerické hodnoty těchto součtů jsou 0.3563 a 0.1587.

---

[4]) Každé $x \in (0, 2\pi)$ leží uvnitř nějakého intervalu $\langle a, b\rangle \subset (0, \pi)$.

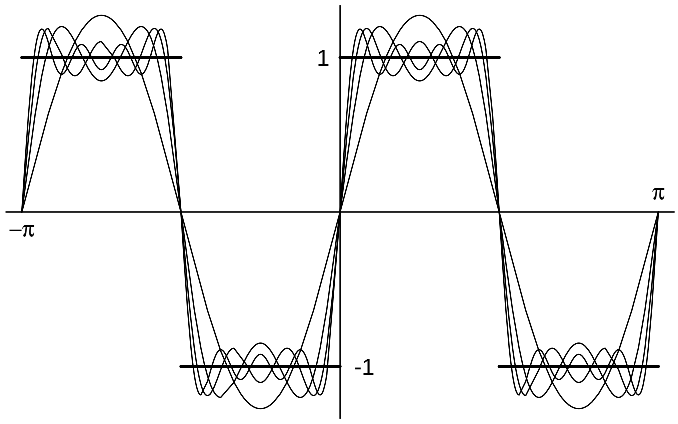
Příklad 20.7. Hledejme *sudou a lichou Fourierovu řadu funkce*

$$f(x) := \operatorname{sgn}(\sin 2x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{v intervalu } (0, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1 & \text{v intervalu } (\tfrac{1}{2}\pi, \pi) \end{array} \right\}. \tag{51}$$

Označíme-li $s_{f,s}$ a $s_{f,l}$ funkce (27′) a (27″) z Po. 20.4, bude

$$s_{f,s}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{je-li } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1, & \text{je-li } x \in (\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi) \\ 0, & \text{je-li } x \in \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\} \end{array} \right\}, \quad s_{f,l}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{je-li } x \in (0, \tfrac{1}{2}\pi) \\ -1, & \text{je-li } x \in (-\tfrac{1}{2}\pi, 0) \\ 0, & \text{je-li } x \in \{\pm\tfrac{1}{2}\pi, 0\} \end{array} \right\};$$

první z těchto funkcí je přitom 2π-periodická, druhá π-periodická.



GRAFY FUNKCE $\operatorname{sgn}(\sin 2x)$ A PRVNÍCH 4 ČÁSTEČNÝCH SOUČTŮ JEJÍ LICHÉ FOURIEROVY ŘADY

Koeficienty a_k resp. b_k sudého resp. lichého rozvoje jsou

$$a_0 = 0, \quad a_k = \frac{4}{k\pi} \sin(\tfrac{1}{2} k\pi) \text{ pro } k \in \mathbb{N} \tag{52}$$

resp.

$$b_k = \frac{2(1 + (-1)^k) - 4\cos(\tfrac{1}{2} k\pi)}{k\pi} \quad \text{pro } k \in \mathbb{N}, \tag{53}$$

takže

$$a_{2k-1} = (-1)^k \frac{4}{(2k-1)\pi}, \quad b_{4k-2} = \frac{4}{(2k-1)\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}, \tag{54}$$

zatímco všechny koeficienty a_{2k}, b_{4k-3}, b_{4k-1} a b_{4k} jsou nulové. Příslušné Fourierovy řady jsou

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1} \quad \text{a} \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(4k-2)x}{2k-1}; \tag{55}$$

první konverguje lokálně stejnoměrně v intervalech $I_n := (\frac{1}{2}(2n-1)\pi, \frac{1}{2}(2n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí krajních bodů těchto intervalů, druhá konverguje lokálně stejnoměrně v intervalech $J_n := (\frac{1}{2}n\pi, \frac{1}{2}(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí krajních bodů těchto intervalů.

Uvážíme-li, že součet první řady v bodě 0 je 1, získáme pozoruhodnou rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{\pi}{4}\,; \tag{56}$$

poznamenejme však, že alternující řada vlevo se k přibližnému výpočtu čísla π příliš nehodí, protože konverguje velmi pomalu. (Rozdíl $\frac{1}{4}\pi$ a jejího pětistého částečného součtu je přibližně 0.0005.)

Poznámka 20.7. Integrací člen po členu levé strany identity (42) bychom získali řadu o členech $\sin kx/k^2$ a další integrací řadu o členech $\cos kx/k^3$; pro $x = 0$ bychom tak získali řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\,, \tag{57}$$

o jejíž sečtení se marně usiluje celá staletí. Zde naznačený postup samozřejmě též selhává, protože funkce primitivní k pravé straně identity (42) nepatří mezi elementární funkce, a právě tak tam nepatří ani funkce k ní primitivní.

Zatímco součty řad o členech $1/k^n$ se sudým $n \in \mathbb{N}$ lze vypočítat podle celkem jednoduchého vzorce (viz např. kap. XVI knihy [13] nebo str. 286 knihy [6]), *nalezení vzorců pro součty obdobných řad s lichým $n \in \mathbb{N}$ by nepochybně svého řešitele rázem proslavilo.*

Poznámka 20.8. Dosud jsme mluvili jen o rozvojích 2π-periodických funkcí; všechny vyložené postupy však lze (po evidentních modifikacích) opakovat s obecnějšími q-periodickými funkcemi, kde $q \in \mathbb{R}_+$.

Má-li q-periodická funkce f konečný integrál $\int_0^q f$, můžeme vytvořit obecnější **Fourierovu řadu s periodou** q a psát

$$f(x) \approx \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos \frac{2k\pi x}{q} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{q} \Big), \tag{58}$$

kde čísla a_k $(k \geq 0)$ a b_k $(k \in \mathbb{N})$ jsou nyní dána rovnostmi

$$a_k := \frac{2}{q} \int_{\xi}^{\xi+q} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{q}\, dx\,, \quad b_k := \frac{2}{q} \int_{\xi}^{\xi+q} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{q}\, dx \tag{59}$$

s libovolným $\xi \in \mathbb{R}$. Funkce $\cos(2k\pi x/q)$, $\sin(2k\pi x/q)$ mají periodu q a splňují podmínky (5) – (7), nahradíme-li na jejich pravých stranách číslo π číslem $\frac{1}{2}q$.

Příklad 20.8. Máme-li např. funkci $f(x) := x$ rozvést ve Fourierovu řadu v intervalu $(1,3)$, bude mít součet s_f této řady periodu $q = 2$ a v intervalu $\langle 1,3 \rangle$ bude definován podmínkami

$$s_f(x) = x \text{ pro } x \in (1,3), \quad s_f(x) = \tfrac{1}{2}(f(1)+f(3)) = 2 \text{ pro } x \in \{1,3\}. \tag{60}$$

Snadno zjistíme, že

$$a_0 = 4, \; a_k = 0, \; b_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k\pi} \quad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N}, \tag{61$'$}$$

takže je

$$s_f(x) = 2 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin k\pi x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}; \tag{61$''$}$$

řada vpravo přitom konverguje v každém intervalu $(2k-1, 2k+1)$, kde $k \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně a konvergence je nestejnoměrná v každém levém i v každém pravém prstencovém okolí každého lichého čísla (sr. s (31)).

Cvičení

Kromě konkrétní úlohy uvedené v každém z následujících cvičení najděte vždy a) funkci $s_f(x)$, tj. součet příslušné Fourierovy řady v $\mathbb{R}$, b) všechny maximální otevřené intervaly, v nichž daná řada konverguje lokálně stejnoměrně, c) všechny body, v jejichž žádném okolí není konvergence stejnoměrná. (Sr. s Po. 20.4.)

20.08$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := x$ v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

20.09$^{\mathbf{o}}$. Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi \operatorname{sgn} x \quad \text{v intervalu } (-\pi,\pi), \tag{62}$$

a odvoďte z toho, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \tfrac{1}{4}\pi. \tag{63}$$

20.10$^{\mathbf{o}}$. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := |\sin x|$ v intervalu $(-\pi,\pi)$ a pomocí ní dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \tfrac{1}{2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} = \tfrac{1}{4}(\pi-2); \tag{64}$$

uvažte, že první z těchto řad lze snadno sečíst i bez užití Fourierových řad.

20.11°. Najděte lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x) := \cos x$, $x \in (0, \pi)$.

20.12°. Za předpokladu, že $\alpha \neq 0$, najděte Fourierovu řadu funkce $e^{\alpha x}$ v intervalu $(0, 2\pi)$ a pomocí ní dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + k^2} = \frac{\pi\alpha \operatorname{cotgh}(\pi\alpha) - 1}{2\alpha^2}\,. \tag{65}$$

20.13°. Najděte sudou i lichou Fourierovu řadu funkce $f(x) := e^{-x}$ v intervalu $(0, \pi)$.

20.14°. Ověřte, že podle Př. 20.3 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \tfrac{1}{8}(\pi^2 - 2\pi|x|) \quad \text{v intervalu} \quad \langle -\pi, \pi \rangle\,, \tag{66}$$

a pak tuto identitu užijte k důkazu rovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)^3} = \tfrac{1}{8}\pi x(\pi - |x|) \quad \text{v intervalu} \quad \langle -\pi, \pi \rangle\,. \tag{67}$$

Pak dokažte, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \tfrac{1}{32}\pi^3\,. \tag{68}$$

20.15°. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := |x - 1|$ v intervalu $(0, 2)$ a sečtěte pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty}(1/(2k-1)^2)$.

20.16°. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := \arcsin(\sin 2x)$.

20.17°. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := \arcsin(\cos \pi x)$.

20.18°. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) := \operatorname{sgn}(\cos 2\pi x)$.

20.19°. Najděte sudý i lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x)$ rovné $\frac{1}{2}\pi$ v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ a $\pi - x$ v intervalu $\langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle$.

20.20°. Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x)$, která má periodu 3 a v intervalech $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ se po řadě rovná $1, -1, 0$.

20.21°. Najděte sudou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{cl} x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{3}\pi) \\ 0 & \text{pro } x \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi) \\ \frac{2}{3}\pi - x & \text{pro } x \in \langle \frac{2}{3}\pi, \pi \rangle \end{array} \right\}. \tag{69}$$

20.22°. Najděte Fourierovu řadu funkce f, určené těmito podmínkami: Je lichá, má periodu 8, v intervalu $(0, 1)$ je rovna $1 - x$, v intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ nule.

20.23°. Najděte Fourierovu řadu funkce, která periodu 4 a v intervalu $\langle -2, 2 \rangle$ je definována podmínkami

$$f(x) := 1 - x^2\,, \text{ je-li } |x| \leq 1\,, \quad f(x) := 0\,, \text{ je-li } 1 \leq |x| \leq 2\,. \tag{70}$$

20.24$^{\mathbf{o}}$. Najděte sudou i lichou Fourierovu řadu funkce $\cos x$ v intervalu $(0, 2)$.

20.25$^{\mathbf{o}}$. Najděte sudou i lichou Fourierovu řadu funkce

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} \sin 2x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle \\ 0 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{2}\pi, \pi \rangle \end{array} \right\} \tag{71}$$

v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení

Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ označme

$$I_n = (n\pi, (n+1)\pi), \quad J_n = (2n\pi, 2(n+1)\pi); \tag{72}$$

v příkladech, v nichž se daná funkce má rozvinout jak v sudou, tak i lichou řadu, pišme místo s_f podrobněji $s_{f,s}$ a $s_{f,l}$.

20.08. s_f je 2π-periodická funkce, která se rovná x v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ a $\alpha + \pi$ v bodech α, $\alpha + 2\pi$. Všude v $\mathbb{R}$ je

$$s_f(x) = \alpha + \pi + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha \cos kx - \cos k\alpha \sin kx}{k}; \tag{73}$$

v intervalech $(\alpha + 2n\pi, \alpha + 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $\alpha + 2n\pi$ nestejnoměrná.

20.09. V každém intervalu I_n, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence řady lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $n\pi$ nestejnoměrná; součet uvedené číselné řady získáme dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$.

20.10. Funkce f je sudá, spojitá, 2π-periodická a má v $\langle -\pi, \pi \rangle$ konečnou variaci; její Fourierova řada

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} \tag{74}$$

konverguje proto stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$ a má tam součet $f(x)$. První z řad (64) lze sečíst elementárně, protože $2/(4k^2 - 1) = 1/(2k-1) - 1/(2k+1)$; součet druhé z nich získáme dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$ do (70).

20.11. s_f je 2π-periodická funkce, $0 < |x| < \pi \Rightarrow s_f(x) = \operatorname{sgn} x \cos x$, zatímco $s_f(0) = s_f(\pm\pi) = 0$; rovnost

$$s_f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin 2kx}{4k^2 - 1} \tag{75}$$

platí v celém $\mathbb{R}$, v intervalech I_n, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $n\pi$ nestejnoměrná.

20.12. Je

$$s_f(x) = \frac{e^{2\pi\alpha} - 1}{\pi} \Big(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha \cos kx - k \sin kx}{\alpha^2 + k^2} \Big) \ \text{ v } \mathbb{R}\,, \tag{76}$$

přičemž $s_f(x) = e^{\alpha x}$ v $(0, 2\pi)$, $s_f(0) = s_f(2\pi) = \frac{1}{2}(e^{2\pi\alpha} + 1)$; v intervalech J_n, $n \in \mathbb{Z}$, je konvergence lokálně stejnoměrná, v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$ nestejnoměrná. Rovnost (65) získáme dosazením $x = 0$ do (76) a snadnou úpravou.

20.13. Funkce $s_{f,s}$ je v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ definována rovností $s_{f,s}(x) = e^{-|x|}$,

$$s_{f,s}(x) = \frac{1}{\pi}(1 - e^{-\pi}) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^k e^{-\pi}}{k^2 + 1} \cos kx \ \text{ v } \mathbb{R}, \tag{77}$$

přičemž řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

Funkce $s_{f,l}$ je v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ definována podmínkami $s_{f,l}(x) = e^{-|x|} \operatorname{sgn} x$, je-li $0 < |x| < \pi$, $s_{f,l}(0) = s_{f,l}(\pm\pi) = 0$, přičemž

$$s_{f,l}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 1} (1 - (-1)^k e^{-\pi}) \sin kx \ \text{ v } \mathbb{R}; \tag{78}$$

řada vpravo konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu I_n, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí každého bodu $n\pi$.

20.14. Řady v (66) a (67) konvergují stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$, (67) získáme z (66) integrací, (68) z (67) dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$.

20.15. Je $s_f(x) = f(x)$ v $\langle 0, 2\pi \rangle$ a

$$s_f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2} \ \text{ v } \mathbb{R}, \tag{79}$$

přičemž řada vpravo konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně. Dosazením $x = 1$ získáme rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^{-2} = \frac{1}{8}\pi^2$.

20.16. Je $s_f = f$ v $\mathbb{R}$, rovnost

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin(2(2k-1)x) \tag{80}$$

platí všude v $\mathbb{R}$, řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

20.17. Funkce $s_f \equiv f$ je sudá, rovnost

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^2} \tag{81}$$

platí v celém $\mathbb{R}$, řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

20.18. Funkce s_f je sudá, má periodu 1 a

$$(82)\qquad s_f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{pro } x \in (-\frac14, \frac14) \\ -1 & \text{pro } x \in (\frac14, \frac34) \\ 0 & \text{pro } x \in \{\pm\frac14, \pm\frac34\} \end{array}\right\} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cos(2(2k-1)\pi x);$$

řada konverguje v intervalech $(\frac14(2n-1), \frac14(2n+1))$, kde $n \in \mathbb{Z}$, lokálně stejnoměrně, v každém levém i pravém okolí každého bodu $\frac14(2n-1)$ nestejnoměrně.

20.19. 2π-periodická funkce $s_{f,s}$ definovaná v $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$(83)\qquad s_{f,s}(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac12\pi, & \text{je-li } |x| \le \frac12\pi \\ \pi - |x|, & \text{je-li } \frac12\pi \le |x| \le \pi \end{array}\right\}$$

je spojitá v $\mathbb{R}$; v $\mathbb{R}$ platí rovnost

$$(84)\qquad s_{f,s}(x) = \tfrac38\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k^2} \cos kx,$$

přičemž řada vpravo konverguje stejnoměrně v $\mathbb{R}$ a

$$(84')\qquad \alpha_k := 2(-1)^{k-1}\sin^2(\tfrac14 k\pi) \ \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

takže $\alpha_{4k-3} = \alpha_{4k-1} = 1$, $\alpha_{4k-2} = -2$, $\alpha_{4k} = 0$.

2π-periodická funkce $s_{f,l}$ definovaná v $\langle -\pi, \pi\rangle$ podmínkami

$$(85)\qquad s_{f,l}(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac12\pi \operatorname{sgn} x, & \text{je-li } 0 < |x| \le \frac12\pi \\ (\pi - |x|)\operatorname{sgn} x, & \text{je-li } \frac12\pi \le |x| < \pi \\ 0, & \text{je-li } x = 0 \vee x = \pm\pi \end{array}\right\}$$

je spojitá v bodě $x \in \mathbb{R}$, právě když je $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$; všude v $\mathbb{R}$ je

$$(86)\qquad s_{f,l}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac1k + \frac{\beta_k}{k^2\pi}\Big)\sin kx, \ \text{ kde } \beta_k := 2\sin(\tfrac12 k\pi) \ \text{ pro každé } k \in \mathbb{N},$$

takže $\beta_{2k} = 0$ a $\beta_{2k-1} = 2(-1)^{k-1}$; řada konverguje lokálně stejnoměrně v každém J_n, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i pravém okolí každého bodu $2n\pi$.

20.20. Funkce $s_f(x)$ má periodu 3 a rovná se $f(x)$ v každém z intervalů $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$; kromě toho je $s_f(0) = s_f(3) = \frac12$, $s_f(1) = 0$, $s_f(2) = -\frac12$. Rovnost

$$(87)\qquad s_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\big(\alpha_k \cos(\tfrac23 k\pi x) + \beta_k \sin(\tfrac23 k\pi x)\big),$$

kde

$$(87')\qquad \alpha_k := 3\sin(\tfrac23 k\pi),\ \beta_k := 2\sin^2(\tfrac23 k\pi) \ \text{ pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

platí všude v $\mathbb{R}$, řada vpravo konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $(n, n+1)$, kde $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém levém i v každém pravém okolí každého celého čísla.

Čísla α_k a β_k splňují (pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $n \in \mathbb{N}$) podmínku $\alpha_{3n+k} = \alpha_k$, $\beta_{3n+k} = \beta_k$, přičemž

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\ \alpha_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\ \alpha_3 = 0\,,\quad \beta_1 = \beta_2 = \tfrac{3}{2}\,,\ \beta_3 = 0. \tag{88}$$

20.21. Funkce $s_f(x)$ je rovna $f(x)$ pro všechna $x \in \langle 0, \pi\rangle - \{\frac{1}{3}\pi\}$, $f(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{6}\pi$; tyto podmínky spolu se sudostí a 2π-periodicitou definují s_f v celém $\mathbb{R}$. Koeficienty a_0 a b_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou rovny nule, pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je

$$a_k = \frac{1}{k\sqrt{3}}\ \mathrm{sgn}(\sin(\tfrac{1}{3}k\pi)) - \frac{3}{k^2\pi}\,(1 + (-1)^k)\,\mathrm{sgn}(\sin^2(\tfrac{1}{3}k\pi))\,; \tag{89}$$

posloupnosti

$$\{\mathrm{sgn}(\sin(\tfrac{1}{3}k\pi))\}_{k=1}^{\infty}\ \text{ a }\ \{(1 + (-1)^k)\,\mathrm{sgn}(\sin^2(\tfrac{1}{3}k\pi))\}_{k=1}^{\infty}$$

mají periodu 6, přičemž $1, 1, 0, -1, -1, 0$ a $0, 2, 0, 2, 0, 0$ je prvních 6 členů první a druhé posloupnosti. Prvních 12 členů posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rovno

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \ \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\pi}\,,\ \ 0\,,\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{3}{8\pi}\,,\quad -\frac{1}{5\sqrt{3}}\,,\ \ 0\,,\\
&\frac{1}{7\sqrt{3}}\,,\ \frac{1}{8\sqrt{3}} - \frac{3}{32\pi}\,,\ 0\,,\ -\frac{1}{10\sqrt{3}} - \frac{3}{50\pi}\,,\ -\frac{1}{11\sqrt{3}}\,,\ 0.
\end{aligned}$$

Fourierova řada funkce f konverguje pro každé $n \in \mathbb{Z}$ lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $((2n - \frac{1}{3})\pi, (2n + \frac{1}{3})\pi)$ a tvaru $((2n + \frac{1}{3})\pi, (2n + \frac{5}{3})\pi)$, nestejnoměrně v každém levém i v každém pravém okolí každého bodu tvaru $(2n \pm \frac{1}{3})\pi$.

20.22. Funkce s_f s periodou 8 je v intervalu $\langle -4, 4\rangle$ definována podmínkami

$$s_f(x) = \left\{\begin{array}{ll} (1 - |x|)\,\mathrm{sgn}\,x\,, & \text{je-li } 0 < |x| < 1 \\ \quad 0\,, & \text{je-li } x = 0 \text{ nebo } 1 \le |x| \le 4 \end{array}\right\}; \tag{90}$$

v $\mathbb{R}$ je

$$s_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\tfrac{1}{4}k\pi x)\,,\ \text{ kde } b_k := \frac{2}{k\pi} - \frac{8}{k^2\pi^2}\ \sin(\tfrac{1}{4}k\pi) \tag{91}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$, takže

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}\,,\ \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}\,,\ \frac{2}{3\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{9\pi^2}\,,\ \frac{1}{2\pi}\,,\ \frac{2}{5\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{25\pi^2}\,,\ \frac{1}{3\pi} + \frac{2}{9\pi^2}\,,\ \frac{2}{7\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{49\pi^2}\,,\ \frac{1}{4\pi}$$

je prvních 8 členů posloupnosti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Fourierova řada funkce f konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $(8n, 8(n+1))$, kde $n \in \mathbb{Z}$, a nestejnoměrně v každém levém i v každém pravém okolí každého bodu $8n$.

20.23. Funkce s_f je 4-periodickým rozšířením funkce f, je sudá a spojitá v $\mathbb{R}$; příslušná Fourierova řada konverguje v $\mathbb{R}$ stejnoměrně a má koeficienty

$$a_0 = \frac{2}{3}, \; a_k = \frac{16}{k^3\pi^3} \sin\left(\tfrac{1}{2}k\pi\right) - \frac{8}{k^2\pi^2} \cos\left(\tfrac{1}{2}k\pi\right) \text{ pro } k \in \mathbb{N}.$$

20.24. Funkce $s_{f,s}$ vznikne 4-periodickým rozšířením funkce $\cos | \langle -2, 2 \rangle$ na $\mathbb{R}$ a je v $\mathbb{R}$ spojitá; konvergence sudé Fourierovy řady je stejnoměrná v $\mathbb{R}$ a její koeficienty jsou

$$a_k = \frac{4(-1)^k}{4 - k^2\pi^2} \sin 2 \text{ pro } k \geq 0.$$

Pro všechna $x \in (-2, 2)$ je $s_{f,l}(x) = \cos x \operatorname{sgn} x$ a $s_{f,l}(\pm 2) = s_{f,l}(0) = 0$; funkce $s_{f,l}$ je lichá, 4-periodická, nespojitá ve všech sudých číslech, spojitá ve všech ostatních bodech.

Lichá Fourierova řada konverguje lokálně stejnoměrně v každém intervalu tvaru $(2n, 2(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$, nestejnoměrně v každém $P^+(2n)$ a v každém $P^-(2n)$; její koeficienty jsou

$$b_k = \frac{2k\pi}{4 - k^2\pi^2} \left((-1)^k \cos 2 - 1\right), \; k \in \mathbb{N}.$$

20.25. Funkce $s_{f,s}$ (resp. $s_{f,l}$) je 2π-periodickým sudým (resp. lichým) rozšířením funkce $f | \langle 0, \pi \rangle$ na $\mathbb{R}$ a je v $\mathbb{R}$ spojitá. Koeficienty příslušných Fourierových řad jsou

$$a_2 = 0, \quad a_k = \frac{8}{(4 - k^2)\pi} \cos^2\left(\tfrac{1}{4}k\pi\right) \text{ pro } k \geq 0, \; k \neq 2,$$

a

$$b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_k = \frac{4}{(4 - k^2)\pi} \sin\left(\tfrac{1}{4}k\pi\right) \text{ pro } k \in \mathbb{N}, \; k \neq 2,$$

obě řady konvergují v $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

Literatura

[1] Agnew, R. P.: Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York – Toronto – London, 1960

[2] Aleksandrov, P. S.: Úvod do obecné theorie množin a funkcí. NČSAV, Praha, 1954

[3] Černý, I.: Diferenciální a integrální počet 1. TUL, Liberec, 1997

[4] Černý, I.: Matematická analýza 2. část. Skriptum. TUL, Liberec, 1997

[5] Černý, I.: Matematická analýza 3. část. Skriptum. TUL, Liberec, 1997

[6] Černý, I.: Analýza v komplexním oboru. Academia, Praha, 1983

[7] Černý, I.: Úvod do inteligentního kalkulu. Academia, Praha, 2002

[8] Čerych, J. – Aksamit, P. – John, O. – Stará, J.: Příklady z matematické analýzy V. Skriptum. SPN, Praha, 1983

[9] Děmidovič, B. P.: Sbornik zadač i upražněnij po matěmatičeskomu analizu. Gostechizdat, Moskva – Leningrad, 1952

[10] Jarník, V.: Diferenciální počet I, 7. vyd. Academia, Praha, 1984

[11] Jarník, V.: Integrální počet I, 5. vyd. Academia, Praha, 1974

[12] Jarník, V.: Diferenciální počet II, 3. vyd. Academia, Praha, 1976

[13] Jarník, V.: Integrální počet II, 5. vyd. Academia, Praha, 1974

[14] Jarník, V.: Diferenciální rovnice v komplexním oboru. Academia, Praha, 1980

[15] Kofroň, J.: Obyčejné diferenciální rovnice v reálném oboru. Skriptum. SPN, Praha, 1990

[16] Kurzweil, J.: Obyčejné diferenciální rovnice. SNTL, Praha, 1978

[17] Lebeděv, N. N.: Speciální funkce a jejich použití. SNTL, Praha, 1956

[18] Lukeš, J.: Příklady k teorii Lebesgueova integrálu. Skriptum. SPN, Praha, 1968

[19] Natanson, I. P.: Theory of a Real Variable. Ungar, New York, 1964

[20] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha, 1968

[21] Rudin, W.: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha, 2003

[22] RUDIN, W.: Principles of Mathematical Analysis. McGraw-Hill Book Company, New York, 1976

[23] SAKS, S.: Théorie de l'intégrale (Monografje matematyczne). Warszawa, 1933

[24] SIEWIERSKI, L. – MACIULEWICZ, J. – SMIALKÓWNA, H. – TALADAJ, H. – WASZKIEWICZ, J.: Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami, Tom I, II. PWN, Warszawa, 1982

[25] SIKORSKI, S.: Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných. Academia, Praha, 1973

[26] STĚPANOV, V. V.: Kurs diferenciálních rovnic. Přírodovědecké nakladatelství (JČMF), Praha, 1950

[27] VESELÝ, J.: Matematická analýza pro učitele, 1. díl, 2. díl. Matfyzpress, Praha, 1997

Rejstřík

Číslice 1 a 2 před čísly stránek odlišují odkazy na Inteligentní kalkulus 1 a 2.

1SM 1.135
2SM 1.135

Aditivita integrálu 1.186, 2.263, 2.265
— míry 2.248
aproximace Taylorovými polynomy 1.72
asymptota 1.95

Bilinearita 2.19
bod hraniční množiny 2.35
— hromadný množiny 2.42
— — posloupnosti 1.33
— inflexní 1.95
— izolovaný množiny 2.42
— singulární hladiny 2.151
— — nadplochy 2.113
— stacionární funkce 1.86, 2.181
— vnější, vnitřní množiny 2.35
břitva Occamova 1.68

Část kladná, záporná 2.259
číslo e (Eulerovo) 1.32

Dělení Taylorových polynomů 1.73
delta Kroneckerovo 2.27
derivace funkce 1 proměnné 1.40, 1.50
— komplexní funkce 1.228
— množiny 2.42
— parciální 2.92, 2.102
— směrová 2.92
— vektorové funkce 2.91
— zobrazení z $\mathbb{R}^p$ do $\mathbb{R}^q$ 2.95
derivování člen po členu 2.50
— integrálu podle parametru 2.280
— mocninné řady 2.53
determinant Vandermondův 1.22
— Wronského 2.210
difeomorfismus 2.141
diference symetrická 2.260
diferenciál 2.94
diferencování superpozice 1.50, 2.96
diferencovatelnost 1.50, 2.94
— spojitá 2.95, 2.102

dimenze algebraická 2.23
— eukleidovského prostoru 2.20
— konečná, nekonečná 2.23
— lineárního prostoru 2.23
diskontinuum Cantorovo 2.250
divergence vektorové funkce 2.100

Elipsa 2.116
existence lokální inverzní funkce 2.141, 2.142
exponenciála komplexní 1.228
extrém 1.85, 2.181
— vázaný 2.192

Faktor integrační 1.162
forma lineární daná maticí 2.95
funkce beta 2.284
— cyklometrické 1.42
— definovaná implicitně 2.146
— diferencovatelná 1.50, 2.94
— Dirichletova 1.189
— Ei 2.220
— ekvivalentní 2.260
— gamma 2.283
— harmonická 2.104
— holomorfní 2.71
— charakteristická množiny 2.255
— inverzní lokální 2.142
— jednoduchá 2.255
— lineární lomená 2.39
— měřitelná 2.252, 2.261
— n-té Bairovy třídy 2.254
— periodická 1.54
— primitivní 1.135
— primitivní zobecněná 1.182
— racionální 1.41, 1.147
— reálná 1.37
— reálné proměnné 1.37
— s konečnou variací 2.301
— sinh a cosh 1.41
— skalární 2.87
— spojitá 1.39, 1.40, 1.53
— spojitě diferencovatelná 2.95, 2.102
— stejně omezené 2.61

funkce stejného řádu 1.190
— sudá, lichá 1.53
— třídy C_n 2.95, 2.102
— vektorová 2.87

Geometrický význam integrálu 2.259
gradient 2.98
graf funkce 1.85, 2.121

Hladina 2.149
hmotnost tělesa 2.292
holomorfnost 2.71
homeomorfismus 2.39
hranice množiny 2.35
hrot grafu 1.85

Indukce (úplná, matematická) 1.19
integrace 1.135, 1.183
— člen po členu 2.51
— Fourierovy řady 2.305
— funkcí různých typů 1.140 − 1.161
— mocninné řady 2.53
— per partes 1.135, 1.186
— podle parametru 2.277
— řady člen po členu 2.264
integrál dvojný, dvojnásobný 2.269
— Fresnelův 2.296
— jednoduché funkce 2.256
— Laplaceův 2.275
— Lebesgueův (definice) 2.256 − 2.261
— — a Newtonův 2.266
— — a Riemannův 2.266
— neurčitý 1.179, 1.189
— Newtonův 1.183, 1.187
— trojný, trojnásobný 2.271
— určitý, neurčitý 1.189
— závislý na parametru 2.277 − 2.280
interval v $\mathbb{R}^p$ 2.244
intervaly nepřekrývající se 2.245
izometrie 2.28
izomorfismus 2.28

Jacobiho matice 2.145
jakobián 2.145

Koeficient binomický 1.56
koeficienty Fourierovy 2.301
— Lagrangeovy 2.193
— mocninné řady 2.52
konstanta Eulerova 2.220

konvergence absolutně stejnoměrná 2.63
— absolutní Lebesgueova integrálu 2.262
— — , neabsolutní integrálu 1.189
— — , — řady 1.208
— bodová 2.21
— lokálně stejnoměrná 2.50
— po složkách (souřadnicích) 2.21, 2.87
— posloupnosti 1.25, 1.206, 2.17
— řady 1.208
— — vektorů 2.18
— stejnoměrná 2.22
— zobecněné řady 1.219
kosinus hyperbolický 1.42
— komplexní 1.228
koule jednotková 2.23
kritérium Abelovo pro integrál 1.193
— Abelovo pro řadu 1.211
— — stejnoměrné konvergence řady 2.60, 2.61
— BC pro řadu 1.209
— — stejnoměrné konvergence řady 2.59
— Cauchyho 1.210
— d'Alembertovo 1.210
— Dirichlet-Jordanovo 2.304
— Dirichletovo 1.193, 1.211
— — stejnoměrné konvergence řady 2.60
— integrální 1.210
— — pro konvergenci řady funkcí 2.265
— Leibnizovo 1.211
— srovnávací pro integrál 1.189, 1.191
— — — řadu 1.210
— — stejnoměrné konvergence 2.59, 2.60
kruh konvergence 2.53
kružnice 2.116
křivka 2.112
— integrální 1.163
— Vivianiho 2.153

Lemma Abelovo 2.52
lemniskata 2.153
limes inferior, superior 1.33, 2.254
— superior topologický 1.33
limita dvojná, dvojnásobná 2.88
— funkce 1.37, 1.228
— — vzhledem k množině 2.42
— monotónní funkce 1.39
— — posloupnosti 1.31
— posloupnosti 1.25, 1.206, 2.17
— superpozice 1.38, 1.40, 2.43
limitní přechod majorizovaný 2.263
— — monotónní 2.255, 2.263

limitní přechod v nerovnostech 1.26
— — za znamením integrálu 2.51, 2.278
linearita integrálu 1.186, 2.263
lineární forma daná maticí 2.95
list Möbiův 2.119
lokální řešení rovnic 2.145, 2.146

Majoranta 2.60
— integrovatelná 2.263
matice Jacobiho 2.145
— lineární formy 2.95
— ortogonální 2.41
metody substituční I a II 1.135
metrika 2.16
— eukleidovská 2.20
— generovaná normou 2.18
— redukovaná 2.30, 2.31
metriky ekvivalentní 2.33
metrizace 2.16
míra (Lebesgueova) 2.248
— — vnější 2.246
množina borelovská 2.247
— hustá v množině 2.44
— izolovaná v $\mathbb{R}$ 1.140
— kompaktní 2.36
— lineárně (ne)závislá 2.22
— měřitelná 2.247
— míry 0 2.249
— omezená 2.17
— otevřená 2.35
— — v množině 2.46
— pod grafem 2.259
— $\mathbb{R}^*$ 1.24
— řídká v množině 2.44
— spočetná 1.218
— typu F_σ, G_δ 2.249
— uzavřená 2.35
— — v množině 2.46
množiny ekvivalentní 2.260
moment setrvačnosti 2.292
— statický 2.292
monotonie integrálu 1.186, 2.265
— (vnější) míry 2.246

Nadplocha 2.112
— hladká 2.112
— normálová nadplochy 2.114
— — variety 2.150
nadrovina tečná nadplochy 2.113
— — variety 2.150
násobení číslem po souřadnicích 2.20
nekonečno (v Gaussově rovině) 2.31
nerovnost Bernoulliho 1.20
— Schwarzova 2.19
— trojúhelníková 2.16, 2.18
norma 2.18
— eukleidovská 2.20
— indukovaná skalárním součinem 2.19
— integrální 2.24
— maximová, supremová 2.23, 2.24
normála 2.114

Objem (otevřené množiny) 2.245
— (p-rozměrného) intervalu 2.244
— rotačního tělesa 2.290
obraz geometrický nadplochy 2.112
— množiny 2.15
okolí bodu v m.p. 2.17
— — — $\mathbb{R}^*$ 1.37
— kruhové, prstencové 2.42
operátor Laplaceův 2.104
— lineární diferenciální 2.208
ortogonalita vektorů 2.19

Paraboloid hyperbolický 2.123
parametrizace množiny 2.112
perioda funkce 1.54
permutace souřadnic 2.273
plocha 2.112
— hladká 2.112
— neorientovatelná 2.120
podmínka BC konvergence řady čísel 1.209
— — stejnoměrné konvergence řady 2.59
podmínky počáteční 1.163, 2.209
podprostor 2.17
pokrytí (speciálně: otevřené) 2.36
poloměr konvergence 2.52
— okolí 2.17, 2.42
polopřímka 2.115
polynom 1.41, 1.147
— charakteristický 2.213, 2.228
— Taylorův 1.70, 2.69
— — součtu, součinu 1.73
popis parametrický množiny 2.112
— — standardní grafu 2.121
posloupnost 1.24
— bodově konvergentní 2.21
— divergentní 1.25, 2.17
— konvergentní 1.25, 2.17
— monotónní 1.31

posloupnost omezená 1.25, 1.206
— — shora, zdola 1.25
— ryze monotónní 1.31
— stacionární 1.31
posloupnost vybraná 1.33
pravidlo l'Hospitalovo 1.65
princip indukce 1.19
pro skoro všechna 1.24, 2.260
problém Cauchyho 2.209
projekce stereografická 2.31
prostor aritmetický 2.20
— Bairův 2.30
— $C(a, b)$ 2.24
— diskrétní 2.28
— eukleidovský 2.20
— Hilbertův 2.26
— kompaktní 2.36
— lineární normovaný 2.18
— $M(Z)$ 2.23
— metrický 2.16
— normálový 2.114
— tečný 2.113
— unitární 2.19
— zakřivený 2.112
prostory homeomorfní 2.39
— izometrické 2.28, 2.32
— izometricky izomorfní 2.28
— izomorfní 2.28
průběh funkce 1.85, 1.87
průměr množiny 2.17
průmět ortogonální 2.267
přerovnání řady 1.216
přímka 2.115

Relativizace 2.45
rotace vektorové funkce 2.100
rovina Gaussova 2.31
— normálová 2.114
— tečná 2.113
rovnice Besselova 2.230, 2.231
— diferenciální 1. řádu 1.162
— — lineární 2.208
— — — s konstantními koeficienty 2.213
— Eulerova 2.156, 2.222
— charakteristická 2.213
— Laplaceova 2.159
— normálové nadroviny 2.114, 2.150
— Poissonova 2.159
— standardní grafu 2.121
— tečné nadroviny 2.114, 2.150

rozdíl množin 2.15
rozklad kanonický jednoduché funkce 2.256
— racionální funkce 1.140

Řada alternující 1.211
— čísel 1.206
— divergentní 1.207, 2.18
— Fourierova 2.301, 2.306, 2.314
— — lichá (sinová) 2.306
— — sudá (kosinová) 2.306
— geometrická 1.207
— harmonická 1.209
— konvergentní 1.207, 2.18
— majorantní 2.60
— mocninná 2.52
— pseudopotenční 2.229
— Taylorova 2.69
— vzniklá přerovnáním 1.216
— zobecněná 1.209
— — nezáporných čísel 2.244
řešení diferenciální rovnice 1.162, 2.208
— — — řadou 2.75, 2.225
— rovnic lokální 2.145, 2.146
řez množiny 2.267

Sčítání po souřadnicích 2.20
sféra 2.23, 2.117
σ-aditivita integrálu 2.265
— míry 2.248
σ-algebra 2.247
σ-subaditivita vnější míry 2.246
sinus hyperbolický 1.42
— komplexní 1.228
sjednocení, průnik systému množin 2.15
skoro všechna, skoro všude 1.24, 2.260
součet částečný řady 1.206
— řady 1.206, 2.18
— zobecněné řady 1.219, 2.244
součin Cauchyho 1.220
— čísel z $\mathbb{R}^*$ 1.24, 2.252
— skalární 2.19
— vektorový 2.115
— zobecněných řad 1.220
souřadnice (složka) bodu, vektoru 2.20
— cylindrické 2.172, 2.274
— křivočaré 2.161
— polární 2.158, 2.273
— sférické 2.172, 2.274
spojitost integrálu závislého na parametru 2.280

spojitost stejnoměrná 2.38
— v bodě 1.39, 2.17
— — — vzhledem k množině 2.37
— — množině 2.17, 2.37
střed mocninné řady 2.52
— okolí 2.17, 2.42
subaditivita 2.246
systém fundamentální 2.209
— množin 2.15
— — pokrývající množinu 2.36

Šroubovice 2.123

Tečna 2.113
těleso Vivianiho 2.291
těžiště 2.292
třídy Bairovy 2.254
tvar speciální pravé strany 2.215

Úsečka 2.115, 2.116
uzávěr množiny 2.35
— — v množině 2.46

Variace funkce 2.301
— konstant 2.214, 2.215
varieta 2.150
vazba 2.192
vektor e_n 2.27
— jednotkový 2.23
— normálový 2.113, 2.150
— tečný 2.113, 2.150
vektory lineárně (ne)závislé 2.23
— ortogonální (navzájem kolmé) 2.19
věta Abelova 2.69
— binomická 1.19
— Bolzano-Weierstrassova 1.33
— Borelova 2.37
— Cantorova 2.36
— Diniho 2.52
— doplňková 2.284
— Fubiniho 2.269
— o derivování posloupnosti a řady
člen po členu 2.50
— o diferencování superpozice 1.50, 2.96
věta o implicitních funkcích 2.145
— — integraci posloupnosti a řady
člen po členu 2.51
— — limitě monotónní funkce 1.39
— — — — posloupnosti 1.31
— — limitě superpozice 1.38, 1,40, 2.43
— — lokální existenci inverzní
funkce 2.141
— — lokálním řešení rovnic 2.145
— — substituci 1.186, 2.272
— — záměně limitních přechodů 2.49
— Weierstrassova 2.45
věty o funkcích spojitých v intervalu 1.86
vnitřek, vnějšek množiny 2.35
výpočet limity dosazením 1.39
výraz neurčitý 1.68
vyšetření stejnoměrné konvergence 2.53
vzdálenost bodů 2.16
vzor množiny 2.15
vzorce de Morganovy 2.15
vzorec Leibnizův 1.56
— Moivrův 1.21

Zákon asociativní pro řady 1.215 ,1.219
— komutativní pro řady 1.216
záměna limitních přechodů 2.49
— nezávislých proměnných 2.155, 2.157
záměnnost parciálních derivací 2.103
zavádění nových proměnných 2.155, 2.157
závitnice 2.123
zbytek Taylorovy řady 2.69, 2.70
zobrazení difeomorfní 2.141
— homeomorfní 2.39
— inverzní 2.15
— izometrické 2.28, 2.31
— izomorfní 2.28
— lokálně difeomorfní 2.142
— omezené 2.17
— otevřené 2.141
— prosté 2.15
— regulární 2.141
— spojité 2.17
— — vzhledem k množině 2.37
— stejnoměrně spojité 2.38

Obrázky přidané do elektronického vydání

Inteligentního kalkulu 2

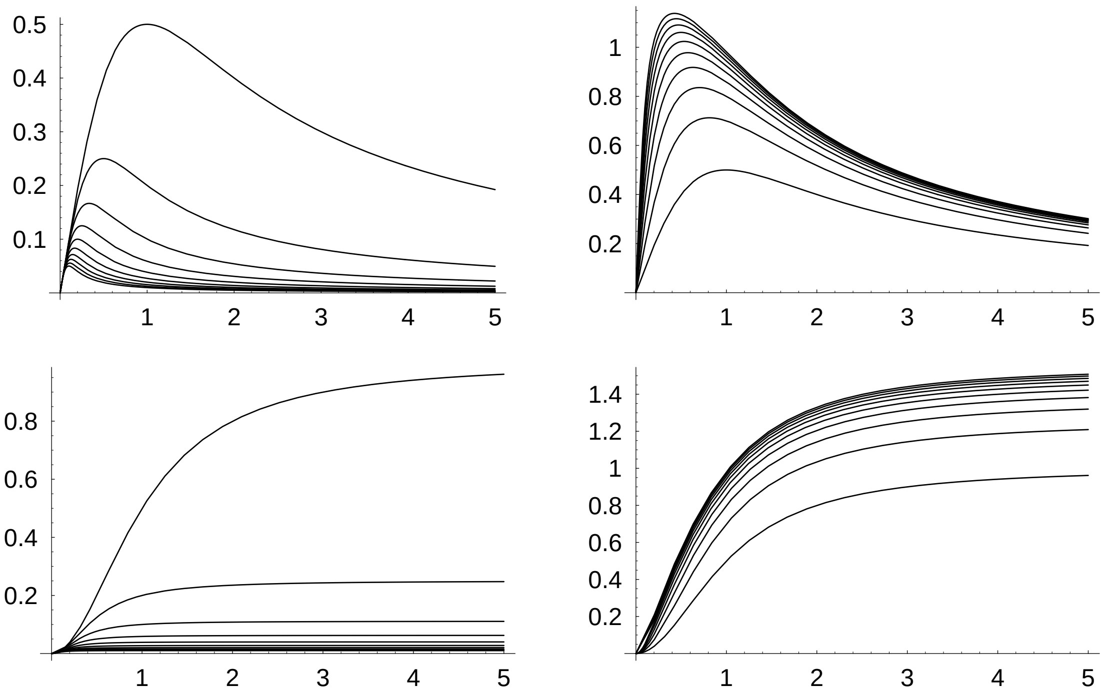
Důležité upozornění:

Mají-li mít obrázky přijatelné rozměry, nemohou být měřítka na osách vždy stejná; to má za následek, že se úhly na obrázku mohou lišit od skutečných úhlů.

Obrázky ke kapitole 13

Příklad 13.9 na str. 62

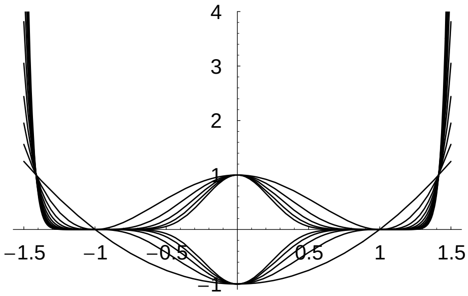
Stejnoměrná konvergence dvou posloupností a příslušných řad



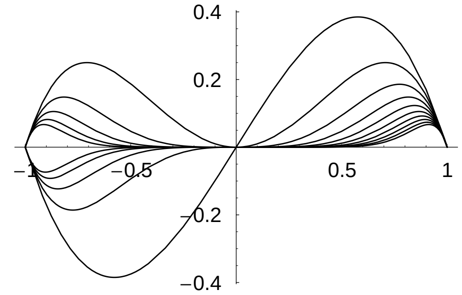
První (resp. druhý) řádek vlevo: grafy funkcí $f_1, \ldots, f_{10}$ (resp. $g_1, \ldots, g_{10}$), vpravo grafy příslušných částečných součtů

Cvičení 13.01 až 13.08 na str. 76 a 77 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

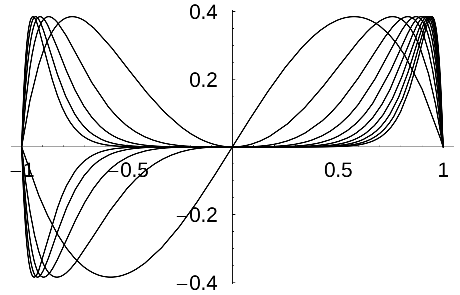
13.01



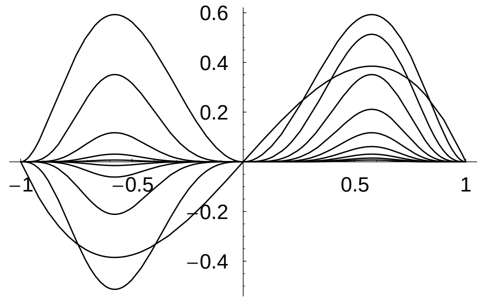
13.02



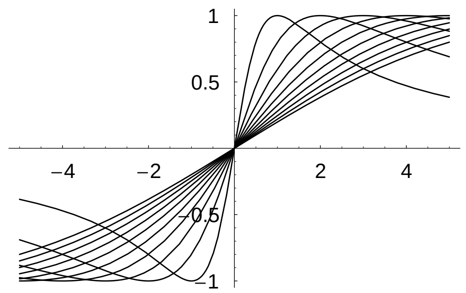
13.03



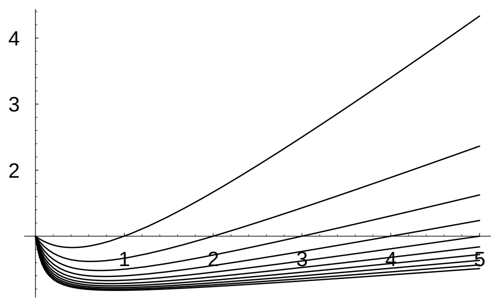
13.04



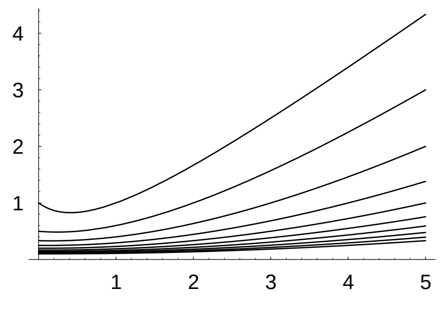
13.05



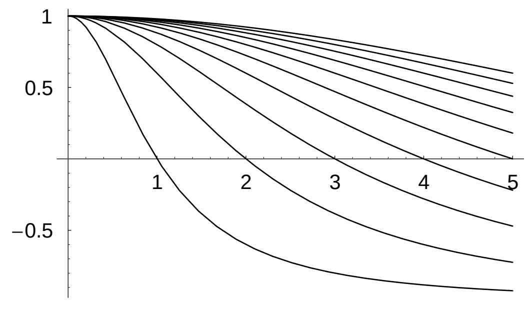
13.06



13.07

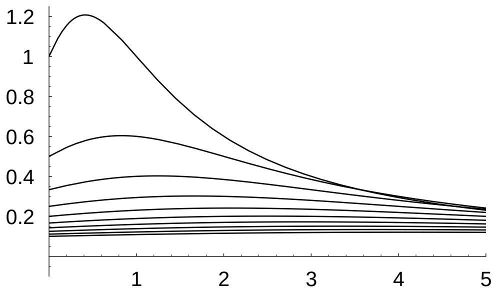


13.08

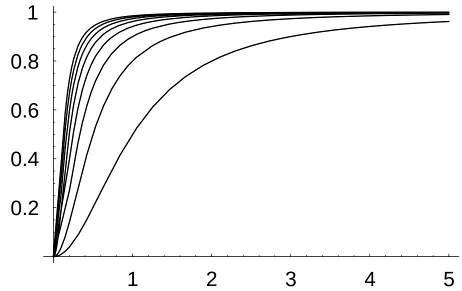


Cvičení 13.09 až 13.16 na str. 77 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

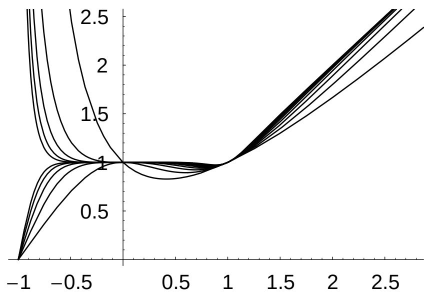
13.09



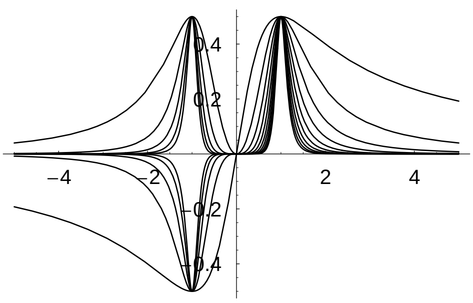
13.10



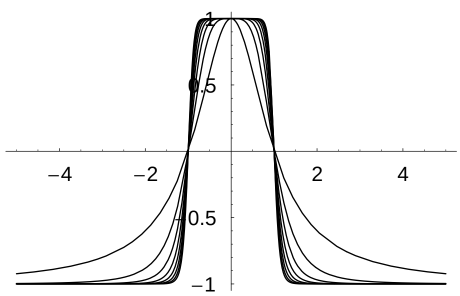
13.11



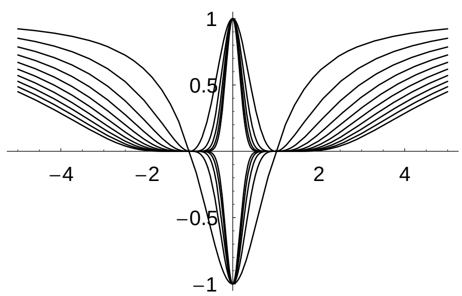
13.12



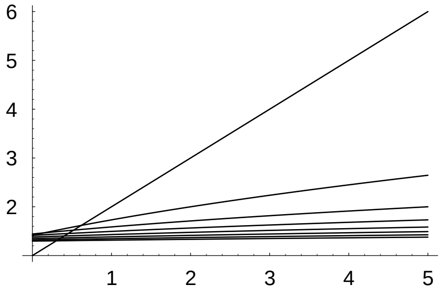
13.13



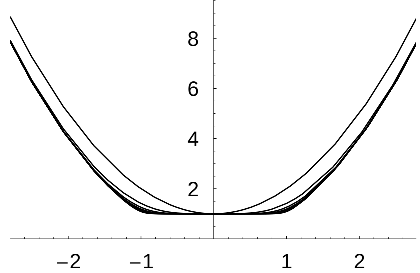
13.14



13.15

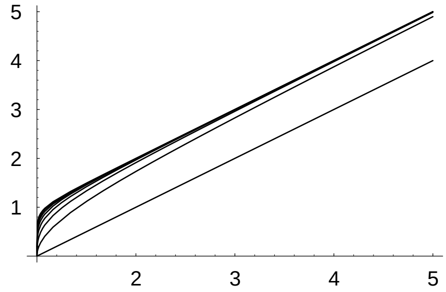


13.16

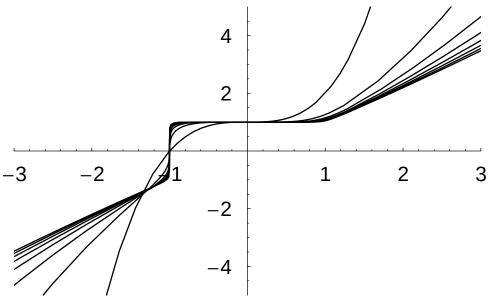


Cvičení 13.17 až 13.24 na str. 77 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

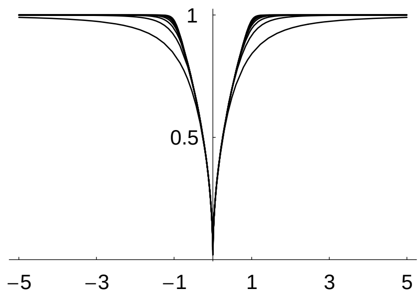
13.17



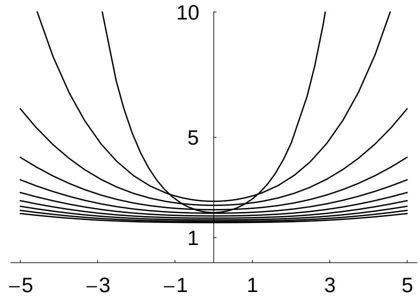
13.18



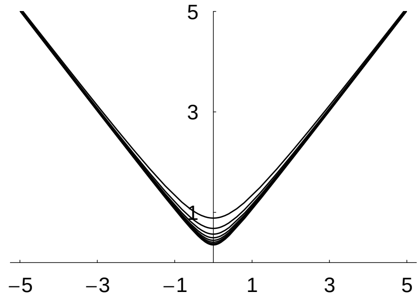
13.19



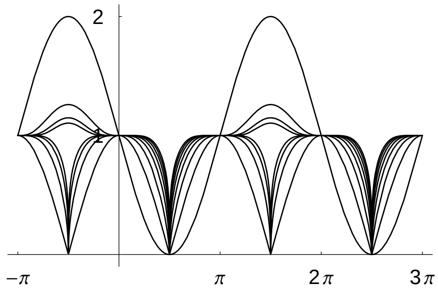
13.20



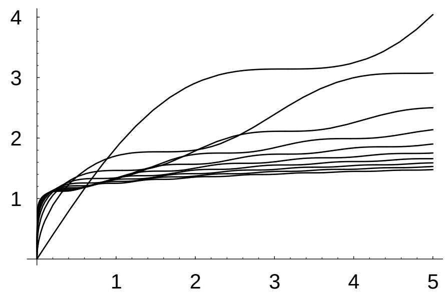
13.21



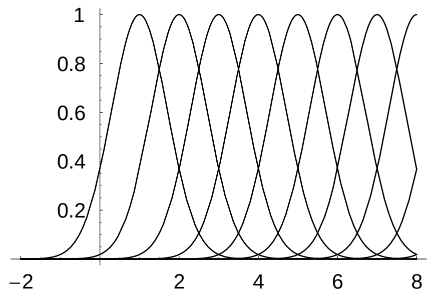
13.22



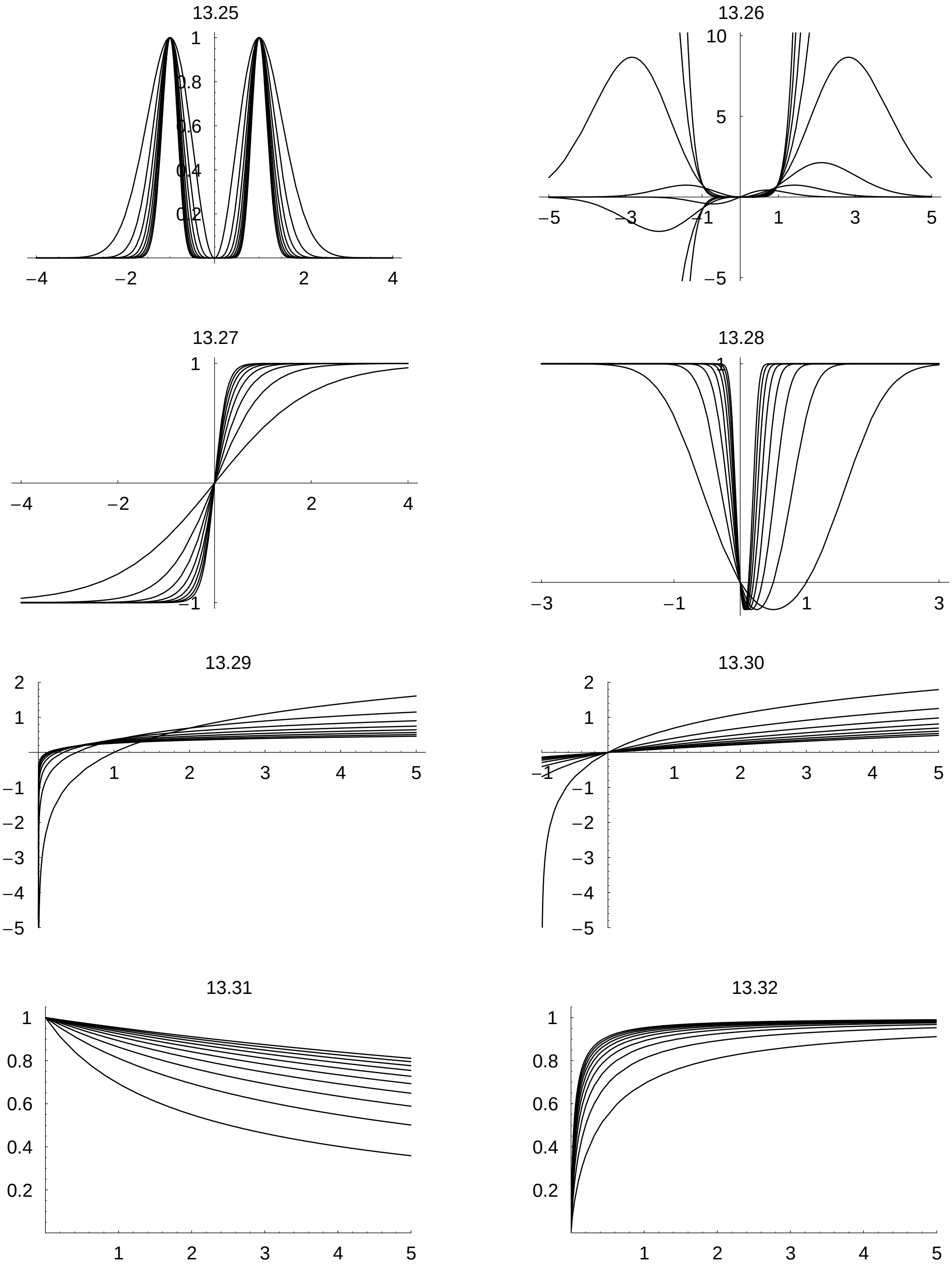
13.23



13.24

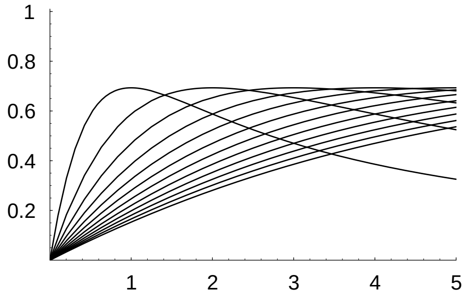


Cvičení 13.25 až 13.32 na str. 77 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

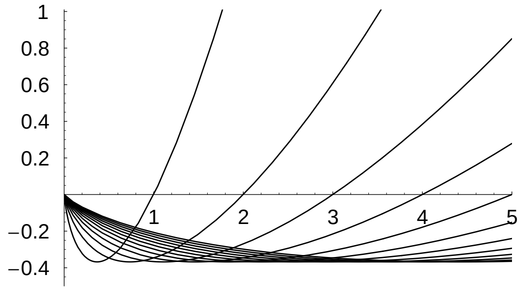


Cvičení 13.33 až 13.40 na str. 77 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

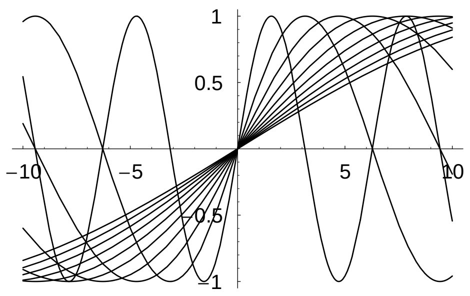
13.33



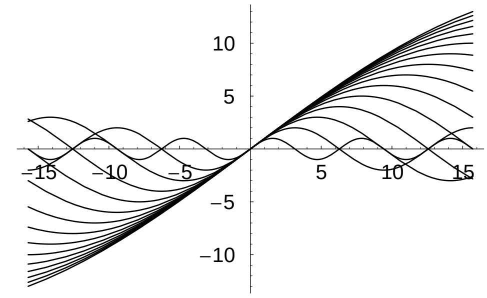
13.34



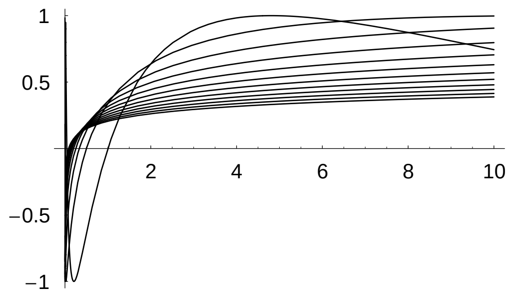
13.35



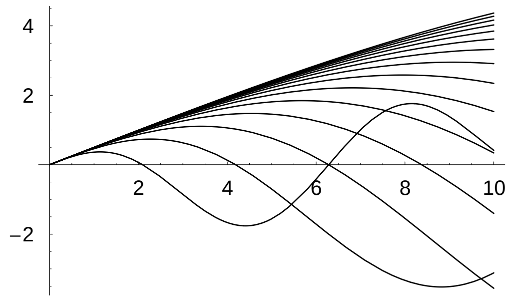
13.36



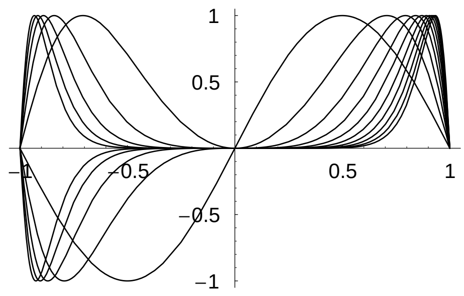
13.37



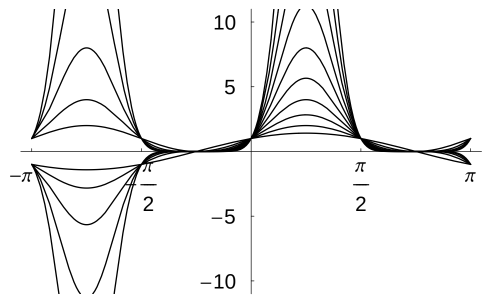
13.38



13.39

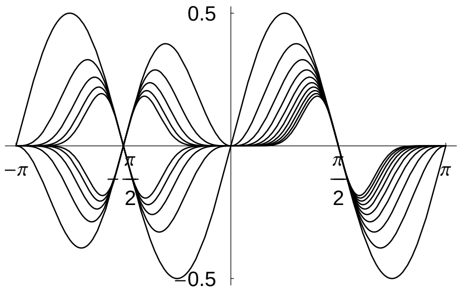


13.40

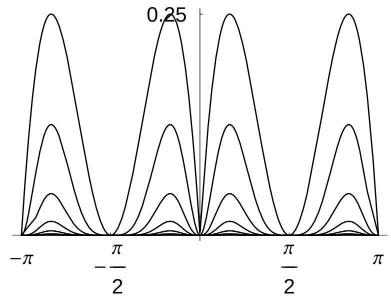


Cvičení 13.41 až 13.48 na str. 77 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

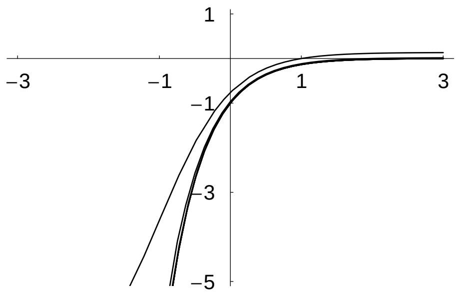
13.41



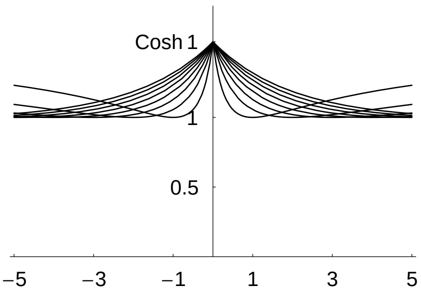
13.42



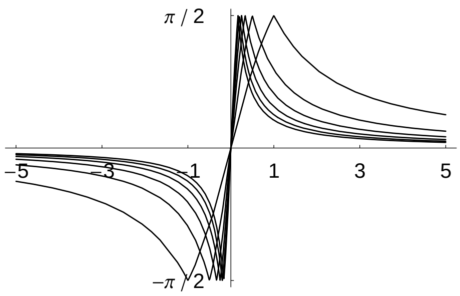
13.43



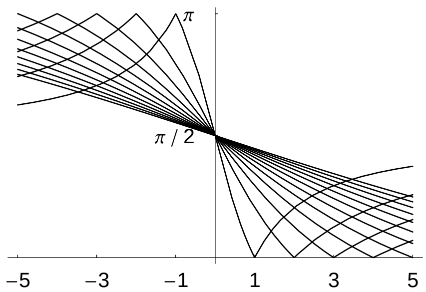
13.44



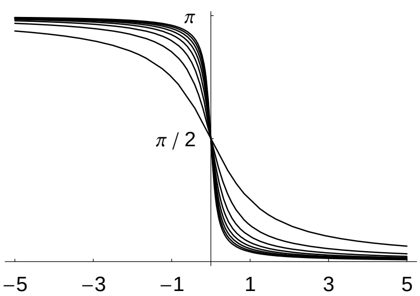
13.45



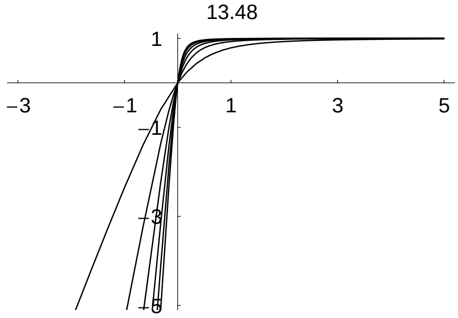
13.46



13.47

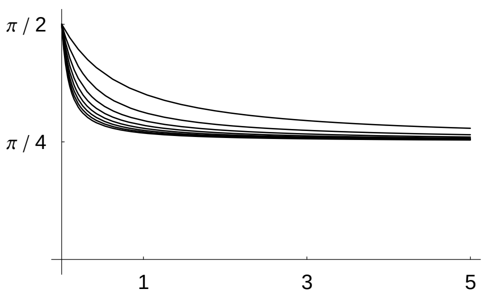


13.48

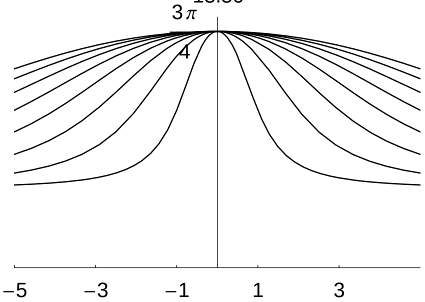


Cvičení 13.49 až 13.56 na str. 77 a 78 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

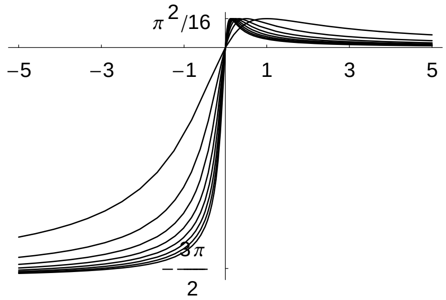
13.49



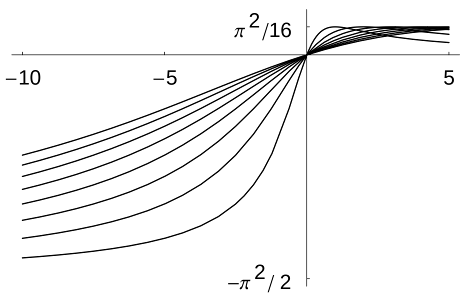
13.50



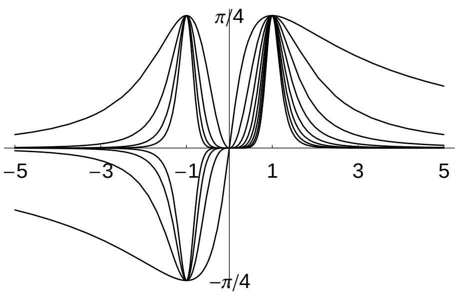
13.51



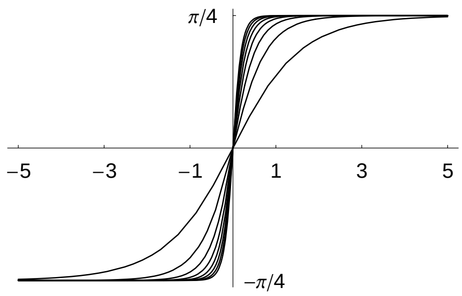
13.52



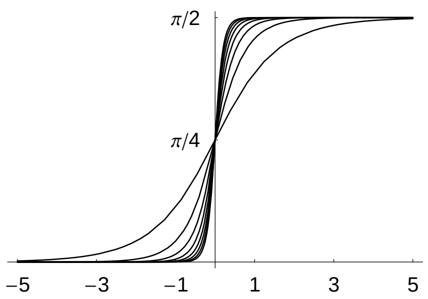
13.53



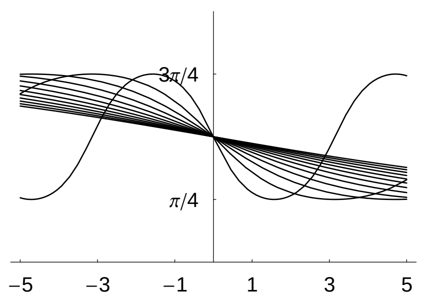
13.54



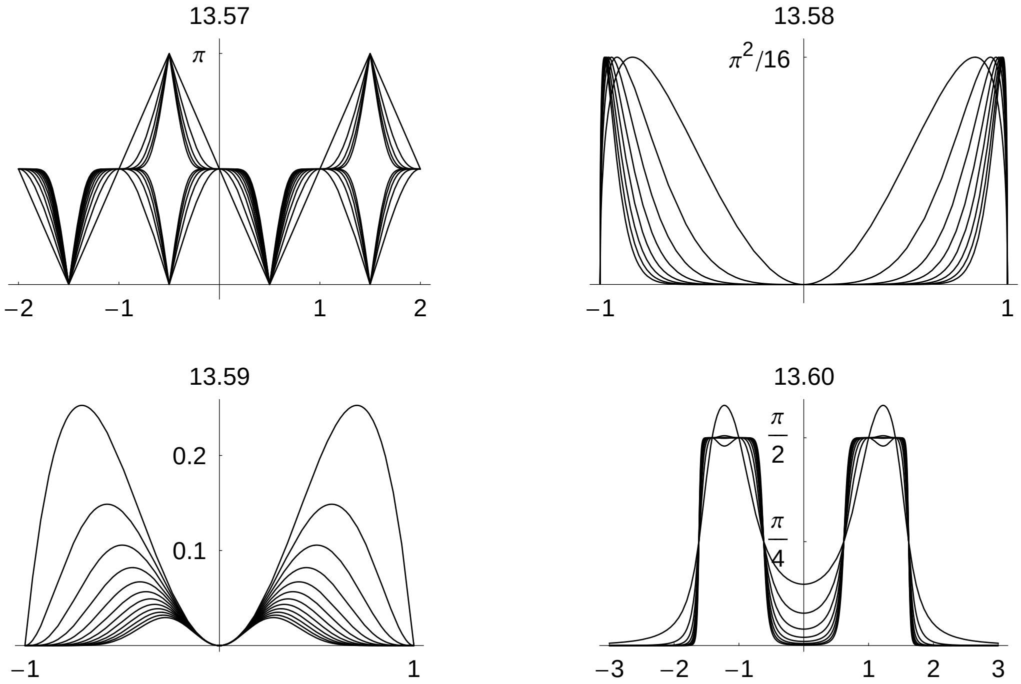
13.55



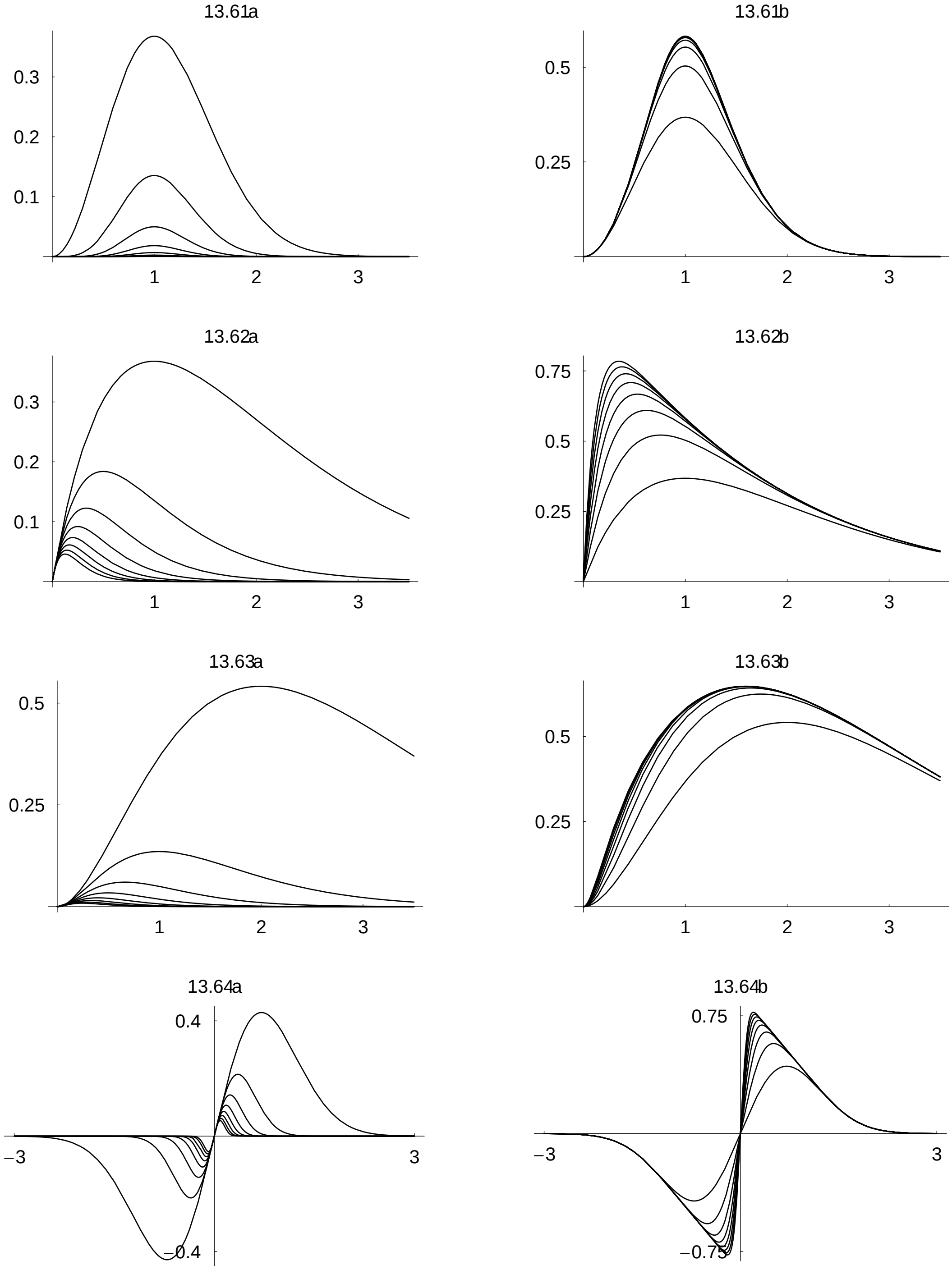
13.56



Cvičení 13.57 až 13.60 na str. 78 – stejnoměrná konvergence posloupnosti

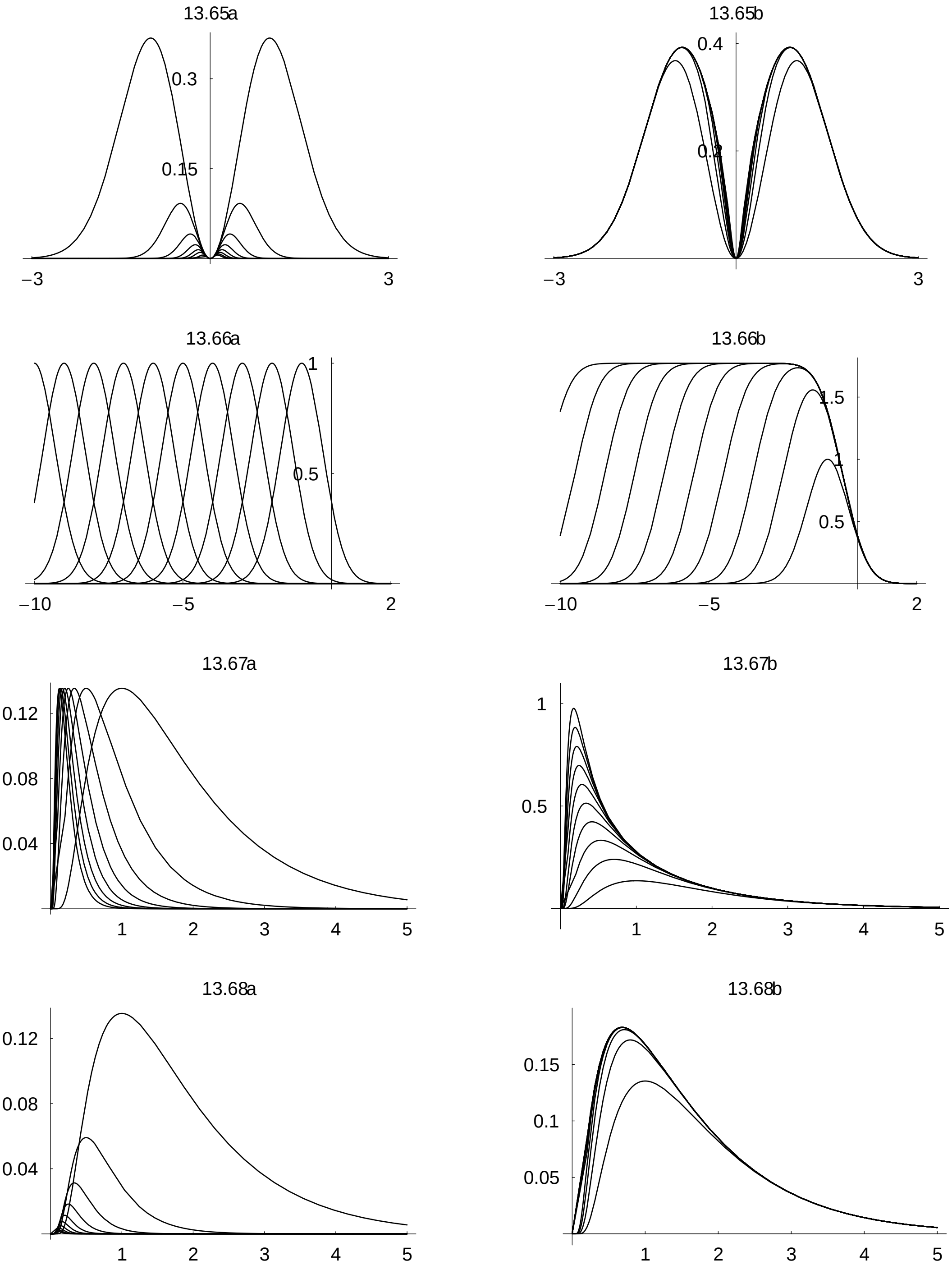


Cvičení 13.61 až 13.64 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



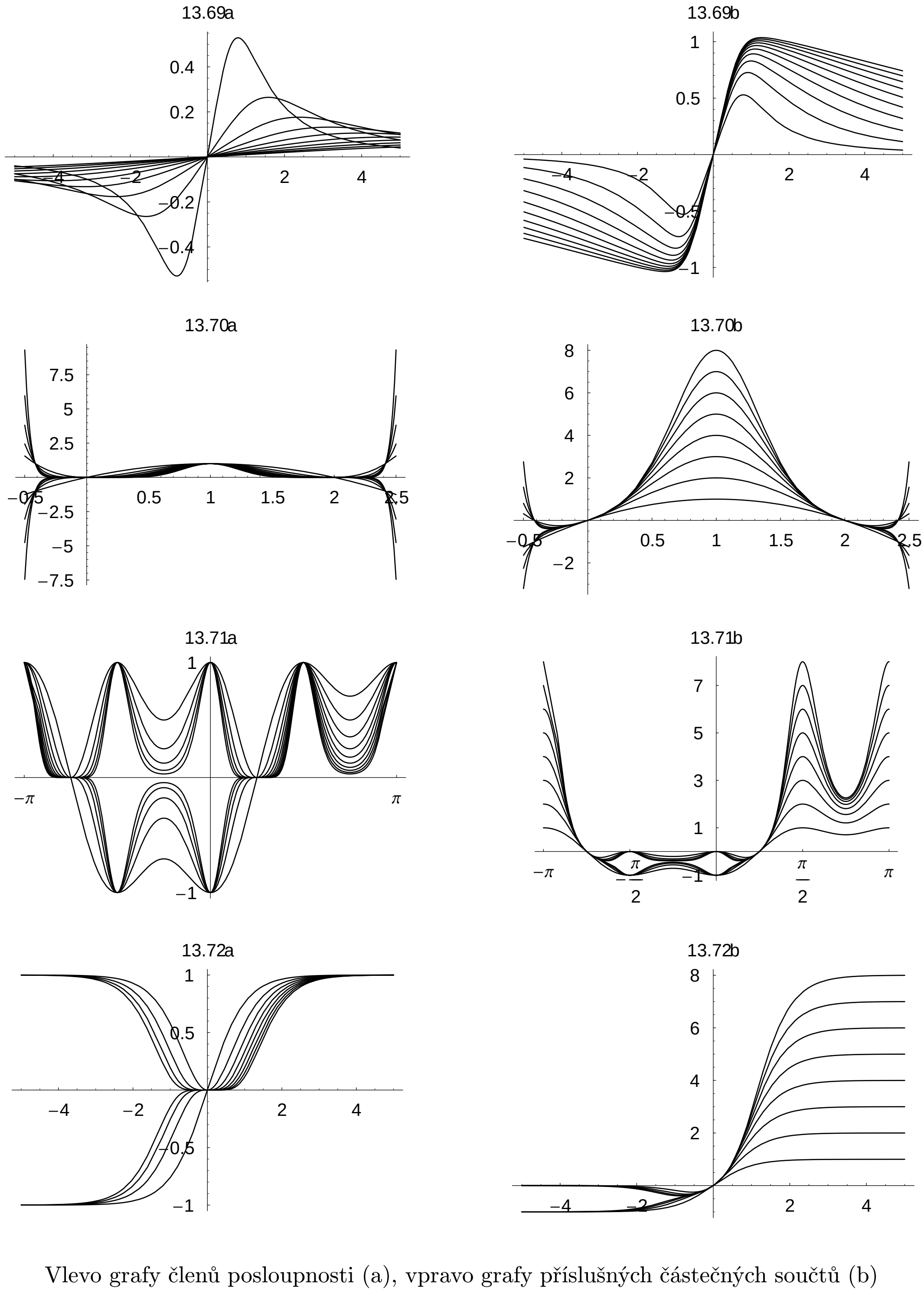
Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

Cvičení 13.65 až 13.68 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



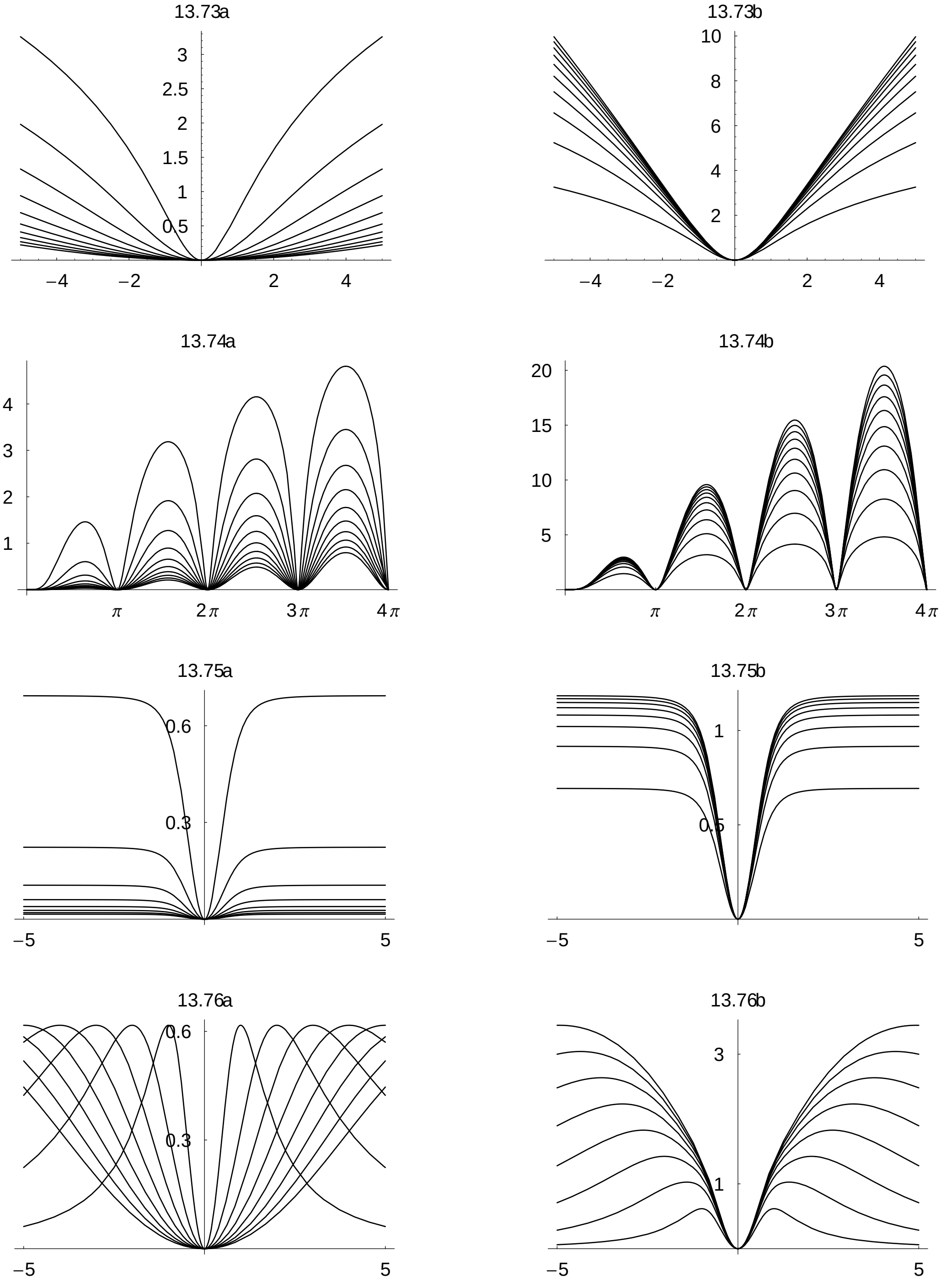
Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

Cvičení 13.69 až 13.72 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



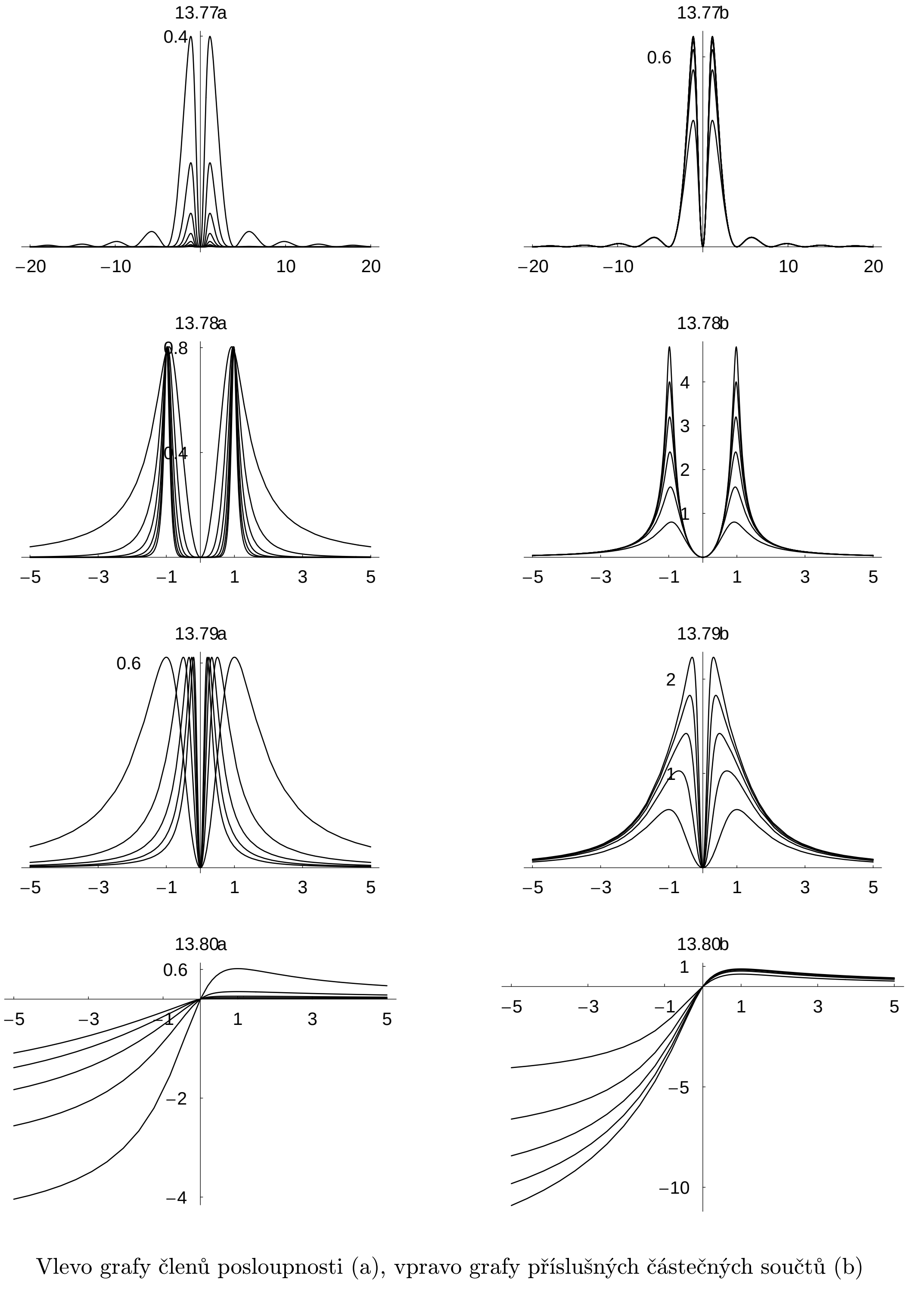
Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

Cvičení 13.73 až 13.76 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



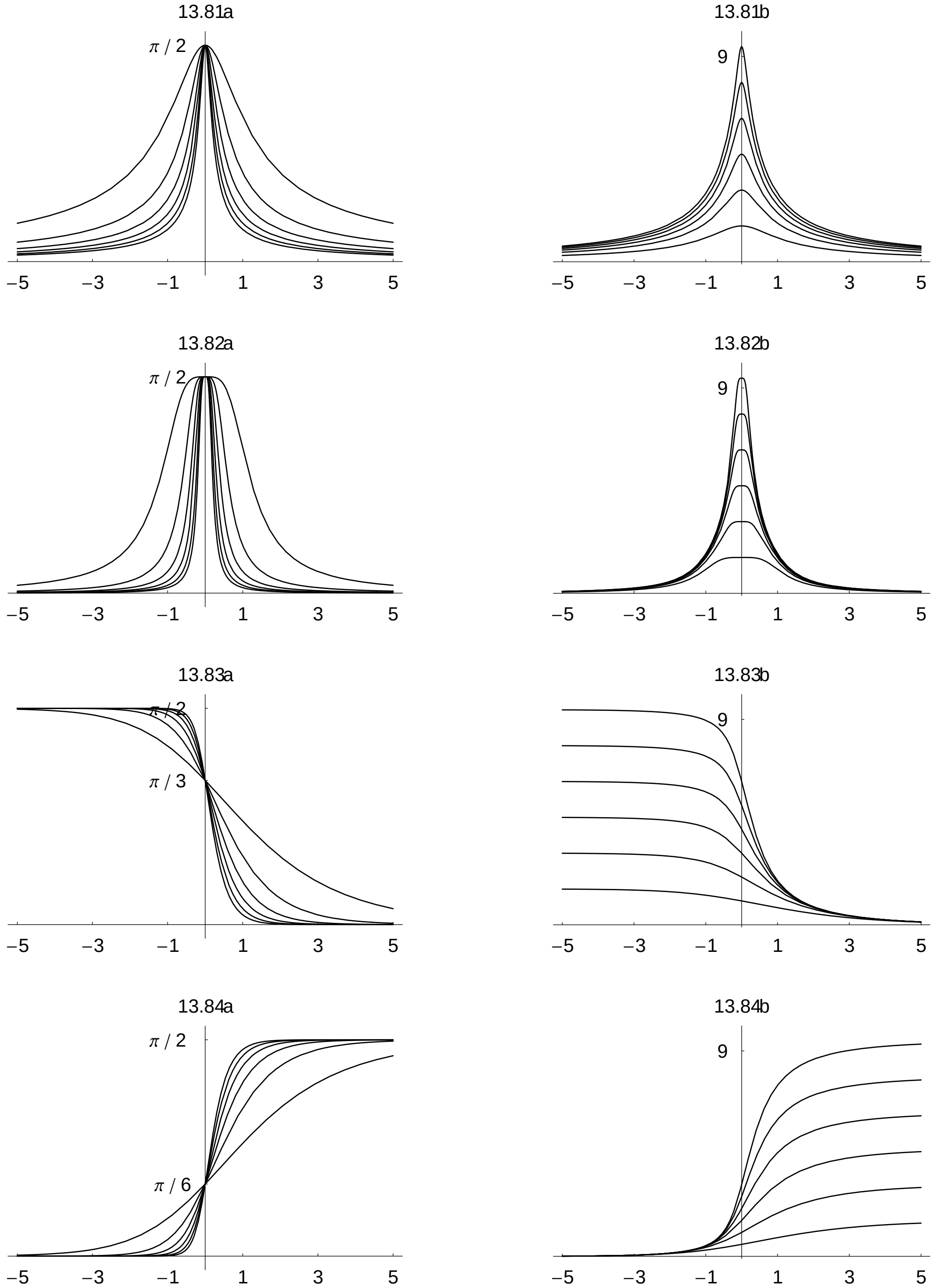
Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

Cvičení 13.77 až 13.80 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



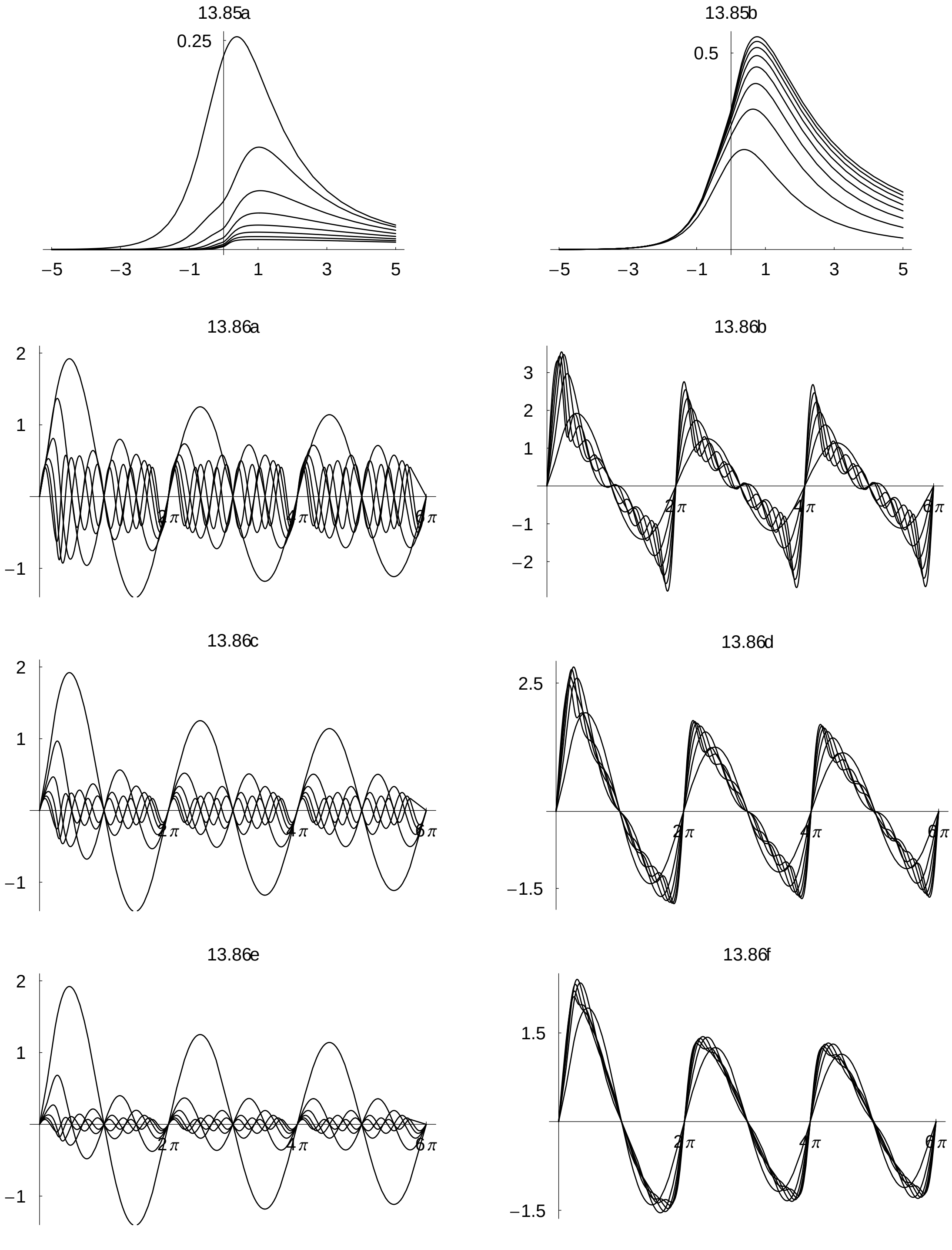
Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

Cvičení 13.81 až 13.84 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

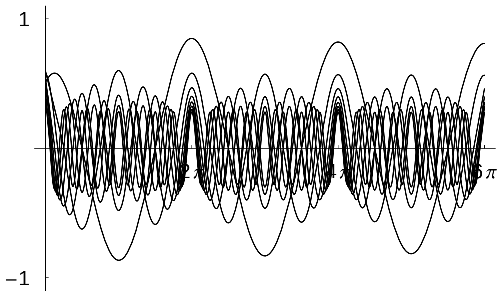
Cvičení 13.85 a 13.86 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady



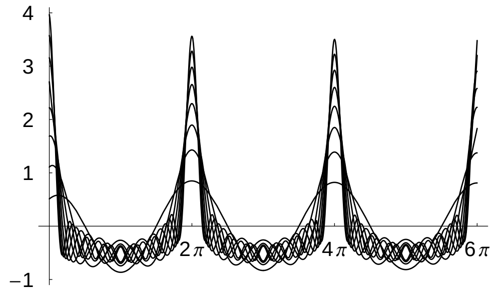
Vlevo grafy členů posloupnosti (a, c, e), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b, d, f); u příkladu 13.86 odpovídají dvojice (a, b), (c, d), (e, f) po řadě hodnotám $\alpha = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

Cvičení 13.87 a 13.88 na str. 78 – stejnoměrná konvergence řady

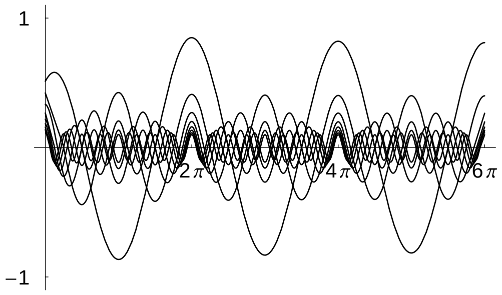
13.87a



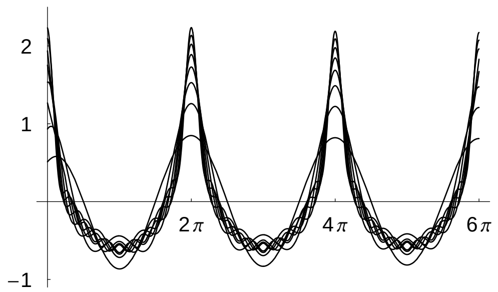
13.87b



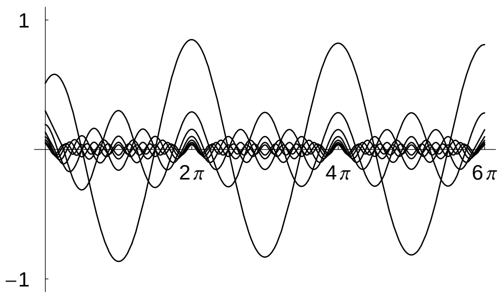
13.87c



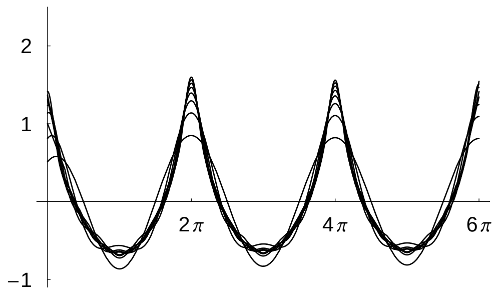
13.87d



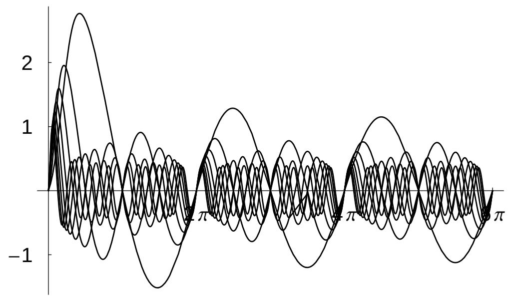
13.87e



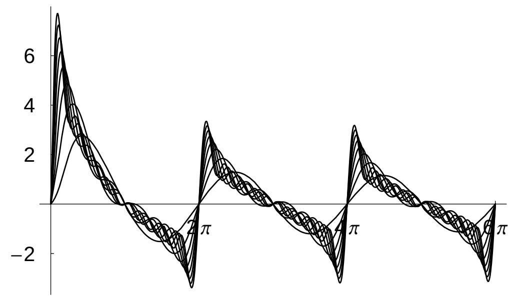
13.87f



13.88a

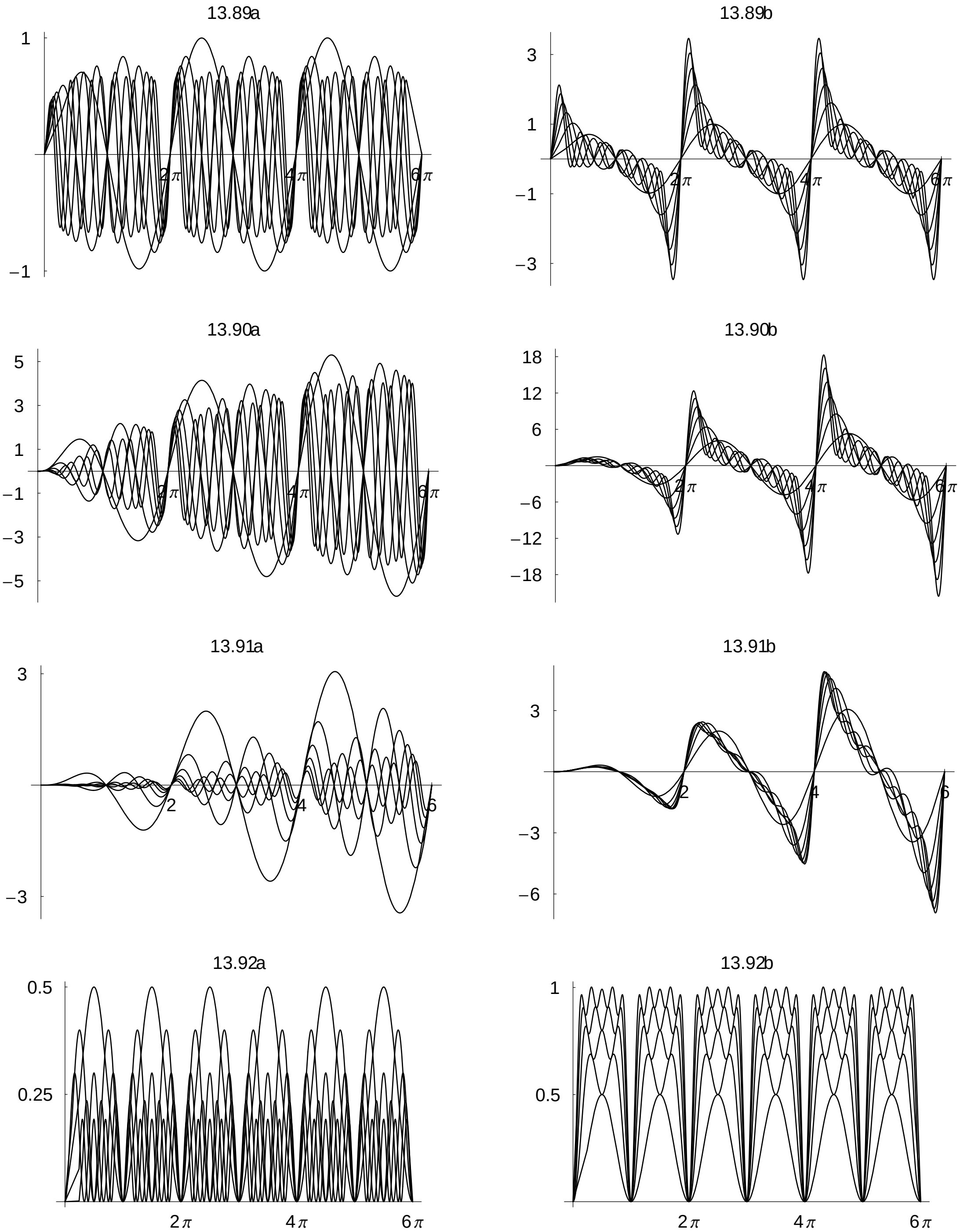


13.88b



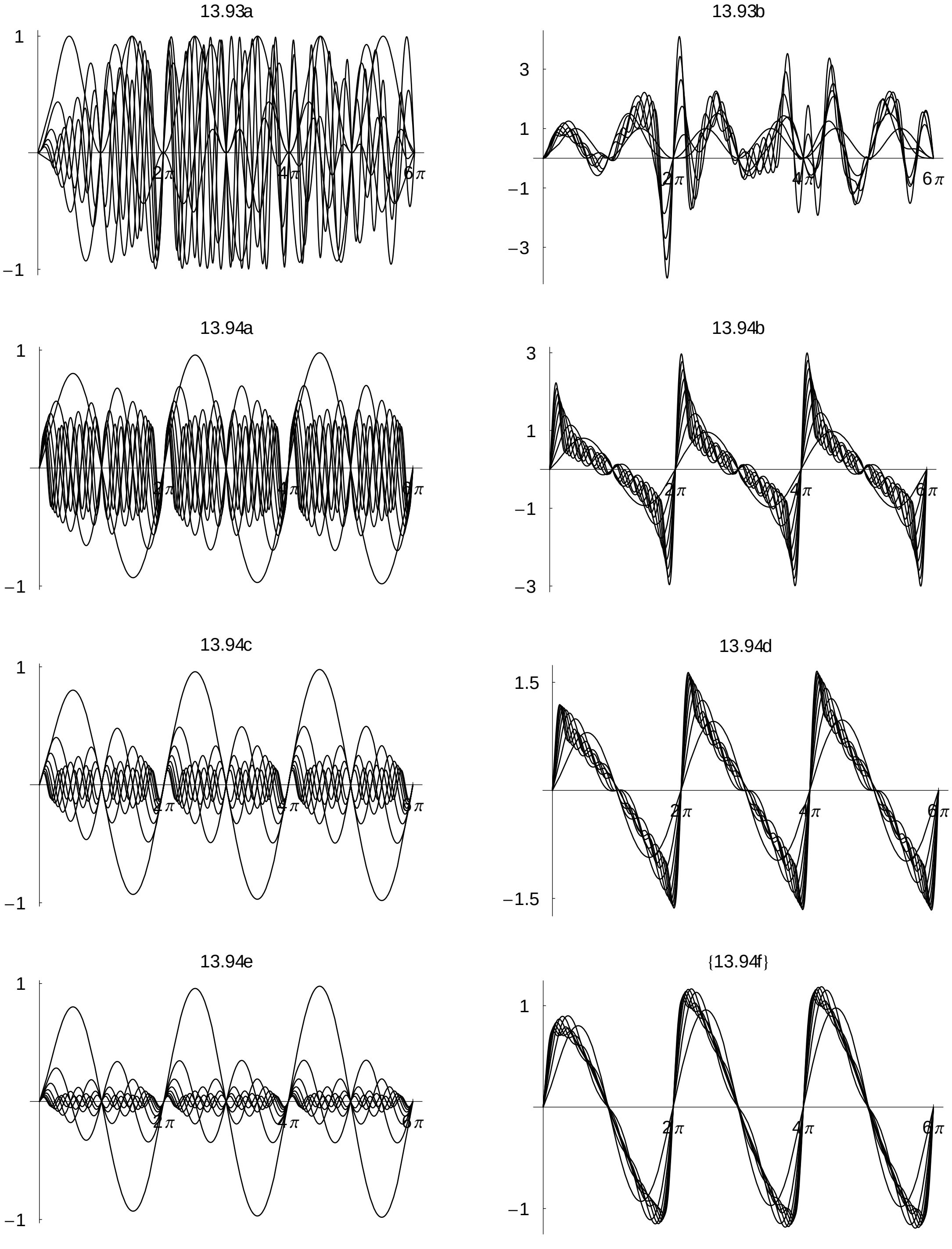
Vlevo grafy členů posloupnosti (a, c, e), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b, d, f); u příkladu 13.87 odpovídají dvojice (a, b), (c, d), (e, f) po řadě hodnotám $\alpha = \frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$

Cvičení 13.89 až 13.92 na str. 79 – stejnoměrná konvergence řady



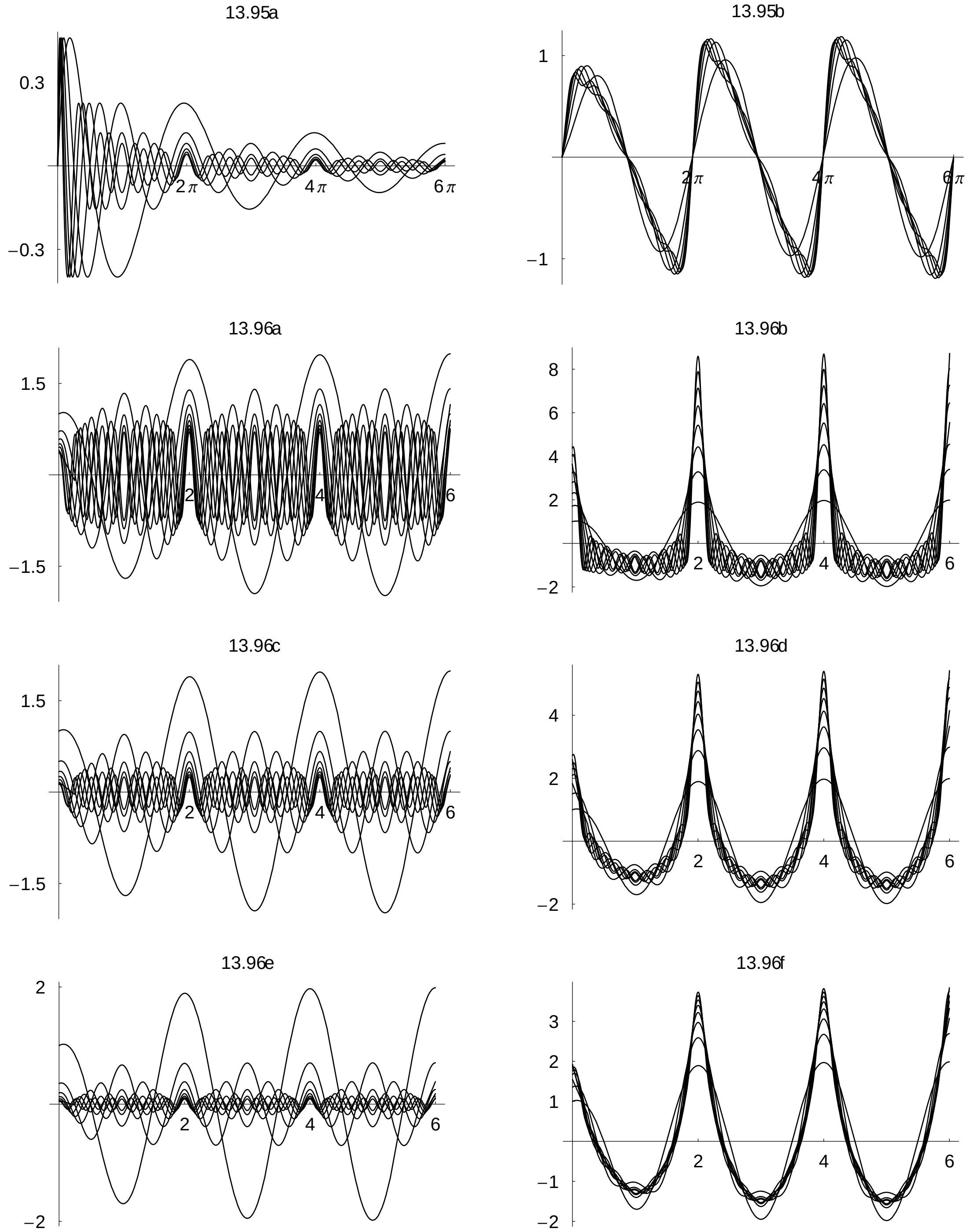
Vlevo grafy členů posloupnosti (a), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b)

Cvičení 13.93 a 13.94 na str. 79 – stejnoměrná konvergence řady



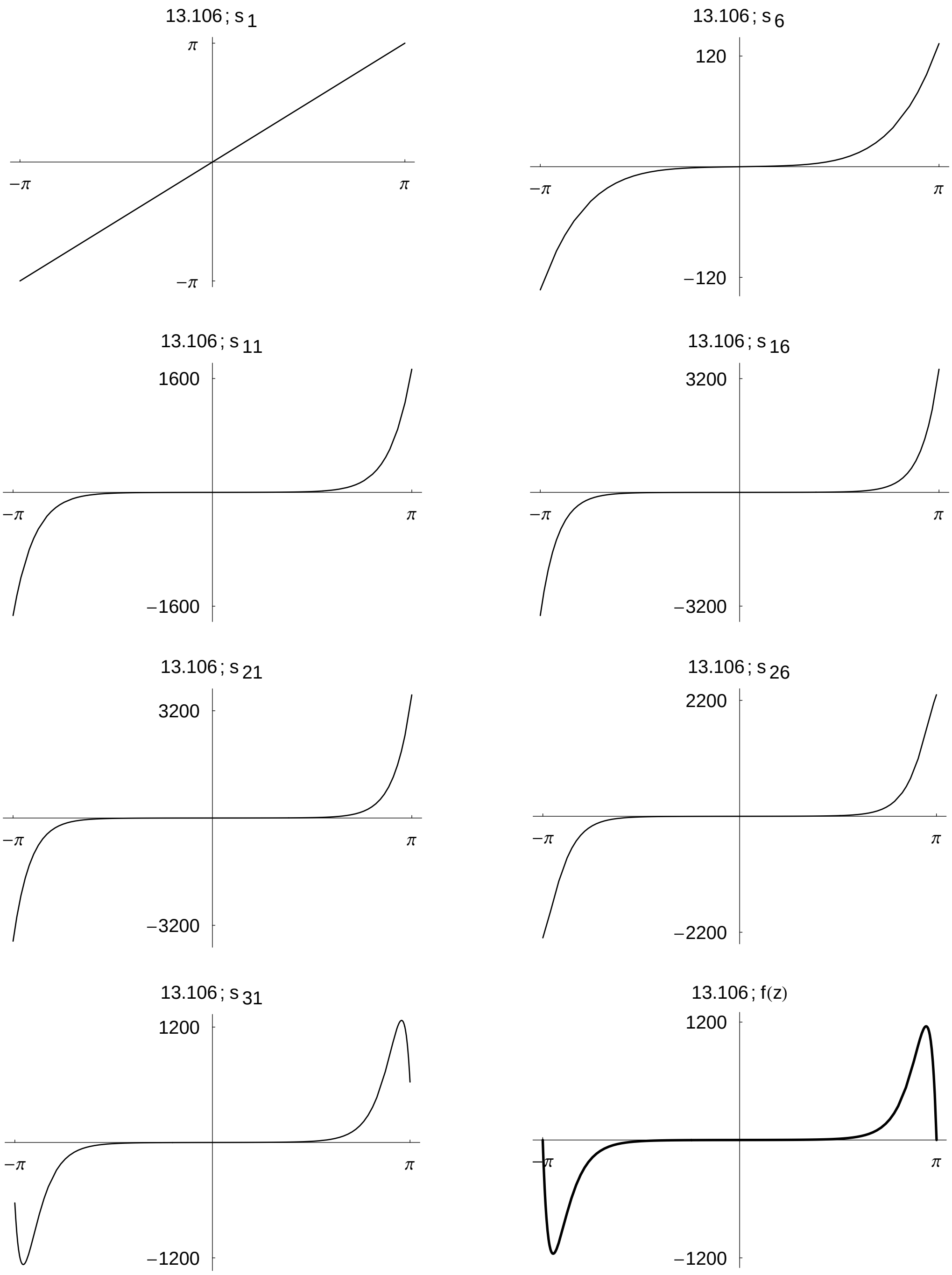
Vlevo grafy členů posloupnosti (a, c, e), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b, d, f); u příkladu 13.94 odpovídají dvojice (a, b), (c, d), (e, f) po řadě hodnotám $\alpha = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

Cvičení 13.95 a 13.96 na str. 79 – stejnoměrná konvergence řady



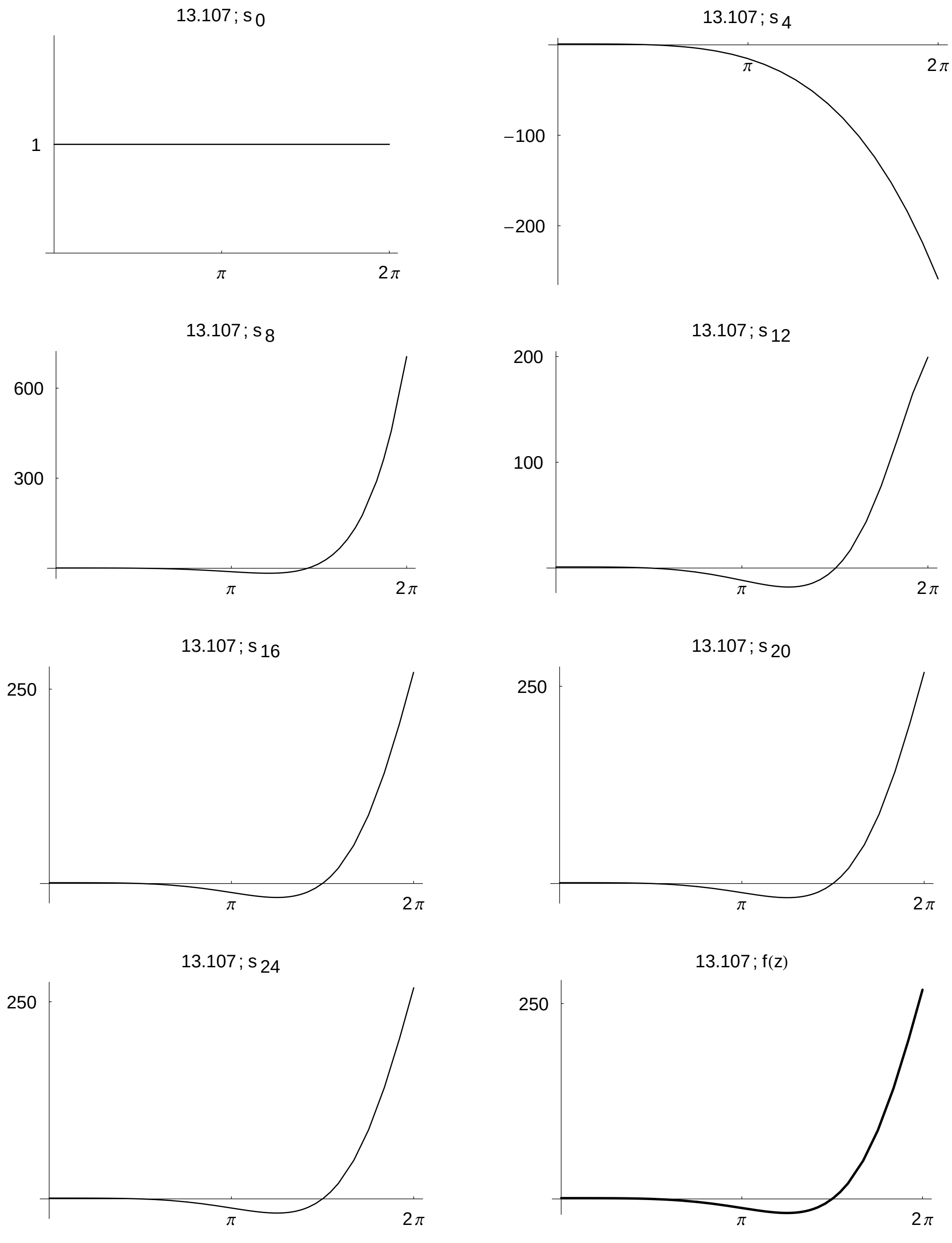
Vlevo grafy členů posloupnosti (a, c, e), vpravo grafy příslušných částečných součtů (b, d, f); u příkladu 13.96 odpovídají dvojice (a, b), (c, d), (e, f) po řadě hodnotám $\alpha = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

Cvičení 13.106 na str. 79 – poloměr konvergence řady



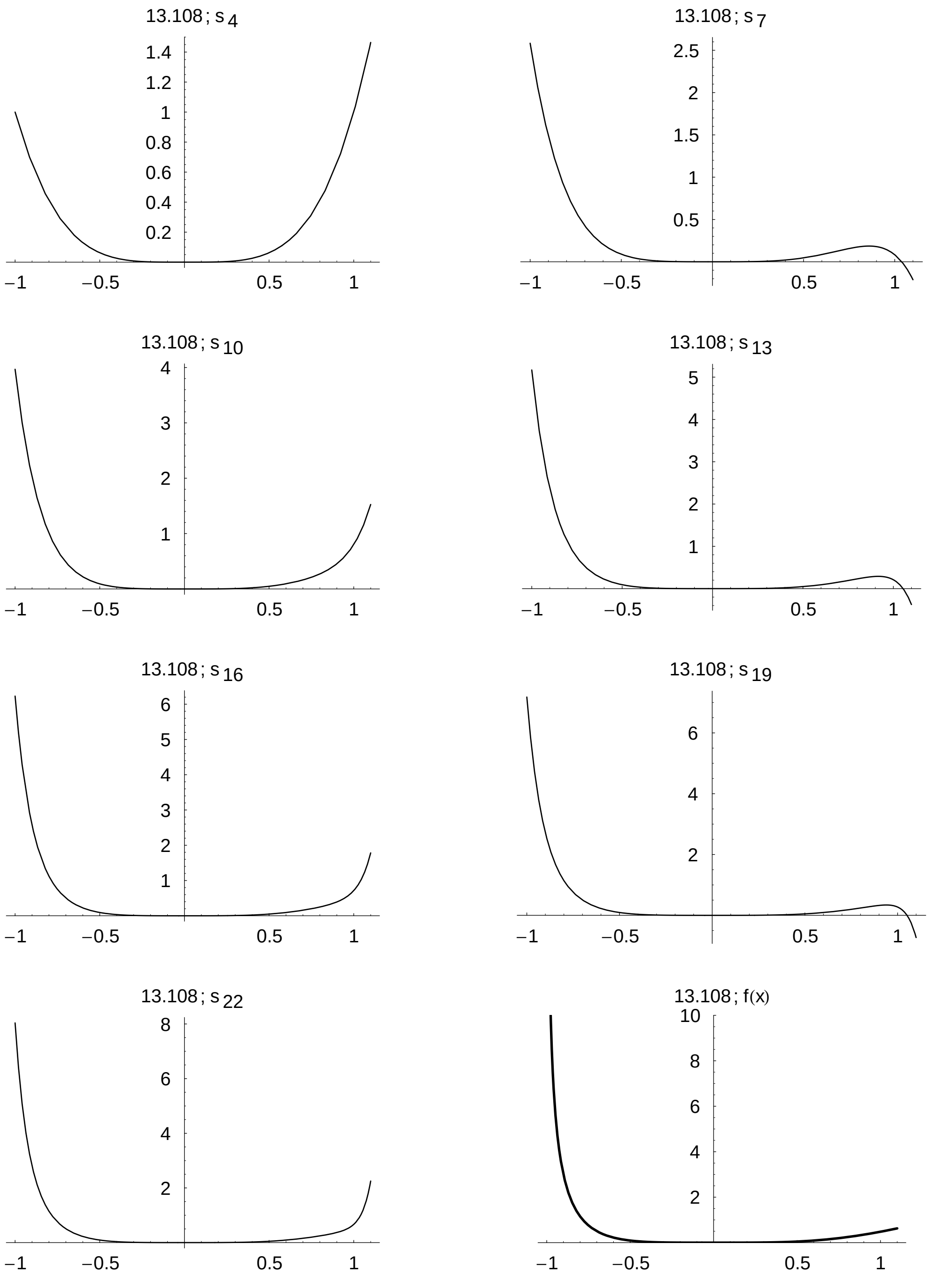
Grafy částečných součtů $s_1, s_5, \ldots, s_{31}$ Taylorovy řady funkce $f(z) = \exp z^2 \sin z$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.107 na str. 79 – poloměr konvergence řady



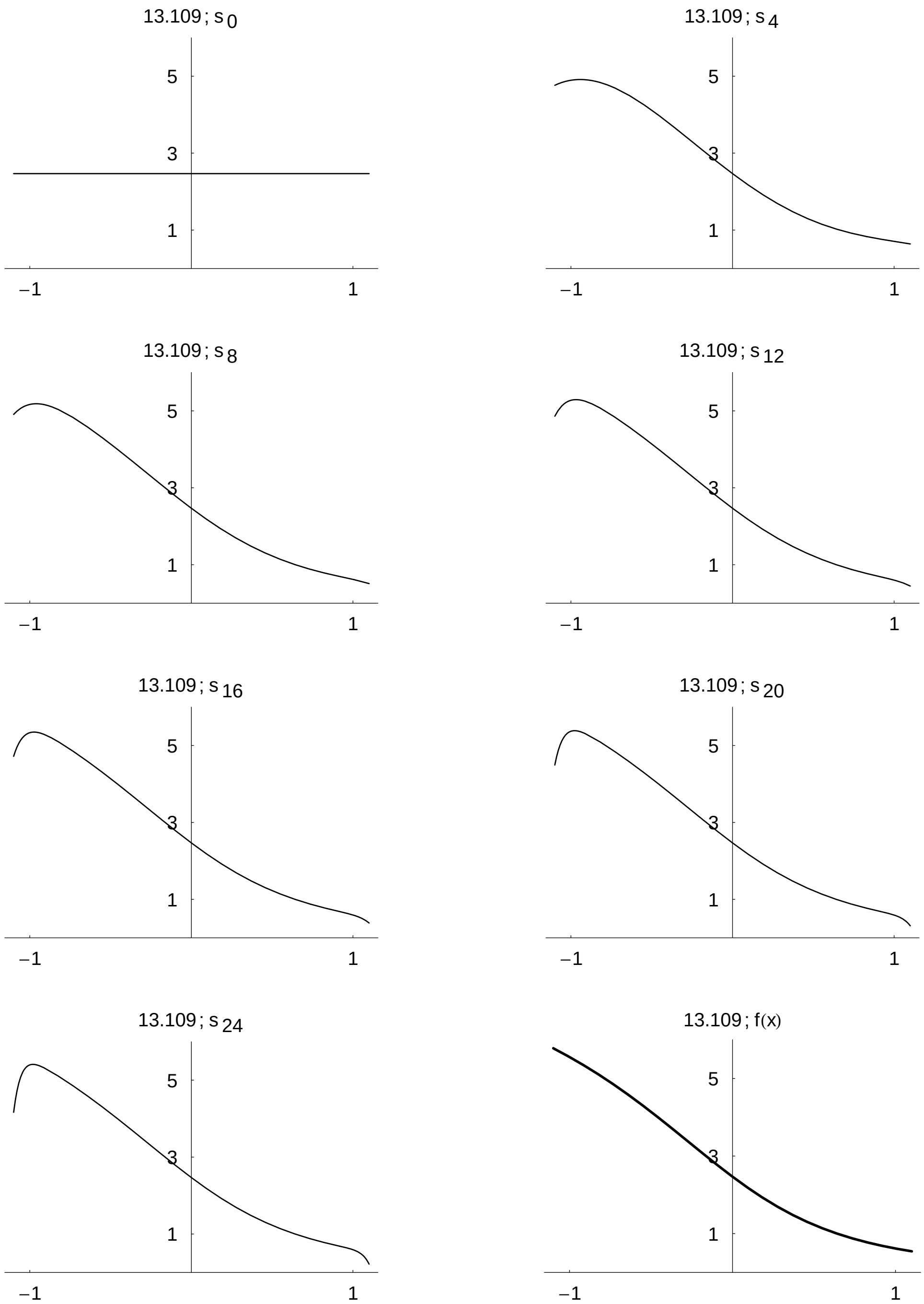
Grafy částečných součtů $s_0, s_4, \ldots, s_{24}$ Taylorovy řady funkce $f(z) = \cosh z \cos z$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.108 na str. 79 – poloměr konvergence řady



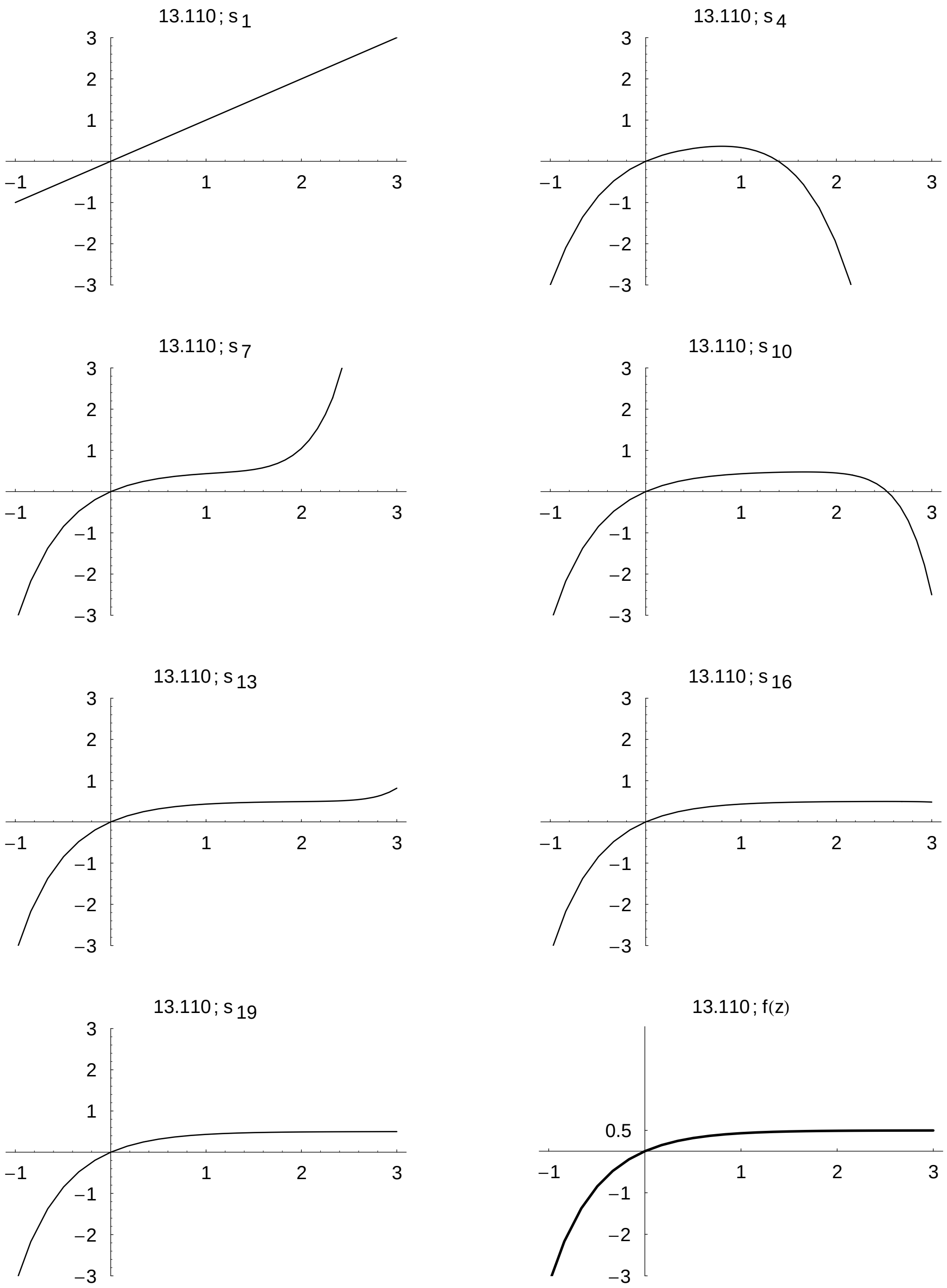
Grafy částečných součtů $s_4, s_7, \ldots, s_{22}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \lg(1+x)\lg(1+x^3)$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.109 na str. 79 – poloměr konvergence řady



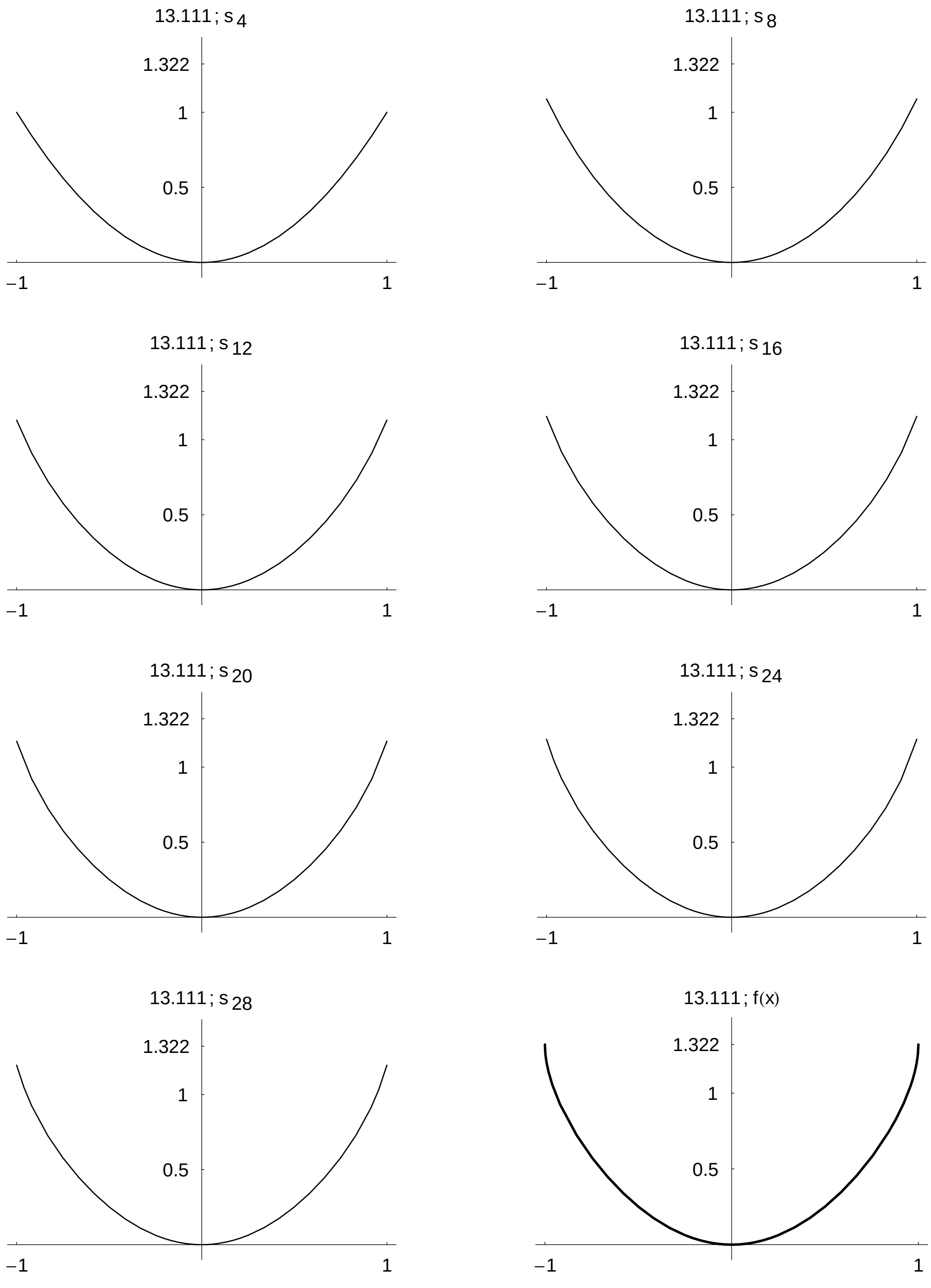
Grafy částečných součtů $s_0, s_4, \ldots, s_{24}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \operatorname{arccotg}^2 x$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.110 na str. 79 – poloměr konvergence řady



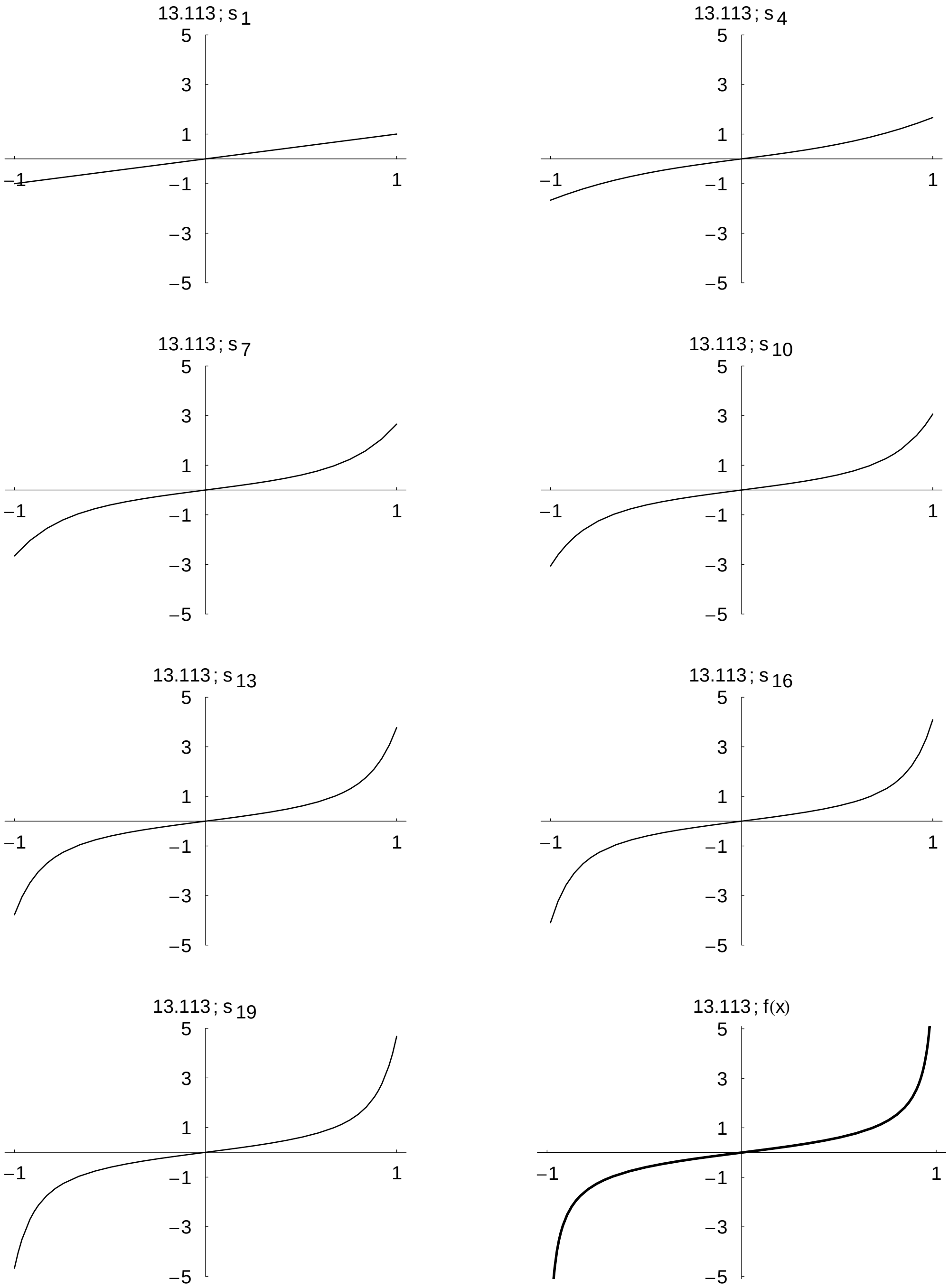
Grafy částečných součtů s_1, $s_4, \ldots, s_{19}$ Taylorovy řady funkce $f(z) = e^{-z}\sinh z)$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.111 na str. 79 – poloměr konvergence řady



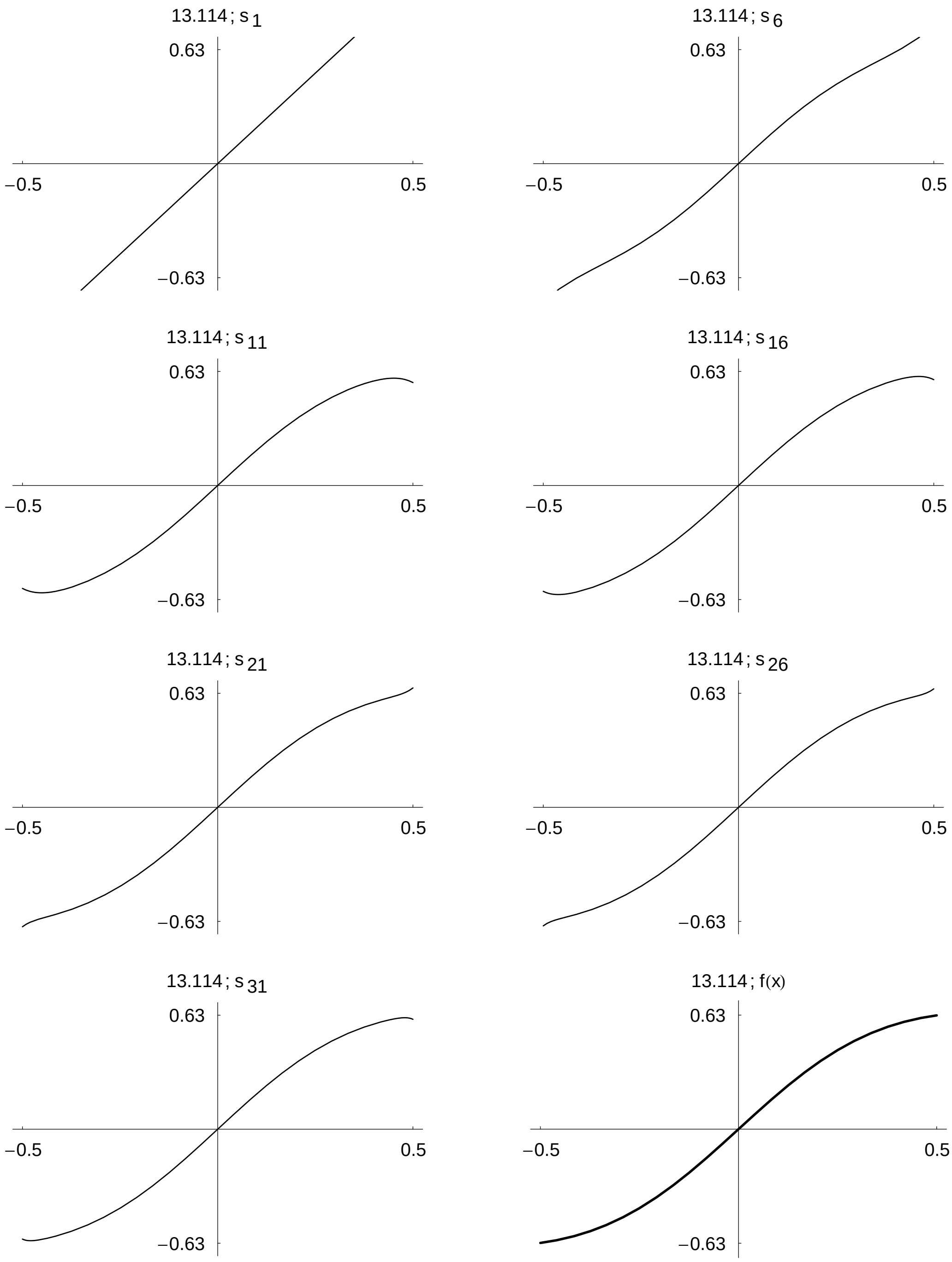
Grafy částečných součtů $s_4, s_8, \ldots, s_{28}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \sin x \arcsin x$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.113 na str. 79 – poloměr konvergence řady



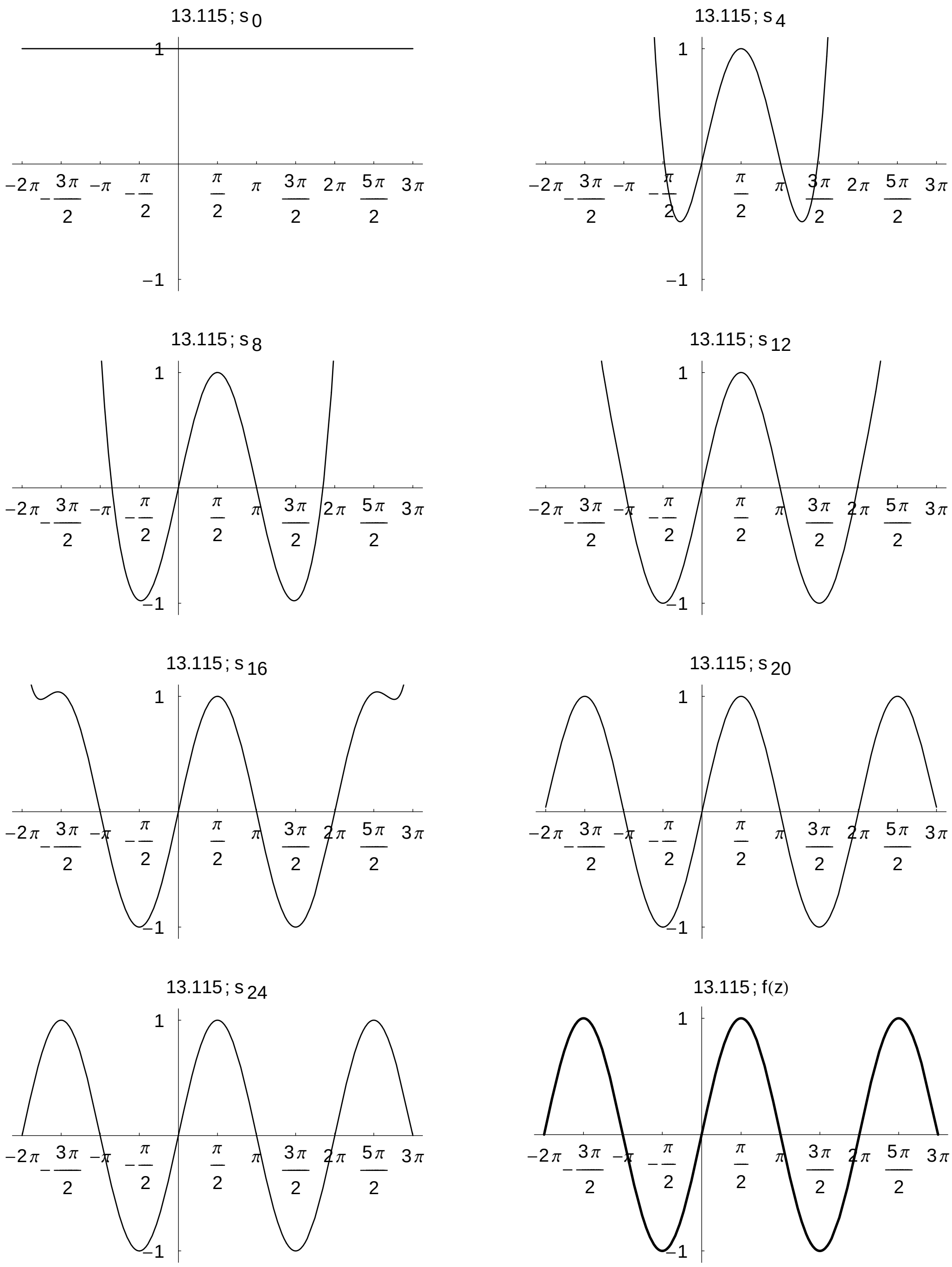
Grafy částečných součtů $s_1, s_4, \ldots, s_{19}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \arcsin x/\sqrt{1-x^2}$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.114 na str. 79 – poloměr konvergence řady



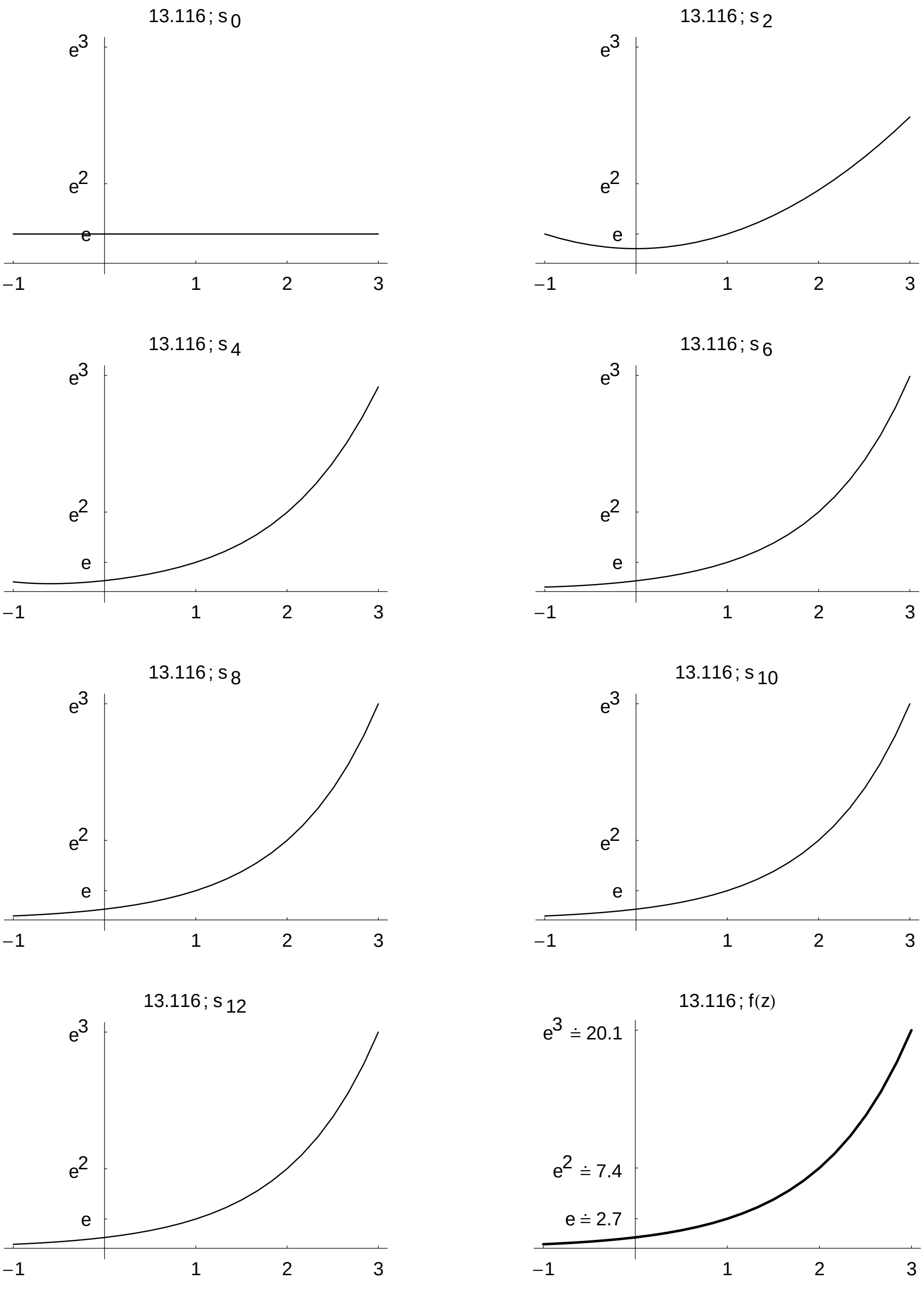
Grafy částečných součtů s_1, $s_6, \ldots, s_{31}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \operatorname{arctg} 2x/(1+x^2)$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.115 na str. 79 – poloměr konvergence řady



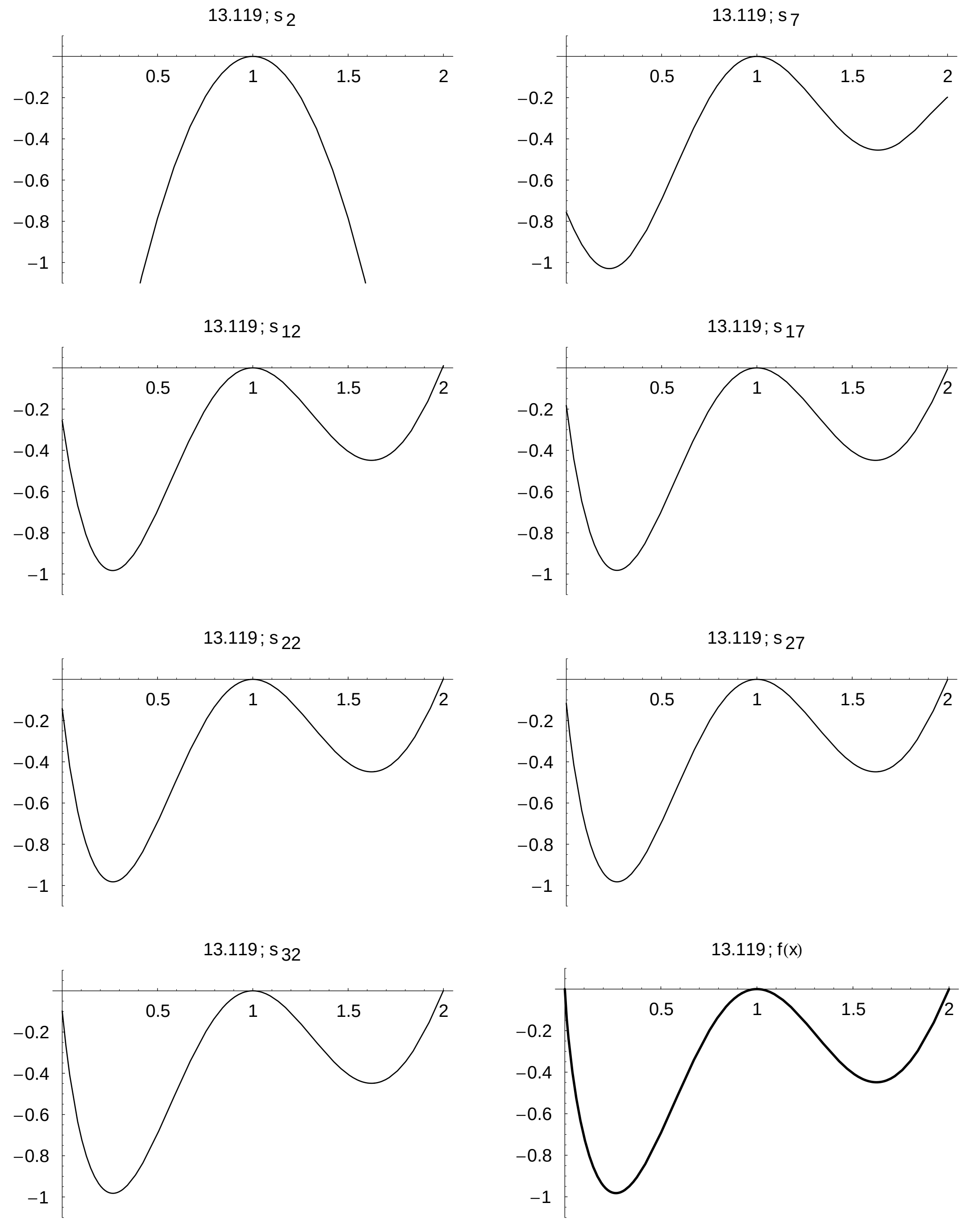
Grafy částečných součtů $s_0, s_4, \ldots, s_{24}$ Taylorovy řady funkce $f(z) = \sin z$ o středu $\frac{1}{2}\pi$; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.116 na str. 79 – poloměr konvergence řady



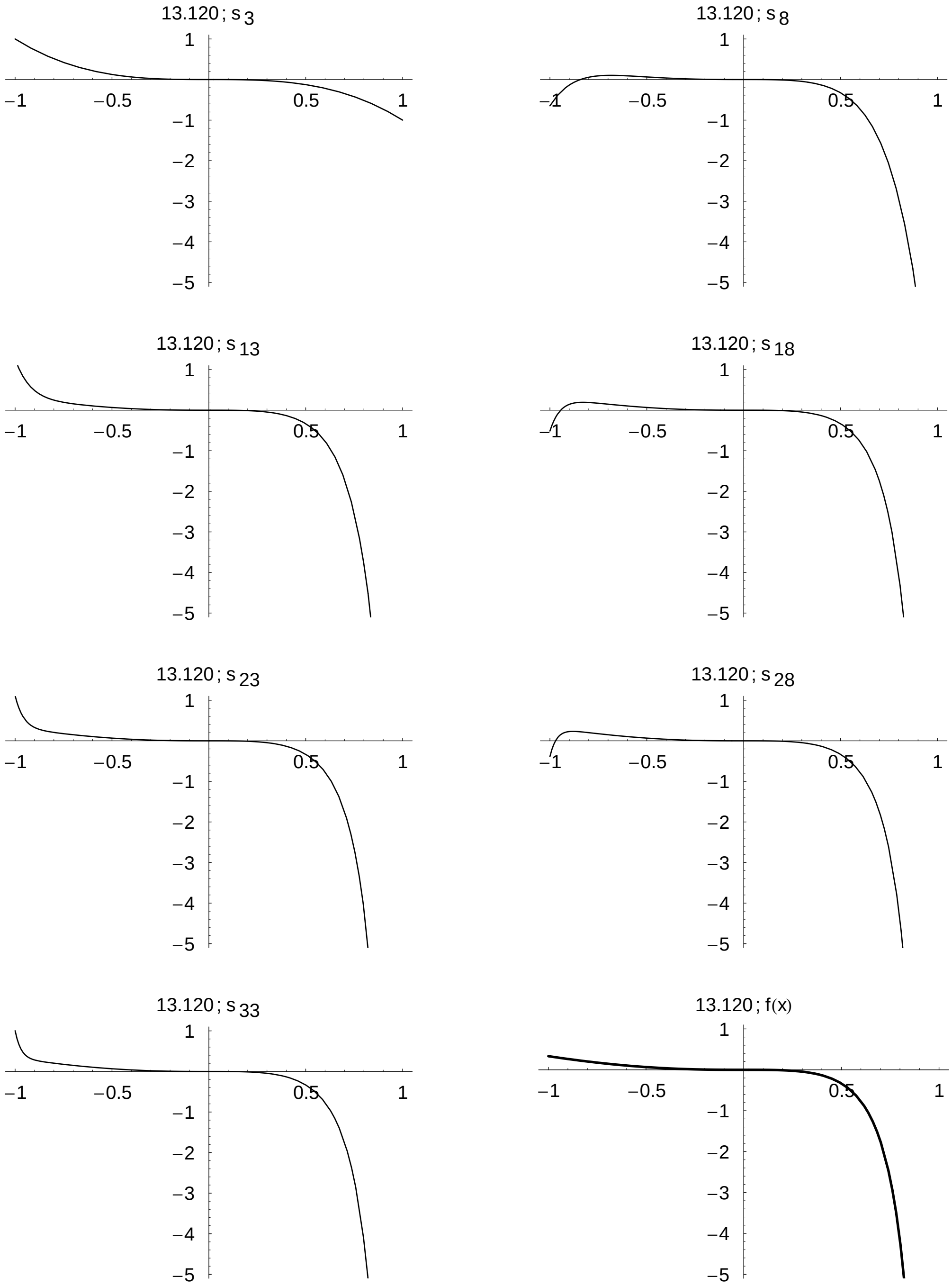
Grafy částečných součtů s_0, $s_2, \ldots, s_{12}$ Taylorovy řady funkce $f(z) = e^z$ o středu 1; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.119 na str. 79 – poloměr konvergence řady



Grafy částečných součtů $s_2, s_7, \ldots, s_{32}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \lg x \sin \pi x$ o středu 1; vpravo dole graf funkce f

Cvičení 13.120 na str. 79 – poloměr konvergence řady

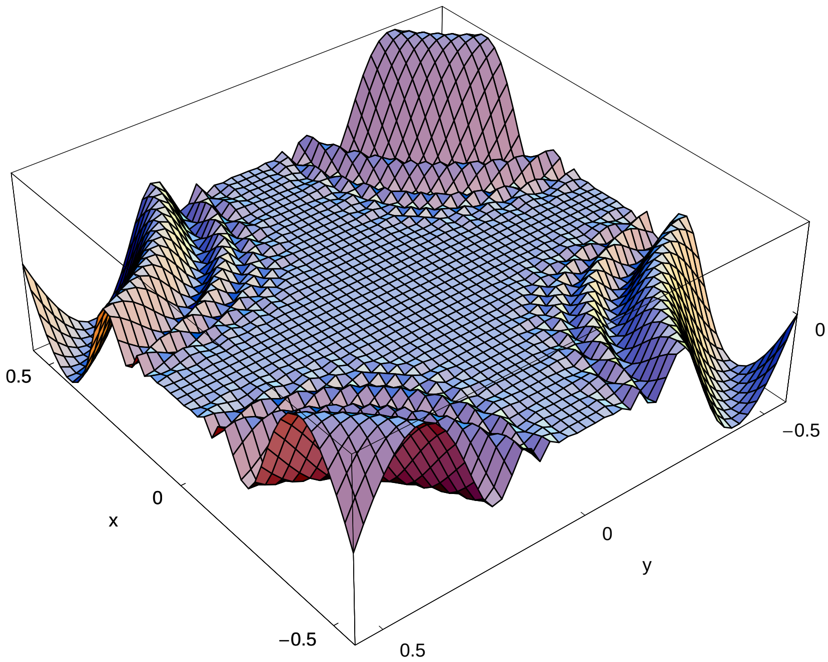


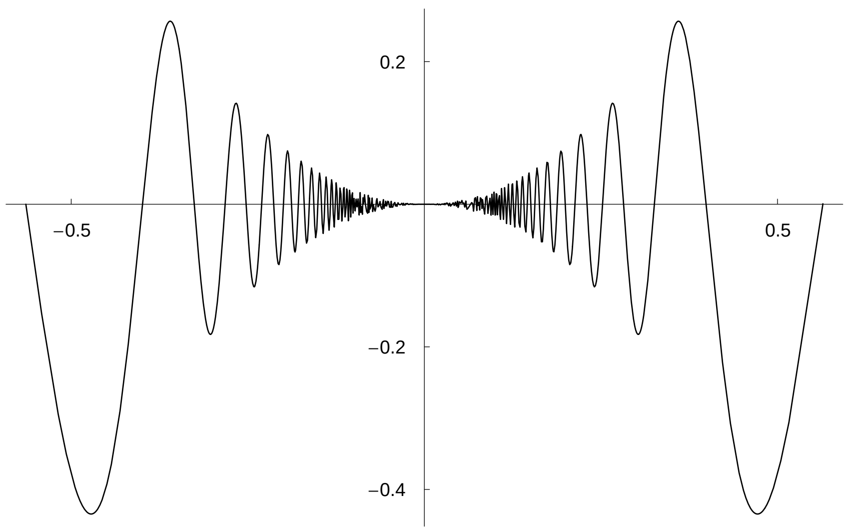
Grafy částečných součtů $s_3, s_8, \ldots, s_{33}$ Taylorovy řady funkce $f(x) = \lg^3(1-x)$ o středu 0; vpravo dole graf funkce f

Obrázky ke kapitole 14

Příklad 14.1 na str. 88

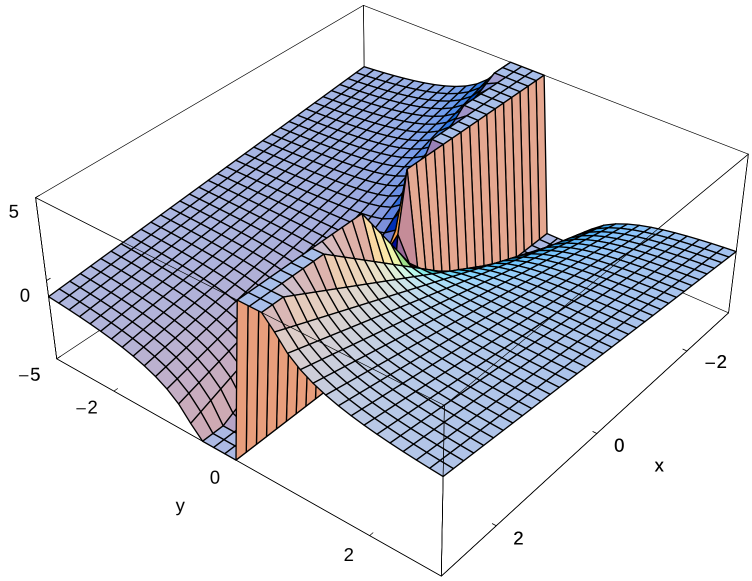
V Příkladu 14.1 je $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(1/(xy))$, je-li $x \neq 0 \neq y$, a $f(x, y) = 0$ jinak. Graf funkce $f(x, y)$ v intervalu $\langle -1/\sqrt{\pi}, 1/\sqrt{\pi} \rangle^2$ a jeho průnik s osou 1. a 3. kvadrantu.

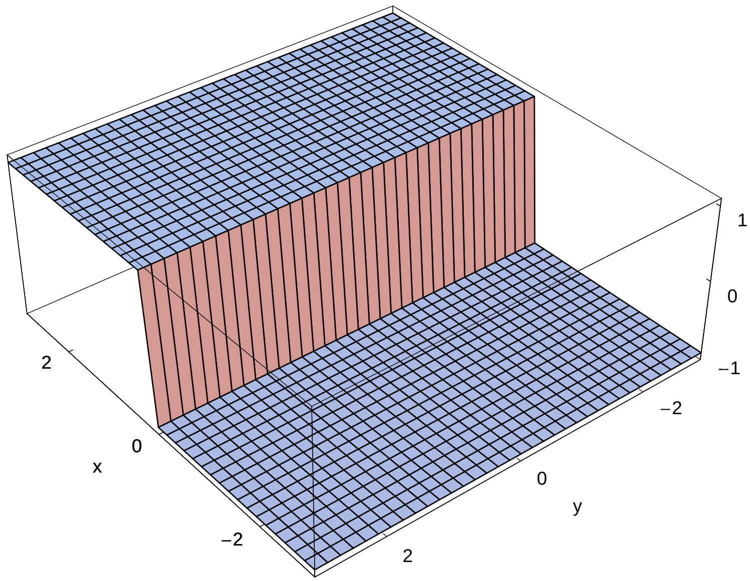




Příklad 14.2 (1. a 3. část) na str. 89

Funkce $f(x, y) = x/y$ z příkladu 14.2, 1. část, není v daném oboru omezená; body $(x, y, f(x, y))$, kde $|f(x, y)| > 5$, byly proto na jejím grafu nahrazeny body $(x, y, \pm 5)$. *) V příkladu 14.2, 3. část, je $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x/(x^2 + y^2))$ kromě počátku, kde není definována.

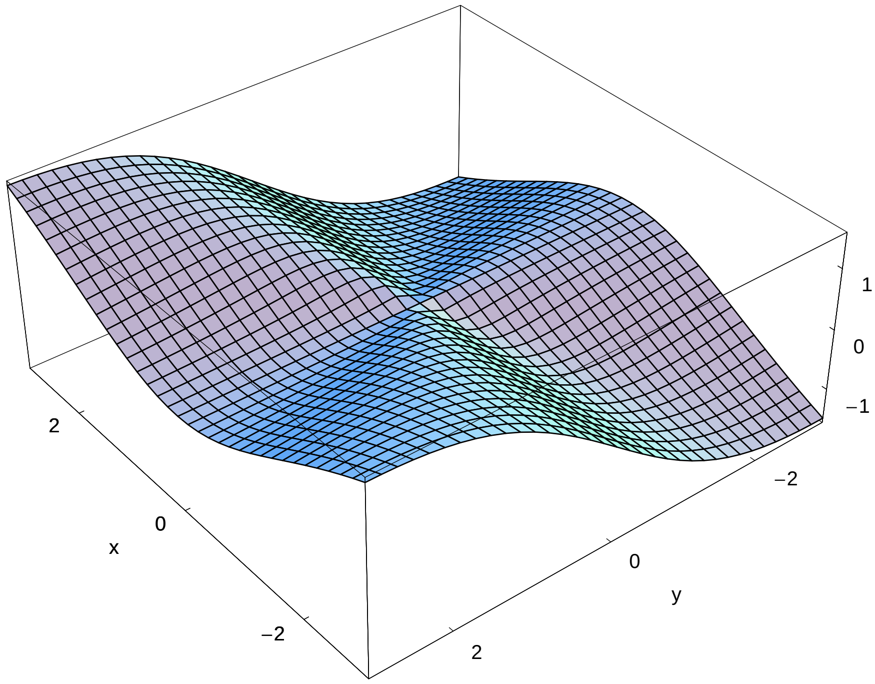


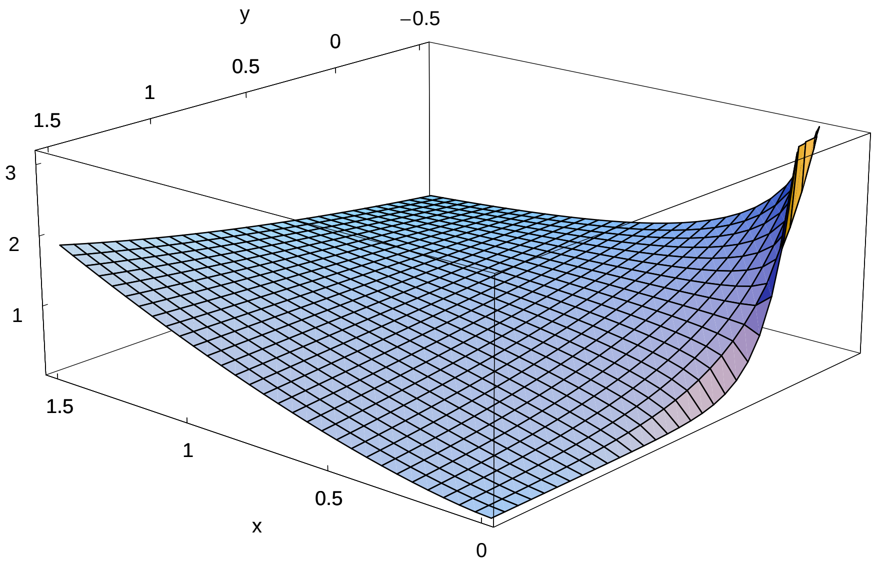


*) Je-li v dalším textu podobná restrikce oboru hodnot dané funkce zřejmá, zpravidla na ni neupozorňujeme.

Příklad 14.3 na str. 92 a 14.4 na str. 93

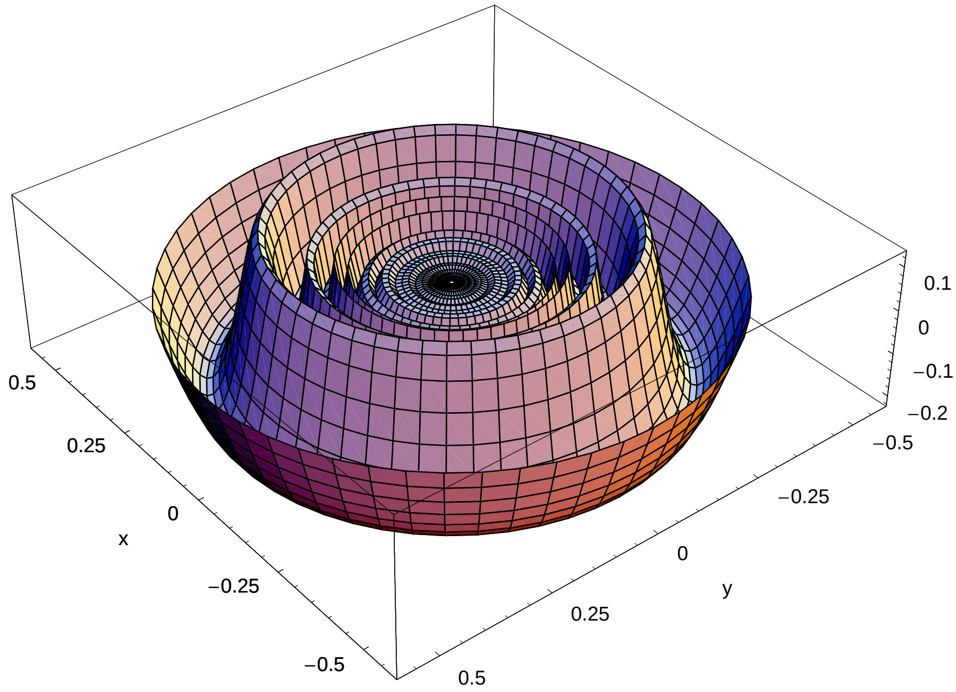
V příkladu 14.3 je $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$ kromě počátku, kde je funkce rovna 0.
V příkladu 14.4 je $f(x,y) = x^y$ pro všechna $x > 0$ a $y \in \mathbb{R}$.

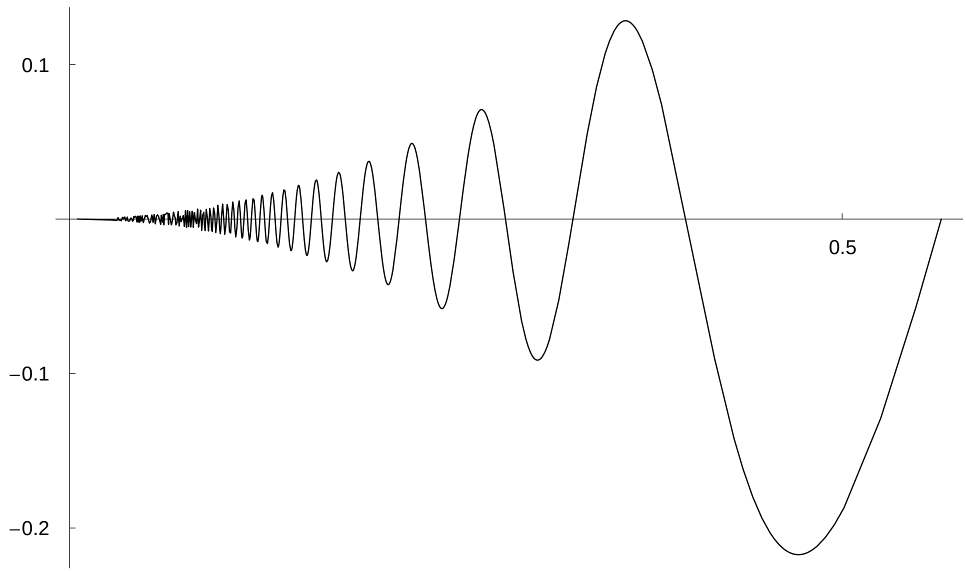




Cvičení 14.26 na str. 95

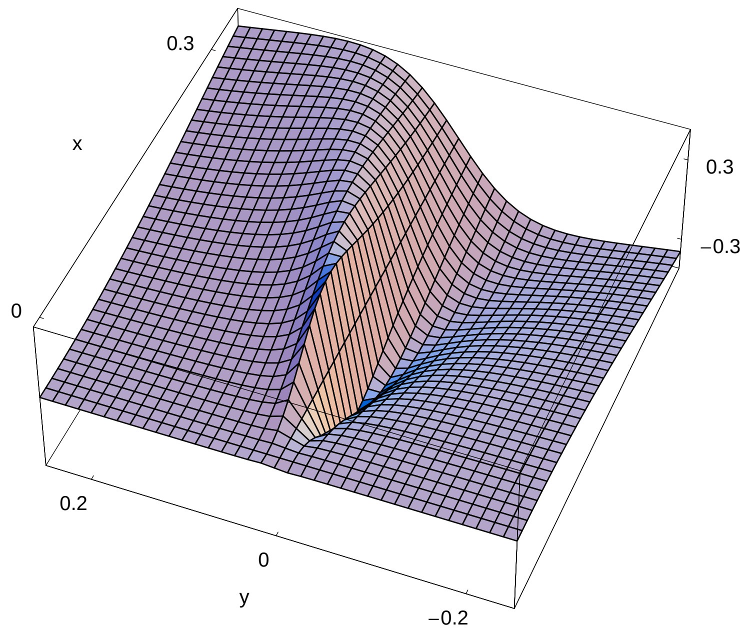
Cylindrický graf $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(1/(x^2 + y^2))$ (rovné 0 v počátku) vznikne rotací grafu funkce $r^2 \sin(1/r^2)$ (viz dole) kolem svislé osy.

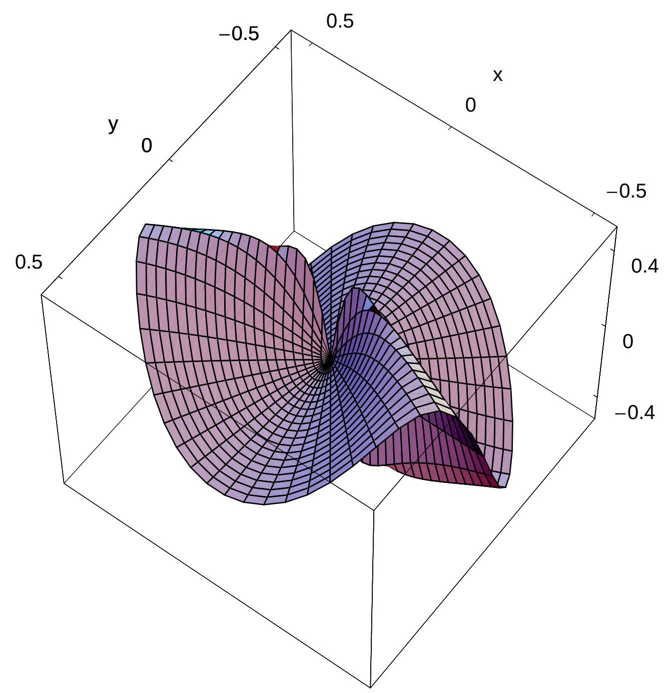




Cvičení 14.27 (funkce f) na str. 97

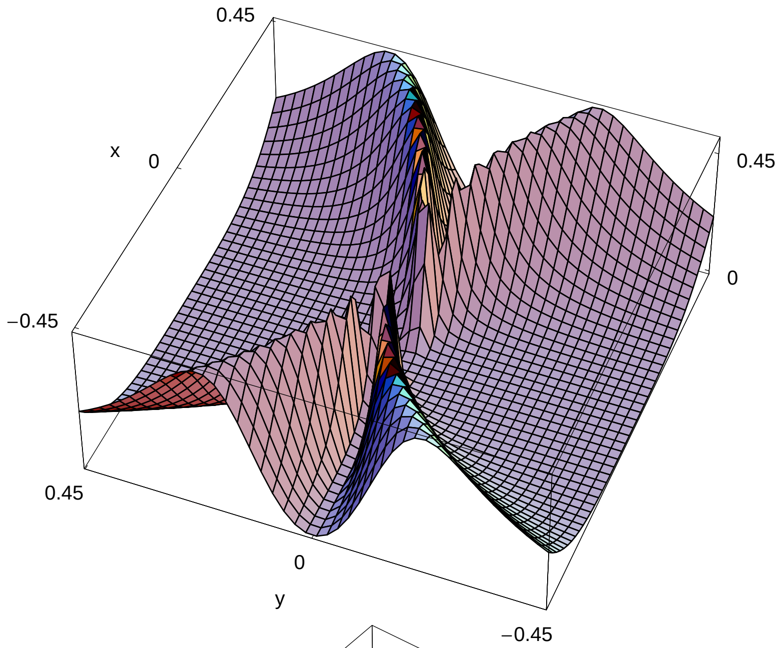
Kartézský a cylindrický graf funkce $f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2)$.

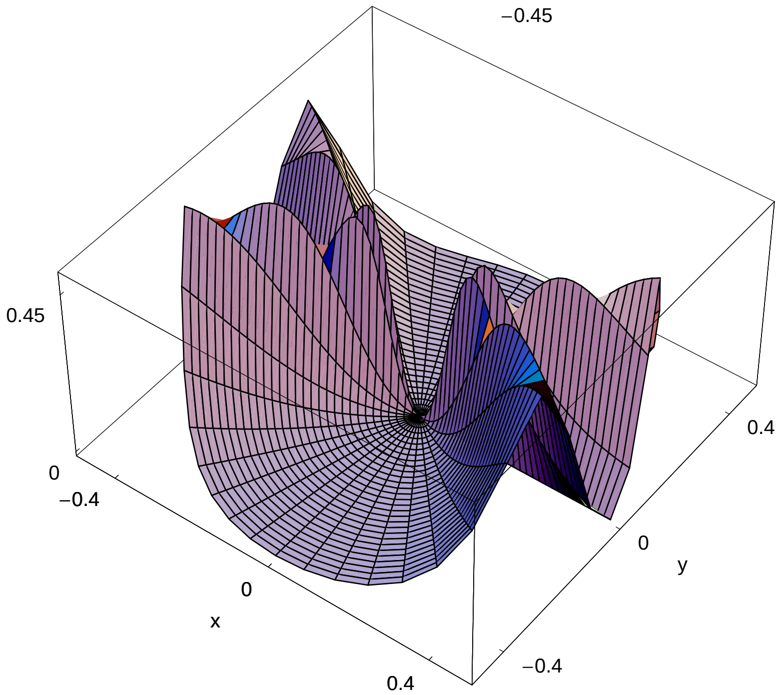




Cvičení 14.27 (funkce g) na str. 97

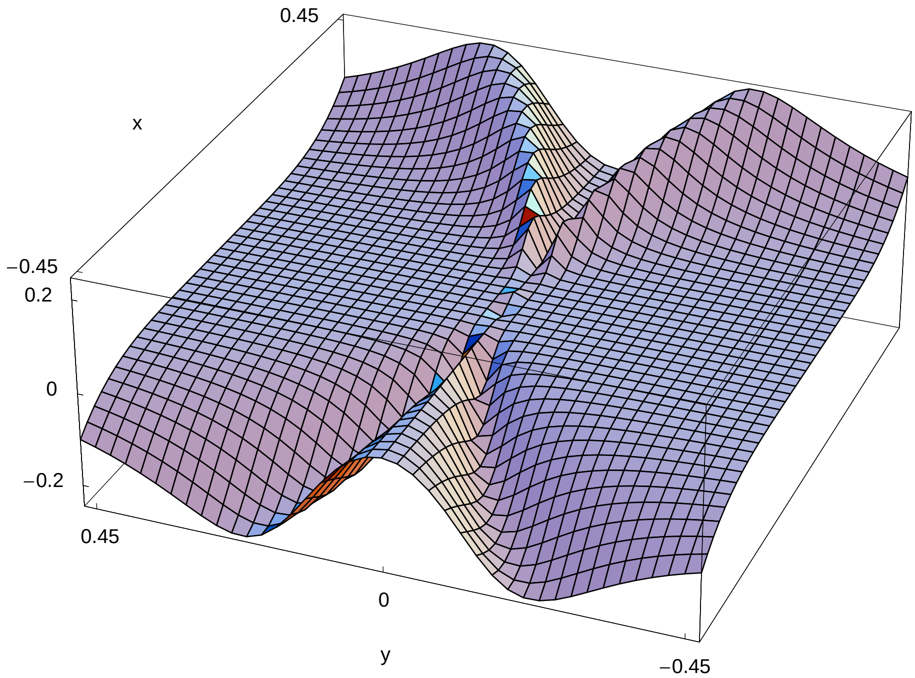
Kartézský a cylindrický graf funkce $g(x, y) = x^4y^2/(x^8 + y^4)$.

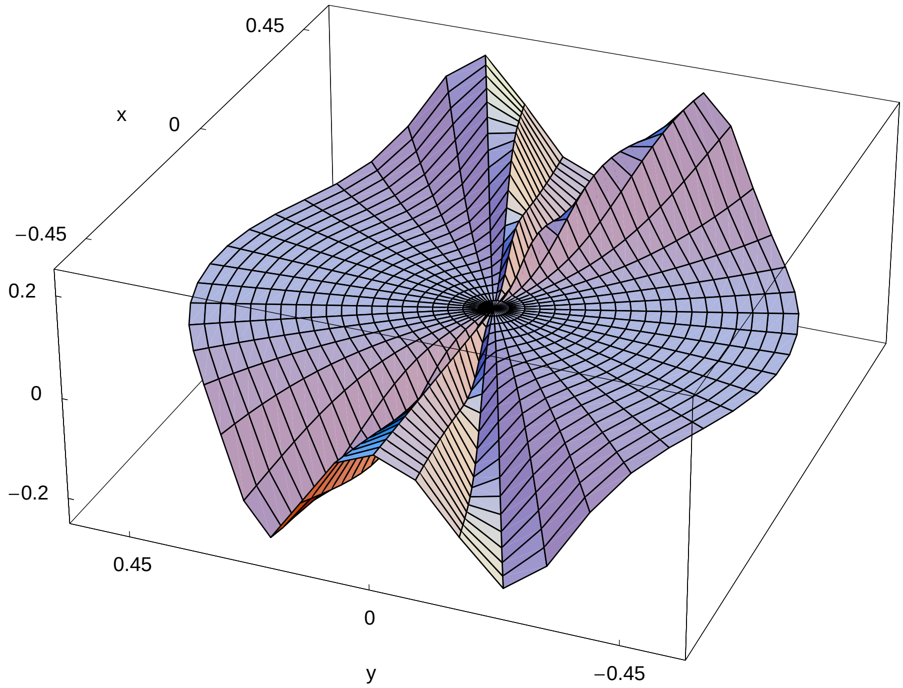




Cvičení 14.27 (funkce h) na str. 97

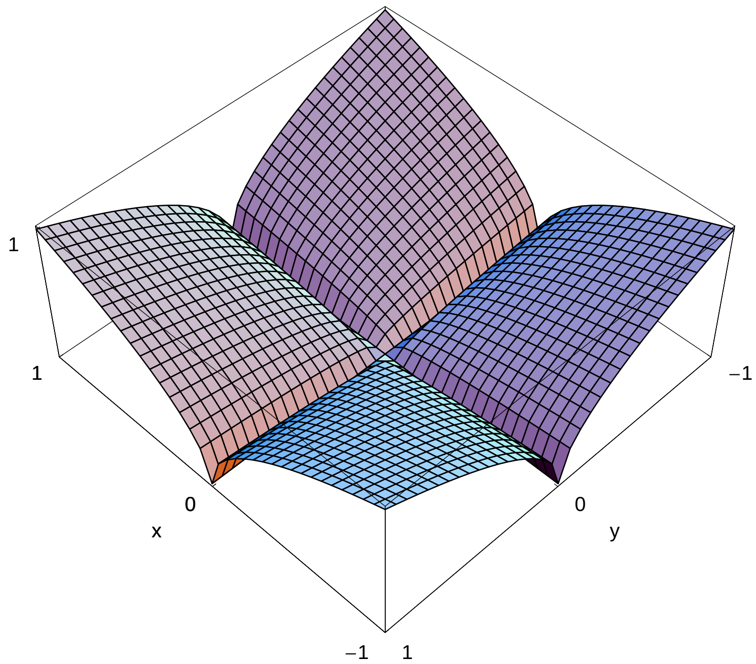
Kartézský a cylindrický graf funkce $h(x,y) = x^5y^2/(x^8+y^4)$.

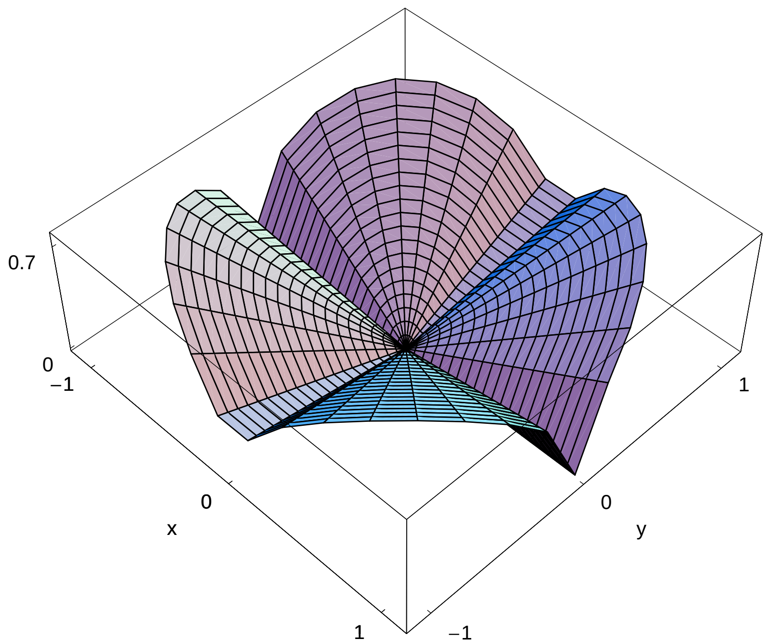




Příklad 14.7 na str. 97

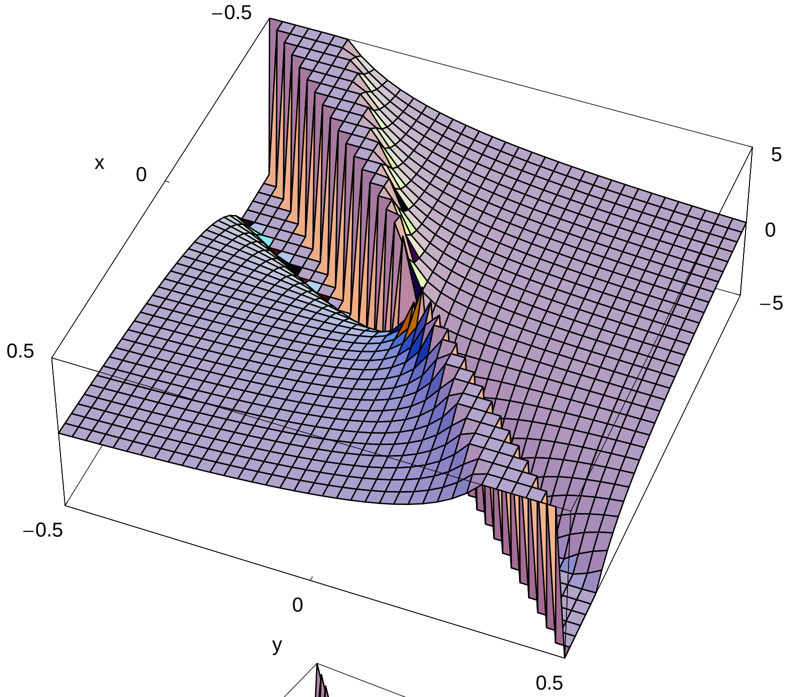
Kartézský a cylindrický graf funkce $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

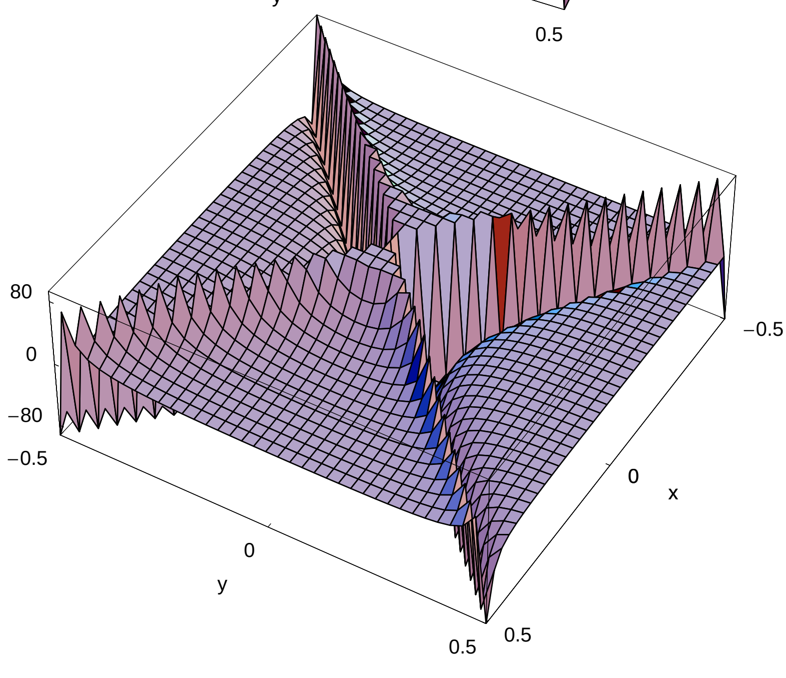




Cvičení 14.03 a 14.04 na str. 90

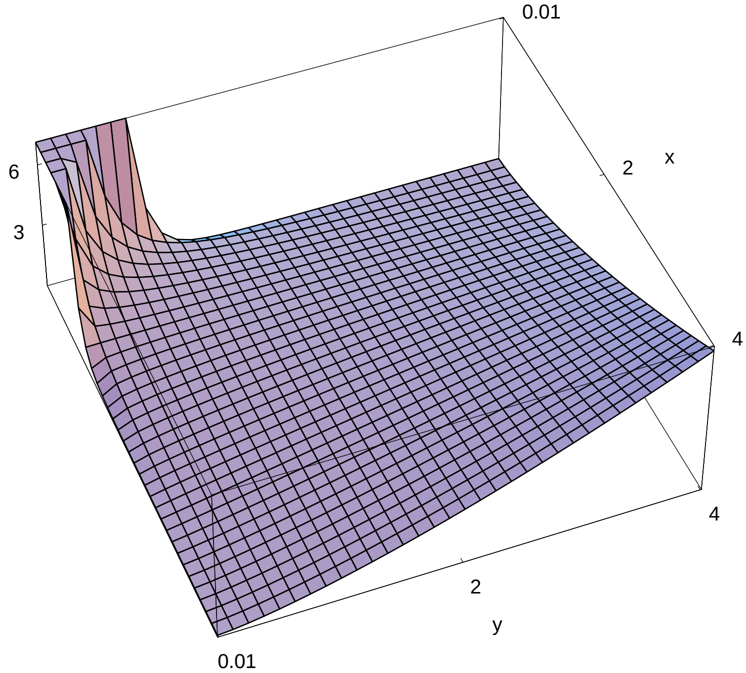
Grafy (neomezených) funkcí $(x + y)/(x - y)$ a $(x - y + 1)/(x^2 - y^2)$.

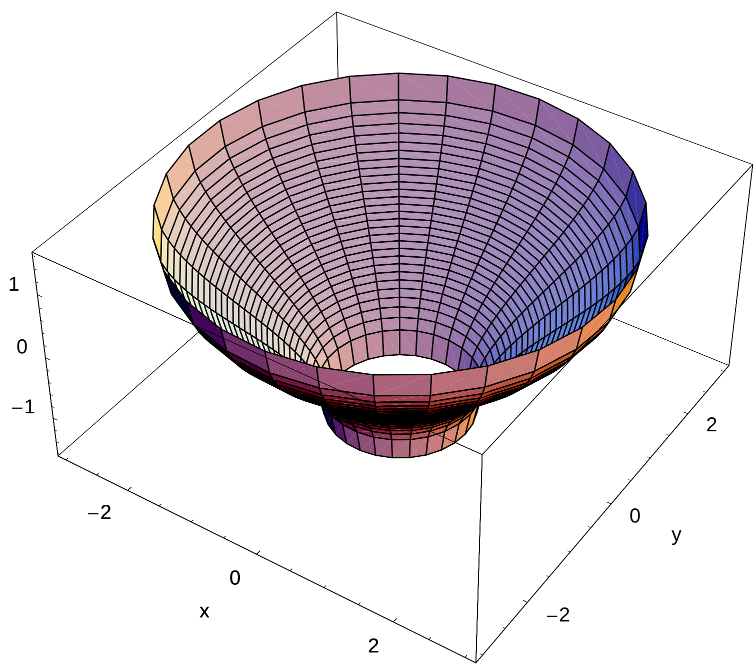




Cvičení 14.05 a 14.06 na str. 90

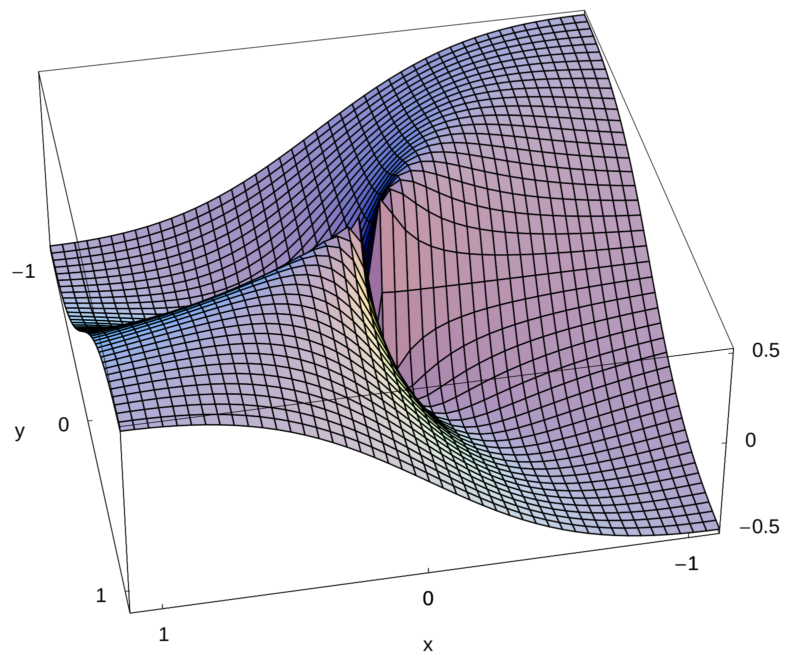
Ve Cvičení 14.05 (resp. 14.06) je $f(x,y) = x^{\lg y}$ (resp. $f(x,y) = \arcsin(\sqrt{x^2 - y^2} - 2)$); první z nich není v $\mathbb{R}_+^2$ omezená. Graf první funkce je kartézský, graf druhé cylindrický.

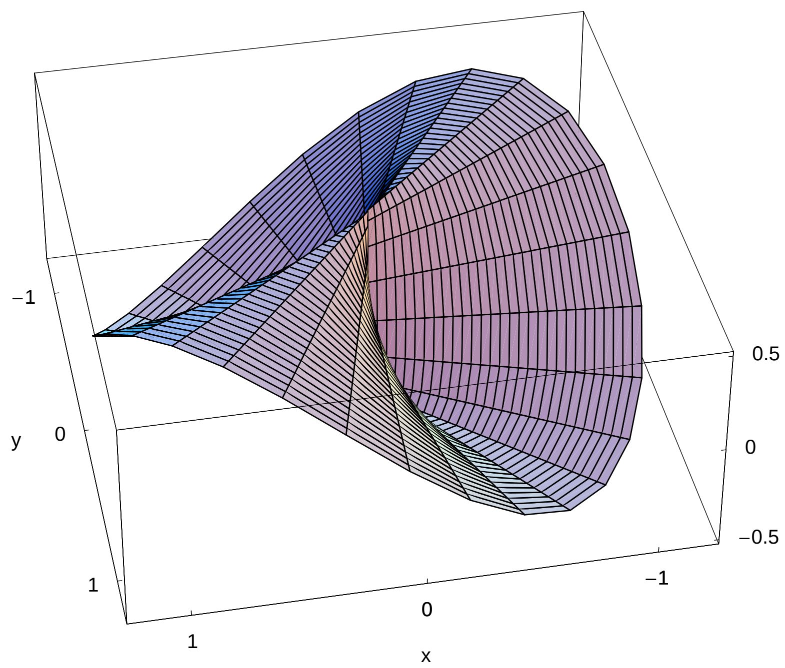




Cvičení 14.16 na str. 91

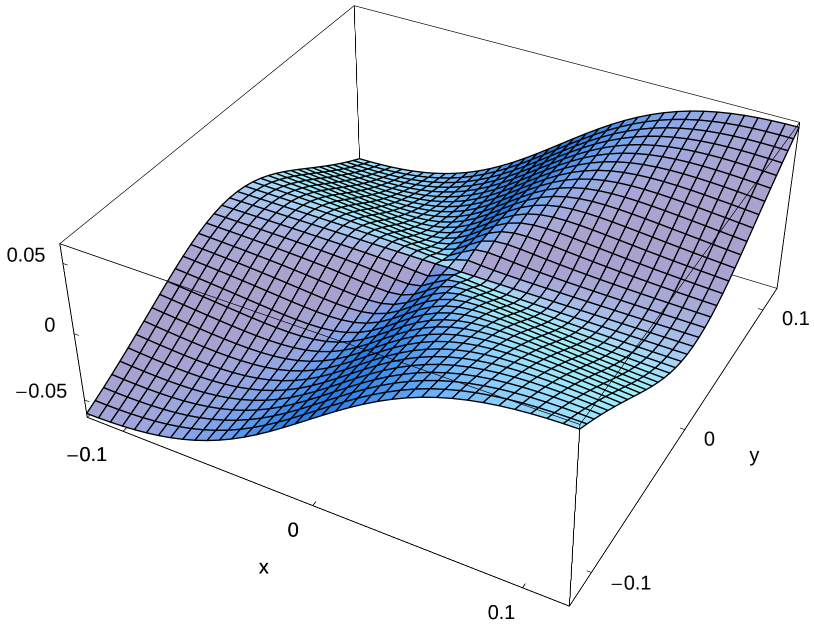
Kartézský a cylindrický graf funkce $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$.

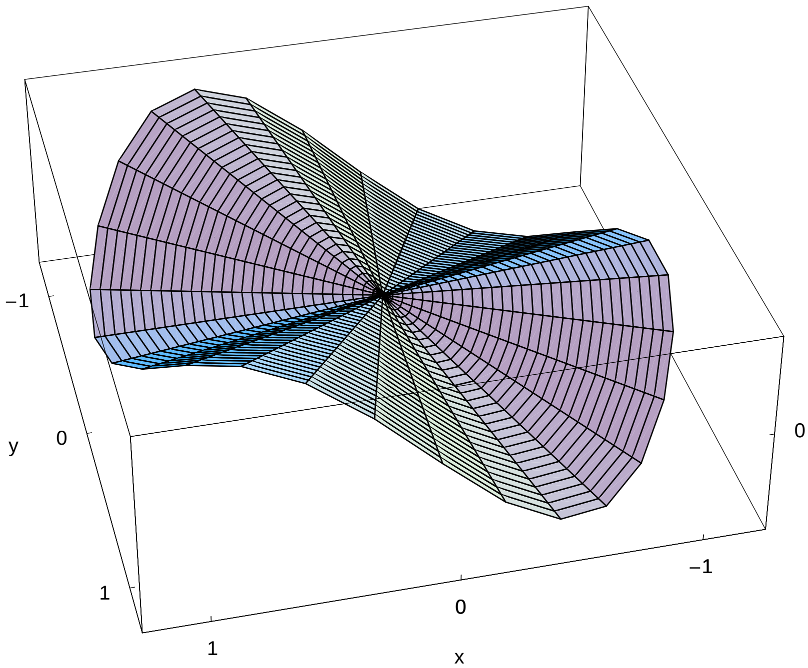




Cvičení 14.17 na str. 91

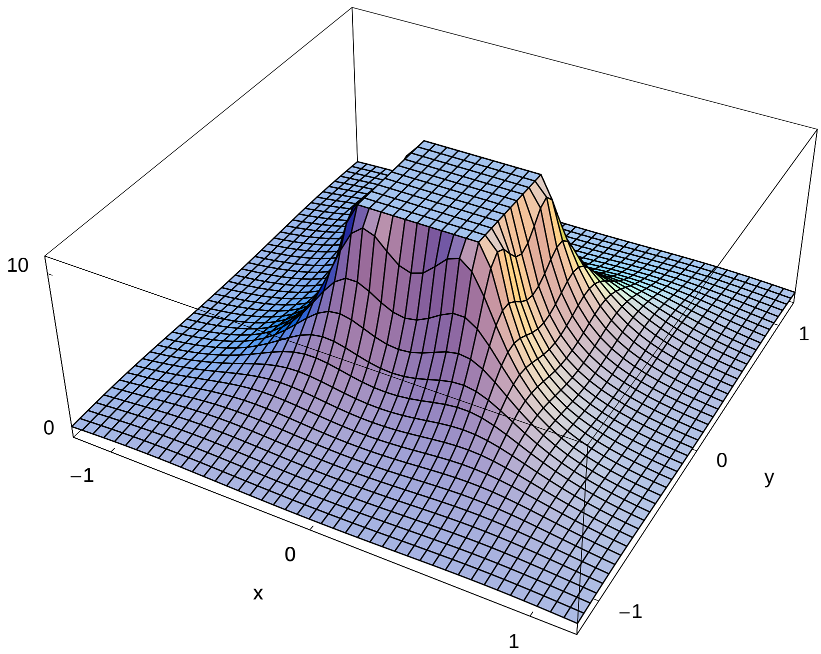
Kartézský a cylindrický graf funkce $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^2)$.

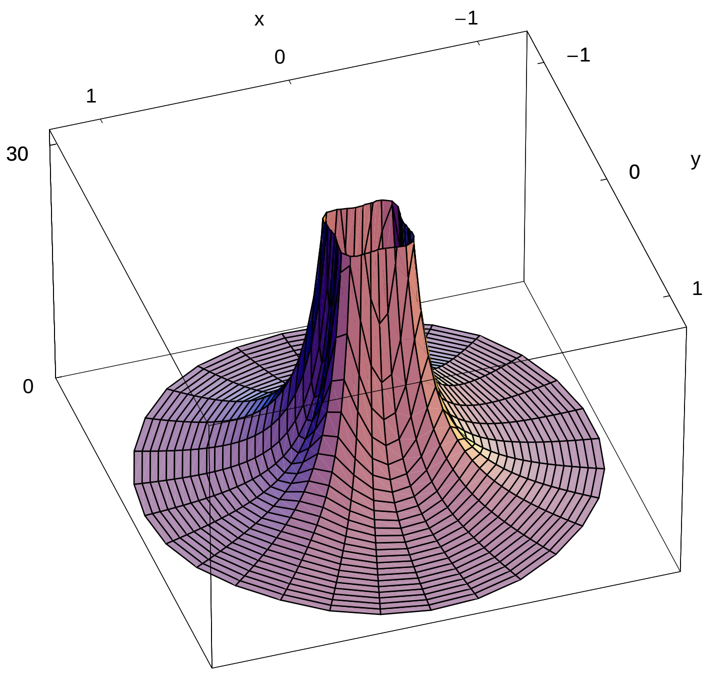




Cvičení 14.18 na str. 91

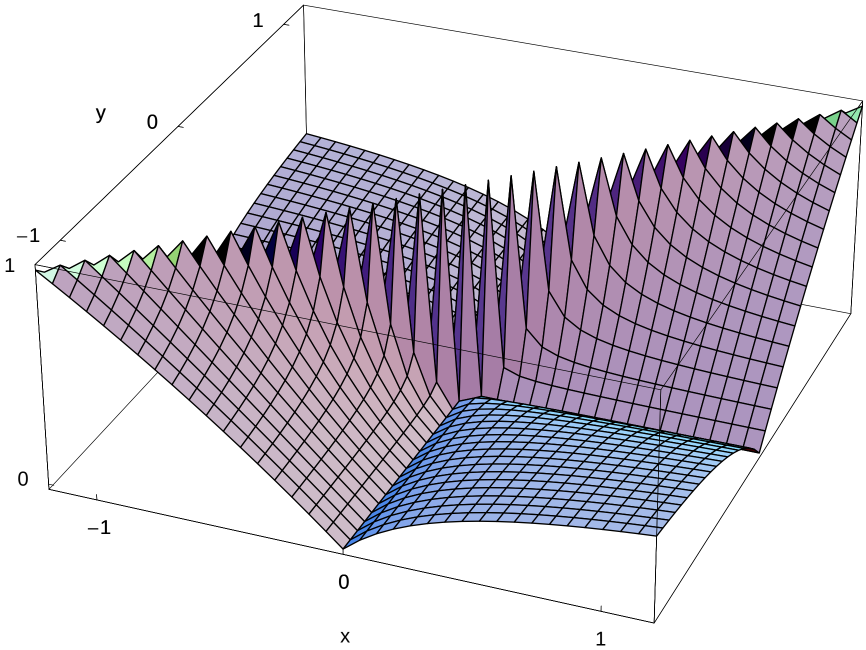
Kartézský a cylindrický graf funkce $f(x,y) = (x^2 + y^2)/(x^4 + y^4)$.

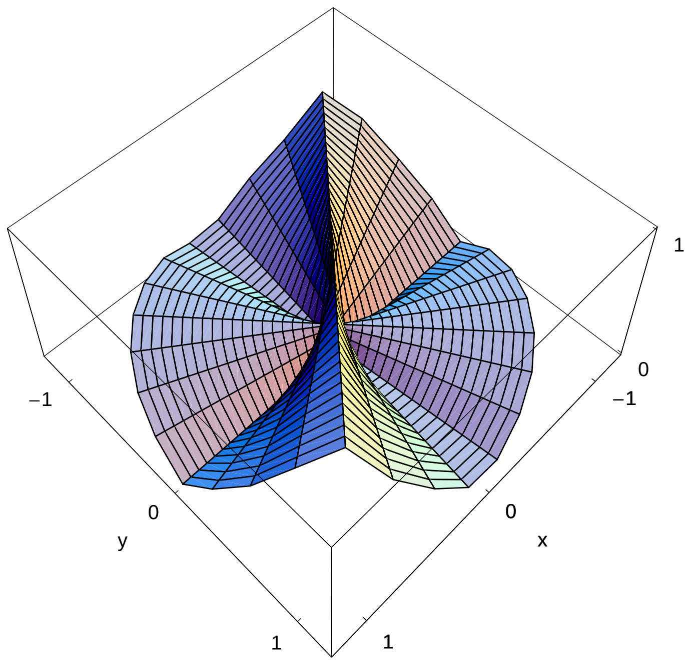




Cvičení 14.19 na str. 91

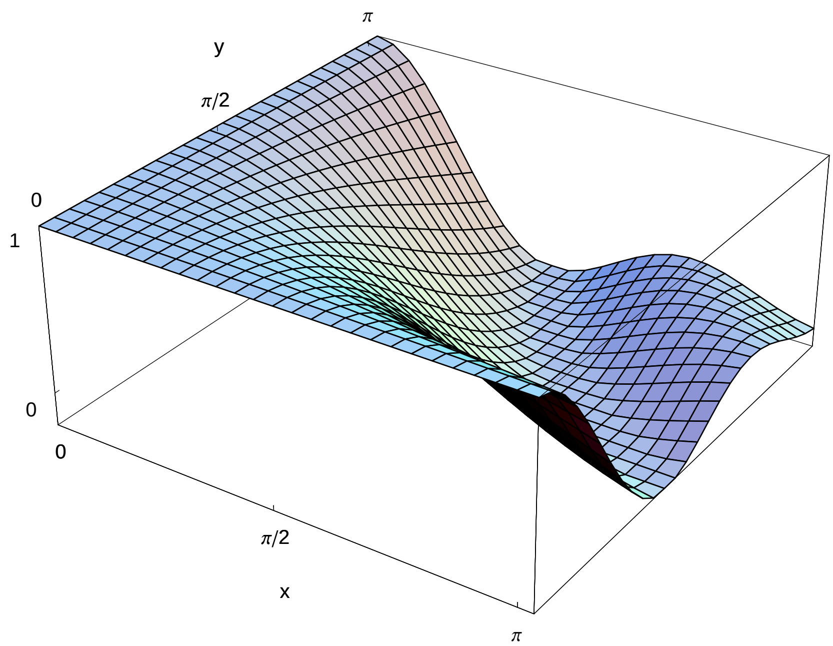
Kartézský a cylindrický graf funkce $f(x, y) = |xy|/(|xy| + |x - y|)$.

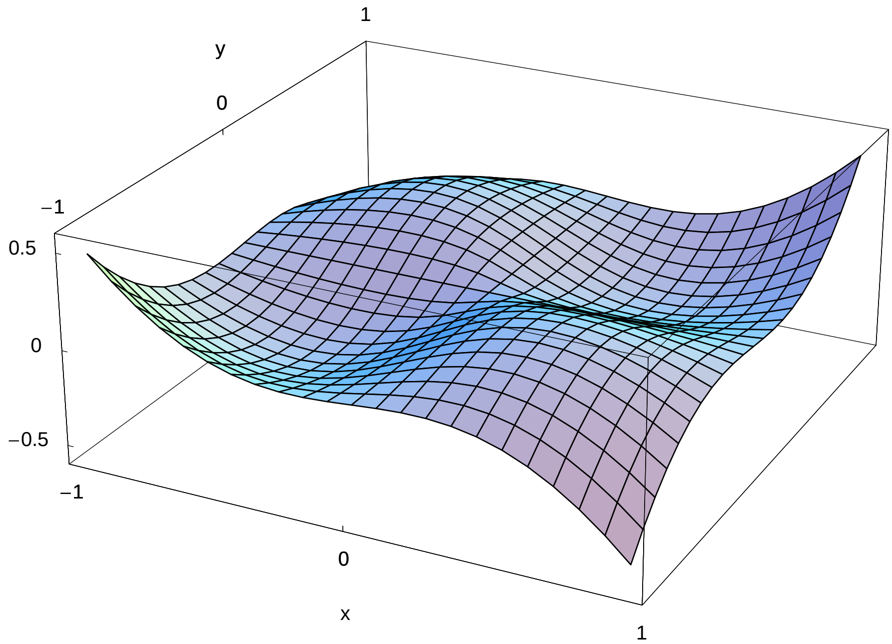




Cvičení 14.20 a 14.21 na str. 91

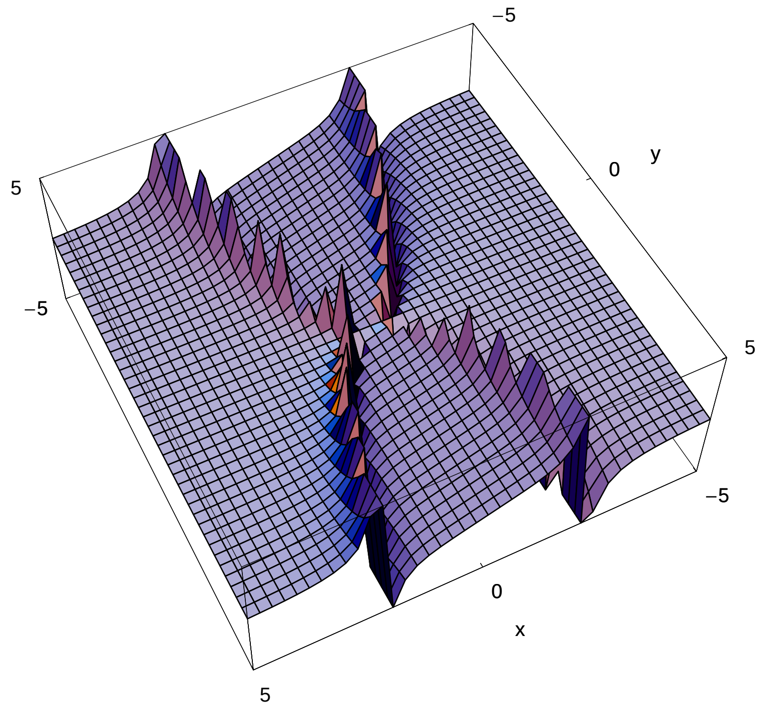
Kartézské grafy funkcí $\sin xy/(xy)$ a $xy \lg(x^2 + y^2)$.

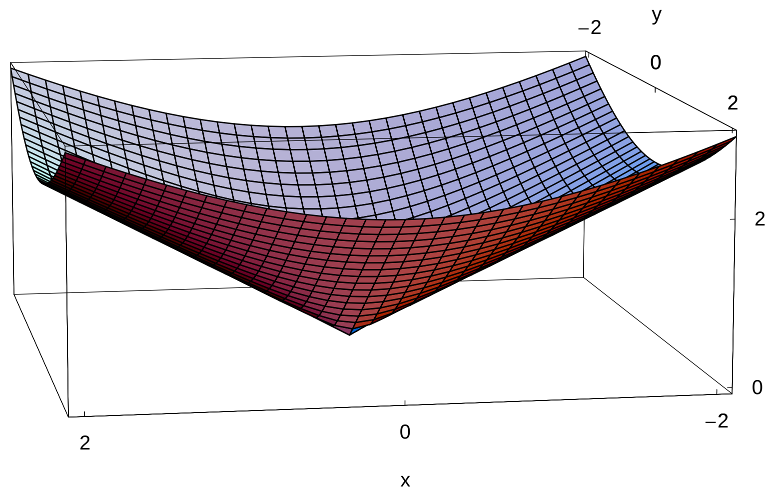




Cvičení 14.29 a 14.30 na str. 99

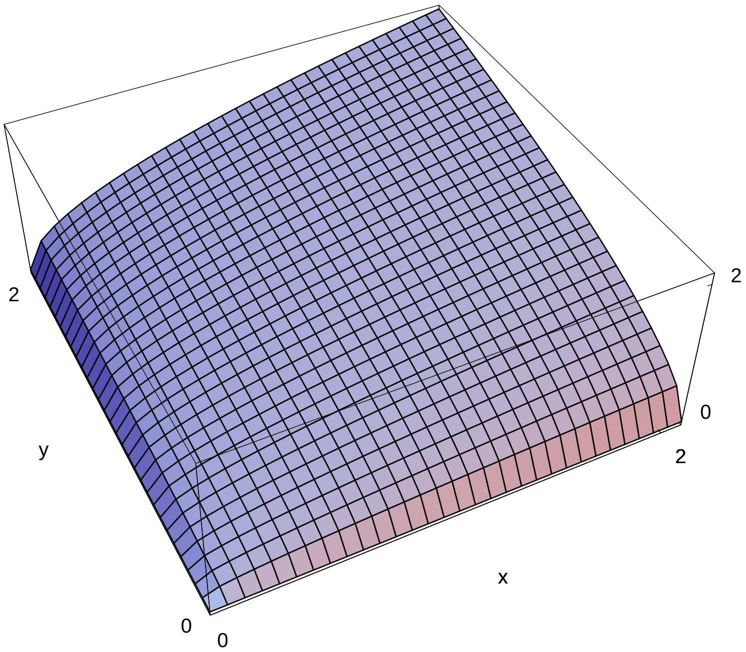
Kartézské grafy funkcí $xy^2/(x^4 - y^2)$ a $\sqrt{x^2 + y^2}$.

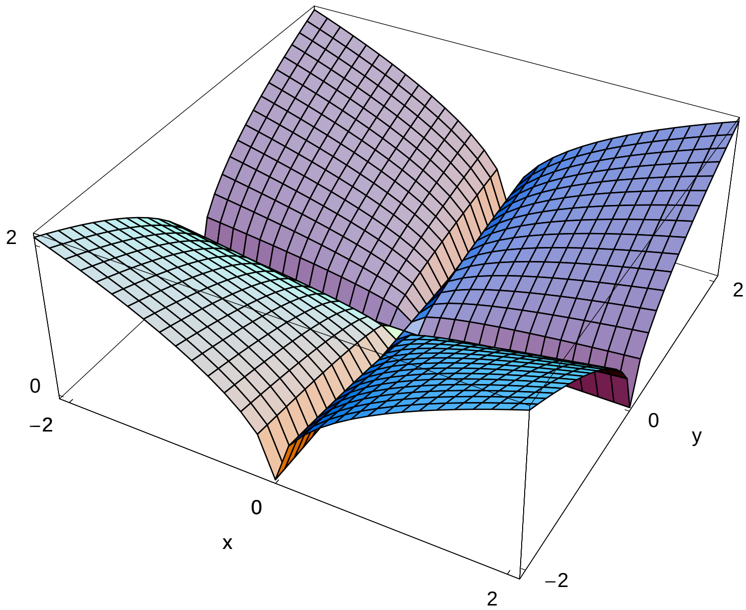




Cvičení 14.31 a 14.32 na str. 99

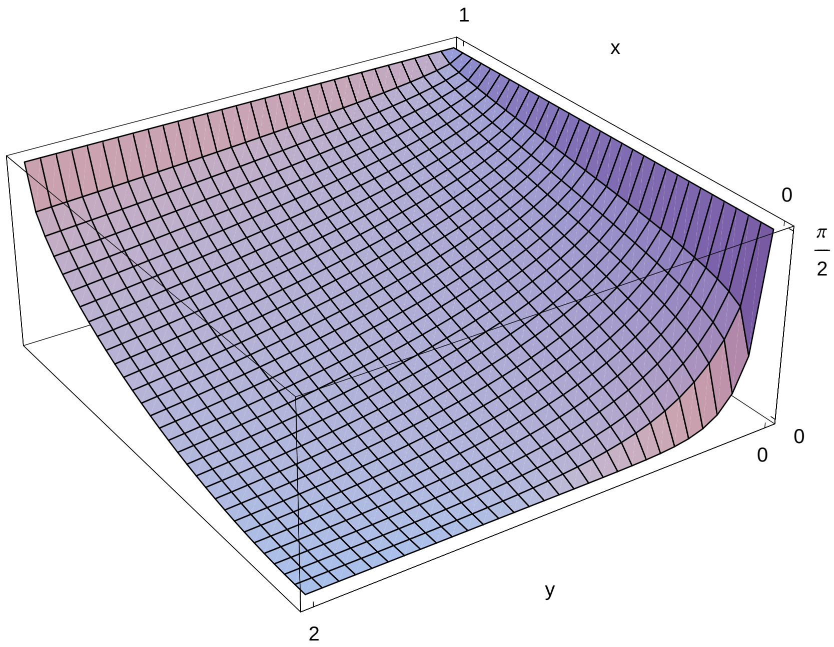
Kartézské grafy funkcí $\sqrt{xy}$ a $\sqrt{|xy|}$.

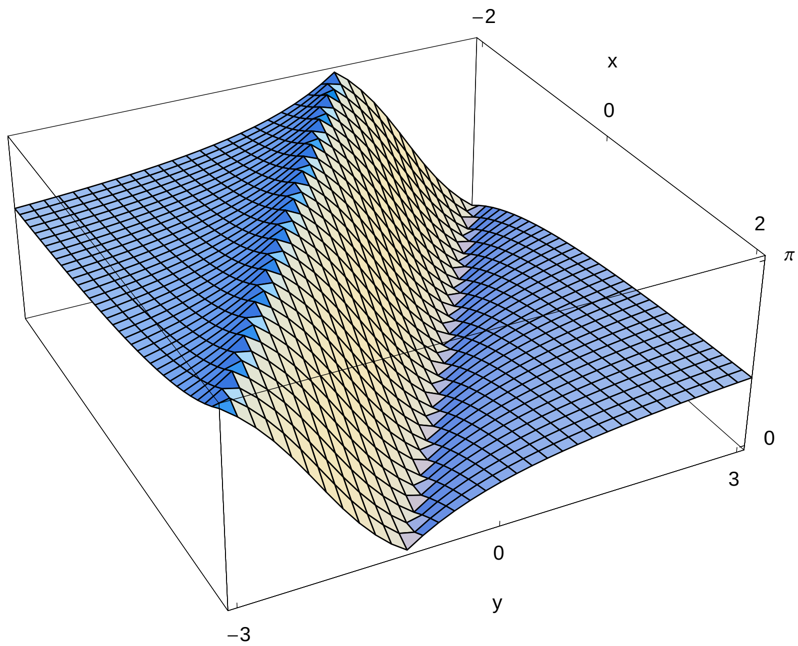




Cvičení 14.33 a 14.34 na str. 99

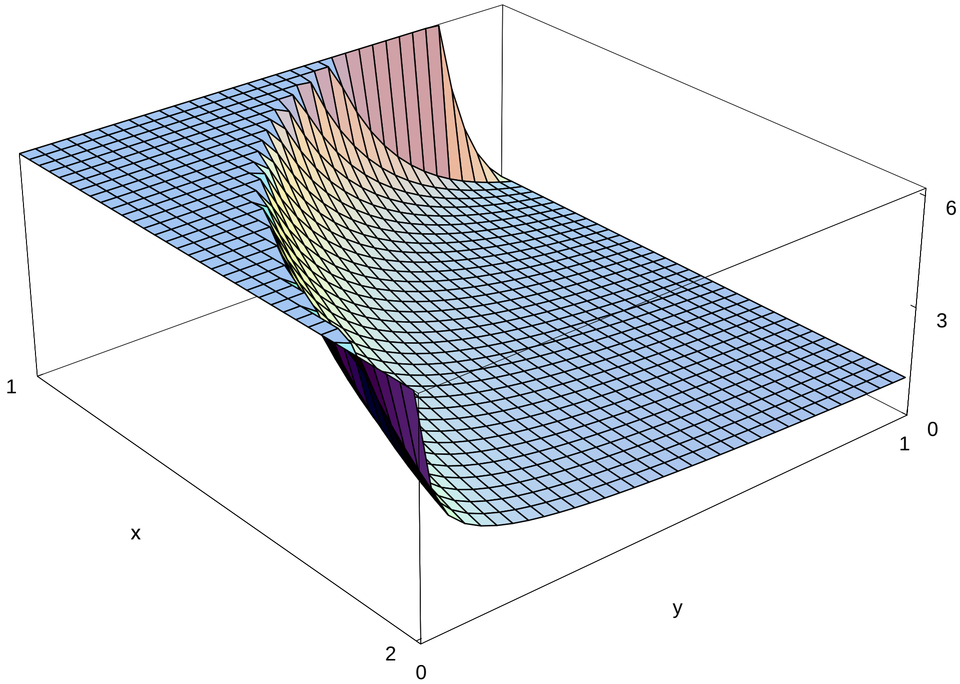
Kartézské grafy funkcí $\arcsin x^y$ a $\arccos(2(x+y)/((x+y)^2+1))$.

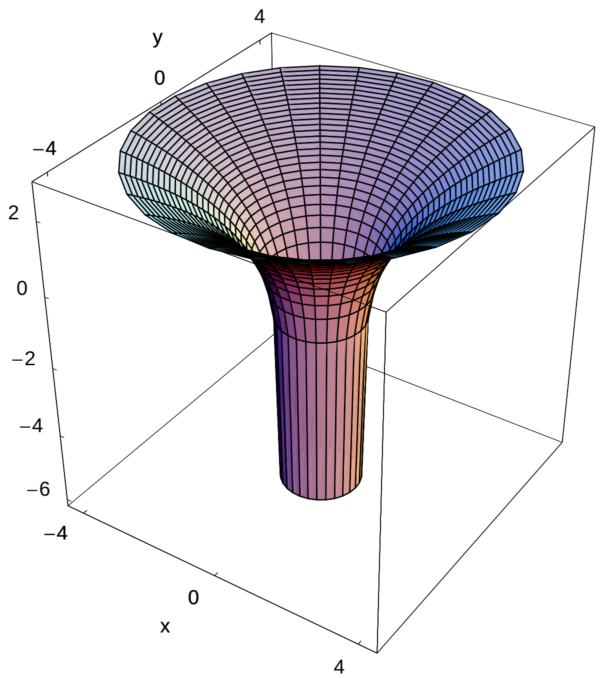




Cvičení 14.35 a 14.36 na str. 99

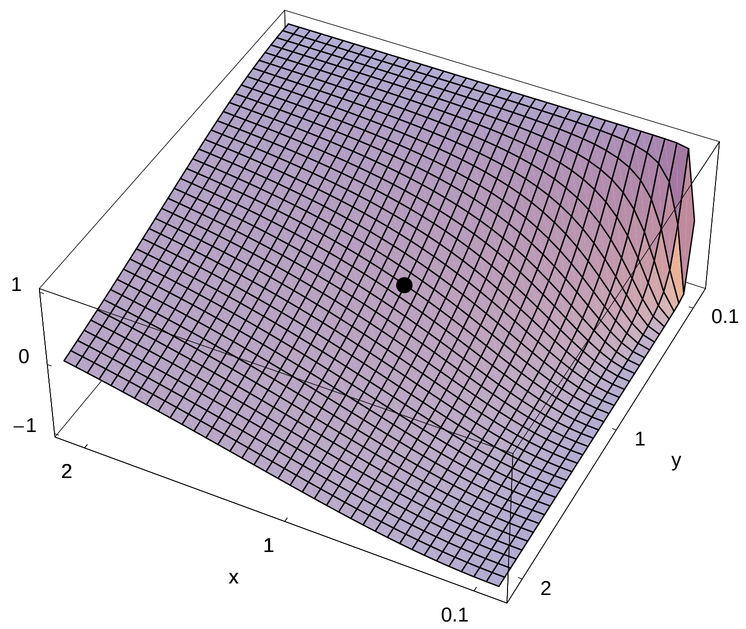
Kartézský graf funkce $(\lg x)^{\lg y}$ a cylindrický graf funkce $\lg((x^2 + y^2) - 1)$.

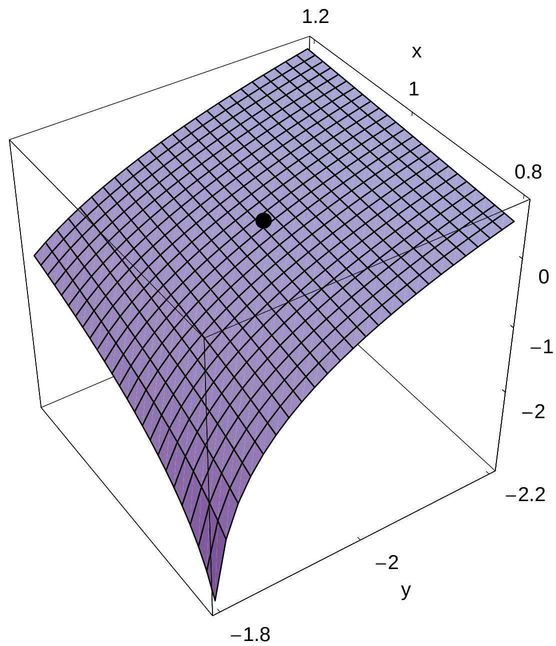




Cvičení 14.67 a 14.68 na str. 101

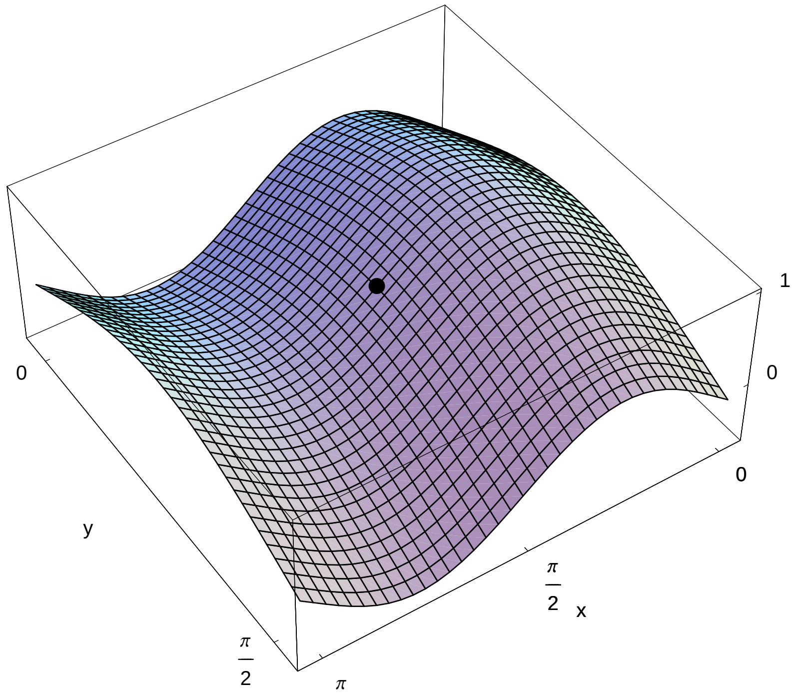
Kartézské grafy funkcí $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ a $\lg(x + y^2 - 4)$;
černý kroužek vyznačuje polohu bodu a.

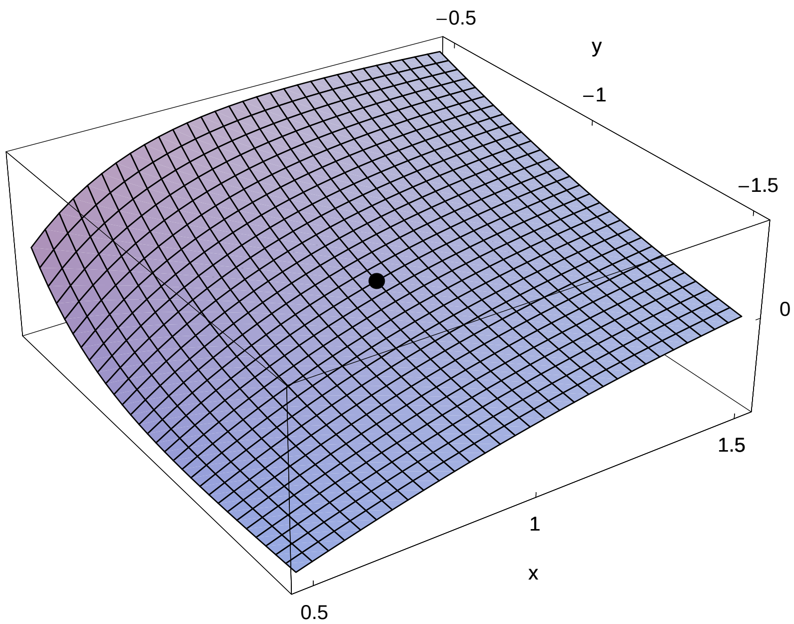




Cvičení 14.69 a 14.70 na str. 101

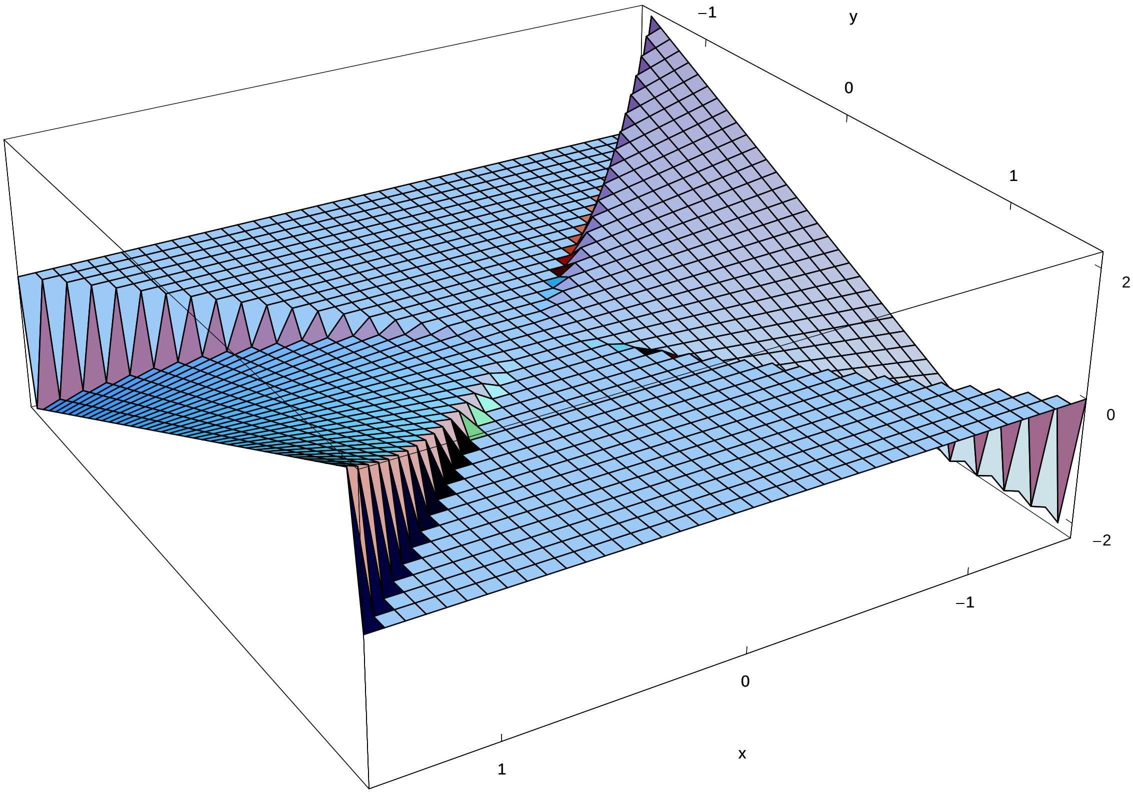
Kartézské grafy funkcí $\sin(x+y)\cos(x-y)$ a $\arcsin((x+y)/(x^2+y^2))$; černý kroužek vyznačuje polohu bodu a.





Příklad 14.8 na str. 103

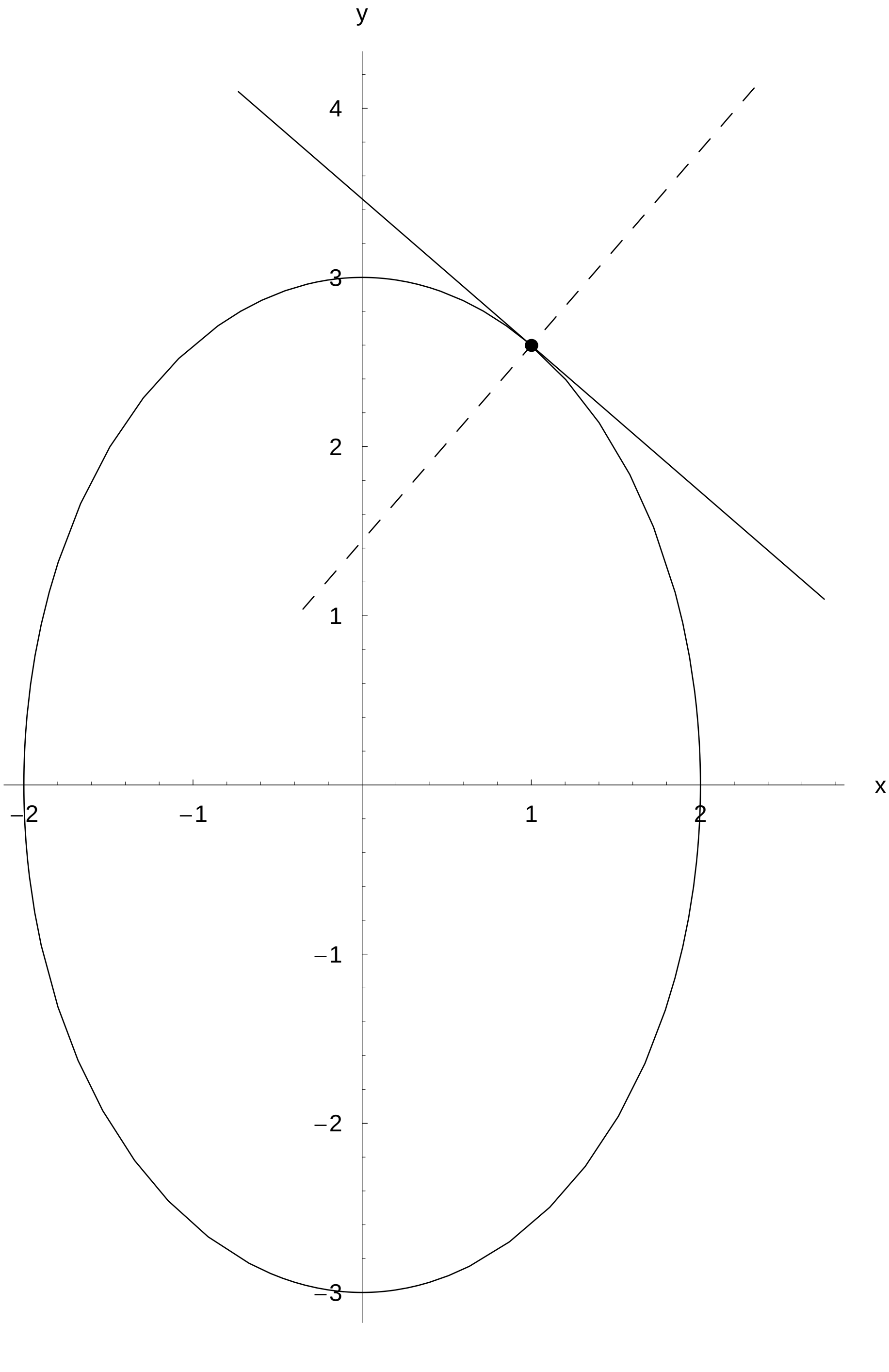
Kartézský graf funkce rovné xy, je-li $|x| \geq |y|$, a 0 jinak.



Obrázky ke kapitole 15

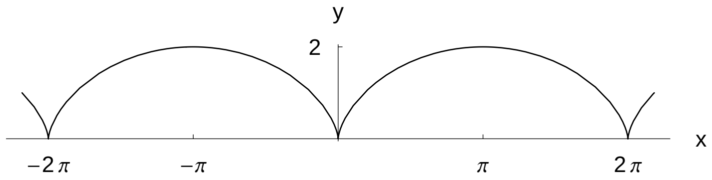
Cvičení 15.01 na str. 125

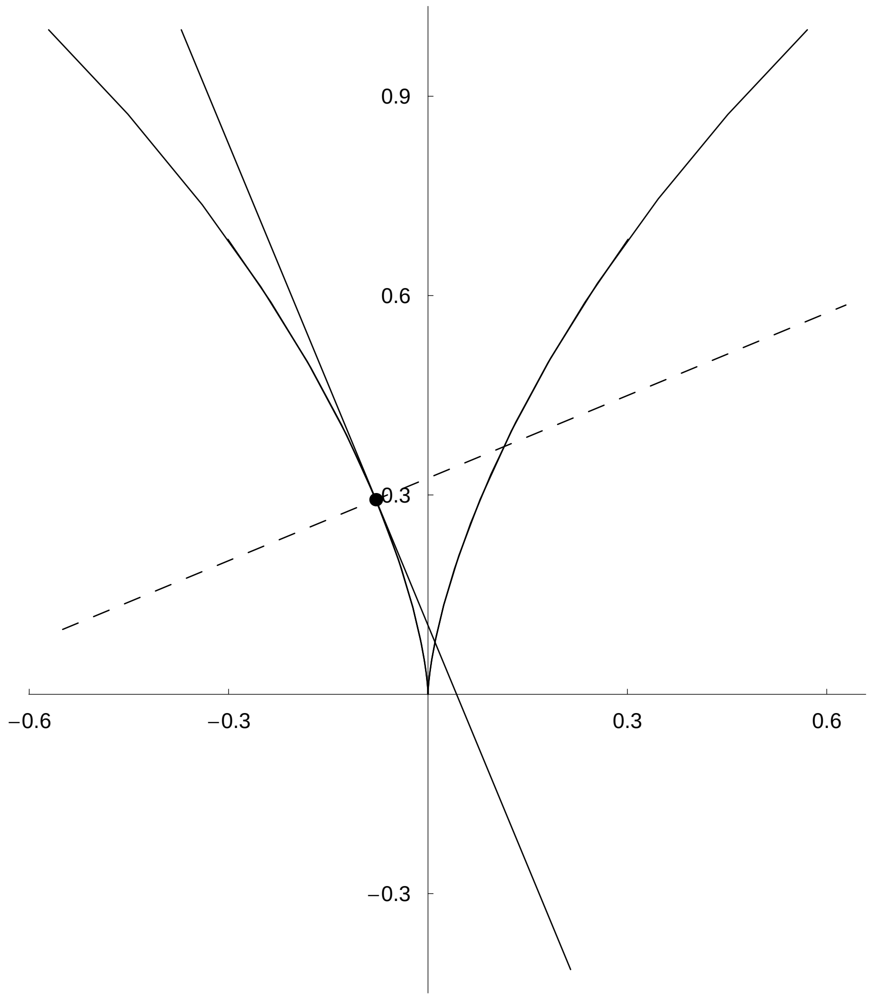
Tečna a normála v bodě $\frac{1}{3}\pi$ k elipse $f(t) = (2\cos t, 3\sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Cvičení 15.02 na str. 125

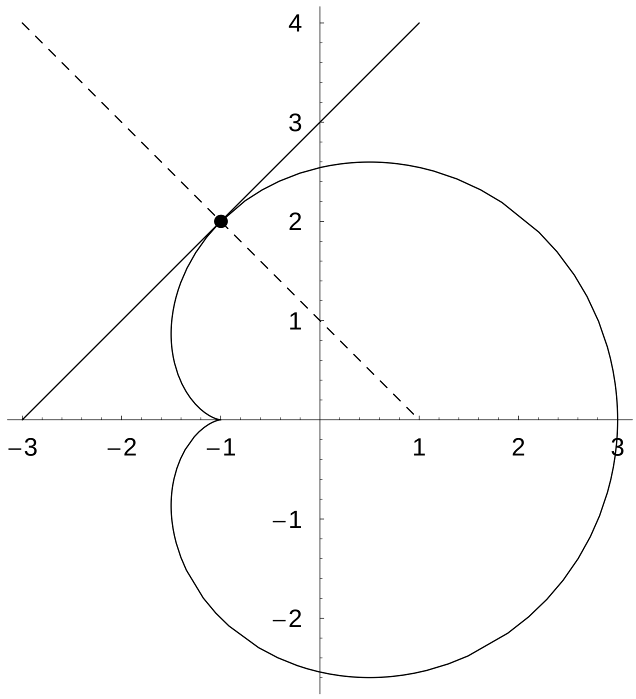
Část cykloidy $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \langle -\frac{5}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \rangle$.
Dole graf restrikce $f|\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$ a tečna a normála v bodě $-\frac{1}{4}\pi$;
$f(-\frac{1}{4}\pi) = (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\pi, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \doteq (-0.08, 0.29)$.

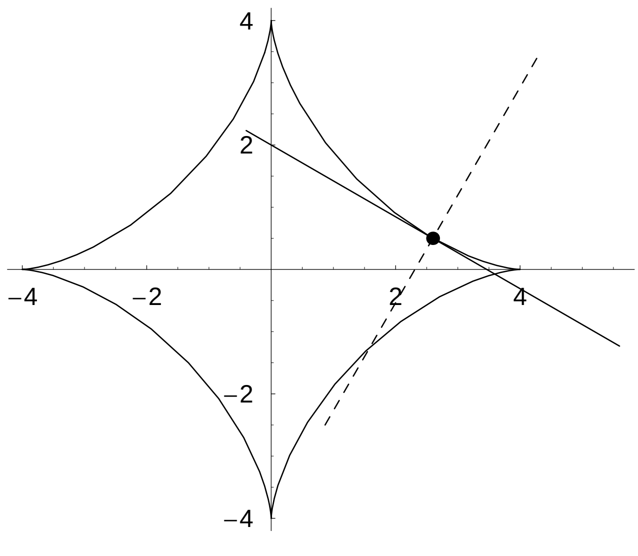




Cvičení 15.03 a 15.04 na str. 125

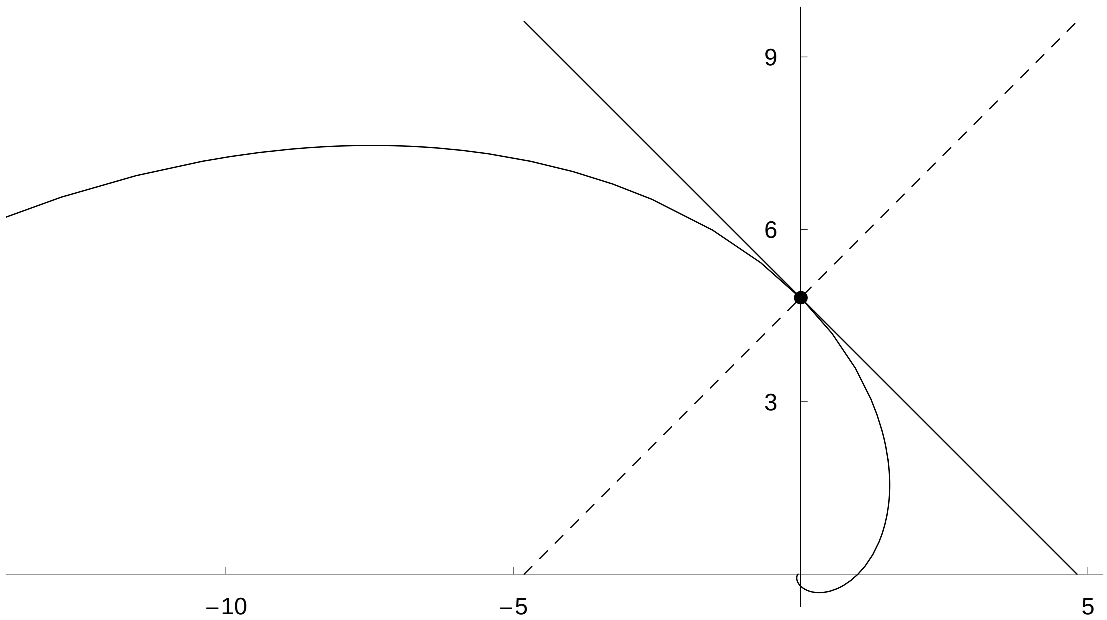
Tečna a normála kardioidy $f(t) = (2\cos t + \cos 2t, 2\sin t + \sin 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{2}\pi$
a astroidy $f(t) = (3\cos t + \cos 3t, 3\sin t - \sin 3t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{6}\pi$.

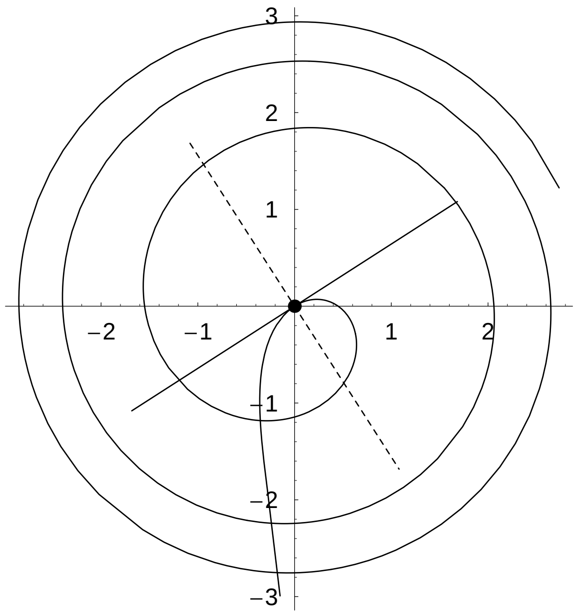




Cvičení 15.05 a 15.06 na str. 125

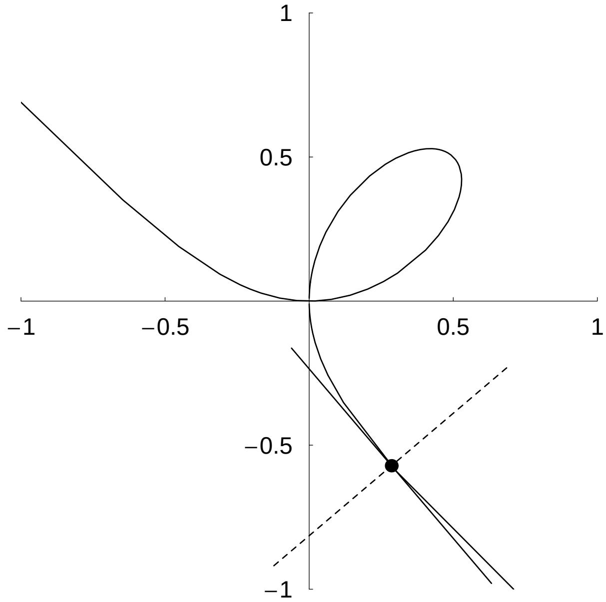
Tečna a normála (části) logaritmické spirály $f(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \langle -\pi, \pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{2}\pi$ a křivky $f(t) = (\lg t \sin t, \lg t \cos t)$, $t \in \langle 1/20, 20 \rangle$, v bodě 1.

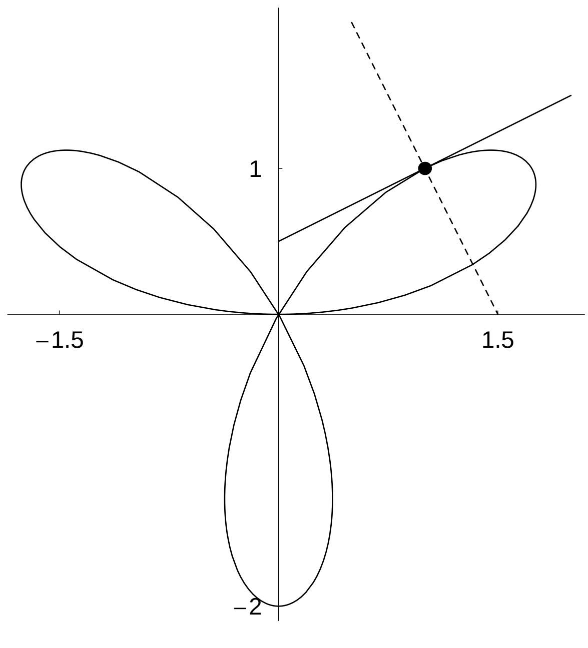




Cvičení 15.07 a 15.08 na str. 125

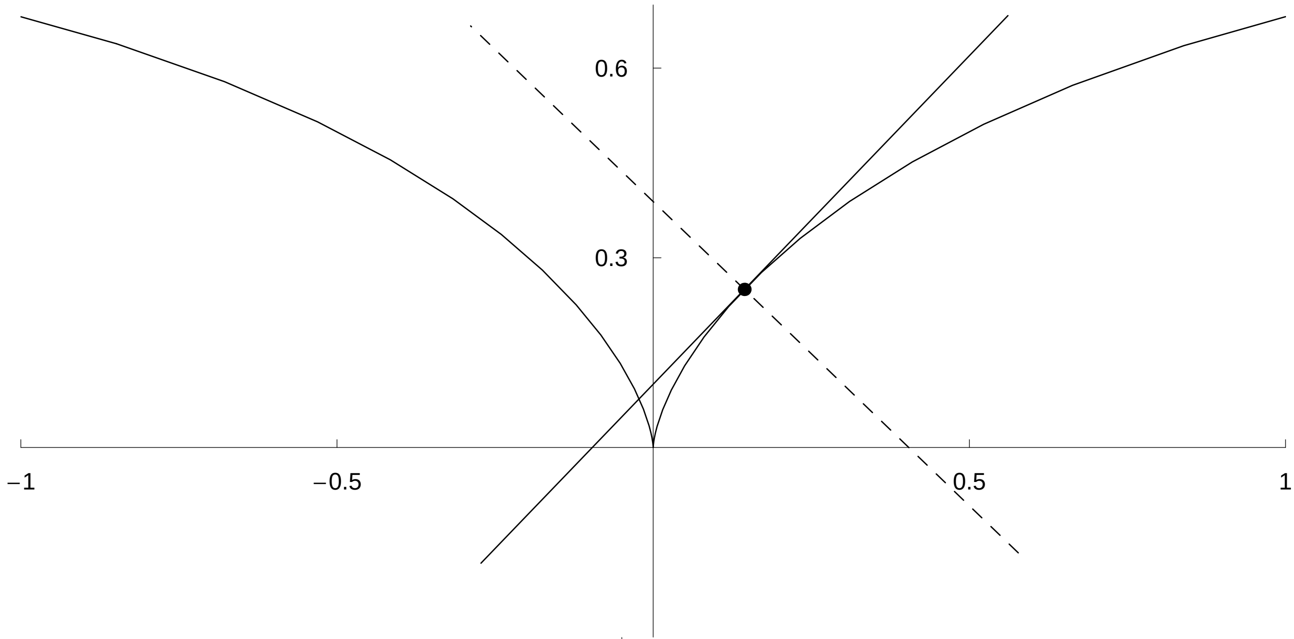
Tečna a normála Descartesova listu $f(t) = (t/(t^3+1), t^2/(t^3+1))$, $t \in \langle -30, 30\rangle$, $t \neq -1$, v bodě -2 a trojlístku $f(t) = (\cos t + \sin 2t, \sin t + \cos 2t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, v bodě 0.

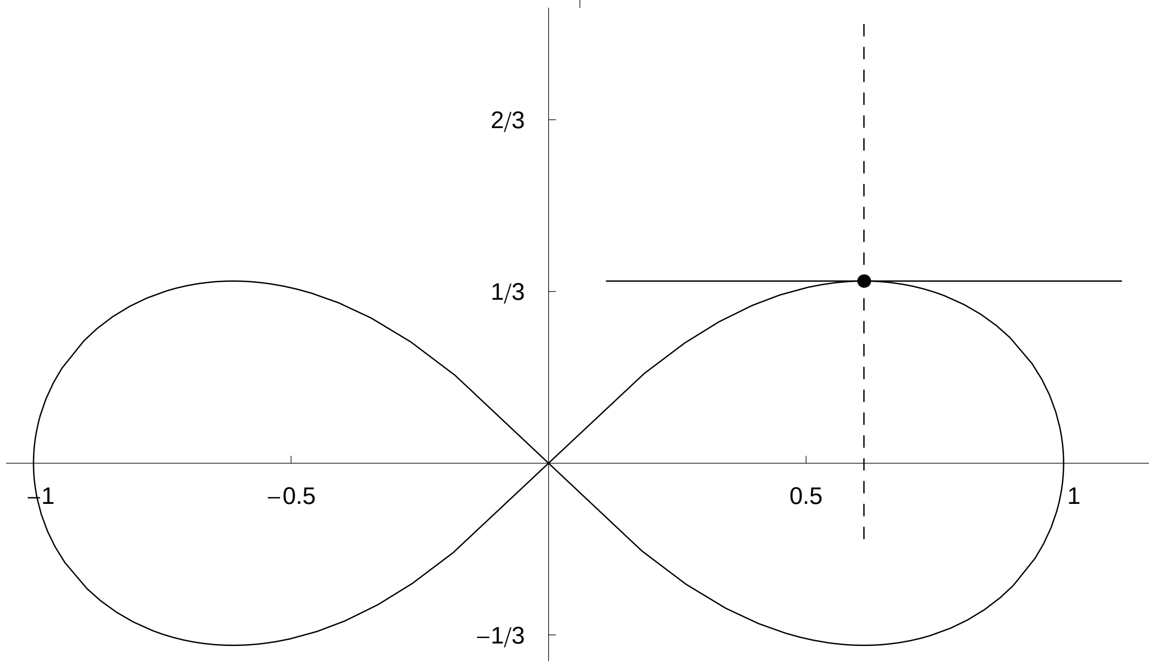




Cvičení 15.09 a 15.11 na str. 125

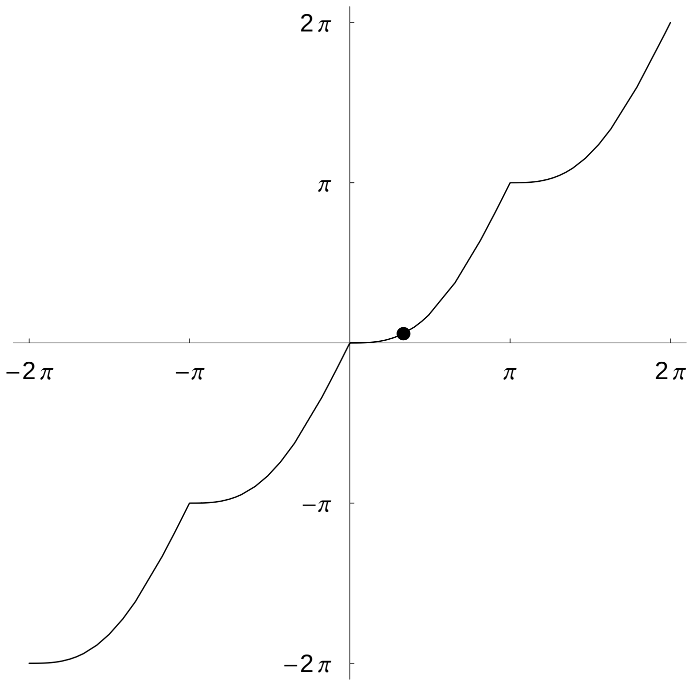
Tečna a normála Dioklovy kissoidy $f(t) = (\cos^3 t / \sin t, \cos^2 t)$, $t \in (-\frac{1}{2}\pi, -0.1\rangle \cup \langle 0.1, \frac{1}{2}\pi)$, v bodě $\frac{1}{3}\pi$ a lemniskaty $f(t) = \sqrt{\cos 2t}\,(\cos t, \sin t)$, $t \in \langle -\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\rangle \cup \langle -\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\rangle$, v bodě $\frac{1}{6}\pi$.

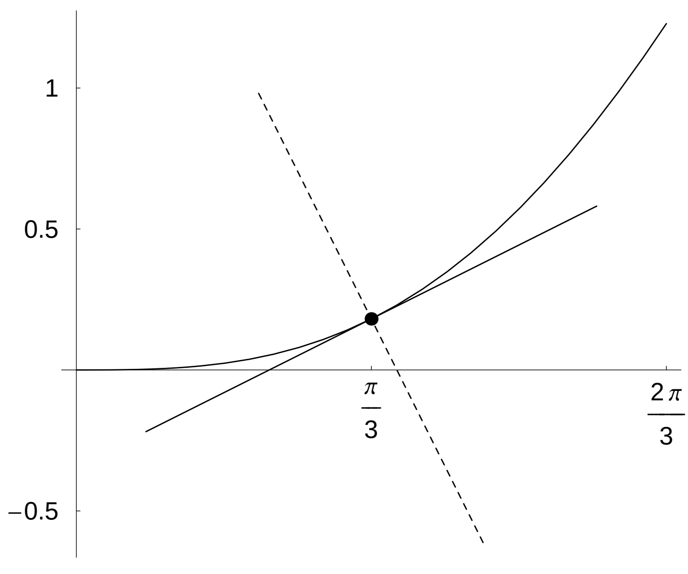




Cvičení 15.10 na str. 125

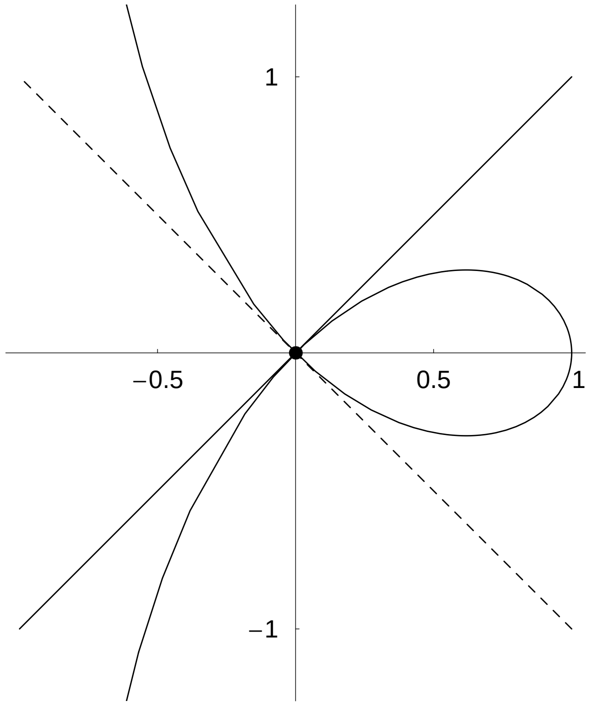
Tečna a normála křivky $f(t) = (t, t - |\sin t|)$, $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{3}\pi$ a její detail v blízkosti bodu dotyku $f(a) = f(\frac{1}{3}\pi) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}) \doteq (1.05, 0.18)$.

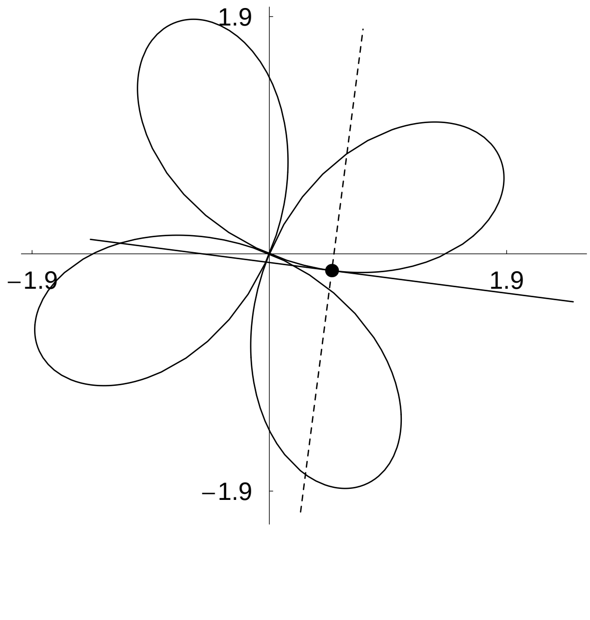




Cvičení 15.12 a 15.13 na str. 125

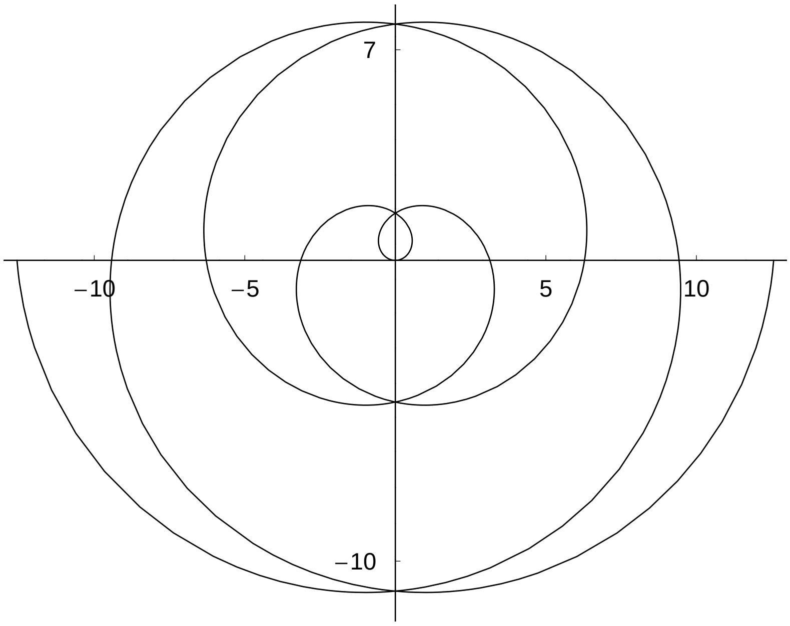
Tečna a normála strofoidy $f(t) = (\cos 2t, \cos 2t \operatorname{tg} t)$, $t \in \langle -1.3, 1.3 \rangle$, v bodě $\frac{1}{4}\pi$ a čtyřlístku $f(t) = (\cos t + \sin 3t, \sin t + \cos 3t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{3}\pi$.

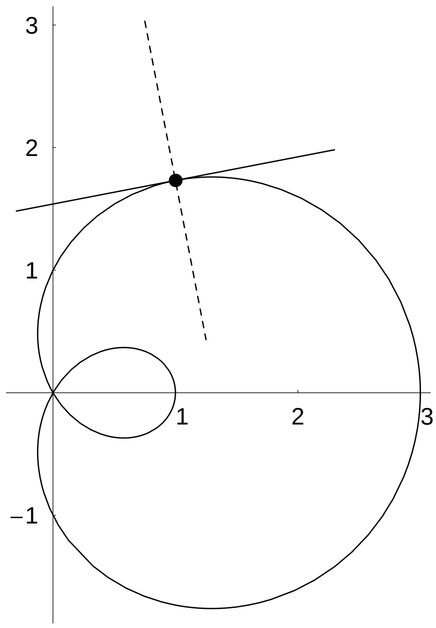




Cvičení 15.14 a 15.15 na str. 125

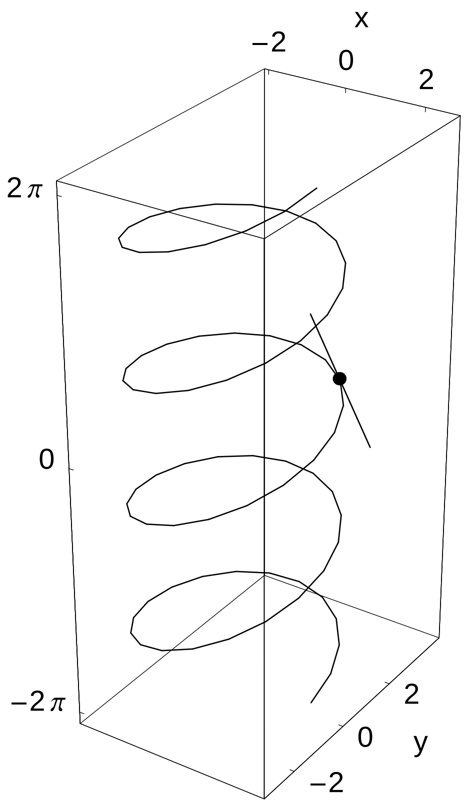
Tečna a normála Archimedovy spirály $f(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in \langle -4\pi, 4\pi \rangle$, v počátku je totožná s osou x, resp. y;
tečna a normála Pascalovy závitnice $f(t) = (2\cos t + 1)(\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{3}\pi$.

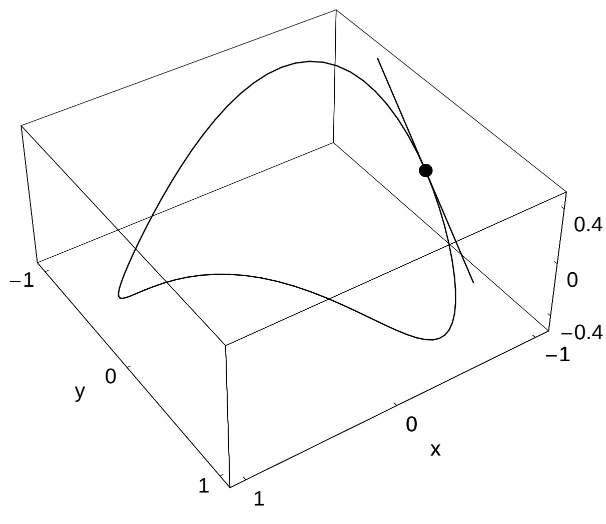




Cvičení 15.16 a 15.17 na str. 125

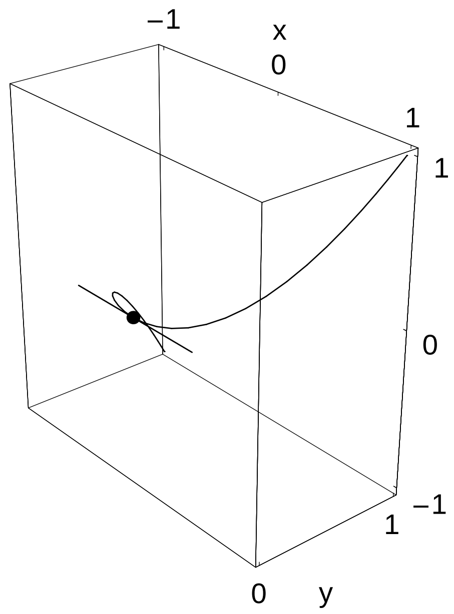
Tečna eliptické závitnice $f(t) = (2\cos t, 3\sin t, \frac{1}{2}t)$, $t \in \langle -4\pi, 4\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{3}\pi$ a křivky $f(t) = (\cos t, \sin t, \sin t\, \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě π.

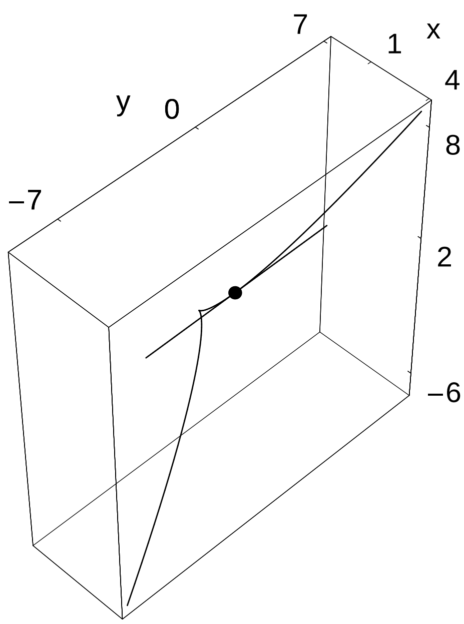




Cvičení 15.18 a 15.19 na str. 126

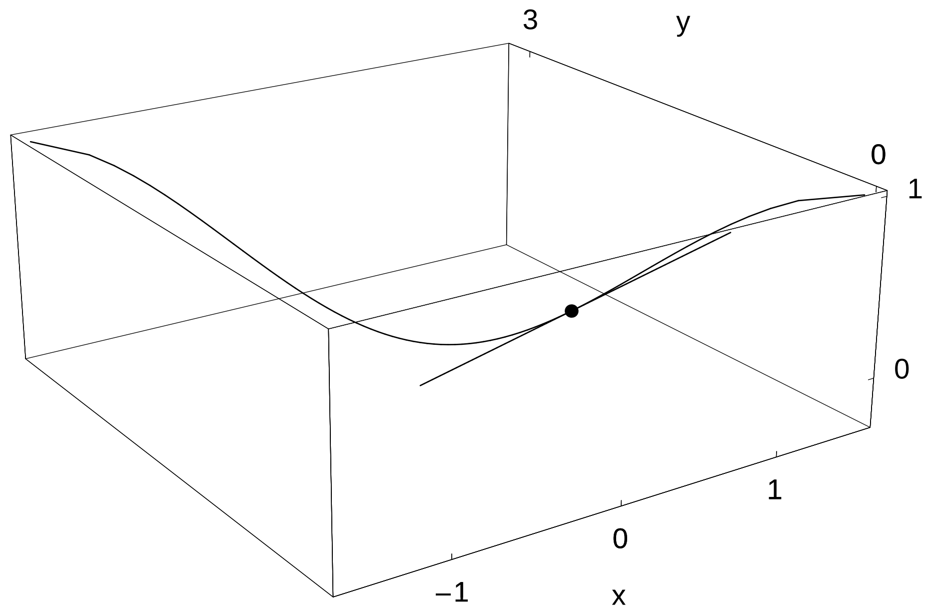
Tečna křivky $f(t) = (\sin t, \sin^2 t, \sin^3 t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě π a křivky $f(t) = (t^2, t^3 - 1, t^3 + 1)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě π.

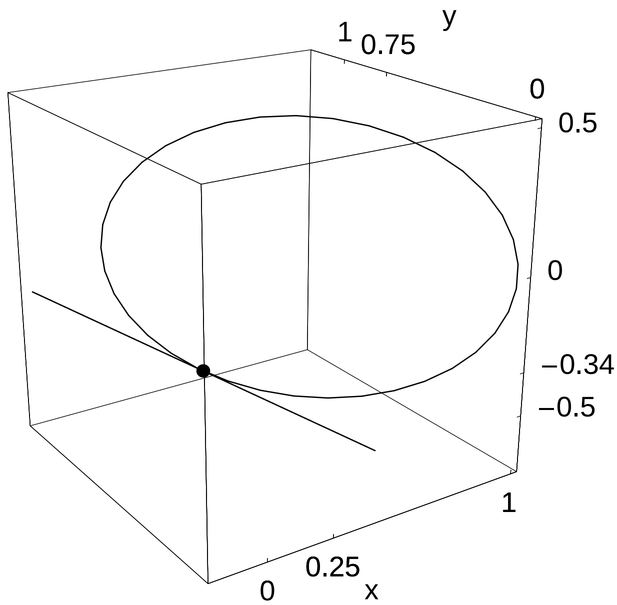




Cvičení 15.20 a 15.21 na str. 126

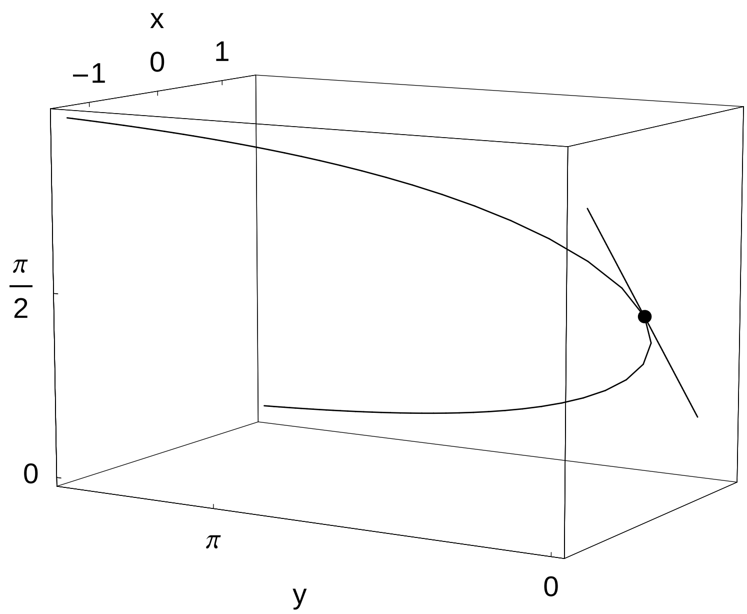
Tečna křivky $f(t) = (\arcsin t, \arccos t, t^2)$, $t \in \langle -1, 1 \rangle$, v bodě $\frac{1}{2}$ a křivky $f(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{5}{6}\pi$.

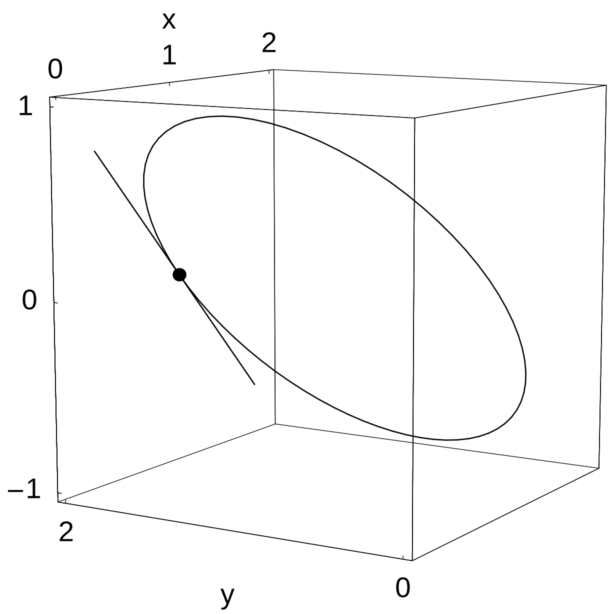




Cvičení 15.22 a 15.23 na str. 126

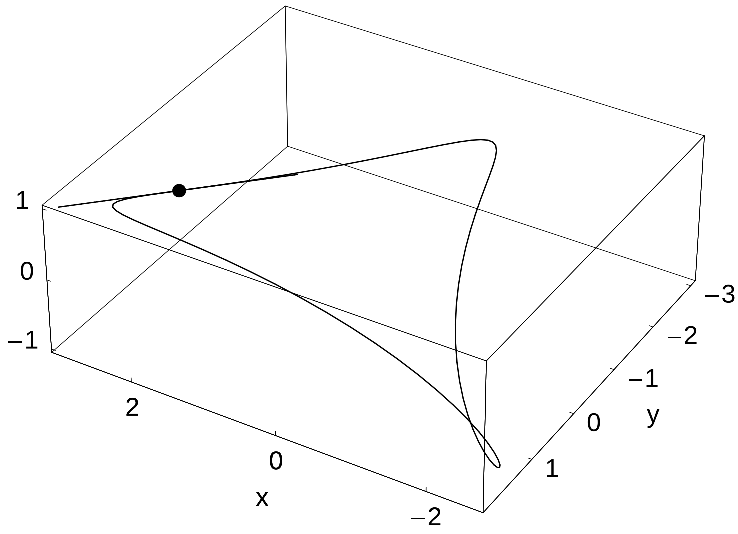
Tečna křivky $f(t) = (\operatorname{arctg} t, \lg(1+t^2), \operatorname{arccotg} t)$, $t \in \langle -10, 10\rangle$, v bodě 0 a křivky $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, v bodě π.

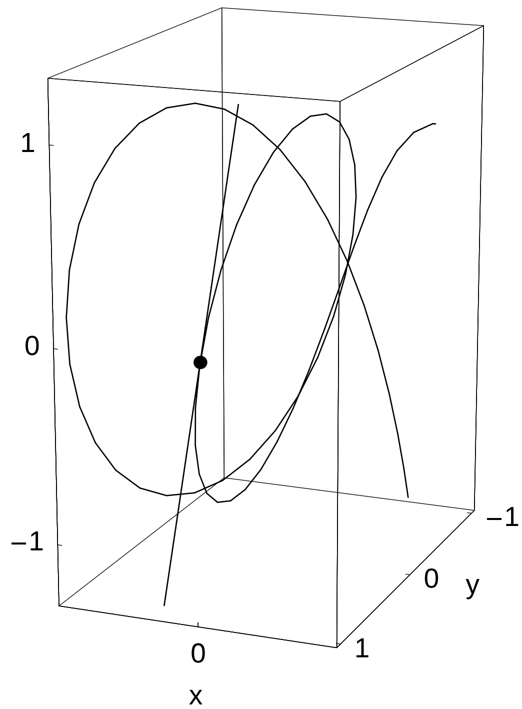




Cvičení 15.24 a 15.25 na str. 126

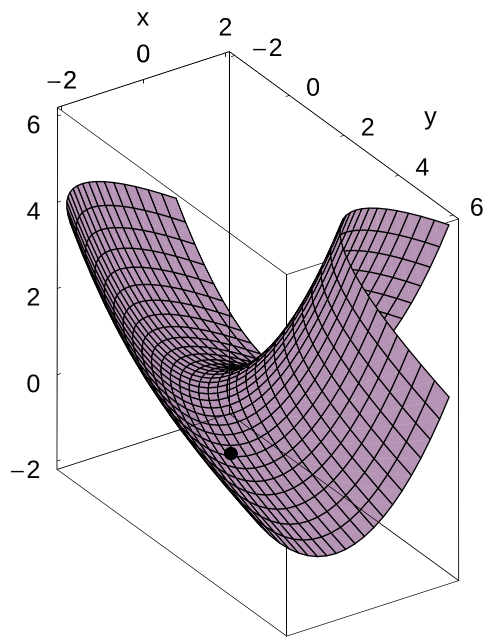
Tečna křivky $f(t) = (2\sin t + \sin 2t, 2\cos t - \cos 2t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{2}\pi$ a křivky $f(t) = (\lg t \cos \pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, v bodě 1.

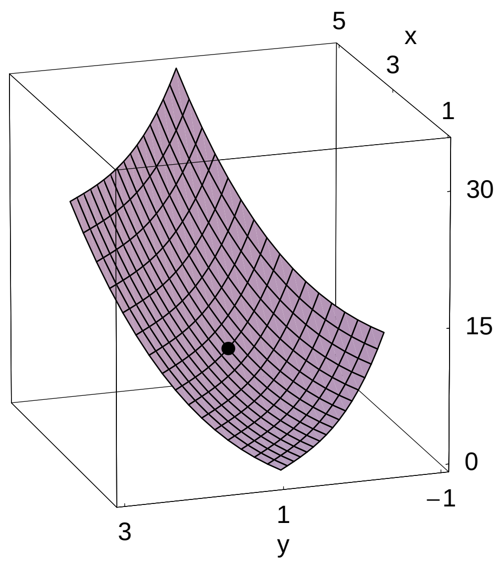




Cvičení 15.31 a 15.32 na str. 126

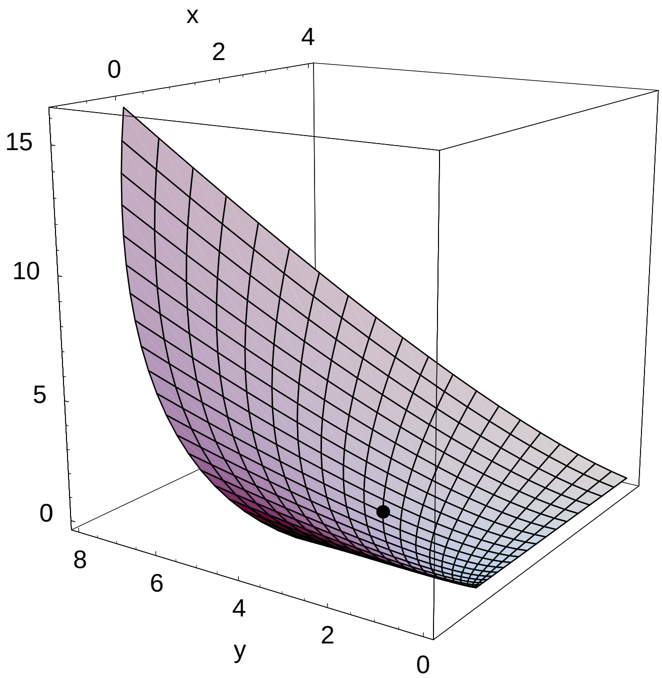
Plocha $f(u,v) = (u, u+v^2, u^2-v)$, $(u,v) \in \langle -2,2 \rangle^2$, $a = (0,1)$ a
$f(u,v) = (u+v, u-v, u^3+v^3)$, $(u,v) \in \langle 1,3 \rangle \times \langle 0,2 \rangle$, $a = (2,1)$.

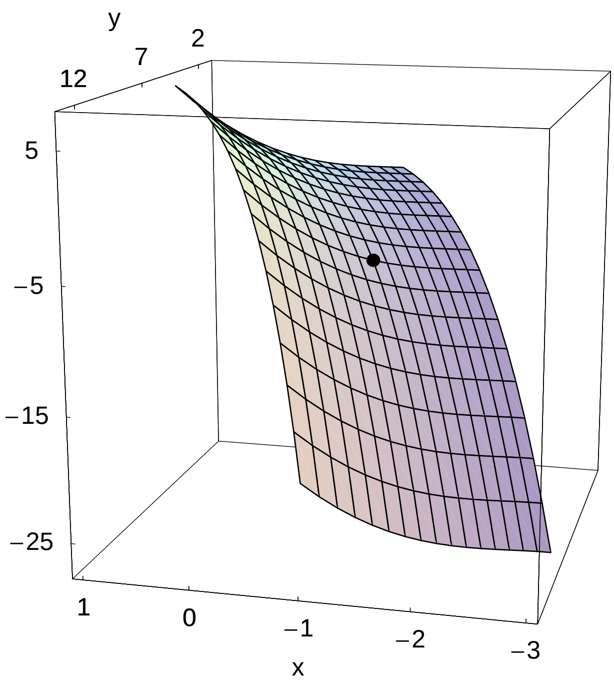




Cvičení 15.33 a 15.34 na str. 126

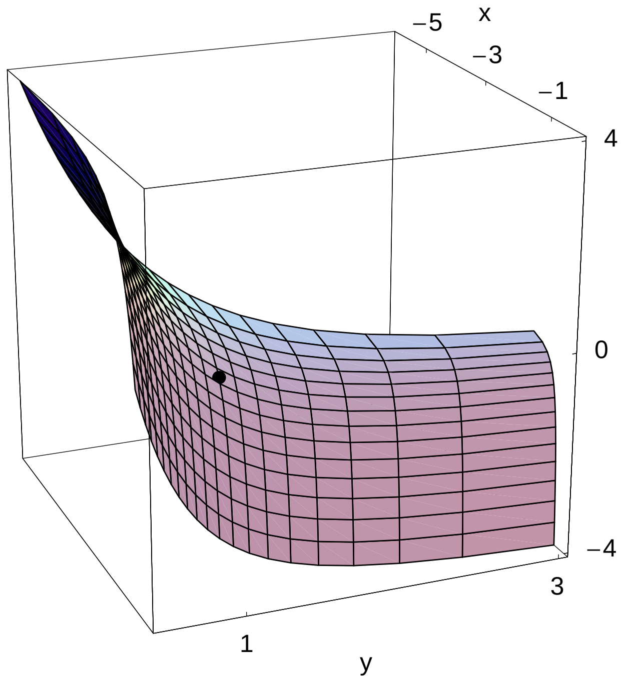
Plocha $f(u,v) = (u^2 - uv, uv + v^2, u^2v + uv^2)$, $(u,v) \in \langle 0,2\rangle^2$, $a = (1,1)$ a $f(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^3+v^3)$, $(u,v) \in \langle 0,2\rangle \times \langle -3,-1\rangle$, $(a = 1,-2)$.

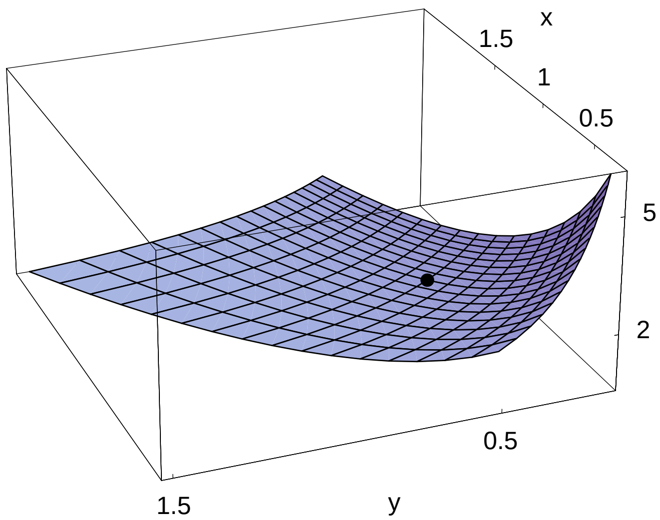




Cvičení 15.35 a 15.36 na str. 126

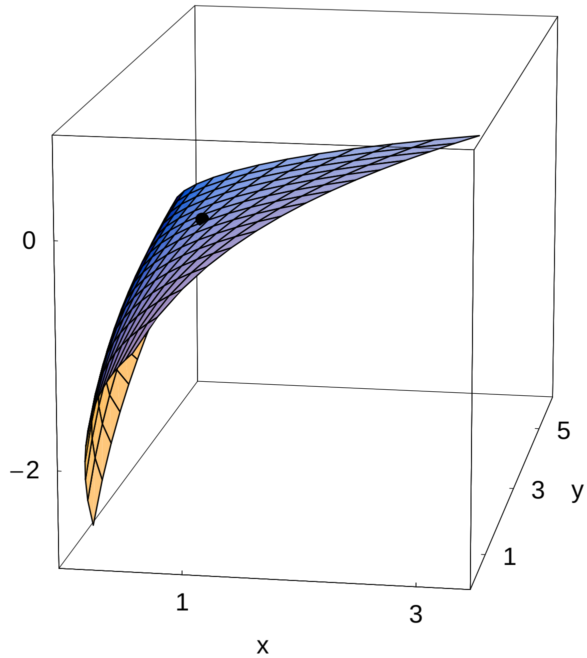
Plocha $f(u,v) = (u/v, 1/u, u^2 - v^2)$, $(u,v) \in \langle \frac{1}{3}, 2\rangle \times \langle -2, -\frac{1}{3}\rangle$, $a = (1,-1)$ a $f(u,v) = (u^2, u/v, v/u)$, $(u,v) \in \langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \times \langle -3, -1\rangle$, $a = (-1,-2)$.

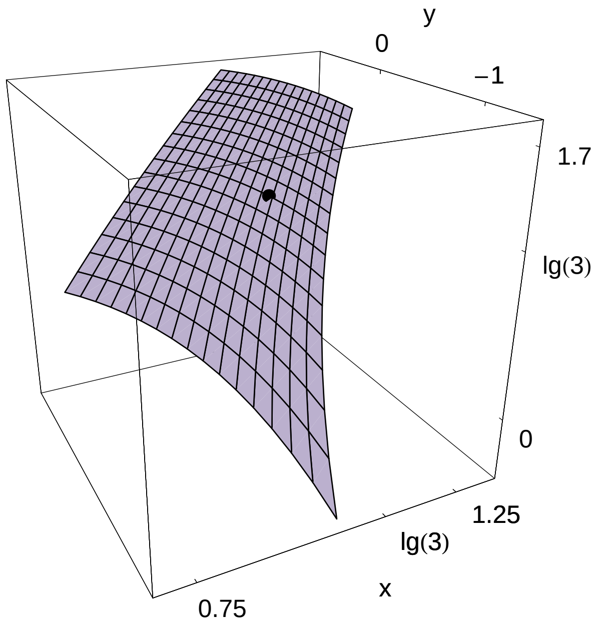




Cvičení 15.37 a 15.38 na str. 126

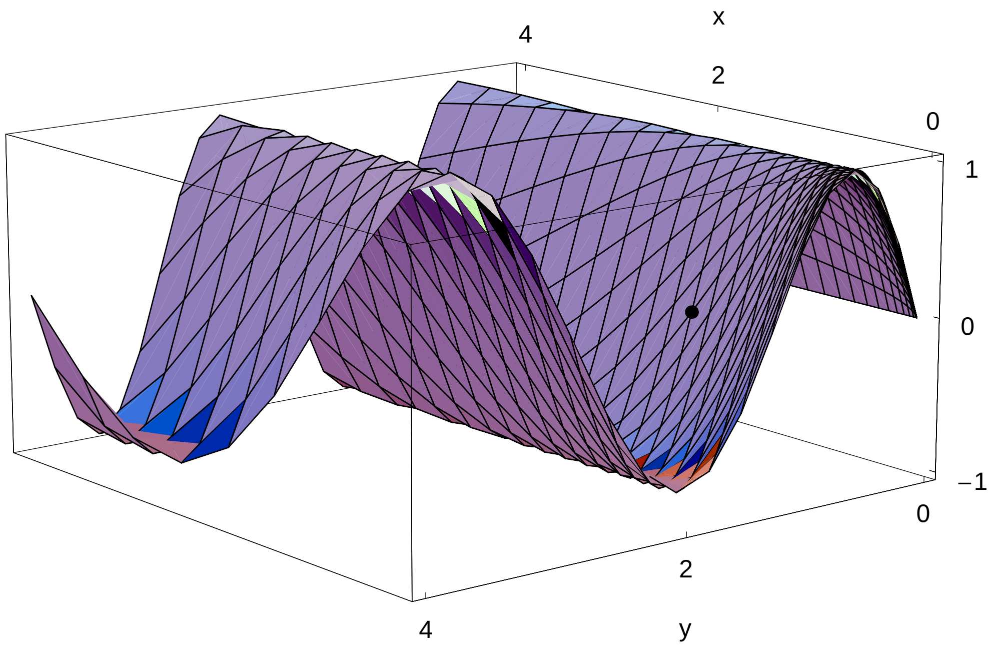
Plocha $f(u,v) = (uv^2, u/v, \lg(uv))$, $(u,v) \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{2} \rangle^2$, $a = (1,1)$ a
$f(u,v) = (\lg(u+v), \lg(u-v), \lg(u^2-v^2))$, $(u,v) \in \langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \rangle \times \langle \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \rangle$, $a = (2,1)$.

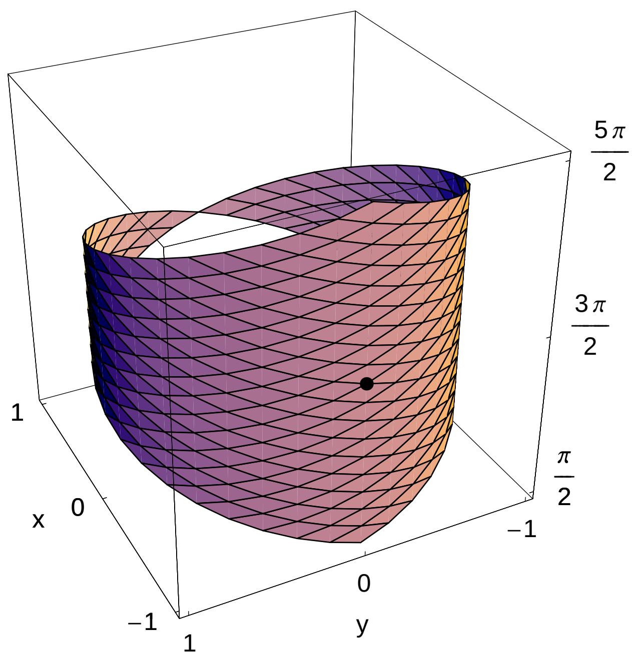




Cvičení 15.39 a 15.41 na str. 126

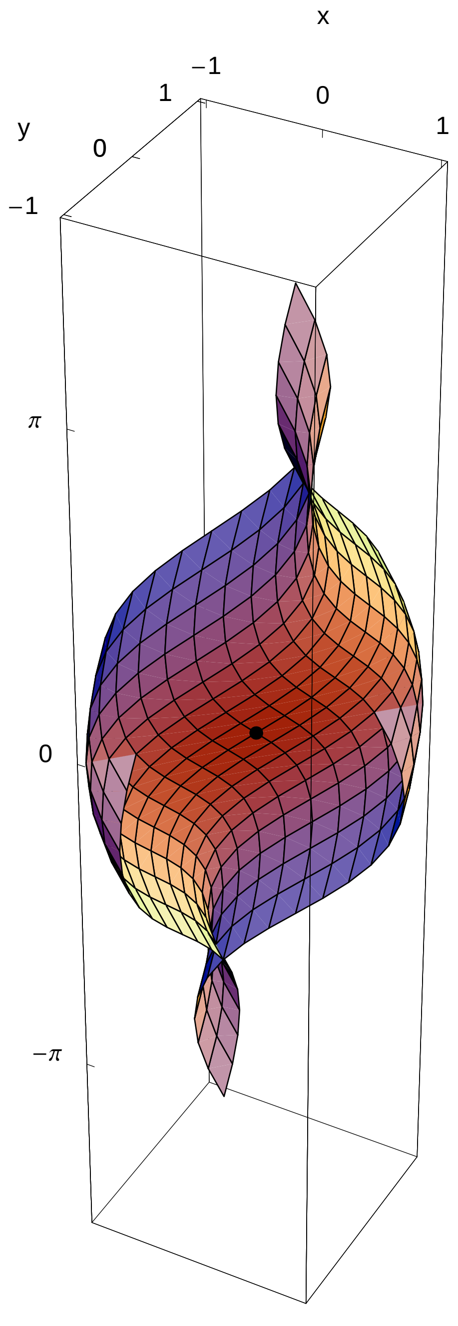
Plocha $f(u,v) = (u^2, uv, \sin(\pi uv))$, $(u,v) \in \langle 0,2\rangle^2$, $a = (1,1)$ a
$f(u,v) = (\sin(u-v), \cos(u-v), u+v))$, $(u,v) \in \langle 0,\pi\rangle \times \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \pi)$.





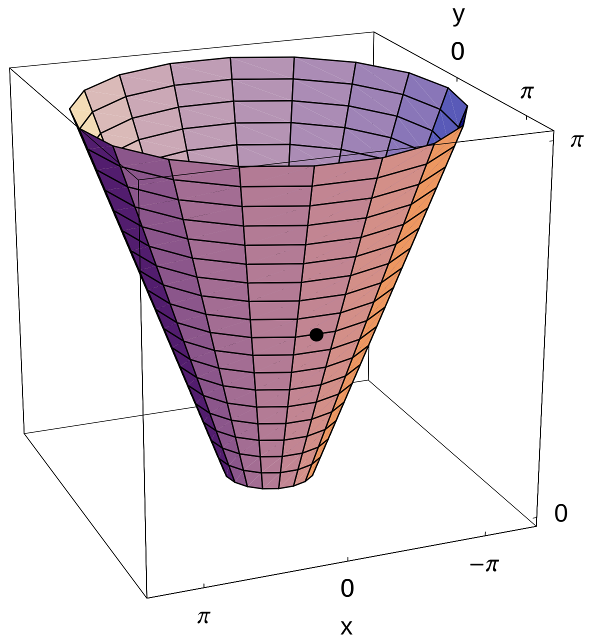
Cvičení 15.40 na str. 126

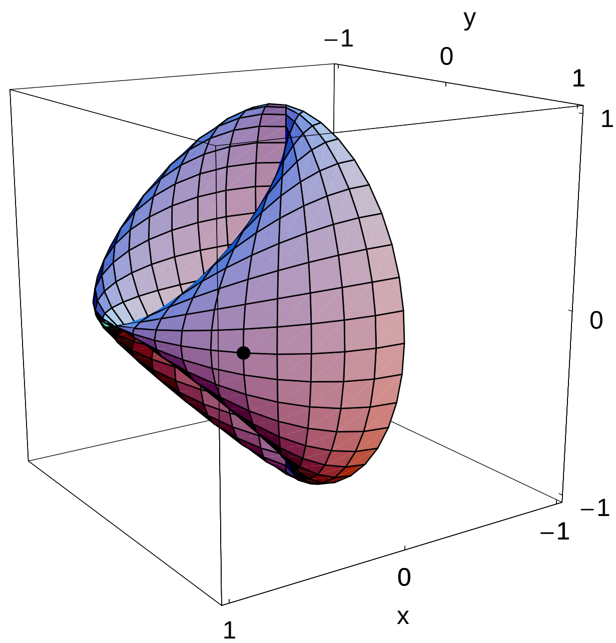
Plocha $f(u,v) = (\sin u, \sin v, u - v)$, $(u,v) \in \langle -\frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle^2$, $a = (0,0)$.



Cvičení 15.42 a 15.43 na str. 127

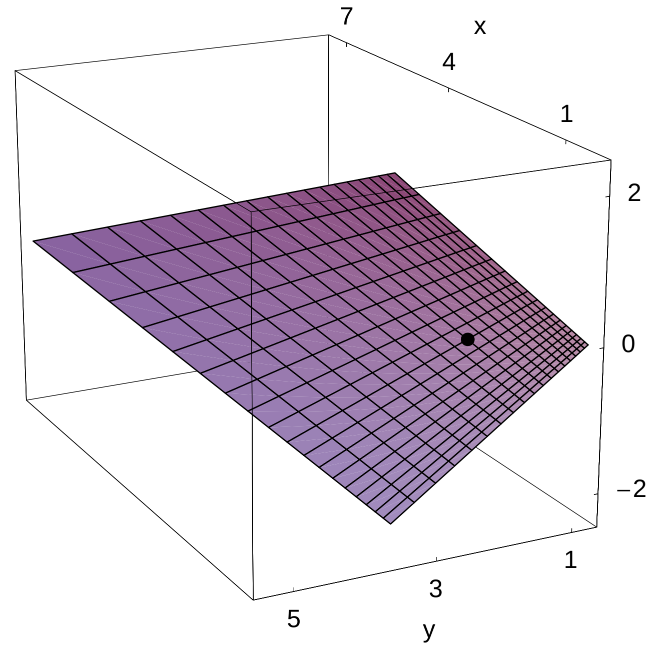
Plocha $f(u,v) = ((1+|u|)\cos v, (1+|u|)\sin v, |u|)$, $(u,v) \in \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $f(u,v) = (\sin u \sin v, \sin u \cos v, \cos u \cos v)$, $(u,v) \in \langle 0,\pi\rangle^2$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi)$.

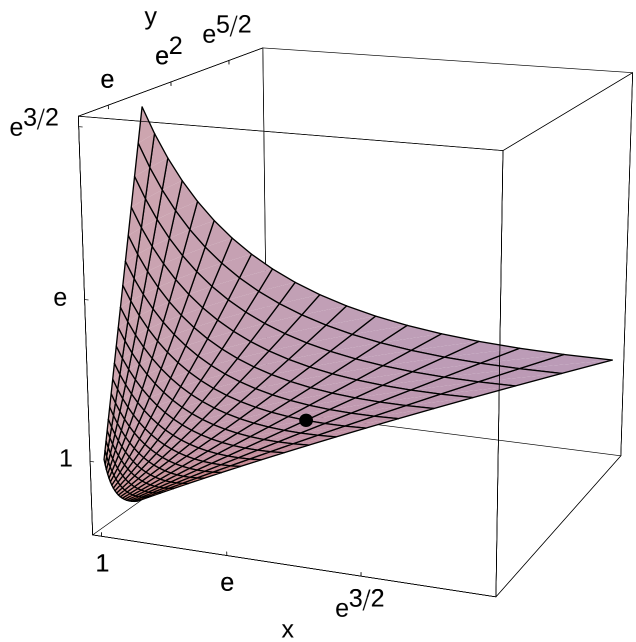




Cvičení 15.44 a 15.45 na str. 127

Plocha $f(u,v) = (e^{u+v}, e^u + e^v, e^u - e^v)$, $(u,v) \in \langle -1, 1\rangle^2$, $a = (0,0)$ a
$f(u,v) = (e^{uv}, e^{u+v}, e^{u-v})$, $(u,v) \in \langle 0, \frac{3}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{6}{5}\rangle$, $a = (1,1)$.

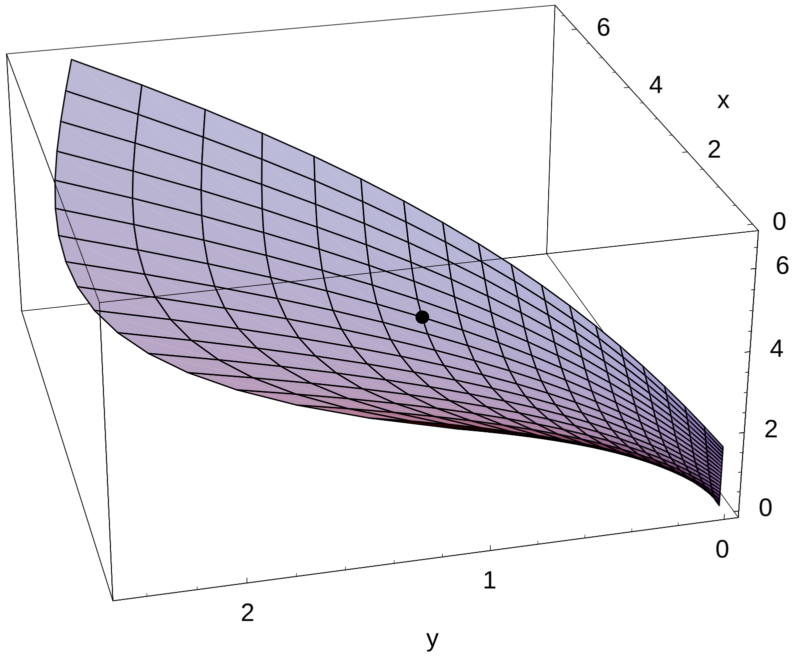


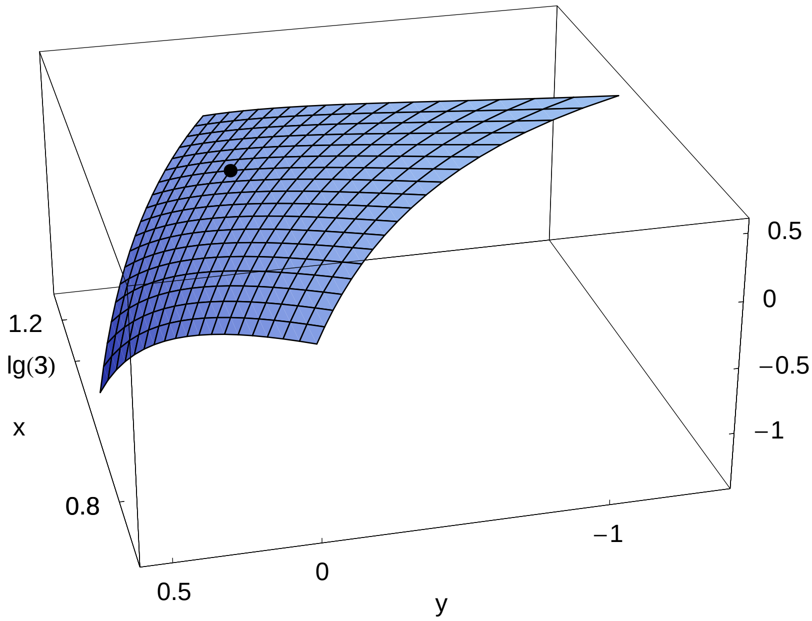


Cvičení 15.46 a 15.47 na str. 127

Plocha $f(u,v) = (ue^v, uve^{u-v}, ve^u)$, $(u,v) \in \langle 0, \frac{3}{2}\rangle^2$, $a = (1,1)$ a

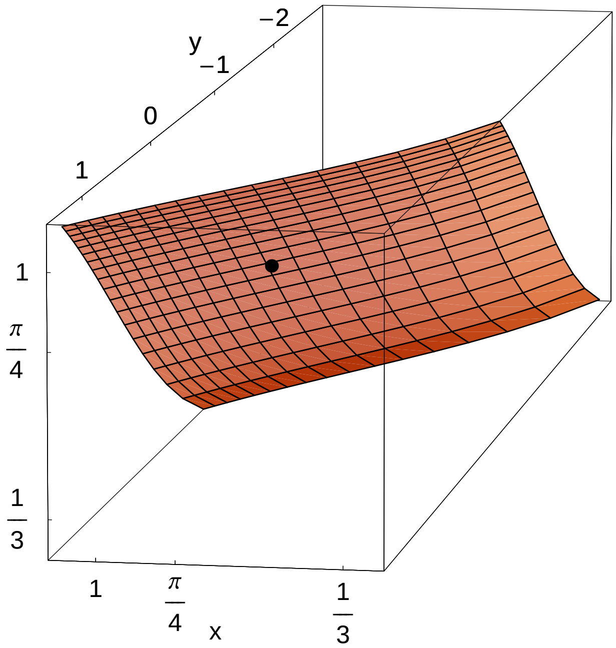
$f(u,v) = (\lg(1+u+v), \lg(1-u+v), \lg(1+u-v))$, $(u,v) \in \langle \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\rangle^2$, $a = (1,1)$.

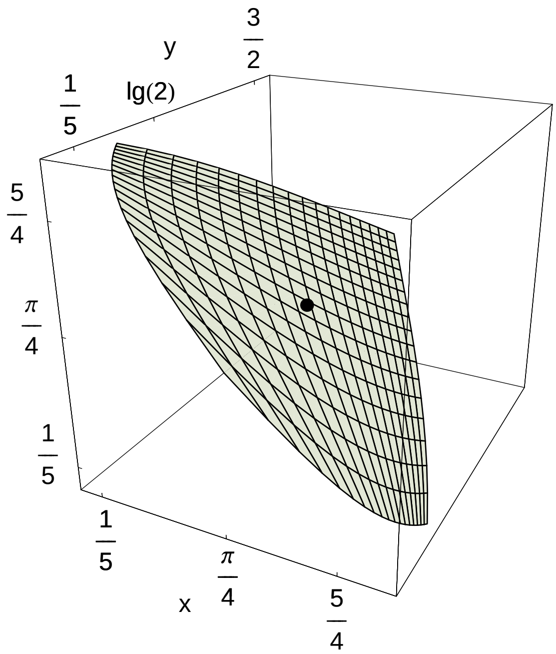




Cvičení 15.48 a 15.49 na str. 127

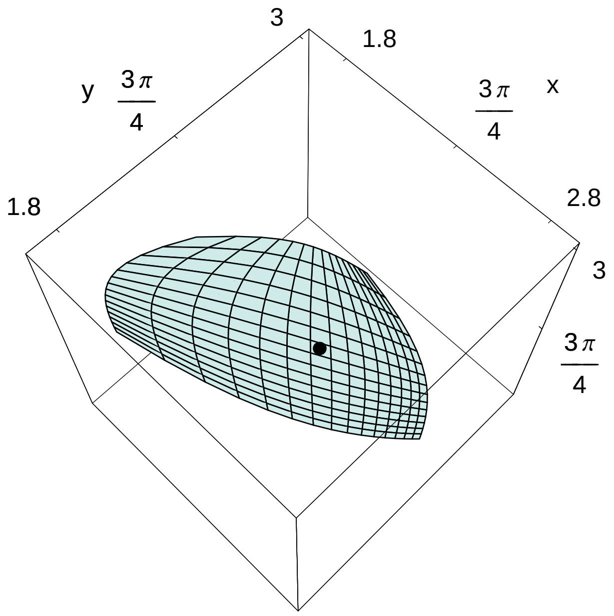
Plocha $f(u,v) = (\operatorname{arctg} u, \lg(uv), \operatorname{arctg} v)$, $(u,v) \in \langle \frac{1}{4}, 2\rangle^2$, $a = (1,1)$ a
$f(u,v) = (\operatorname{arctg}(u/v), \lg(1+uv), \operatorname{arctg}(v/u))$, $(u,v) \in \langle \frac{1}{4}, 2\rangle^2$, $a = (1,1)$.

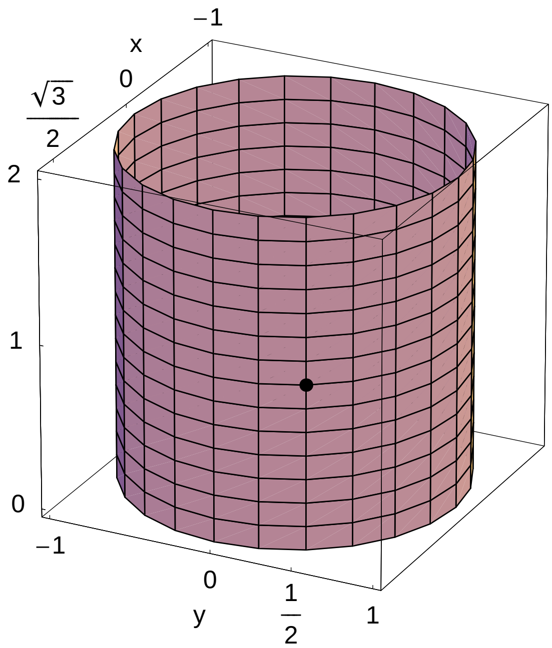




Cvičení 15.50 a 15.51 na str. 127

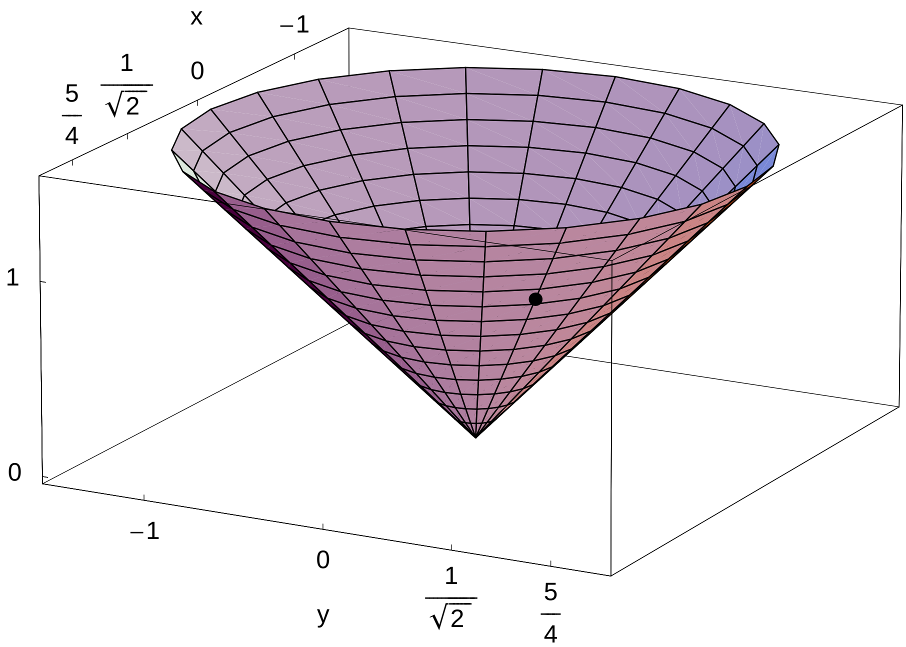
Plocha $f(u,v) = (\operatorname{arccotg}(uv), \operatorname{arccotg}(u/v), \operatorname{arccotg}(v/u)$, $(u,v) \in \langle \frac{1}{4}, 2\rangle \times \langle -2, -\frac{1}{4}\rangle$, $a = (1,-1)$ a válec $f(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$, $(u,v) \in \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, $a = (1, \frac{1}{6}\pi)$.

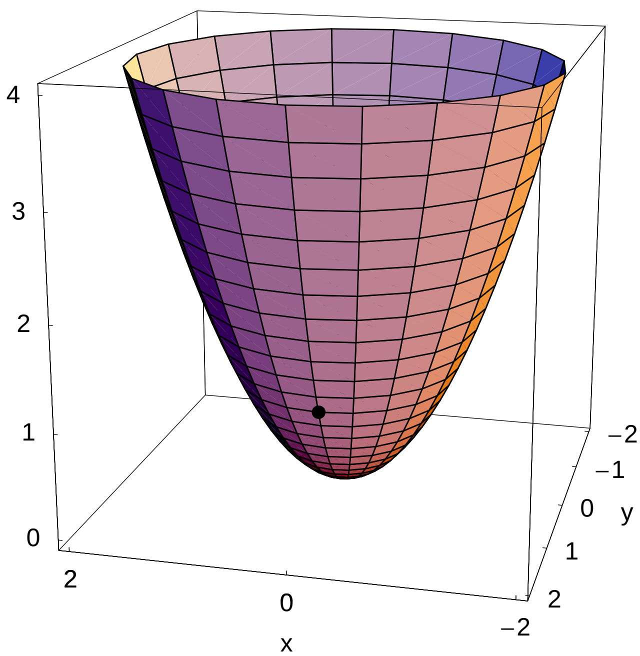




Cvičení 15.52 a 15.53 na str. 127

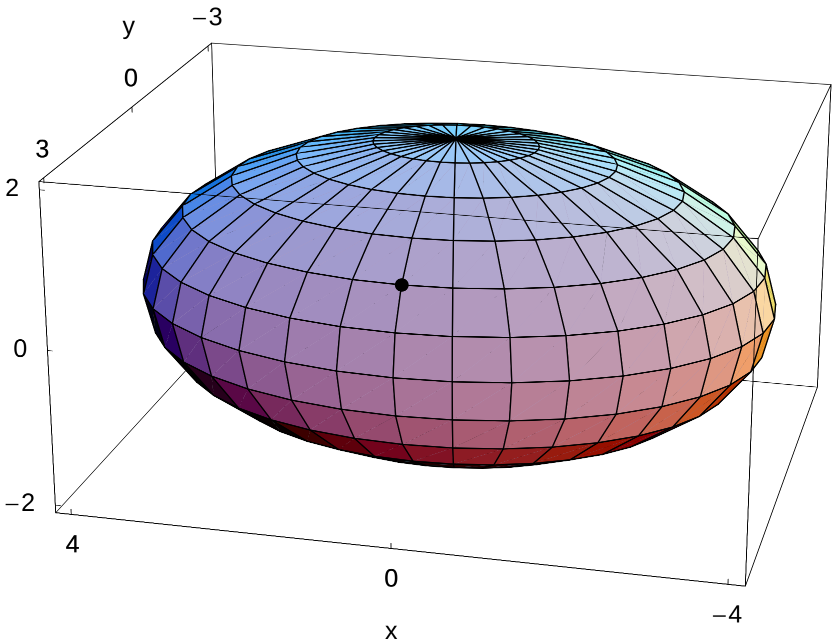
Kužel $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $(u,v) \in \langle 0, \frac{3}{2}\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, $a = (1, \frac{1}{4}\pi)$ a paraboloid $f(u,v) = (v\sin u, v\cos u, v^2)$, $(u,v) \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\rangle$, $a = (0, 1)$.

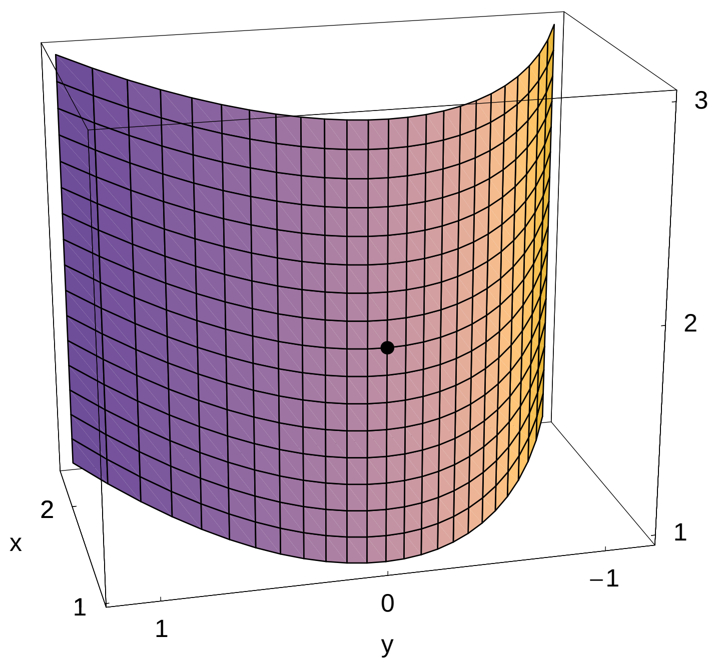




Cvičení 15.54 a 15.55 na str. 127

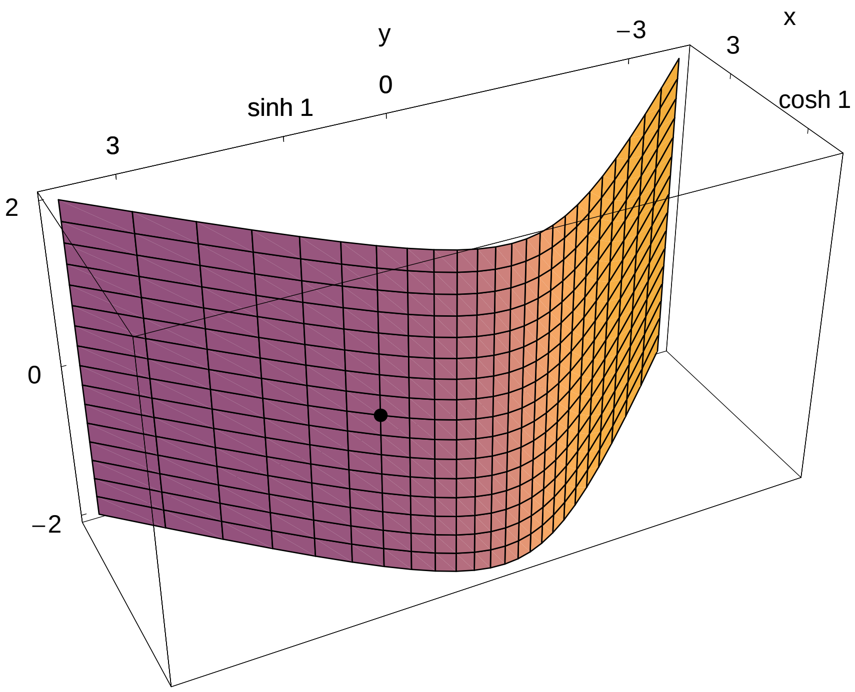
Elipsoid $f(u,v) = (4\cos u\cos v, 3\sin u\cos v, 2\sin v)$, $(u,v) \in \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ a parabolický válec $f(u,v) = (\cosh^2 v, \sinh v, u)$, $(u,v) \in \langle 1,3\rangle \times \langle -1,1\rangle$, $a = (2,0)$.

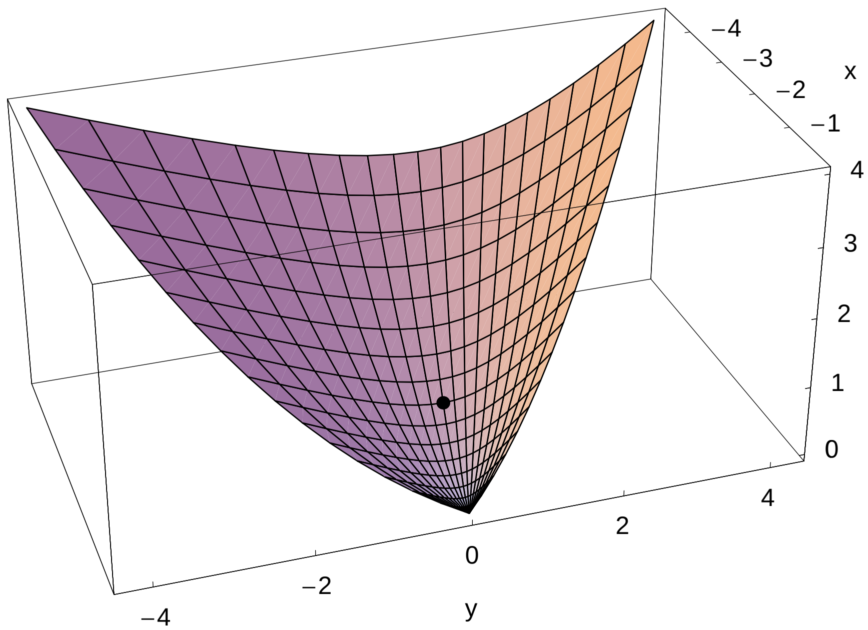




Cvičení 15.56 a 15.57 na str. 127

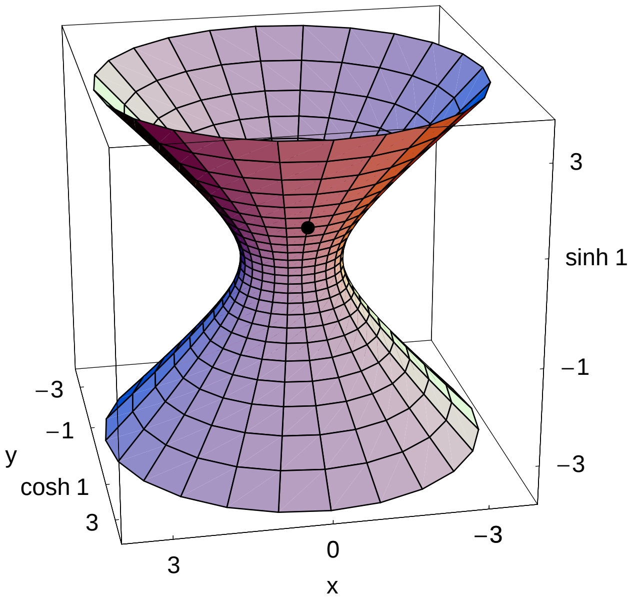
Půl hyperbolického válce $f(u,v) = (\cosh v, \sinh v, u)$, $(u,v) \in \langle -2,2\rangle^2$, $a = (0,1)$ a část hyperbolického paraboloidu $f(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, u^2)$, $(u,v) \in \langle -2,0\rangle \times \langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $a = (-1,0)$.

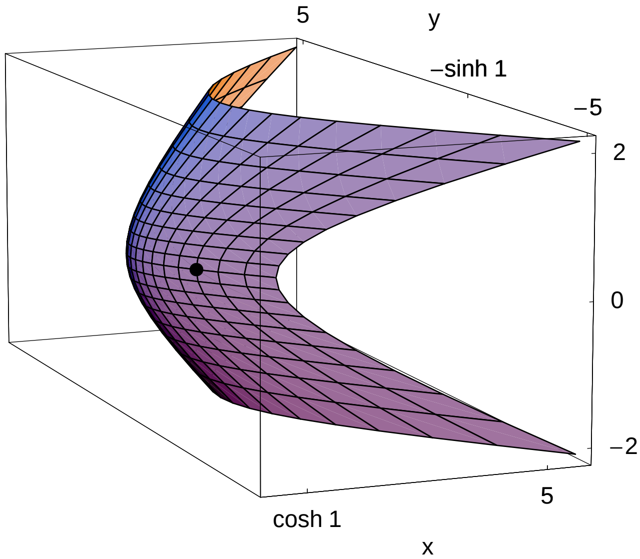




Cvičení 15.58 a 15.59 na str. 127

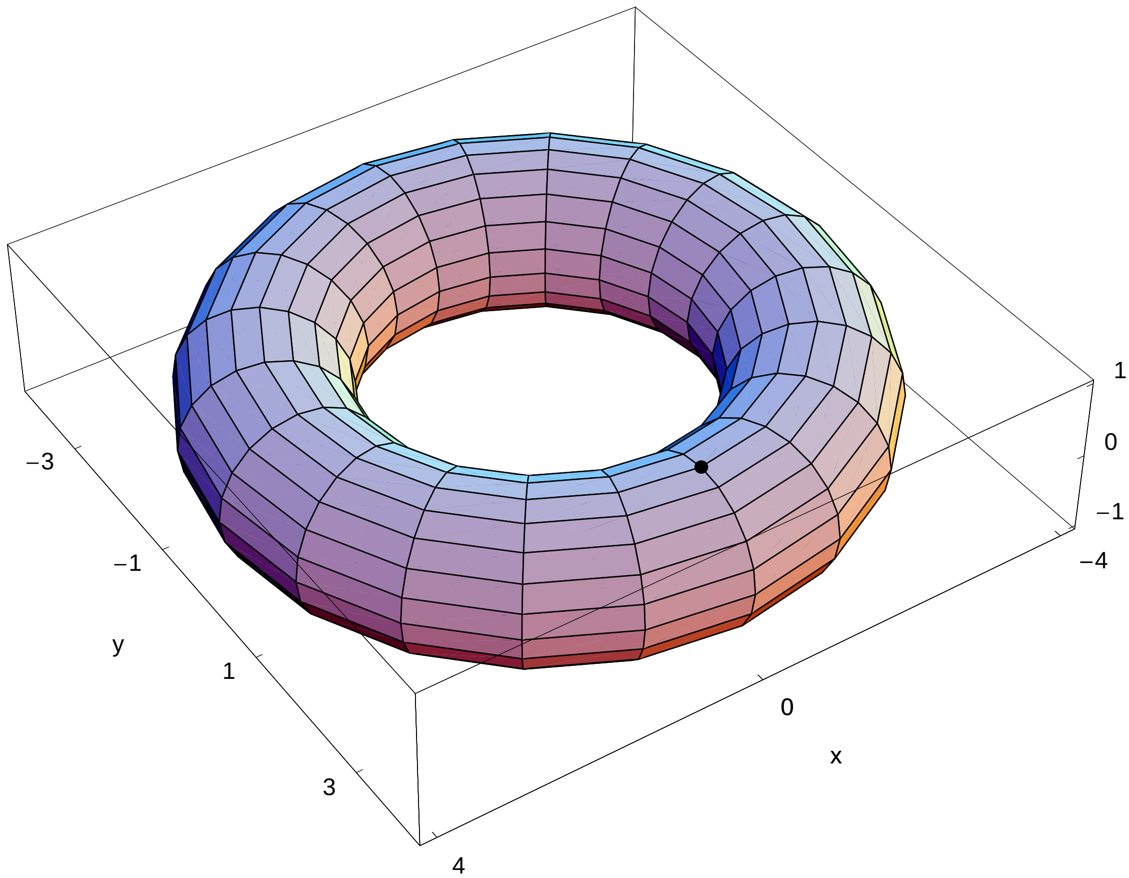
Jednodílný hyperboloid $f(u,v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, \sinh v)$, $(u,v) \in \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -2, 2\rangle$, $a = (\frac{1}{2}\pi, 1)$ a půl dvojdílného hyperboloidu $f(u,v) = (\cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v, \sinh v)$, $(u,v) \in \langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle^2$, $a = (-1, 0)$.





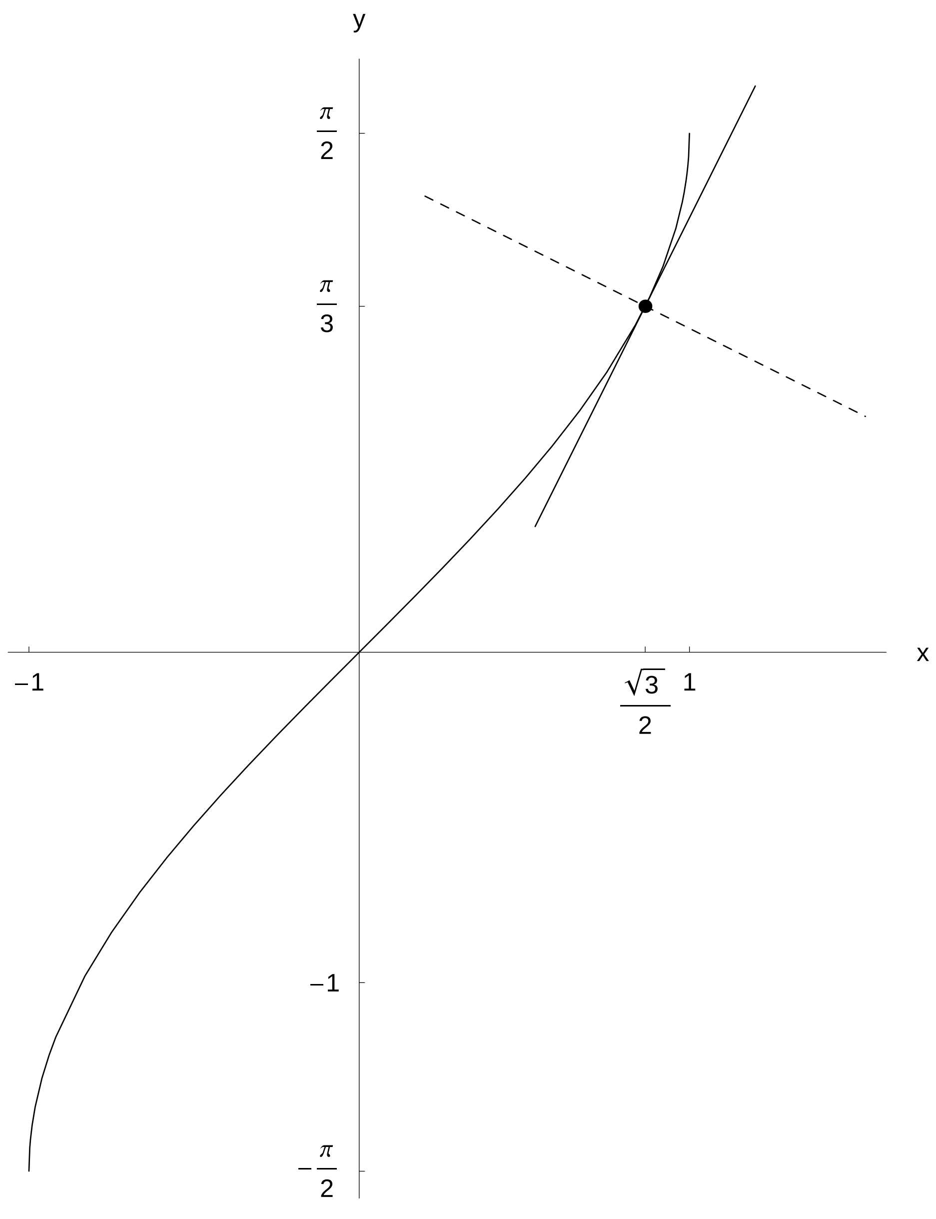
Cvičení 15.60 na str. 127

Anuloid $f(u, v) = ((3 + \cos u) \cos v, (3 + \cos u) \sin v, \sin u)$, $(u, v) \in \langle 0, 2\pi\rangle^2$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.



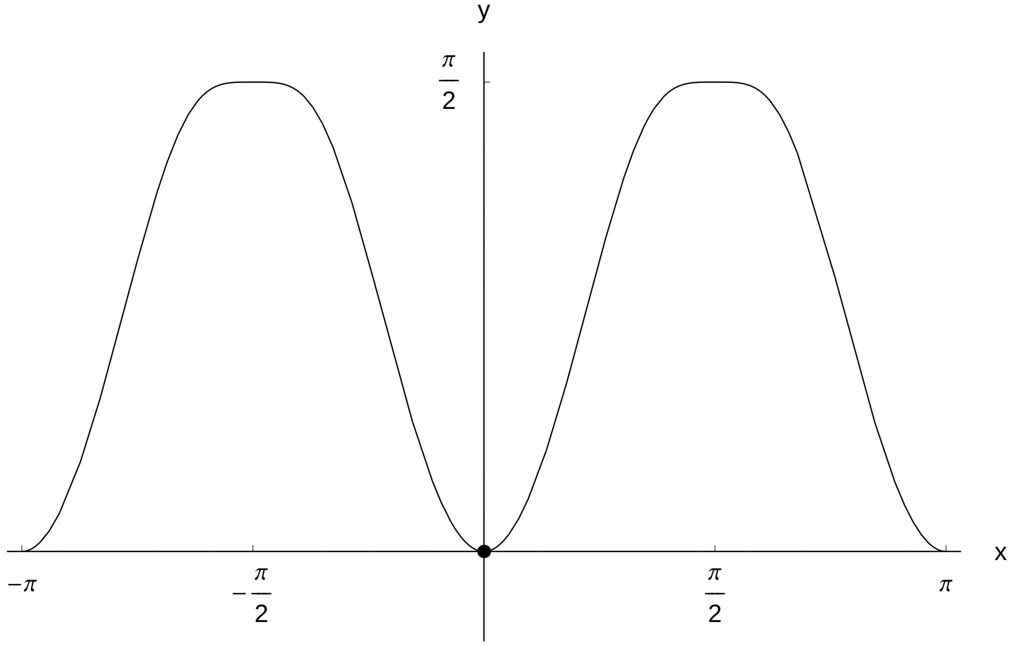
Cvičení 15.76 na str. 128

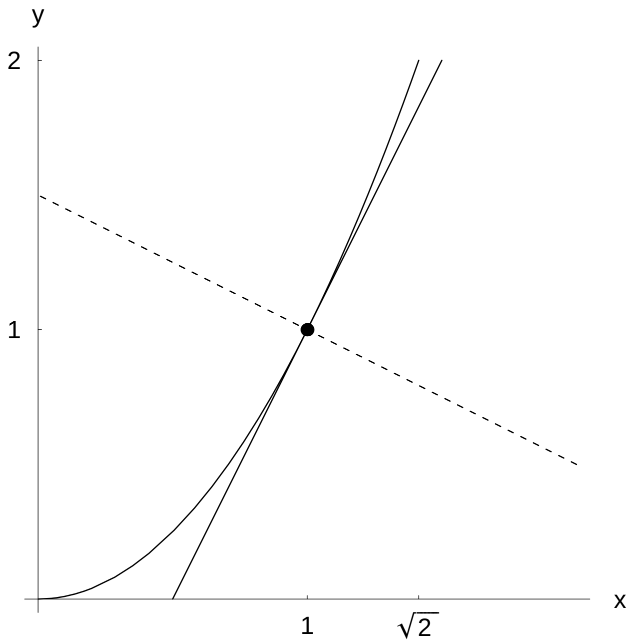
Tečna a normála křivky $y = \arcsin x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$, v bodě $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.



Cvičení 15.77 a 15.78 na str. 128 a 129

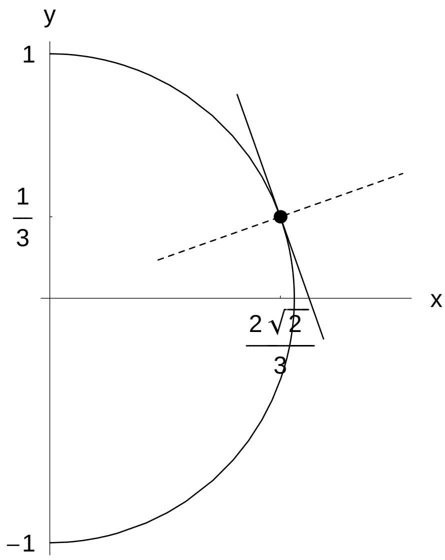
Tečna a normála křivky $y = \arccos(1 - \sin^4 x)^2$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$, v bodě 0 je identická s osou x a y; tečna a normála křivky $x = \sqrt{y}$, $y \in \langle 0, 2 \rangle$, v bodě 1.

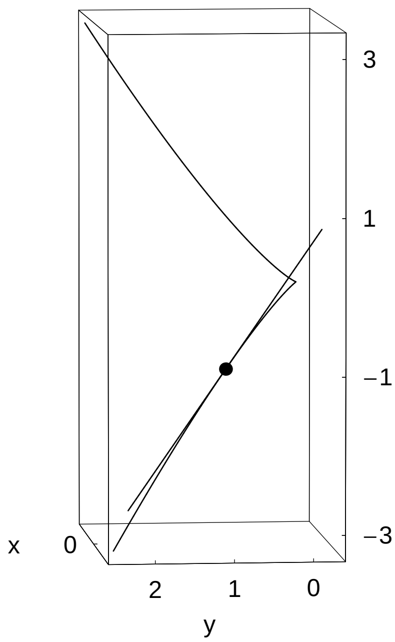




Cvičení 15.79 a 15.80 na str. 129

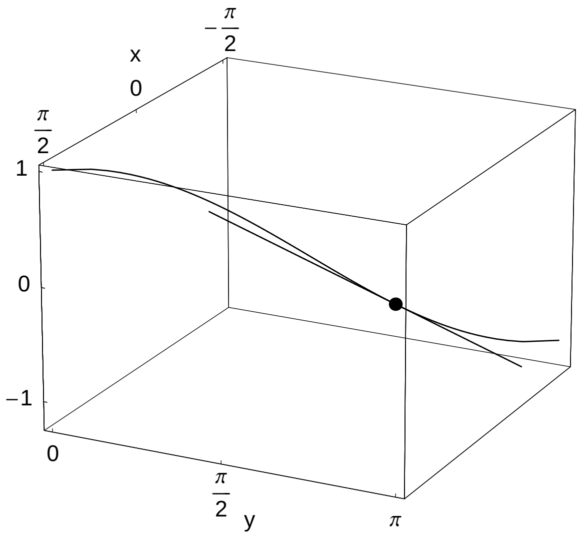
Tečna a normála křivky $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$, v bodě $\frac{1}{3}$ a tečna křivky $(y, z) = (x^{4/3}, x^{5/3})$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$, v bodě -1.

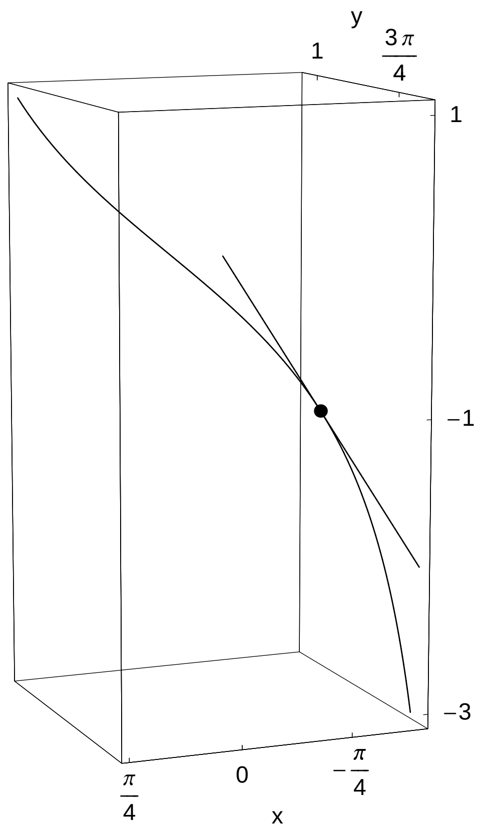




Cvičení 15.81 a 15.82 na str. 129

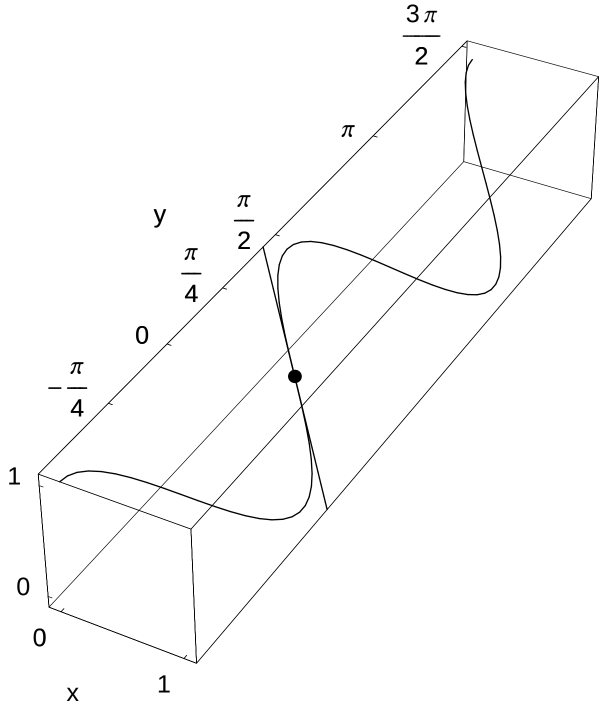
Tečna křivky $(x, y) = (\arcsin z, \arccos z)$, $z \in \langle -1, 1 \rangle$, v bodě $-\frac{1}{2}$ a křivky $(x, y) = (\operatorname{arctg} z, \operatorname{arccotg} z)$, $z \in \langle -3, 1 \rangle$, v bodě -1.

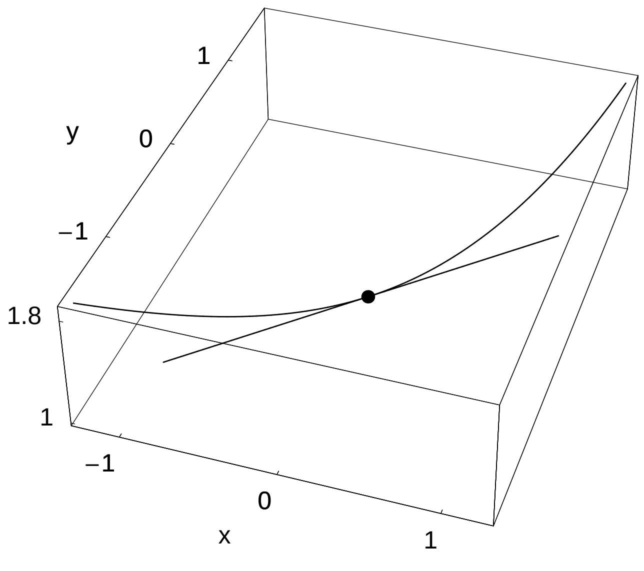




Cvičení 15.83 a 15.84 na str. 129

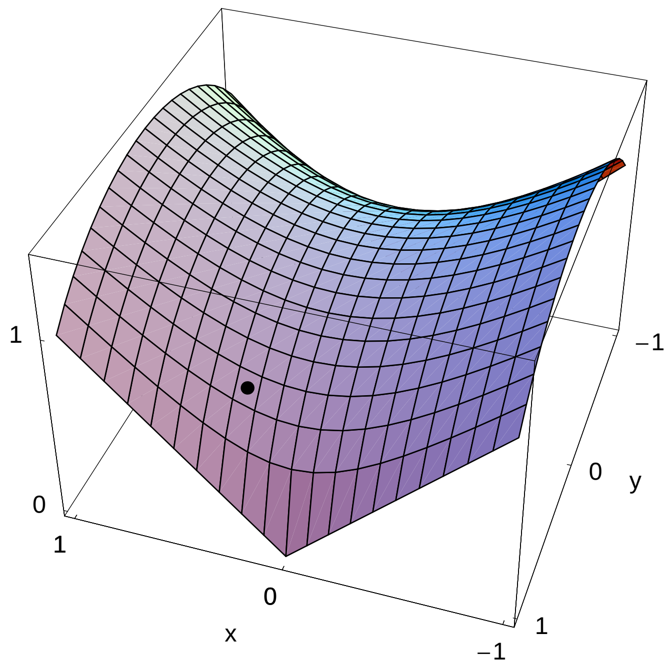
Tečna křivky $(x, z) = (\cos^2 y, \sin^2 y)$, $y \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle$, v bodě $\frac{1}{4}\pi$ a křivky $(y, z) = (\sinh x, \cosh x)$, $x \in \langle -\frac{5}{4}, \frac{5}{4} \rangle$, v bodě 0.

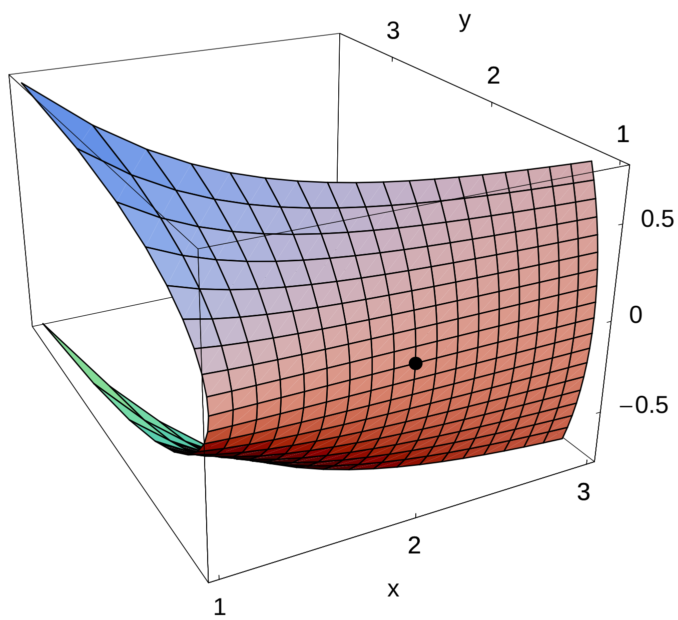




Cvičení 15.88 a 15.89 na str. 129

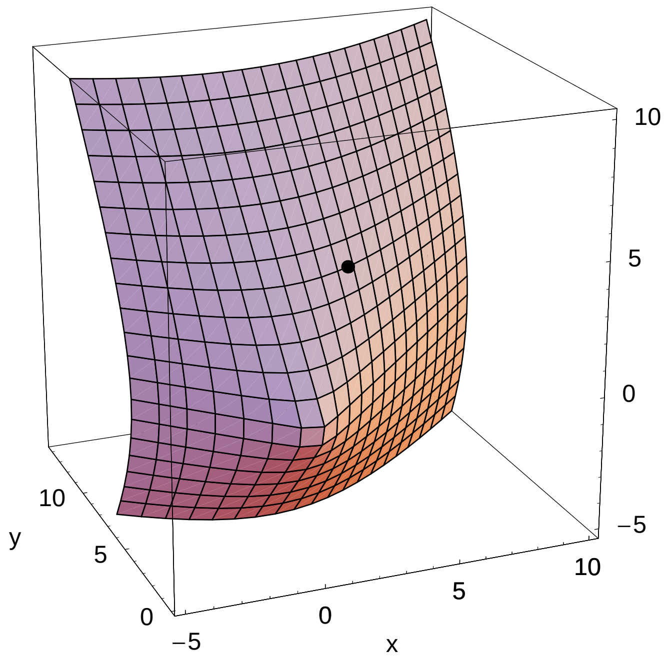
Část 1-dílného hyperboloidu $z = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$, $(x, y) \in \langle -1, 1\rangle^2$, $a = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ a plochy $y = (x^2 + z^2)/(x^2 - z^2)$, $(x, z) \in \langle 1, 3\rangle \times \langle -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\rangle$, $a = (2, 0)$.

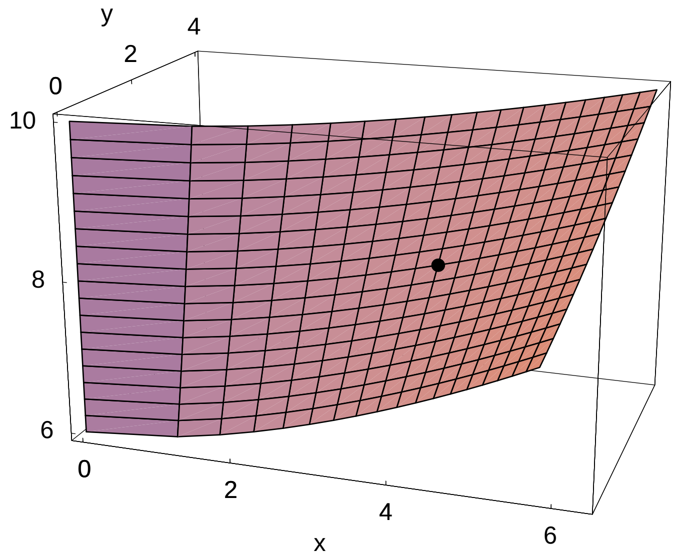




Cvičení 15.90 a 15.91 na str. 129

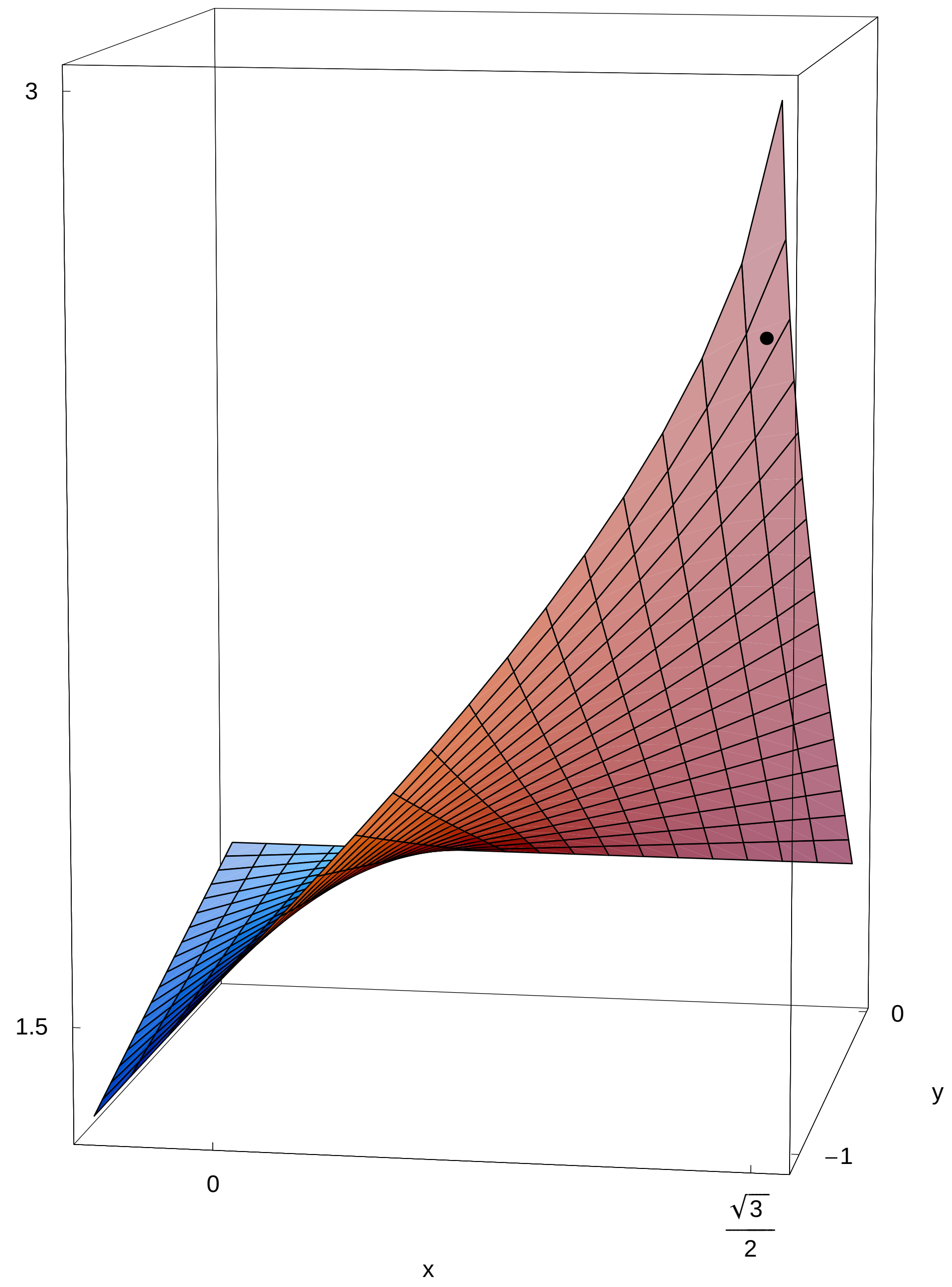
Část kuželu $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $(x, z) \in \langle -5, 10\rangle^2$, $a = (3, 4)$ a plochy $x = \sqrt{yz}$, $(y, z) \in \langle 0, 4\rangle \times \langle 6, 10\rangle$, $a = (2, 8)$.





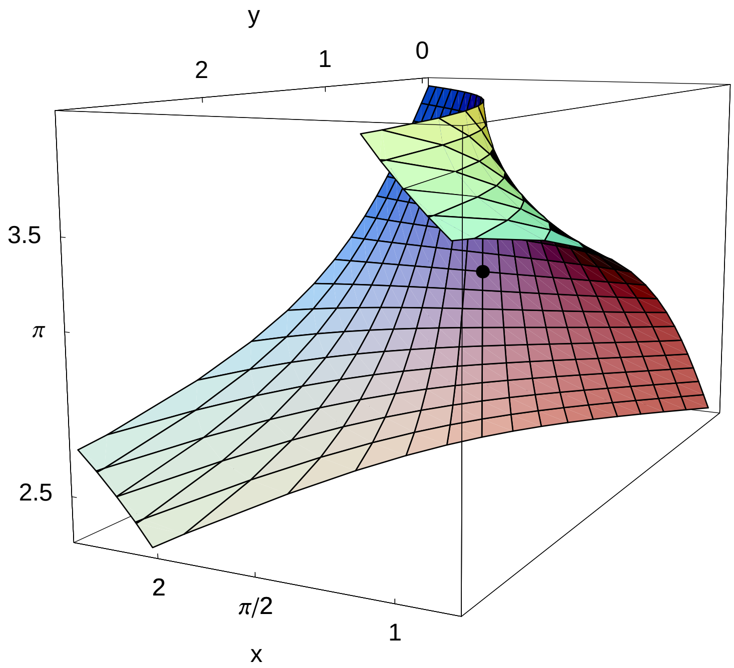
Cvičení 15.92 na str. 129

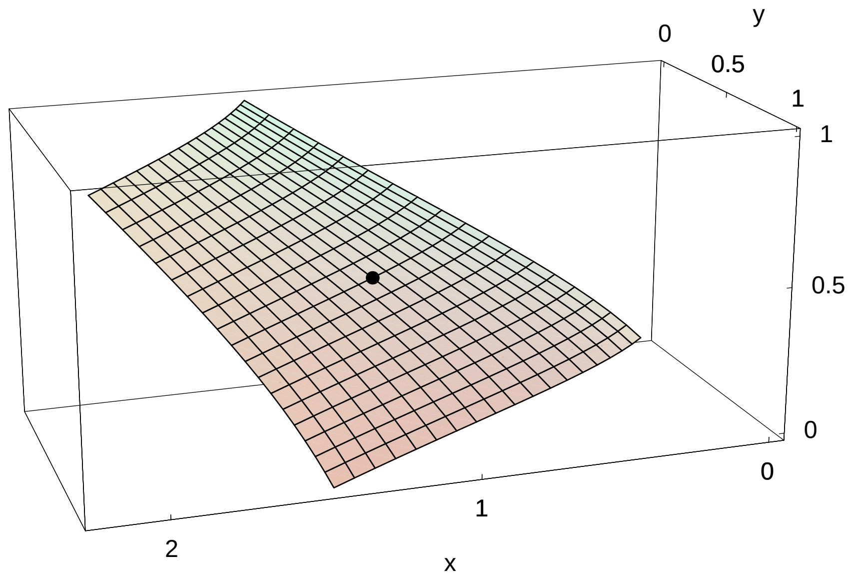
Plocha $z = \arccos(xy)$, $(x, y) \in \langle -0.2, 0.9\rangle \times \langle -1.1, 0\rangle$, $a = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, -1)$.



Cvičení 15.93 a 15.94 na str. 129

Plocha $y = \sin(x+z)/\sin(x-z)$, $(x,z) \in \langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle \times \langle \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \rangle$, $a = (\frac{1}{2}\pi, \pi)$ a
$x = \lg(1+y^2+z^2) + \operatorname{arctg}(y+z)$, $(y,z) \in \langle 0,1 \rangle^2$, $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



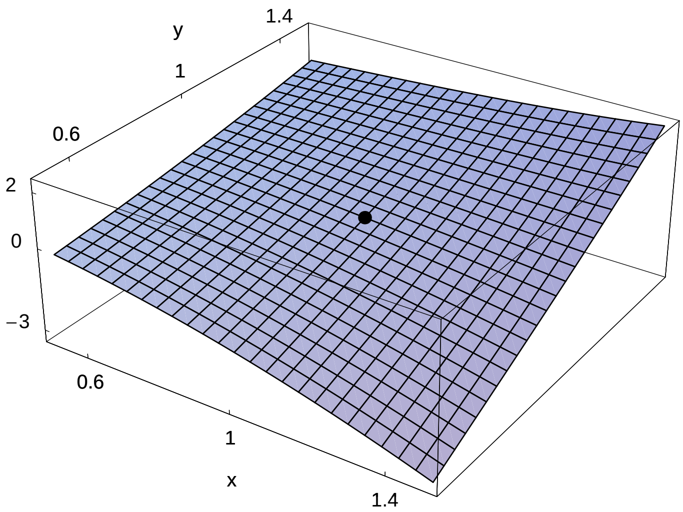


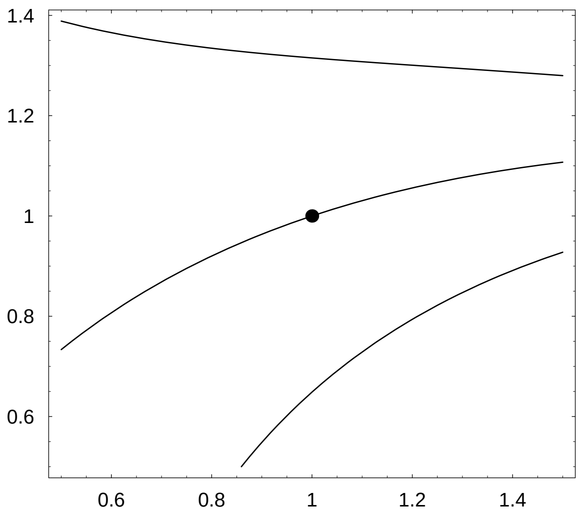
Obrázky ke kapitole 16

Příklad 16.3 na str. 146

$F(x, y) = y^2 e^{x-1} - x^2 e^{1-y}$, $(a, b) = (1, 1)$. Graf $F \,|\, \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \rangle^2$.

Na dolním obrázku shora dolů: části c-hladin s $c = 1, 0, -1$.[*])

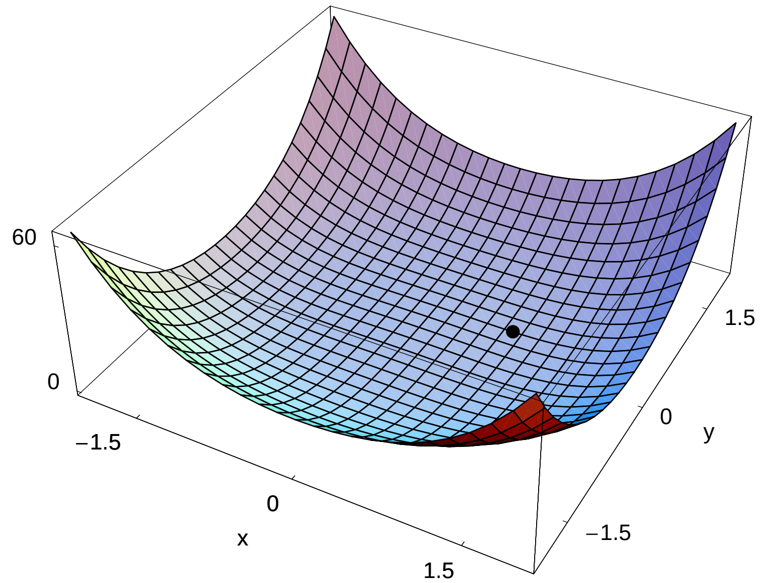


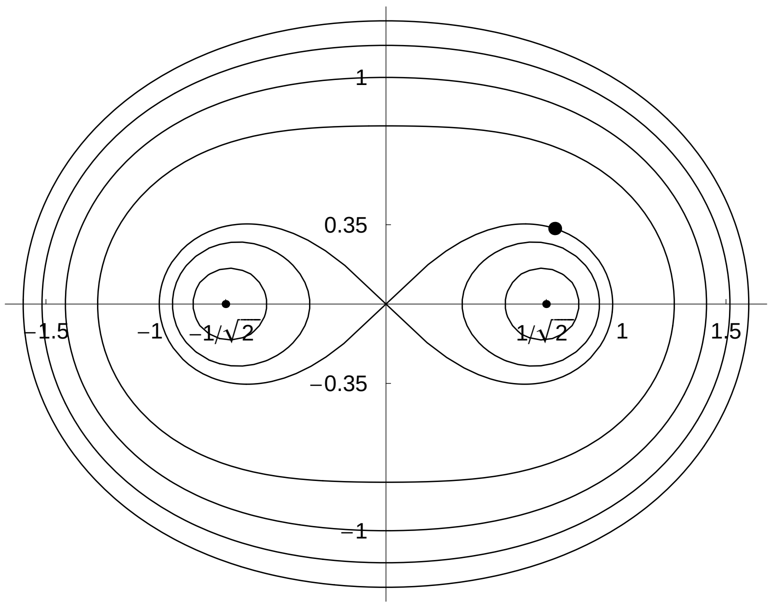


[*]) Připomeňme, že v geografické terminologii jsou hladiny vrstevnicemi zvlněného povrchu – v našem případě grafu funkce. Protože jejich studiem získáváme podrobnější informace o průběhu funkce, kreslíme zpravidla několik hladin, což vhodný program (např. Mathematica firmy Wolfram) umožňuje; jejich popis ve tvaru $y = g(x)$ nebo $x = h(y)$ však zpravidla není k dispozici.

Příklad 16.7 na str. 152

$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 + y^2 - x^2$, $(a,b) = (\frac{1}{3}\sqrt{5}, \frac{1}{3})$. Graf $F|\langle -2,2\rangle^2$. Její hladiny jsou Cassiniho křivky. Nulová hladina je lemniskata, uvnitř jejích smyček jsou c-hladiny s $c=-0.1$ a $c=-0.2$; (-0.25)-hladina se skládá z bodů $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$, c-hladiny s $c = 1,2,3,4$ obsahují lemniskatu uvnitř.

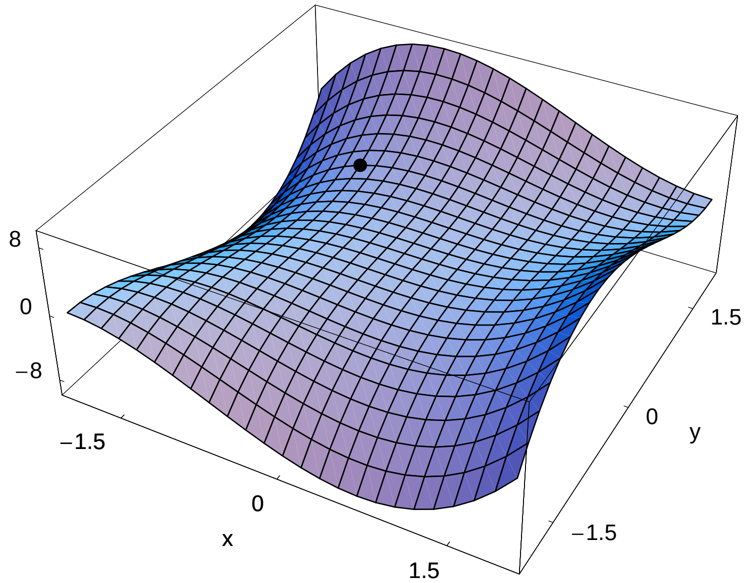


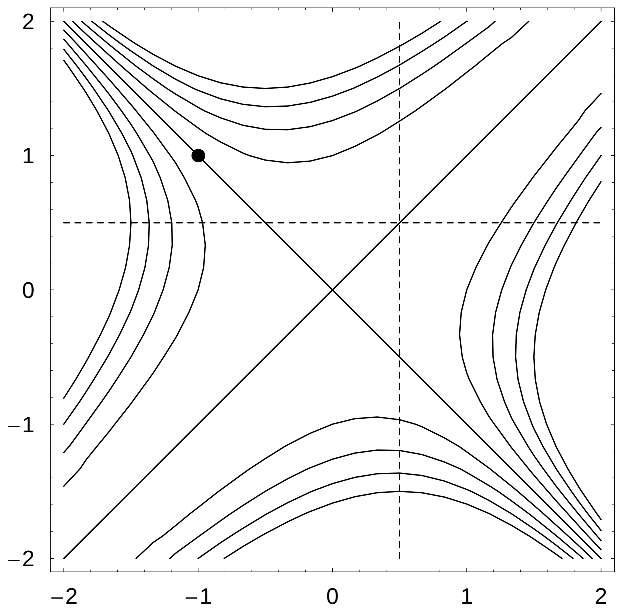


Cvičení 16.31 na str. 163

$F(x,y) = x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$, $(a,b) = (-1,1)$. Graf $F \,|\, \langle -2, 2\rangle^2$.

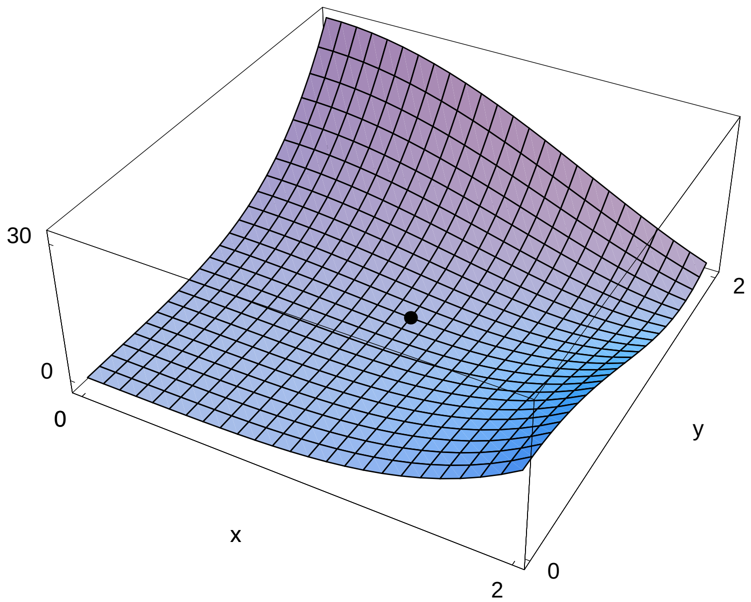
Nulová hladina je sjednocením přímek $y = \pm x$; úsečka $x = \frac{1}{2}$ protíná (počítáno shora dolů) po řadě c-hladiny s $c = 4, 3, 2, 1, 0, 0, -1, -2, -3, -4$. Totéž platí (počítáno zleva doprava) pro úsečku $y = \frac{1}{2}$.

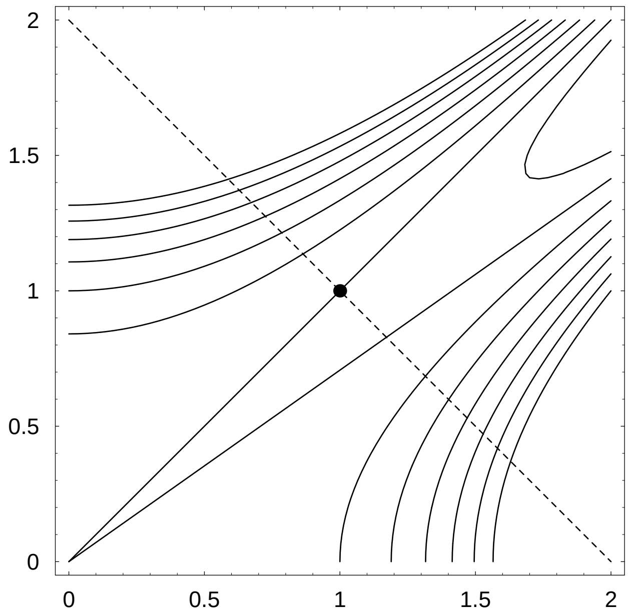




Cvičení 16.32 na str. 163

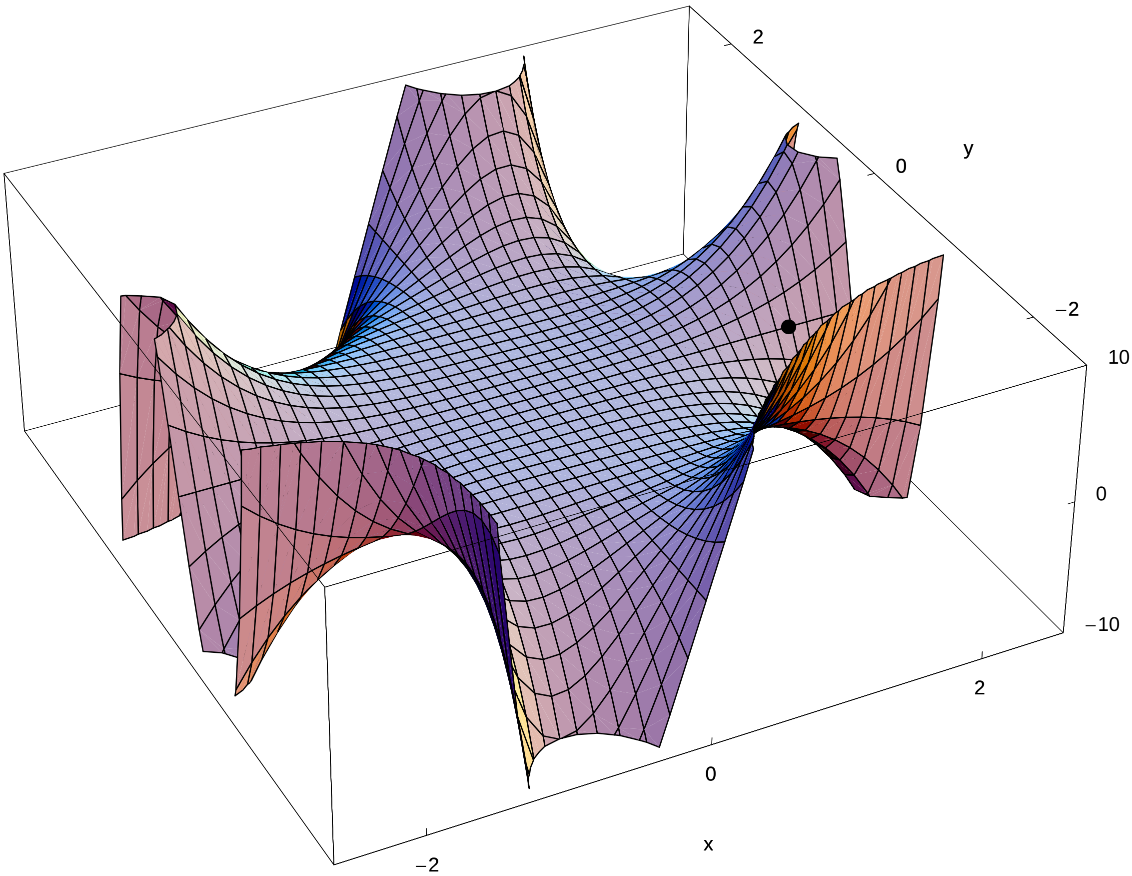
$F(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + 2y^4$, $(a,b) = (1,1)$. Graf $F\,|\,\langle 0,2\rangle^2$.
Nulová hladina je sjednocením přímek $y = \pm x$ a $y = \pm x/\sqrt{2}$;
úsečka $y = 2 - x$ protíná (počítáno shora dolů) po řadě c-hladiny s $c = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$;
v úhlu sevřeném přímkami $y = x$ a $y = x/\sqrt{2}$ leží část (-1)-hladiny.





Cvičení 16.33 na str. 164

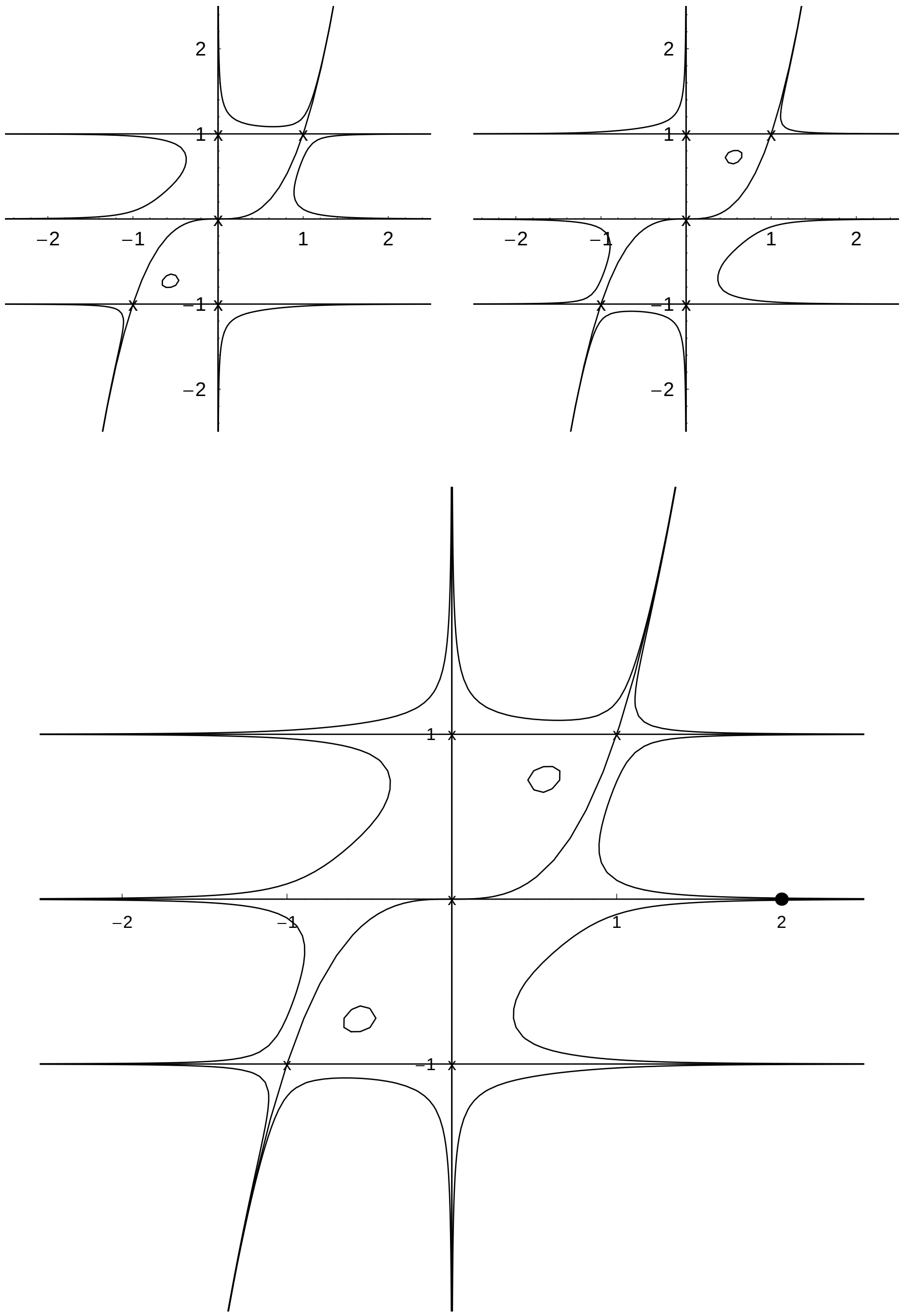
$F(x,y) = x\,(y^4 - y^2) - x^4\,(y^3 - y)$, $(a,b) = (2,0)$. Graf $F\,|\,\langle -2.5, 2.5\rangle^2$. *)



*) Obor hodnot je restringován na interval $\langle -10, 10\rangle$. Ilustrace Cvičení 16.33 pokračuje na další stránce.

Pokračování Cvičení 16.33 na str. 164

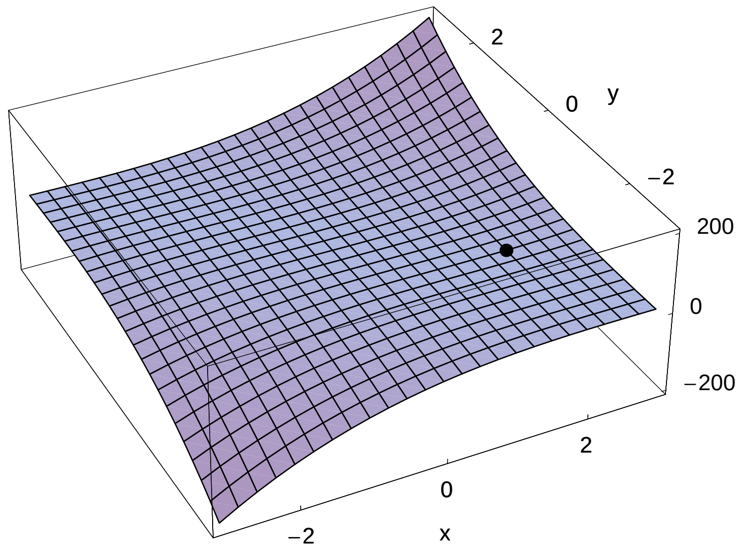
Nulová hladina funkce F je sjednocením souřadnicových os, přímek $y = \pm 1$ a křivky $y = x^3$.
Horní řádek vlevo: c-hladiny s $c = 0$ a $c = 0.1$, vpravo s $c = 0$ a $c = -0.1$.
Dolní řádek: c-hladiny s $c = 0$ a $c = \pm 0.1$. (Křížkem jsou označeny stacionární body.)

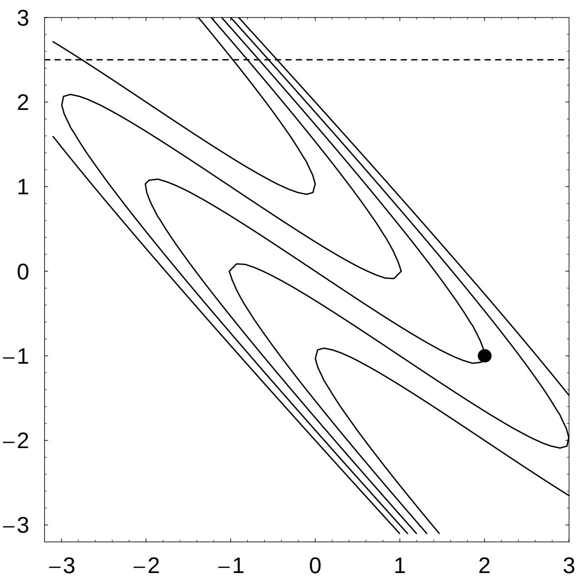


Cvičení 16.34 na str. 164

$F(x,y) = (x+y)^3 - 2x - 3y$, $(a,b) = (2,-1)$. Graf $F \,|\, \langle -3, 3 \rangle^2$.

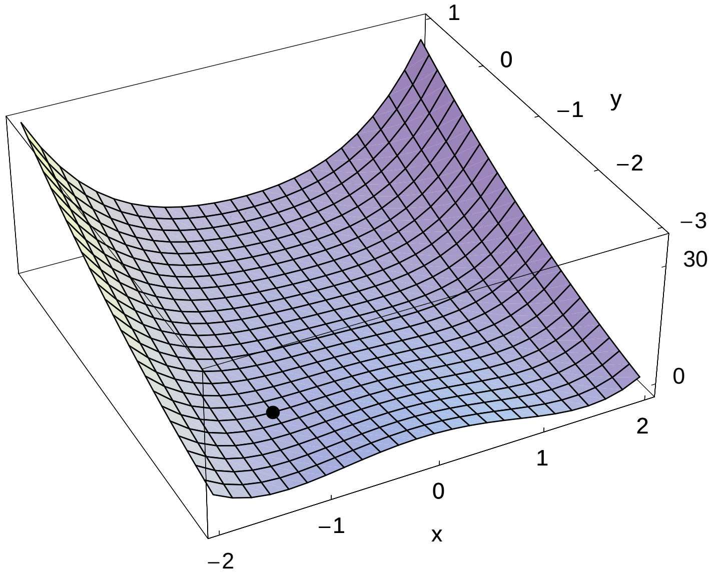
Úsečka $y = 2.5$ protíná (počítáno zleva doprava) po řadě c-hladiny s $c = -2, -2, -1, 0, 1, 2$.

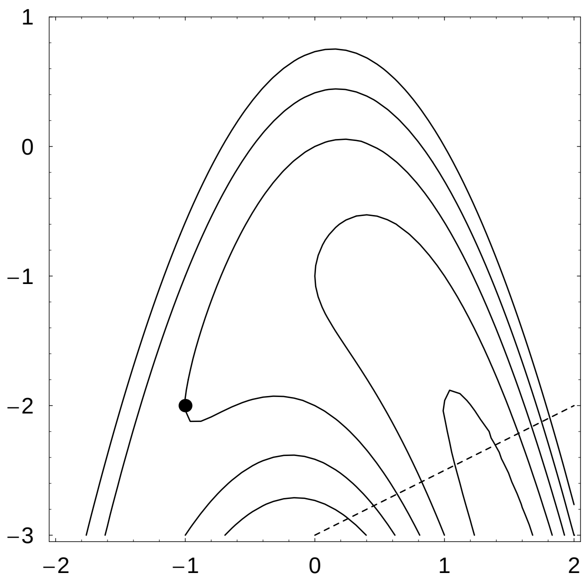




Cvičení 16.35 na str. 164

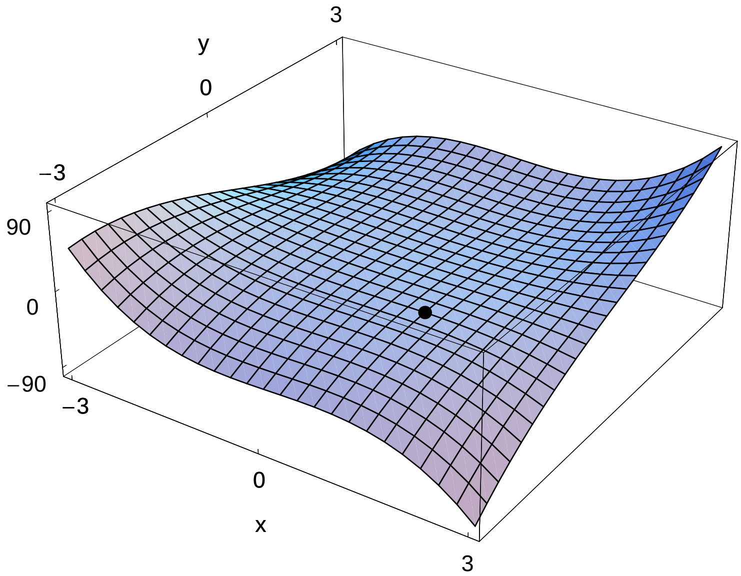
$F(x, y) = (x^2 + y)^2 + 2x^2 + 2y - x$, $(a, b) = (-1, -2)$. Graf $F \,|\, \langle -2, 2\rangle \times \langle -3, 1\rangle$.
Úsečka s popisem $y = \frac{1}{2}x - 3$, $x \in \langle 0, 2\rangle$ protíná (počítáno zleva doprava) po řadě c-hladiny s $c = 2, 1, 0, -1, -2, -2, -1, 0, 1, 2$.

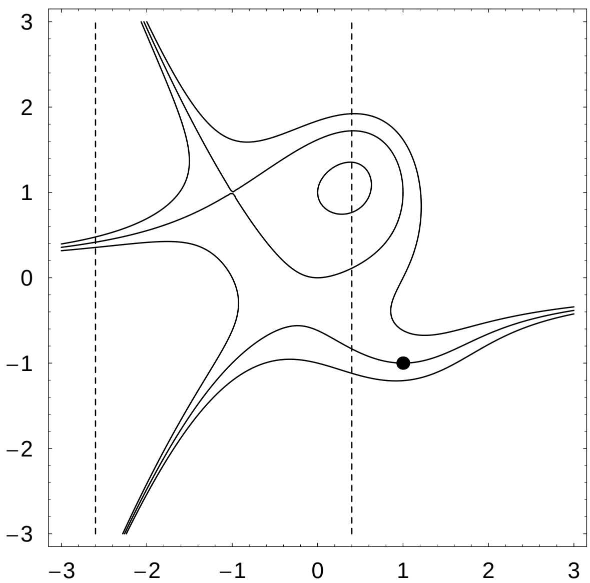




Cvičení 16.36 na str. 164

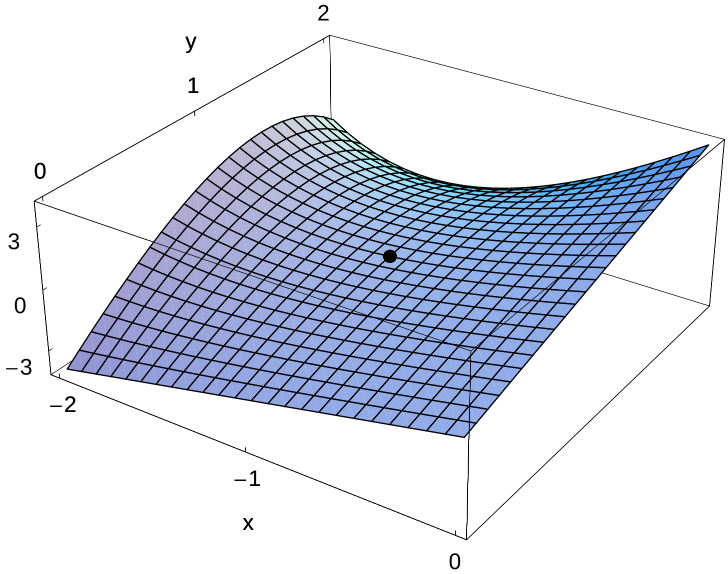
$F(x,y) = x^3y + x^2 - xy - y - y^2 + y^3$, $(a,b) = (1,-1)$. Graf $F \,|\, \langle -3, 3\rangle^2$.
Úsečka $x = -2.6$ protíná (počítáno shora dolů) po řadě c-hladiny s c rovným $-1, 0, 1$,
úsečka $x = 0.4$ hladiny $1, 0, -1, -1, 0, 0, -1$.

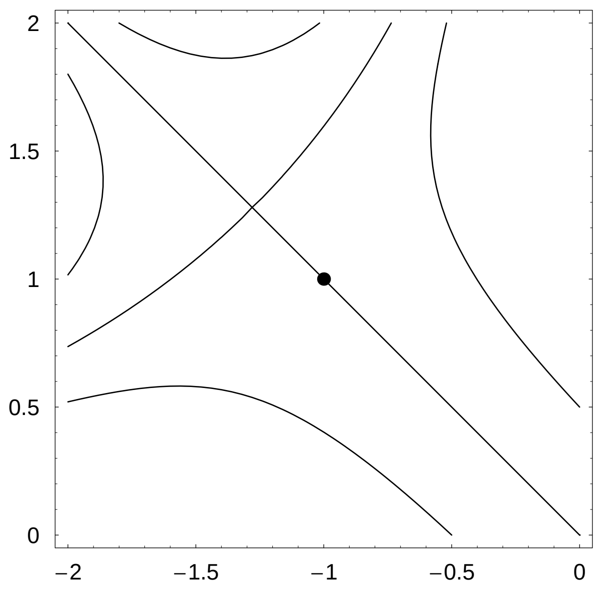




Cvičení 16.37 na str. 164

$F(x,y) = xe^y + ye^{-x} + x + y$, $(a,b) = (-1,1)$. Graf $F \,|\, \langle -2, 0 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle$.
Nulová hladina obsahuje přímku $y = -x$, na níž leží stacionární bod $\doteq (-1.27846, 1.27846)$;
horní a dolní křivka je částí (-1)-hladiny, levá a pravá křivka částí 1-hladiny.

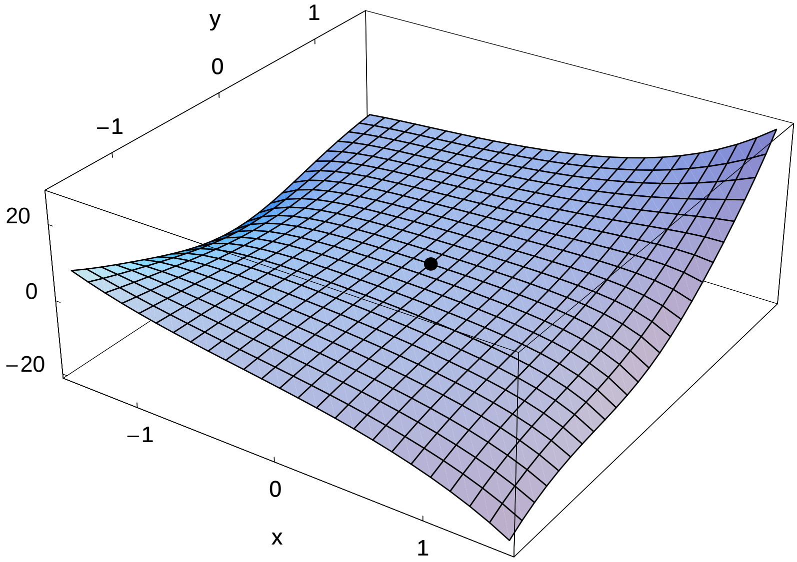


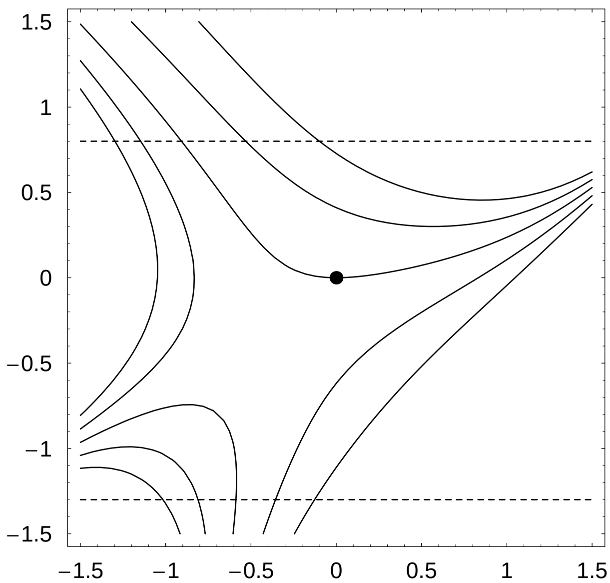


Cvičení 16.38 na str. 164

$F(x,y) = e^{x+y} - e^{x-y} + e^{xy} - e^{x^2-y^2}$, $(a,b) = (0,0)$. Graf $F \,|\, \langle -1.5, 1.5 \rangle^2$.

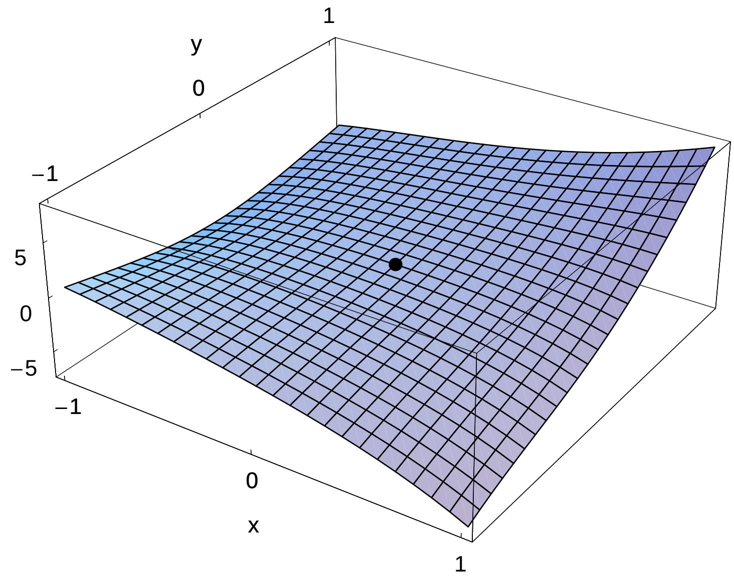
Úsečka $y = 0.8$ protíná (počítáno zleva doprava) po řadě c-hladiny s c rovným $-2, -1, 0, 1, 2$; úsečka $y = -1.3$ je protíná v opačném pořadí.

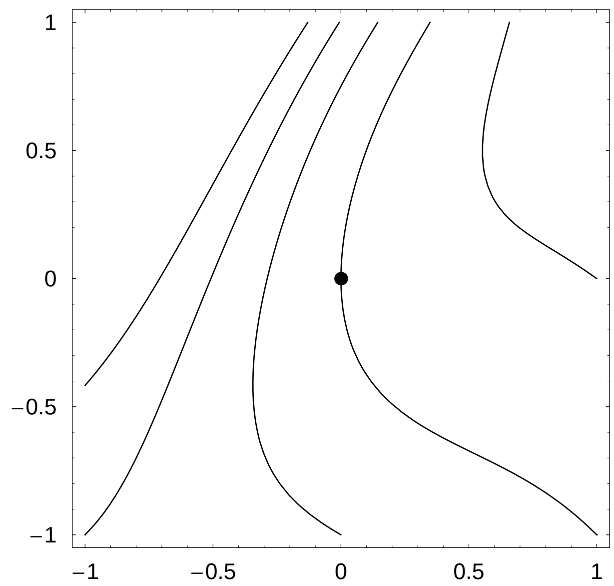




Cvičení 16.39 na str. 164

$F(x,y) = (y+1)\,e^{1-x^2} + (x-1)\,e^{y+1}$, $(a,b) = (0,0)$. Graf $F\,|\,\langle -1,1\rangle^2$.
Křivky (počítáno zleva doprava) jsou po řadě částí c-hladin s c rovným $-3,-2,-1,0,1$.

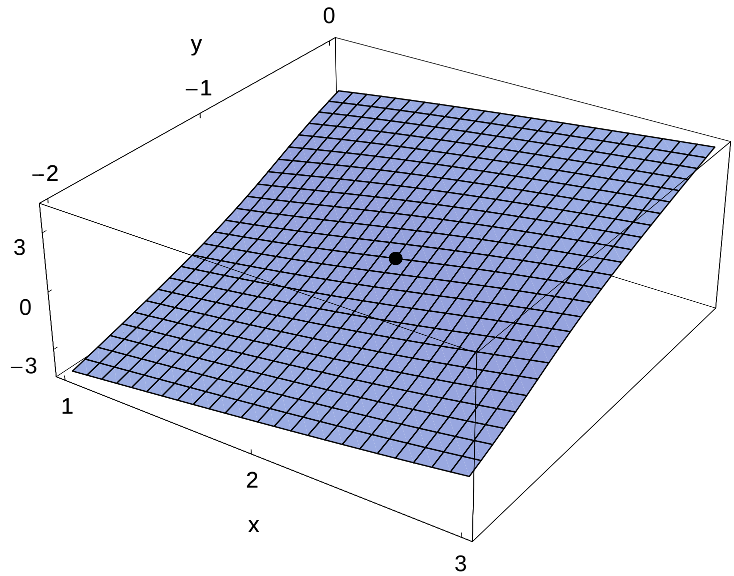


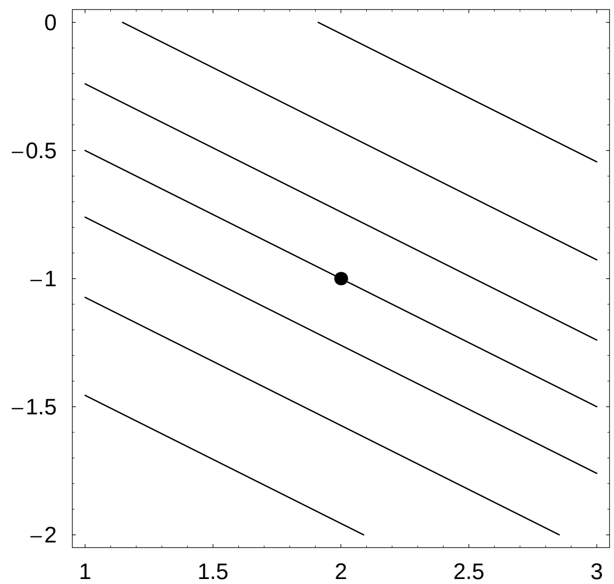


Cvičení 16.40 na str. 164

$F(x,y) = \operatorname{arctg}(x+2y) + x + 2y$, $(a,b) = (2,-1)$. Graf $F\,|\,\langle 1,3\rangle \times \langle -2,0\rangle$.

Křivky (počítáno shora dolů) jsou po řadě částí c-hladin s c rovným $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$.

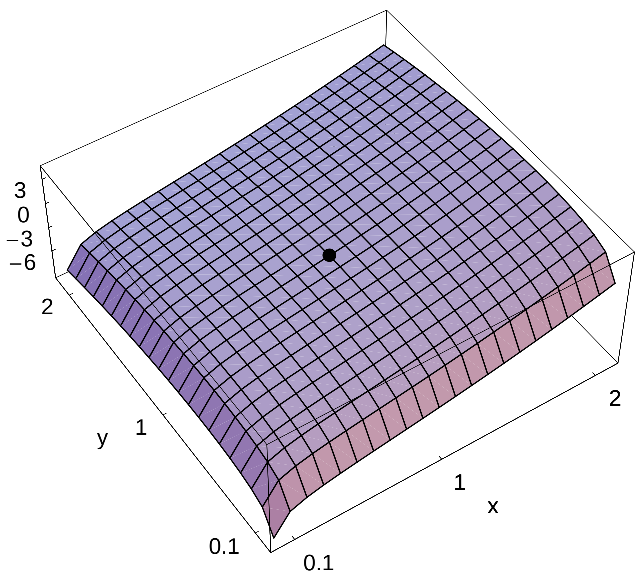


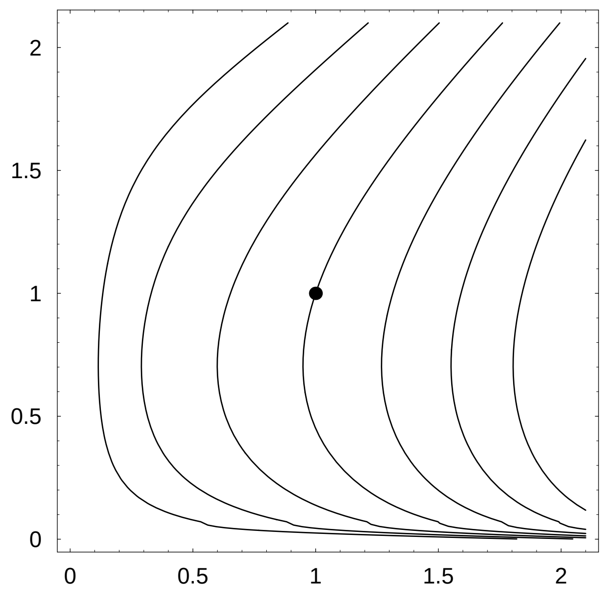


Cvičení 16.41 na str. 164

$F(x,y) = \lg(xy) + x^2 - y^2$, $(a,b) = (1,1)$. Graf $F \,|\, \langle 0.01, 2.1\rangle^2$.

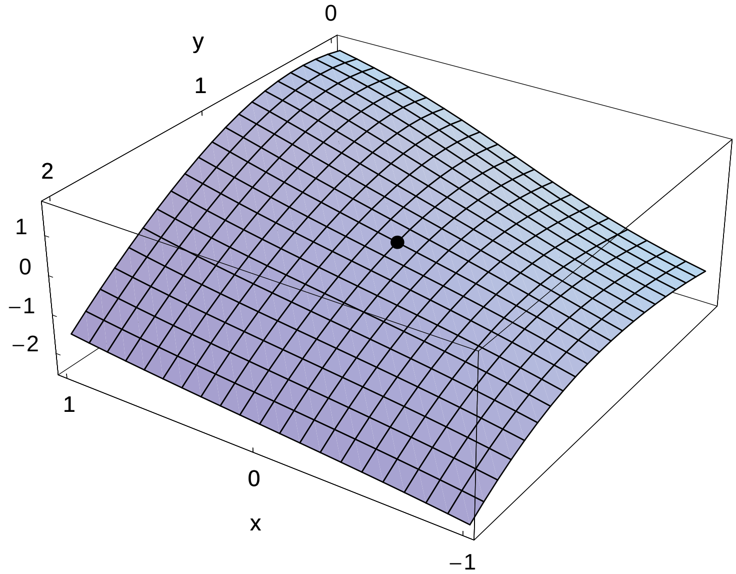
Křivky (počítáno zleva doprava) jsou po řadě částí c-hladin s c rovným $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

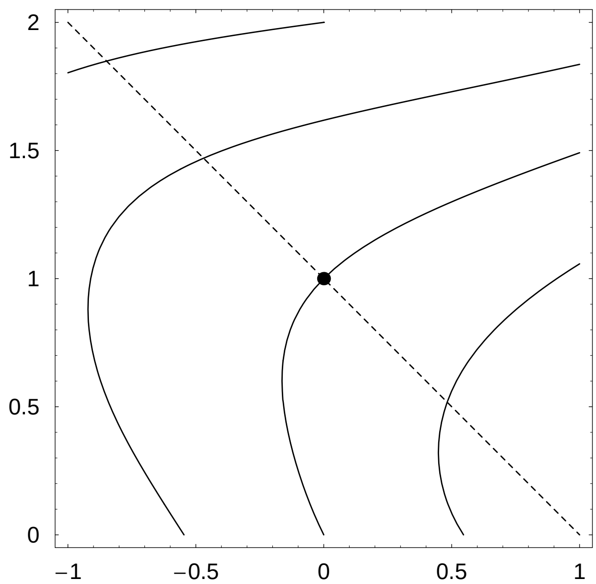




Cvičení 16.42 na str. 164

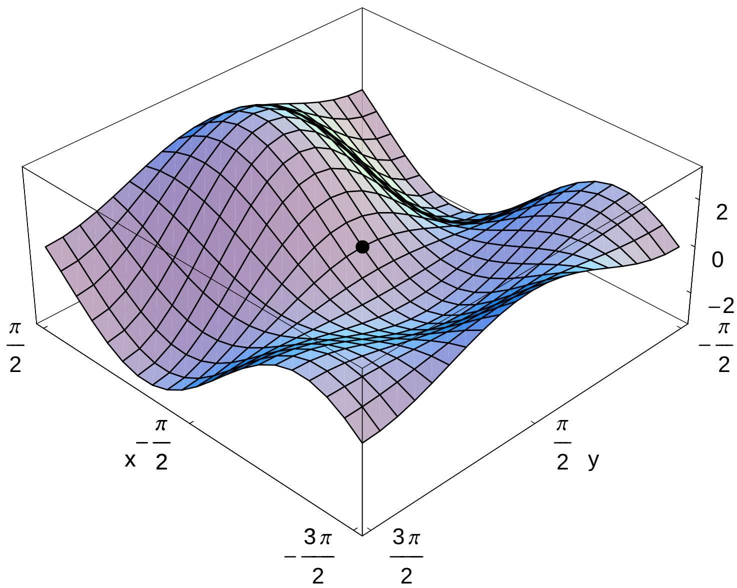
$F(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y) + \operatorname{arctg}(x-y) + y - y^2$, $(a,b) = (0,1)$. Graf $F \mid \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.
Křivky (po diagonále shora dolů) jsou po řadě částí c-hladin s c rovným $-2, -1, 0, 1$.

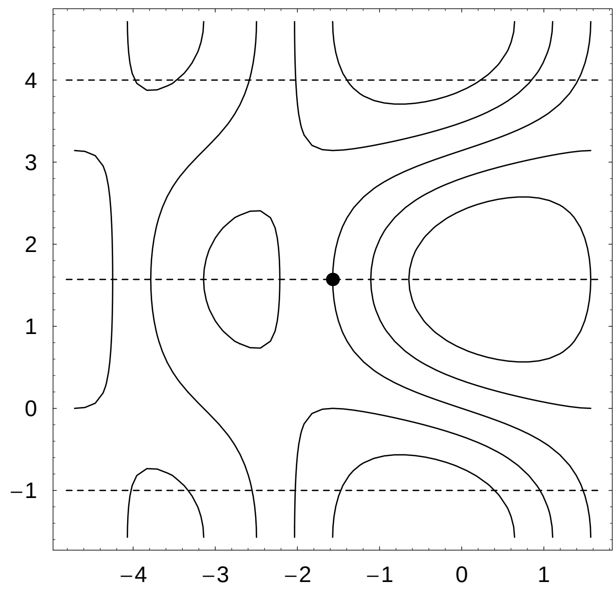




Cvičení 16.43 na str. 164

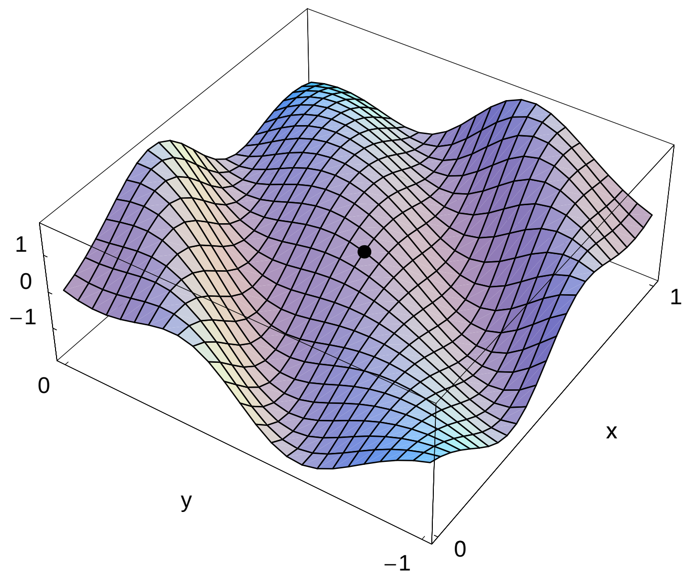
$F(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x-y) + \sin(x+y)$, $(a,b) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Graf $F\,|\,\langle -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle \times \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$.
Zleva doprava: úsečky $y = 4$ a $y = -1$ protínají po řadě c-hladiny s $c = 1, 1, 0, -1, -2, -2, -1, 0$,
na úsečce $y = \frac{1}{2}\pi$ jsou to po řadě c-hladiny s $c = 1, 0, -1, -1, 0, 1, 2, 2$.

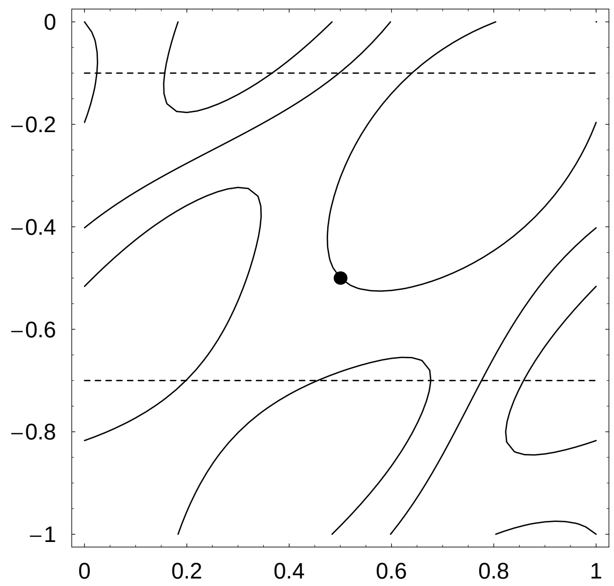




Cvičení 16.44 na str. 164

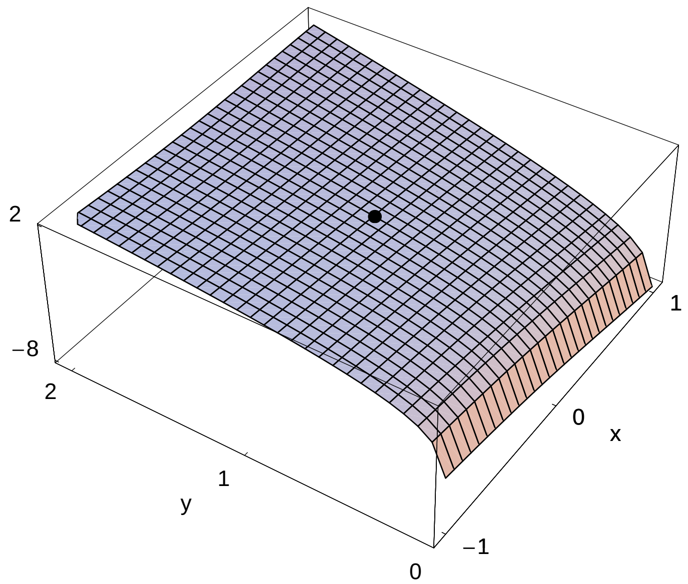
$F(x,y) = \sin(\sin(\pi(x+y))) + \sin(\pi\cos(\pi(x-y)))$, $(a,b) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Graf $F \,|\, \langle 0,1\rangle \times \langle -1,0\rangle$.
Na úsečce $y = -0.1$ (počítáno zleva doprava) leží po řadě body c-hladin s $c = 0,1,1,0,0$, na úsečce $y = -0.7$ body c-hladin s $c = -1,-1,-1,0,1$; malý oblouk v pravém dolním rohu je částí 0-hladiny.

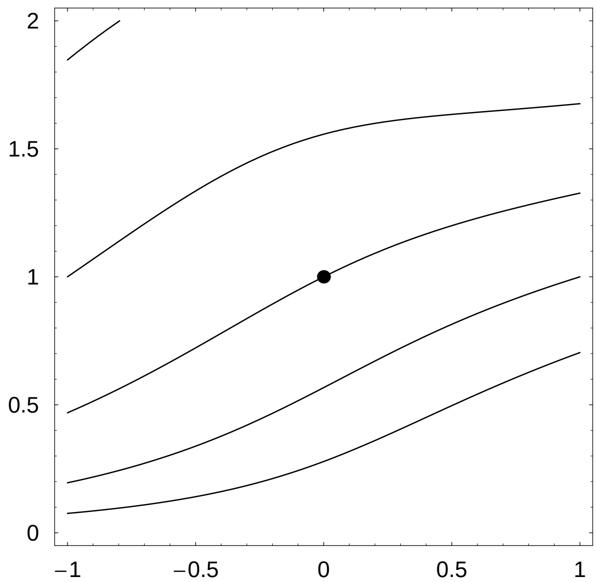




Cvičení 16.45 na str. 164

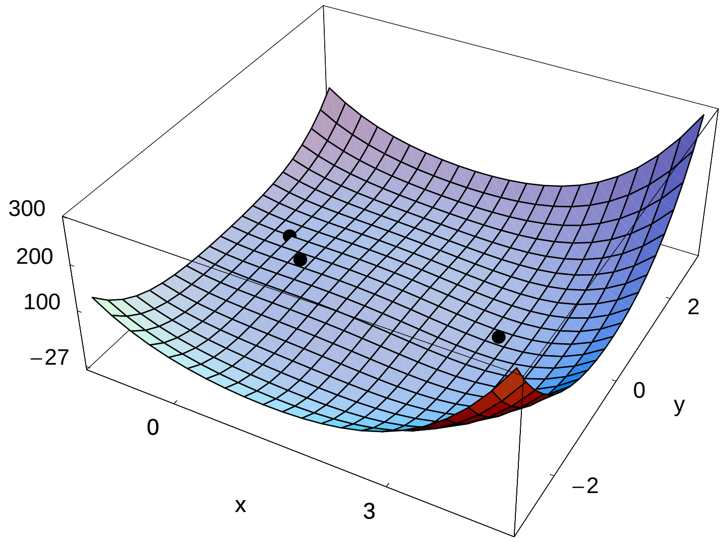
$F(x,y) = (y-1)\,e^{\operatorname{arctg} x} - x + \lg y$, $(a,b) = (0,1)$. Graf $F \,|\, \langle -1,1\rangle \times \langle 0.01, 2\rangle$.
Shora dolů: části c-hladin s $c = 2, 1, 0, 1, 2$.

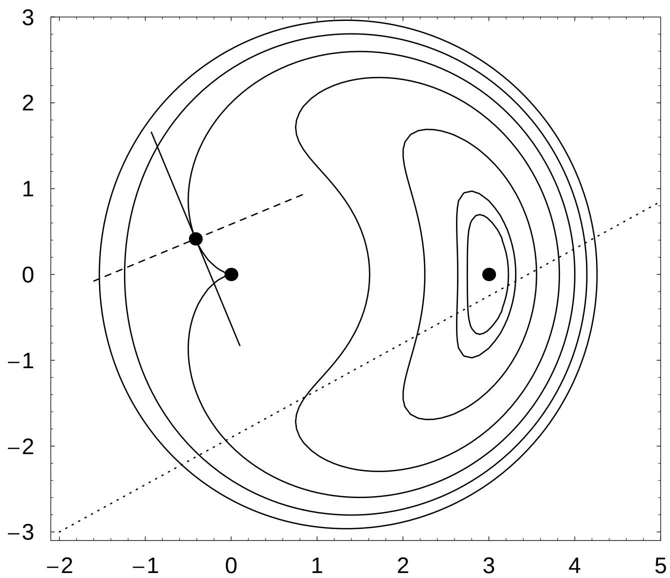




Cvičení 16.81 na str. 167

$F(x,y) = (x^2 + y^2 - 2x)^2 - 4(x^2 + y^2)$, $c = (1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$. Graf $F \,|\, \langle -\frac{6}{5}, \frac{9}{2} \rangle \times \langle -3, 3 \rangle$. Nulová hladina je kardioida. Tečkovaná úsečka protíná (při postupu zleva doprava) po řadě c-hladiny s $c = 20, 10, 0, -10, -20, -25, -26, -25, -20, -10, 0, 10, 20$; $F(3,0) = \min F = -27$. Vyznačeny jsou body odpovídající singulárnímu bodu $(0,0)$, bodu c a minimu $-27 = F(3,0)$.



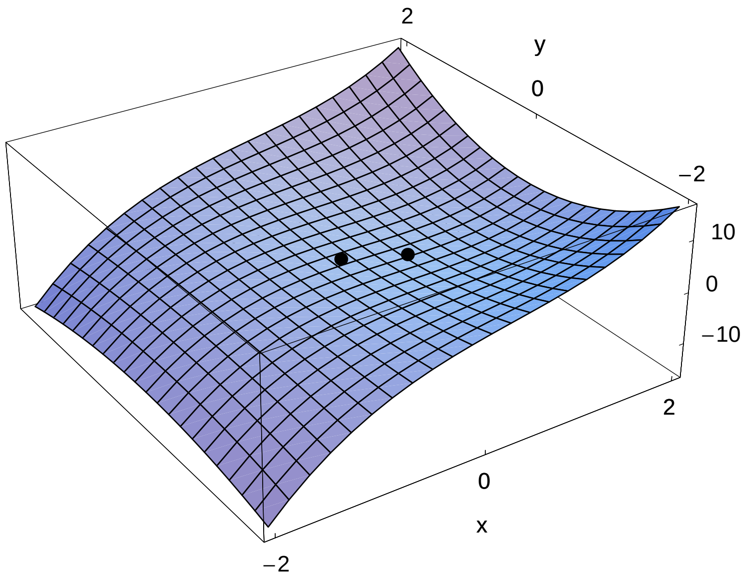


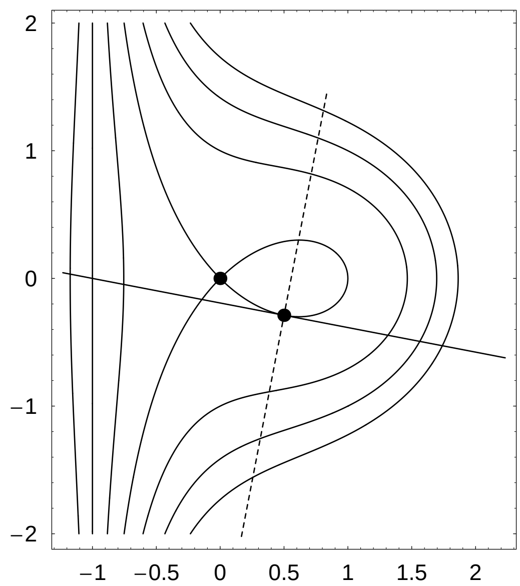
Cvičení 16.82 na str. 167

$F(x,y) = (x+1)y^2 + (x-1)x^2$, $c = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\sqrt{3})$. Graf $F\,|\,\langle -2, 2\rangle^2$.

Normála (při postupu zleva doprava) protíná po řadě c-hladiny s $c = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3$.

Vyznačen je singulární bod $(0,0)$ a bod c.

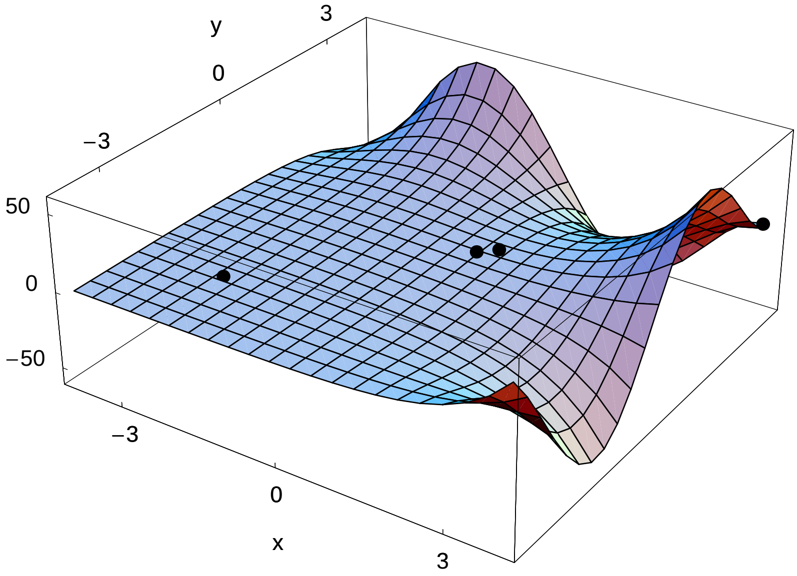


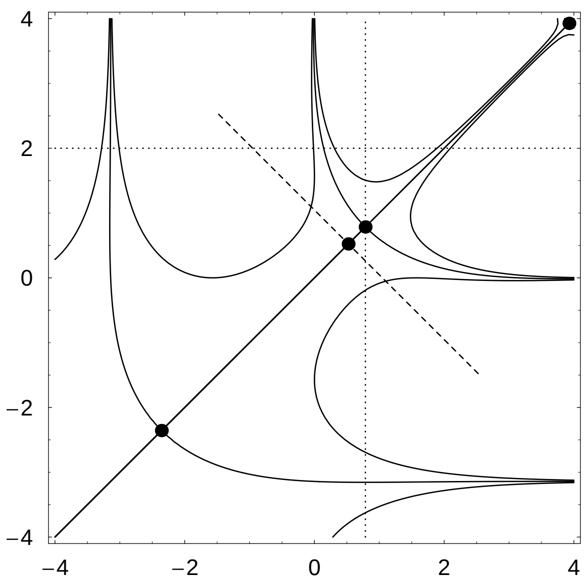


Cvičení 16.83 na str. 167

$F(x,y) = e^x \sin y - e^y \sin x$, $c = (\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$. Graf $F \,|\, \langle -4, 4\rangle^2$.

Přímka $y = x$ je částí 0-hladiny, která se rozvětvuje v singulárních bodech $(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ a $(\frac{5}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$ (vyznačených spolu s bodem c na obrázcích). Úsečka $y = 2$ protíná (zleva doprava) po řadě c-hladiny s $c = -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1$, úsečka $x = \frac{1}{4}\pi$ (shora dolů) c-hladiny s $c = -1, 0, -1, -1, 0, 1$.

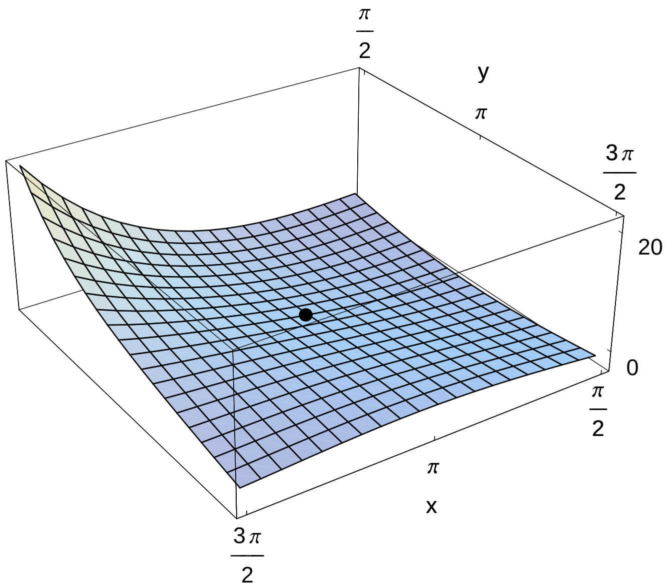


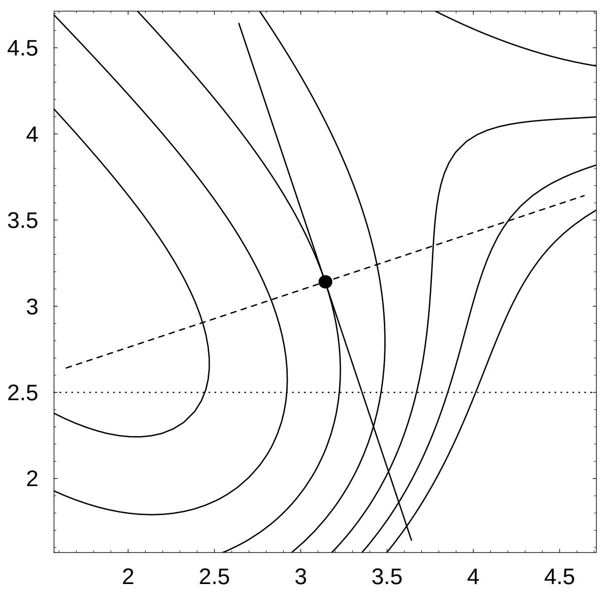


Cvičení 16.84 na str. 167

$F(x, y) = e^{x-y} + 2\sin(x + y) - 1$, $c = (\pi, \pi)$. Graf $F \,|\, \langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \rangle^2$.

Úsečka $y = 2.5$ protíná (počítáno zleva doprava) po řadě c-hladiny s $c = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$; oblouk vpravo nahoře je částí 1-hladiny.

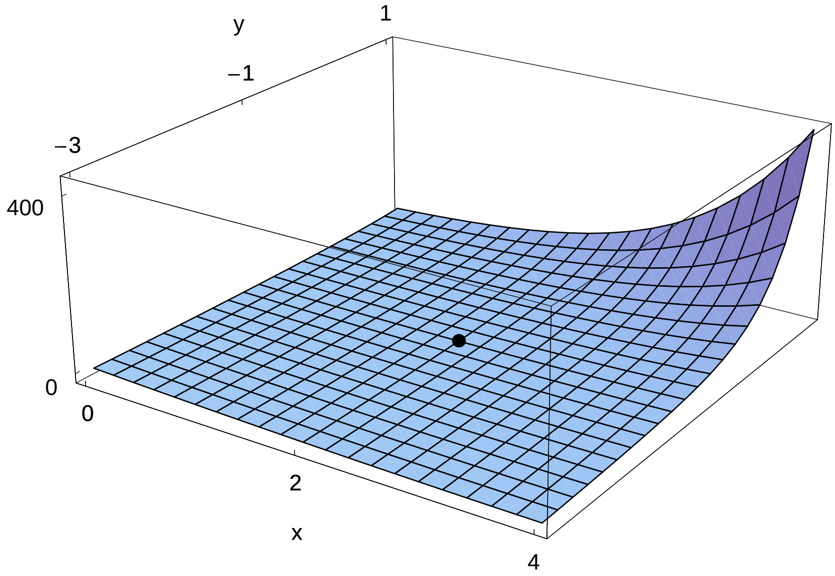


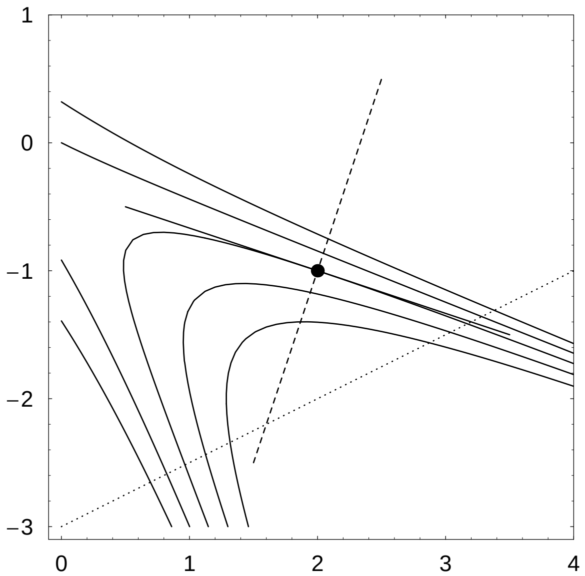


Cvičení 16.85 na str. 167

$F(x,y) = e^{x+2y} + x^2 + 3xy + y^2$, $c = (2,-1)$. Graf $F \,|\, \langle 0,4\rangle \times \langle -3,1\rangle$.

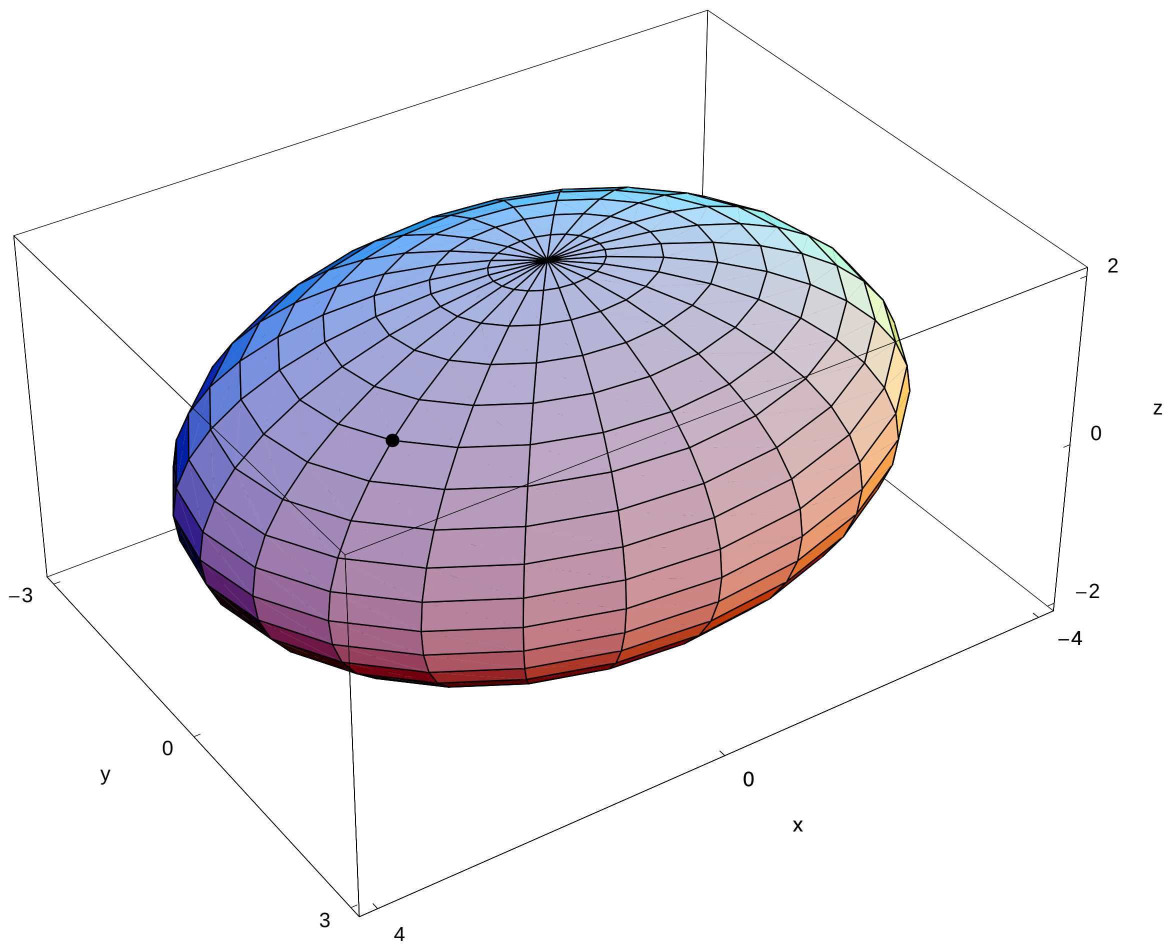
Úsečka $y = \frac{1}{2}x - 3$ (zleva doprava) protíná po řadě c-hladiny s $c = -2, -1, 0, 1, 2, 2, 1, 0, -1, -2$.





Cvičení 16.96 na str. 168

$F(x,y,z) = (x/4)^2 + (y/3)^2 + (z/2)^2 - 1$, $c = (\sqrt{6}, \frac{3}{4}\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Graf $F \mid \langle -4, 4\rangle \times \langle -3, 3\rangle \times \langle -2, 2\rangle$. Nulová hladina je elipsoid s délkou poloos 4,3,2.

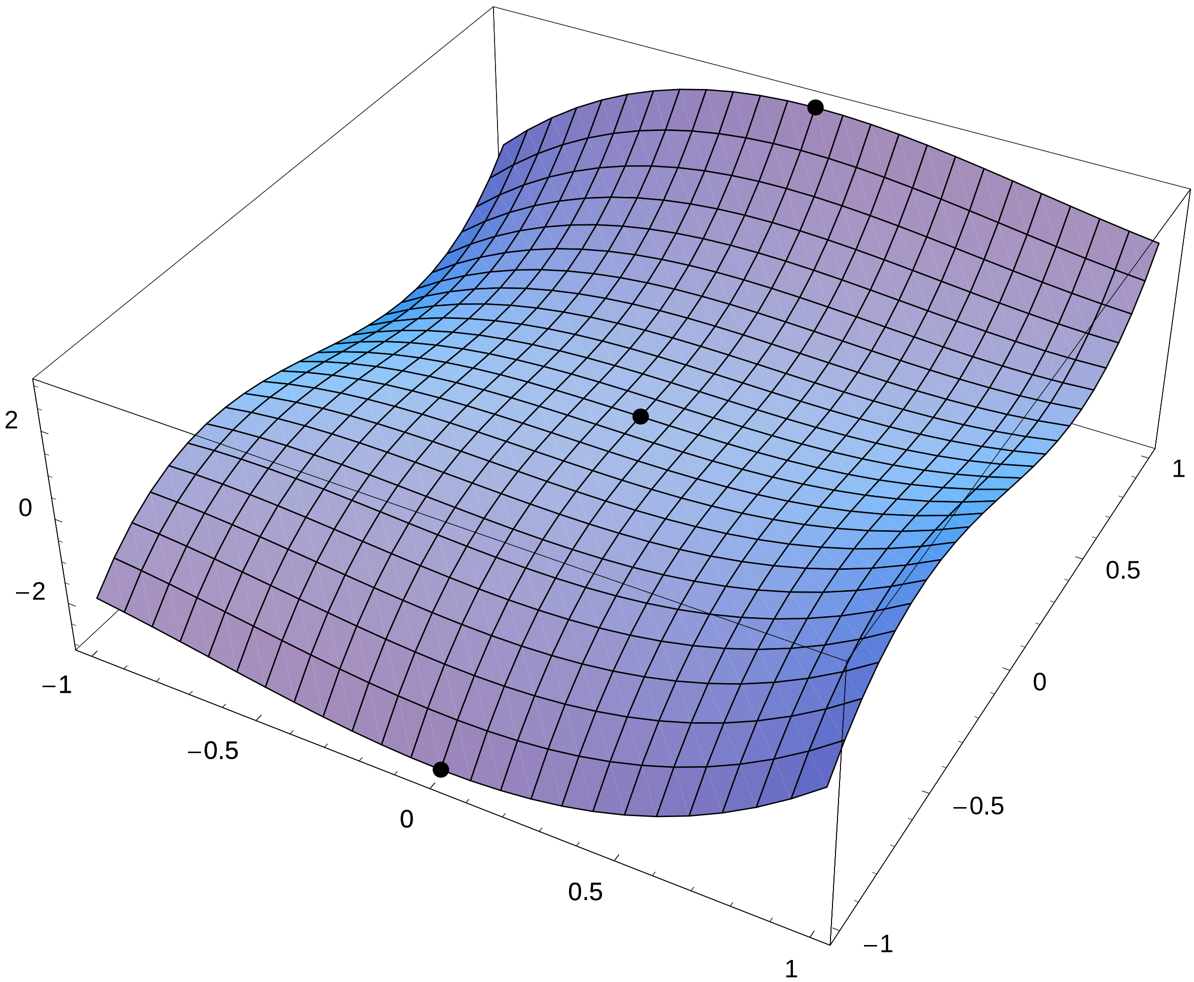


Obrázky ke kapitole 17

Příklad 17.1 na str. 182

$f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

Na obrázku je vyznačen stacionární bod funkce f v $\mathrm{int}(X)$
a body z ∂X, v nichž f nabývá svých (absolutních) extrémů.

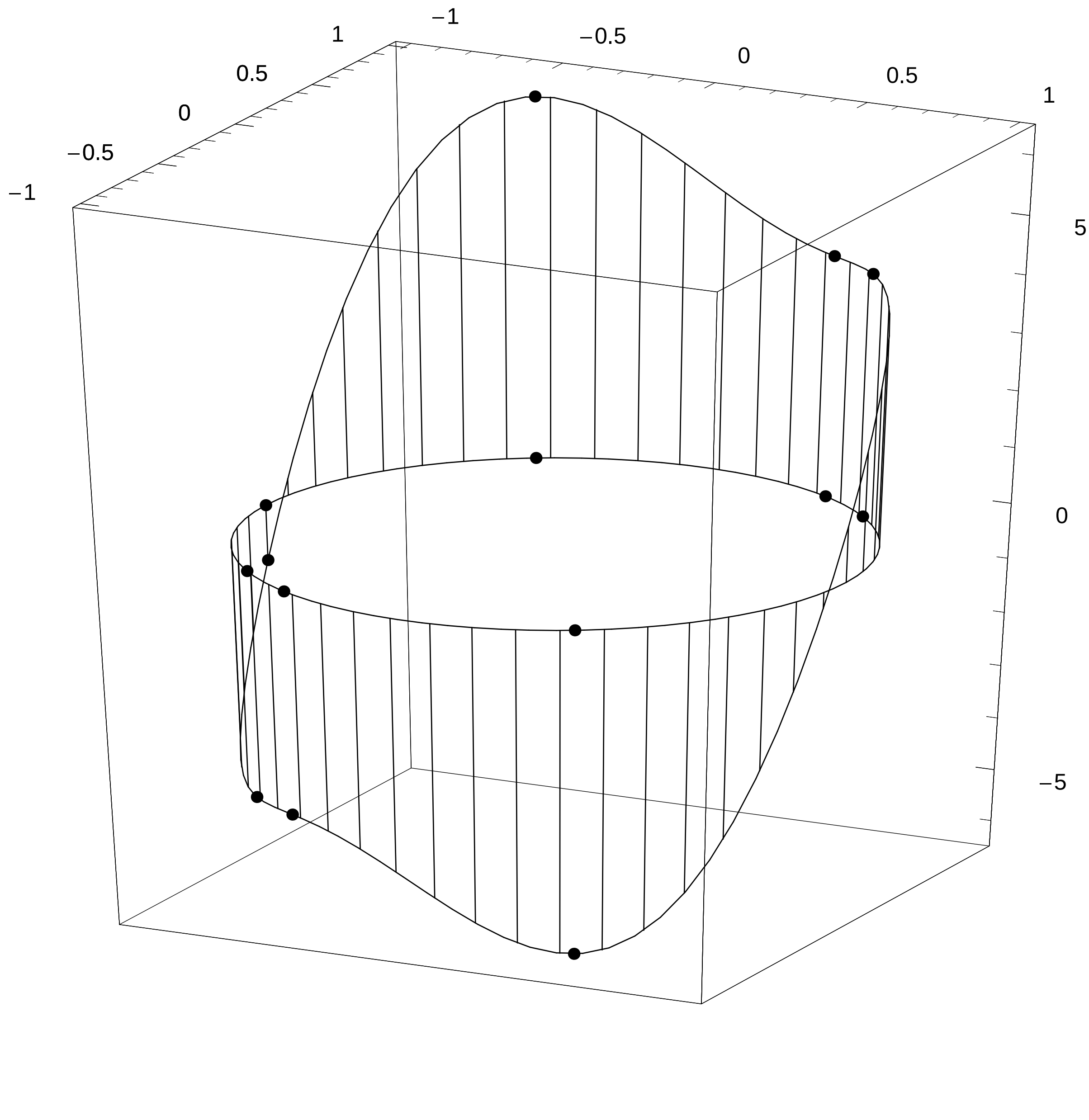


Příklad 17.2 na str. 182

$f(x, y) = 4x^3 - 3x - 4y^3 + 9y,\ X = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le 1.\}$

Funkce f nemá v $\operatorname{int} X$ žádné stacionární body;

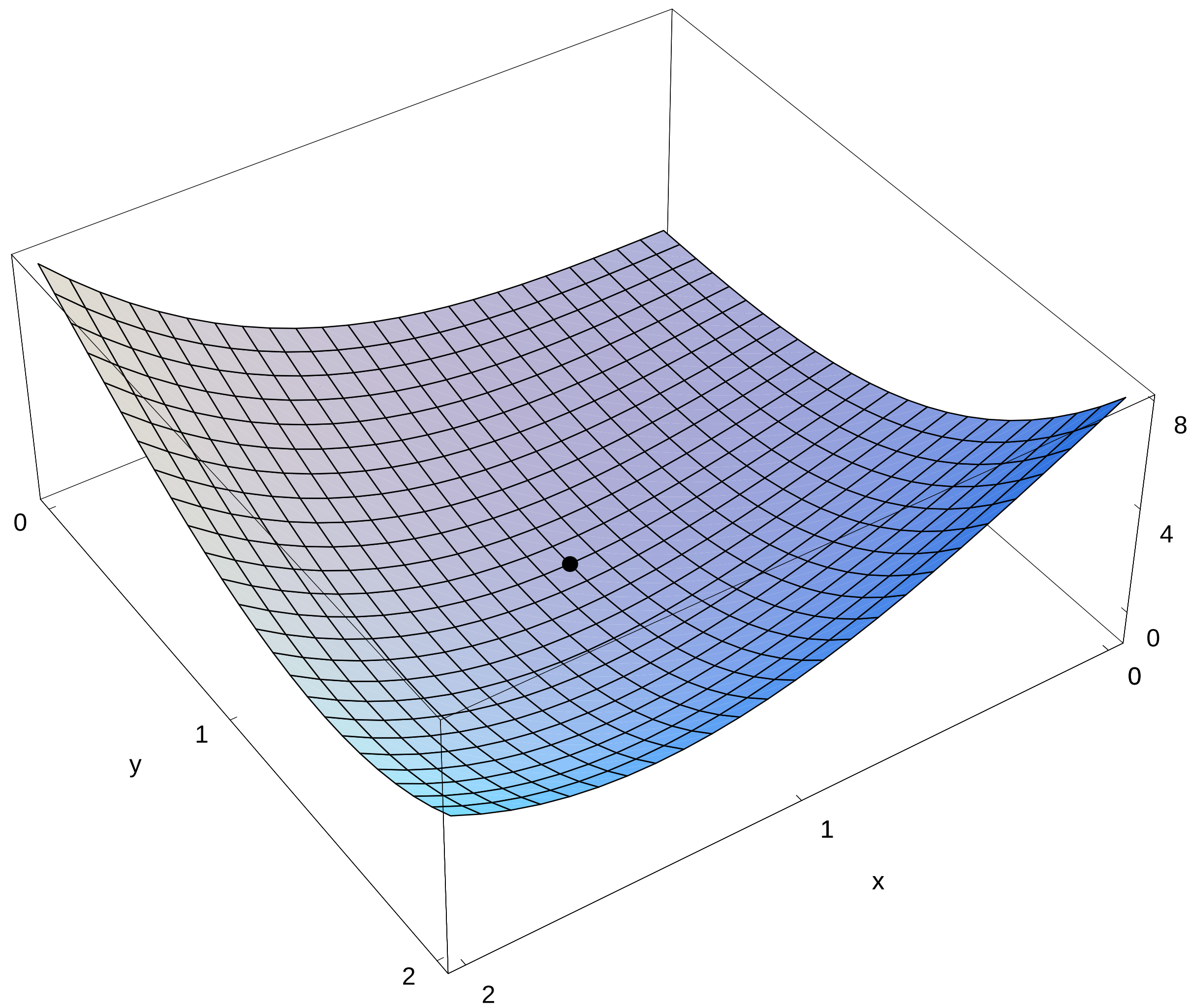
na obrázku je jednotková kružnice C a graf restrikce $f\,|\,C$ spolu s příslušnými stacionárními body.



Příklad 17.5 na str. 187

$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$, $X = \mathbb{R}^2_+$.

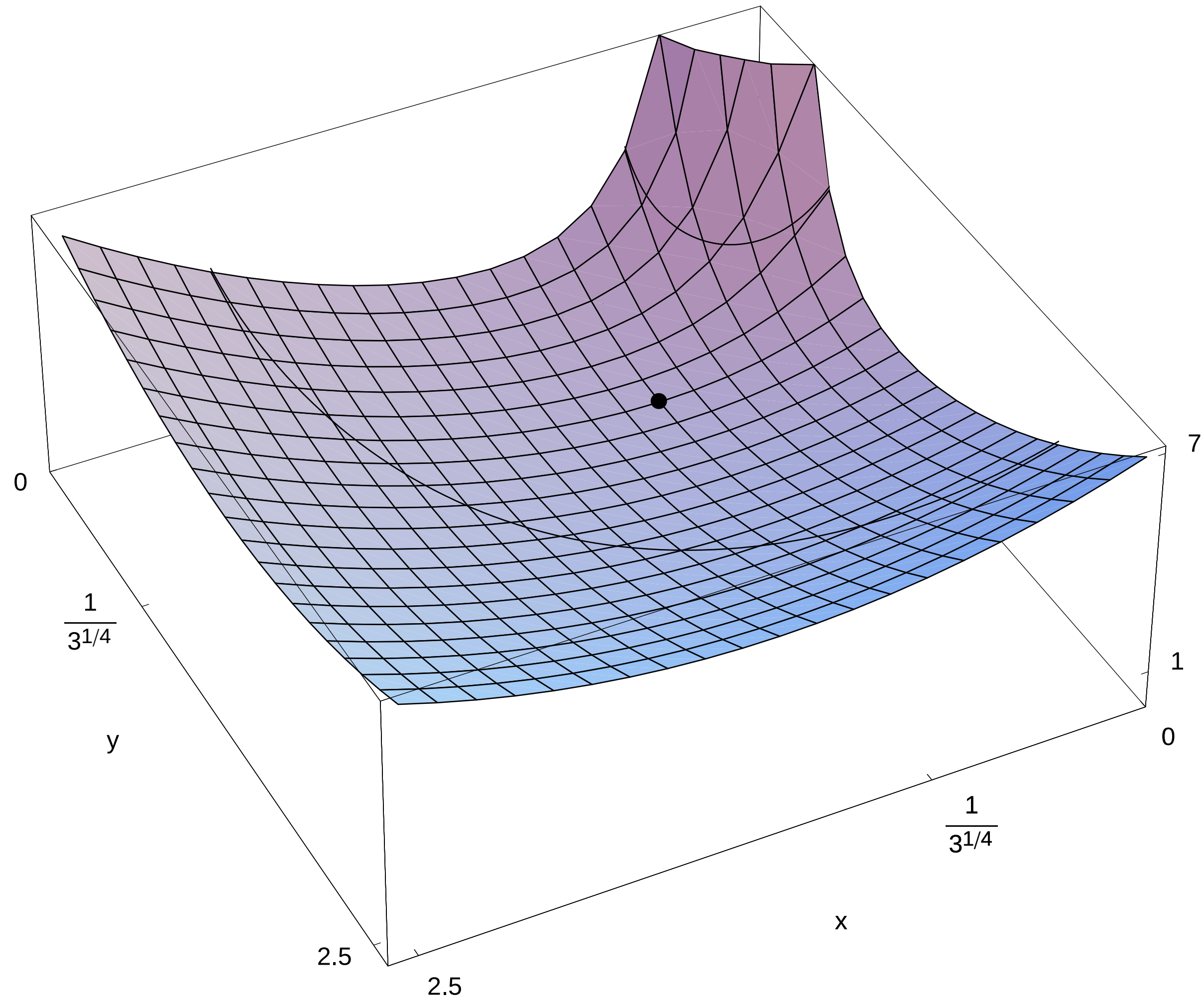
Graf restrikce $f \,|\, \langle 0, 2\rangle^2$ s vyznačeným minimem.



Příklad 17.6 na str. 188

$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1/(x^2 + xy + y^2)$, $X = \mathbb{R}_+^2$.

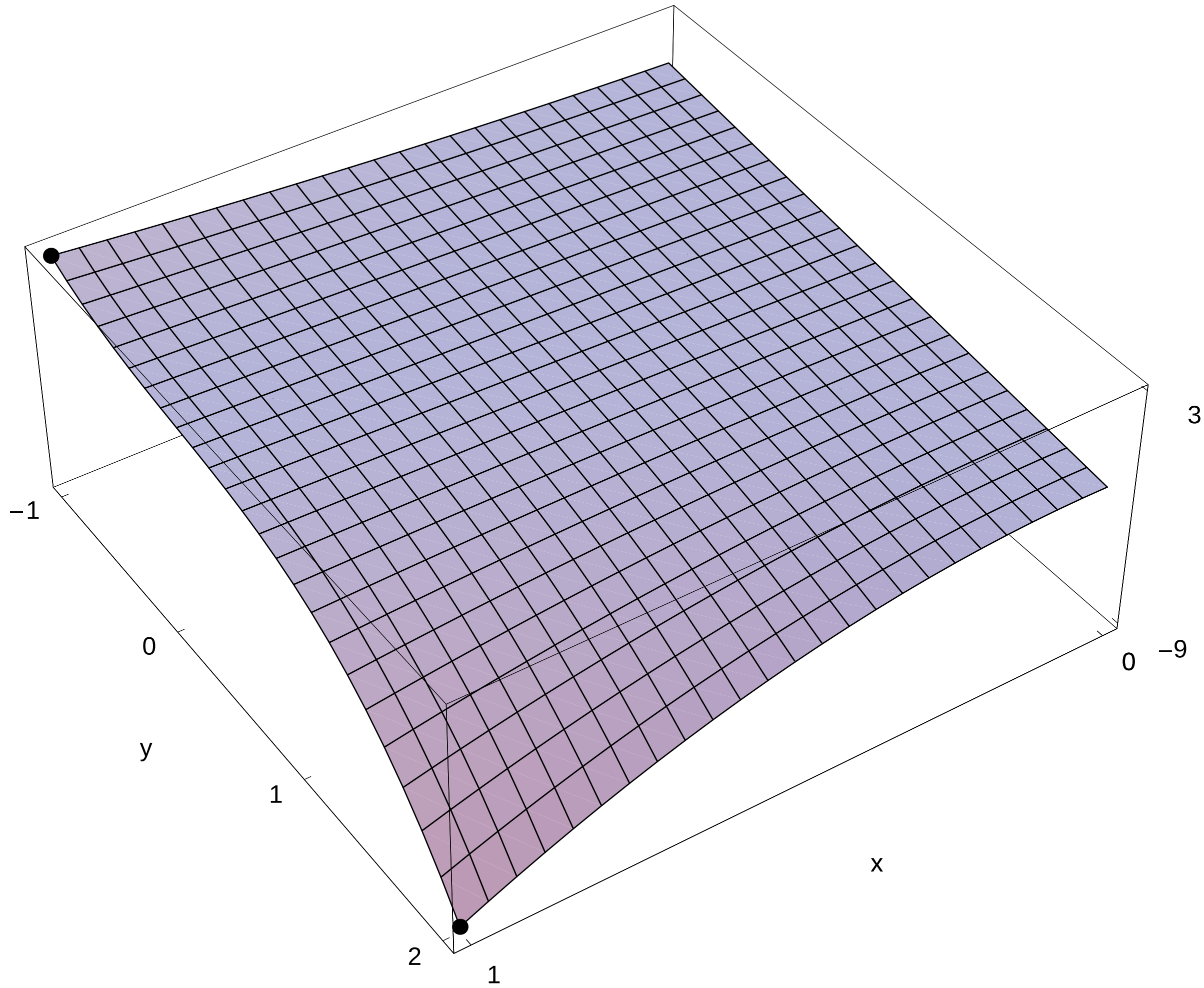
Graf funkce $f\,|\,\langle 0, 2.6\rangle^2$, jejíž obor hodnot byl restringován na interval $\langle 0, 7\rangle$; vyznačeno minimum a obrazy čtvrtkružnic $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0, y \geq 0$.



Cvičení 17.01 na str. 196

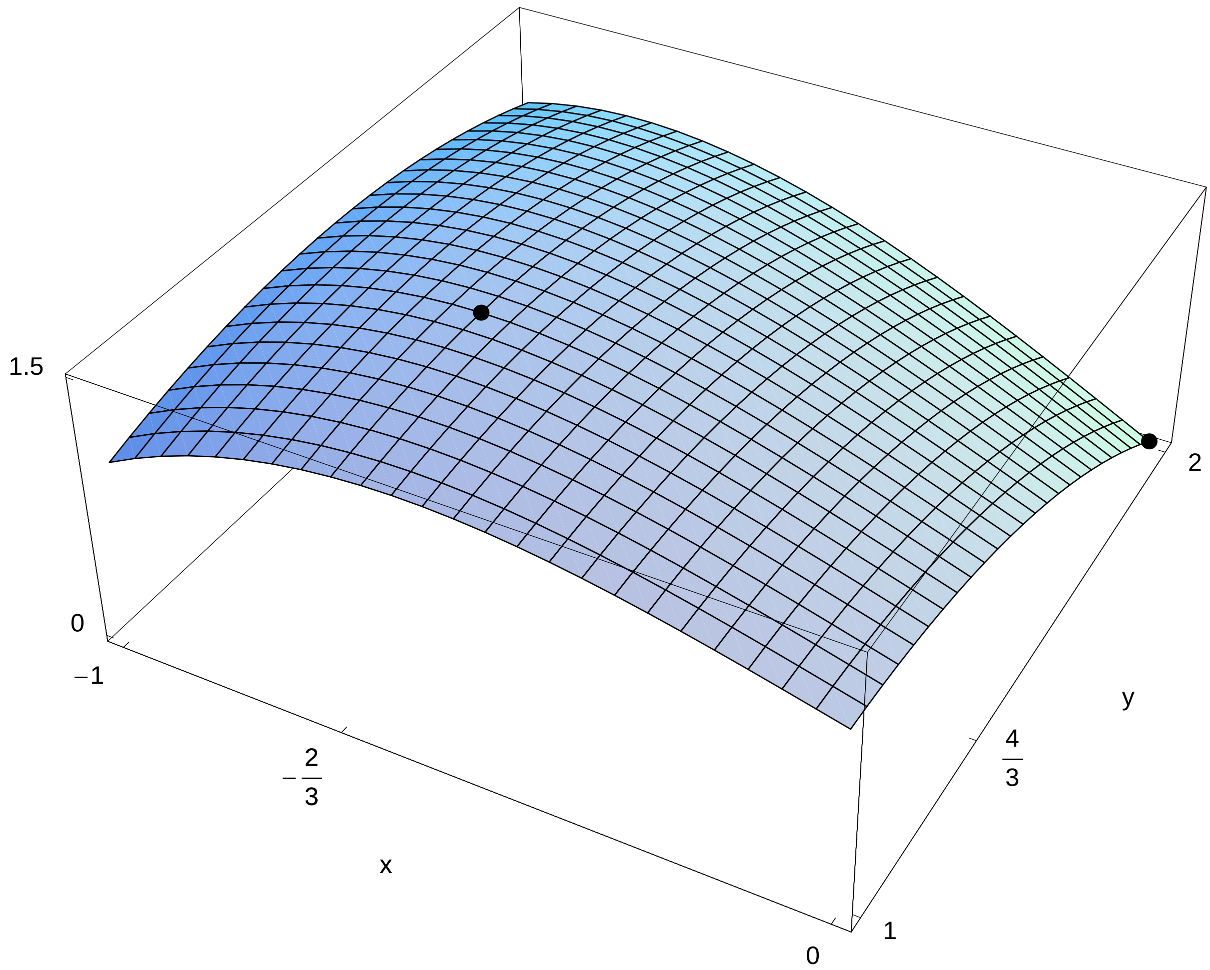
$f(x,y) = x - y - x^2y^3$, $X = \langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle$.

Graf funkce f s vyznačenými extrémy.



Cvičení 17.02 na str. 196

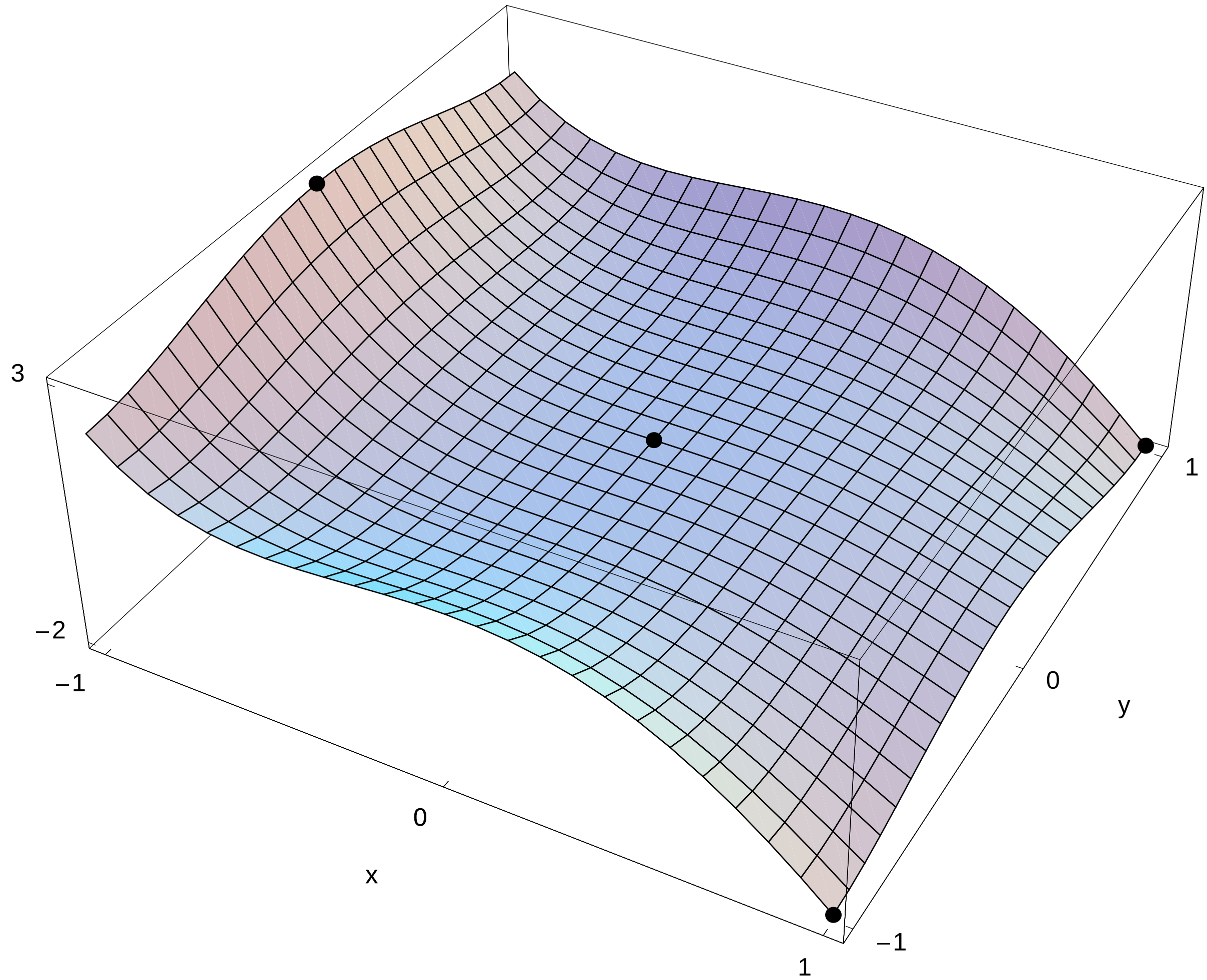
$f(x, y) = x^3 - xy + 2y - y^2$, $X = \langle -1, 0\rangle \times \langle 1, 2\rangle$.
Graf funkce f s vyznačenými extrémy.



Cvičení 17.03 na str. 196

$f(x,y) = x^4 - 2x^3 - 2x^2y^2 + y^4$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

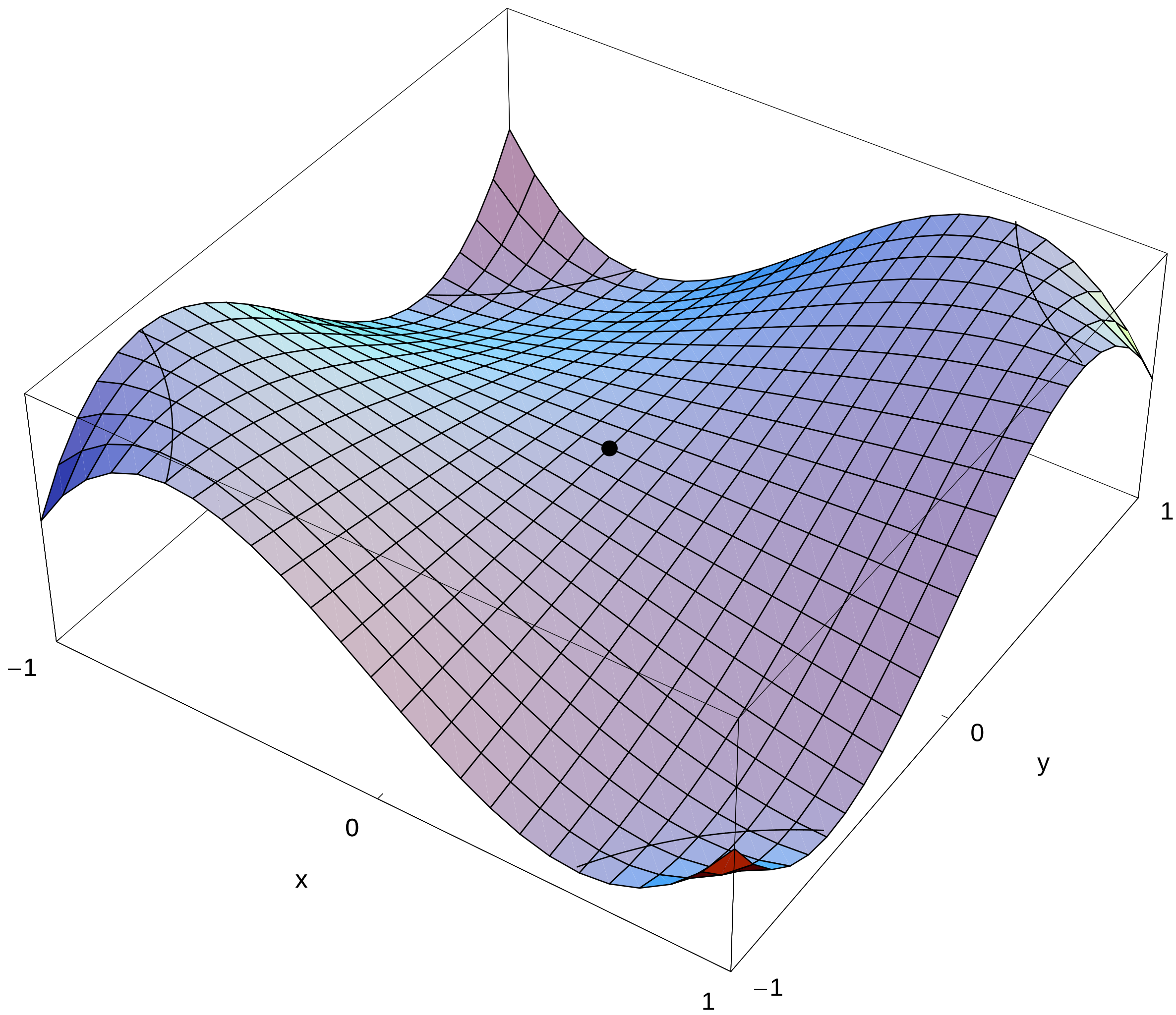
Graf funkce f s vyznačenými třemi extrémy a jedním stacionárním bodem v int X.



Cvičení 17.04 na str. 196

$f(x, y) = xy(1 - x^2y^2)$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

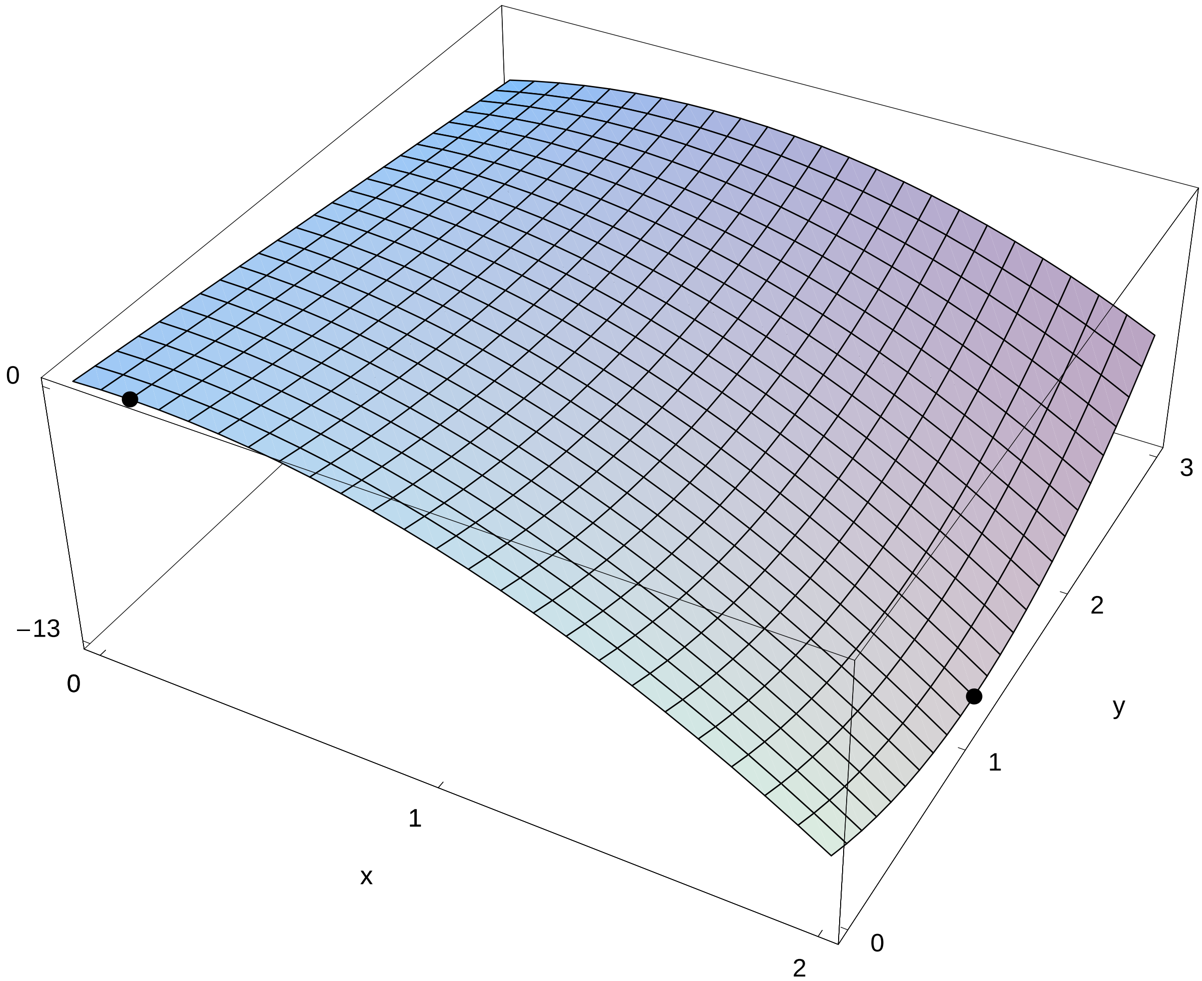
Funkce f má jeden stacionární bod v $\operatorname{int} X$; svých extrémů nabývá na dvou hyperbolách.



Cvičení 17.05 na str. 196

$f(x, y) = xy^2 - 2xy - 3x^2 + x - y$, $X = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

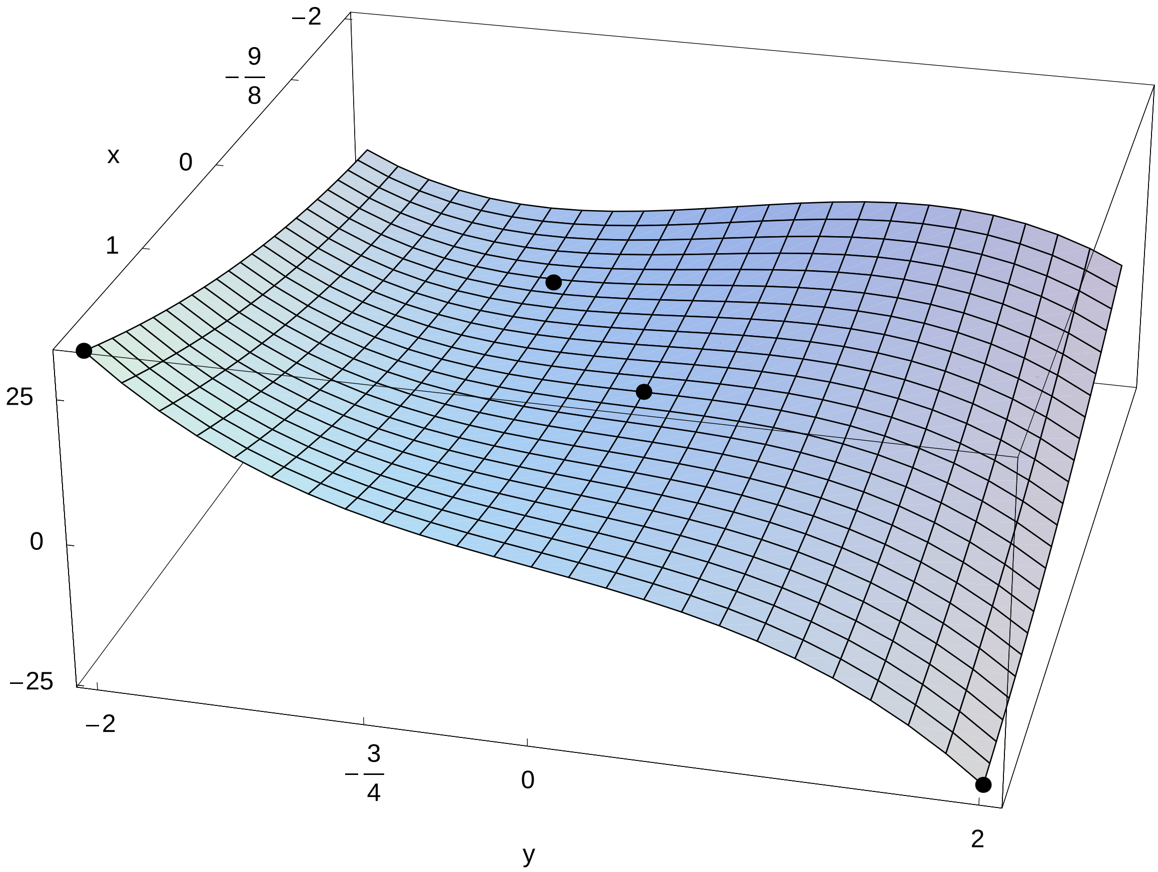
Graf funkce f s vyznačenými extrémy.



Cvičení 17.06 na str. 196

$f(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^3$, $X = \langle -2, 2\rangle^2$.

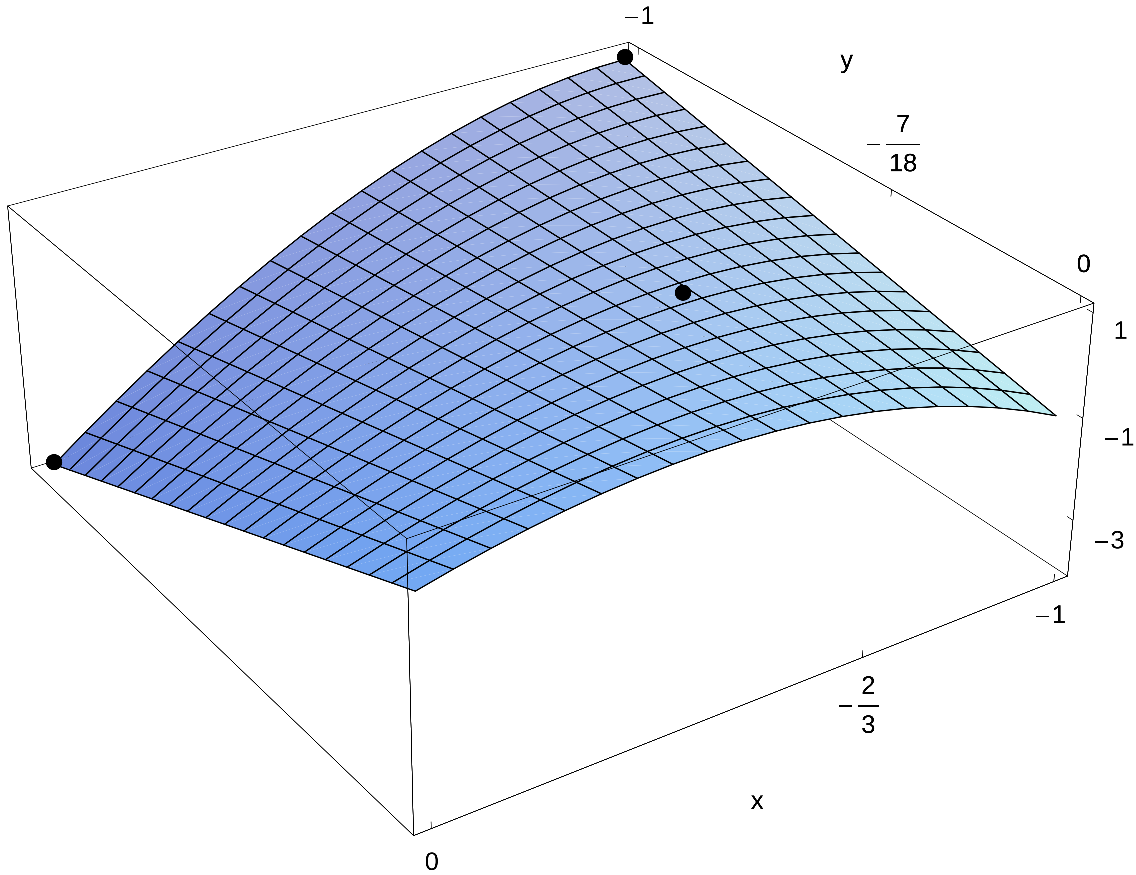
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a dvěma stacionárními body v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.07 na str. 196

$f(x, y) = x^3 - 3x^2 + 6xy - 3x + 4y$, $X = \langle -1, 0\rangle^2$.

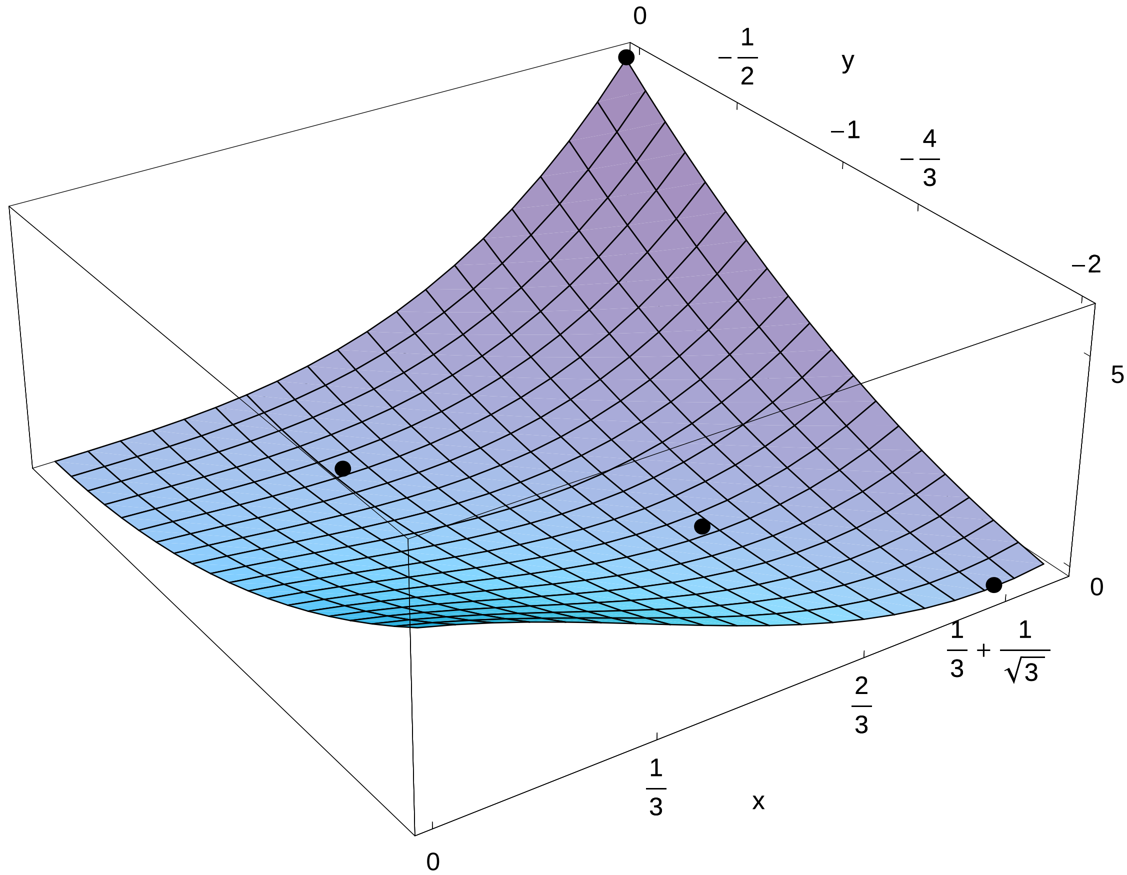
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a jedním stacionárním bodem v int X.



Cvičení 17.08 na str. 196

$f(x,y) = 6x^3 + 2xy + 3x^2y + y^2$, $X = \langle 0,1 \rangle \times \langle -2,0 \rangle$.

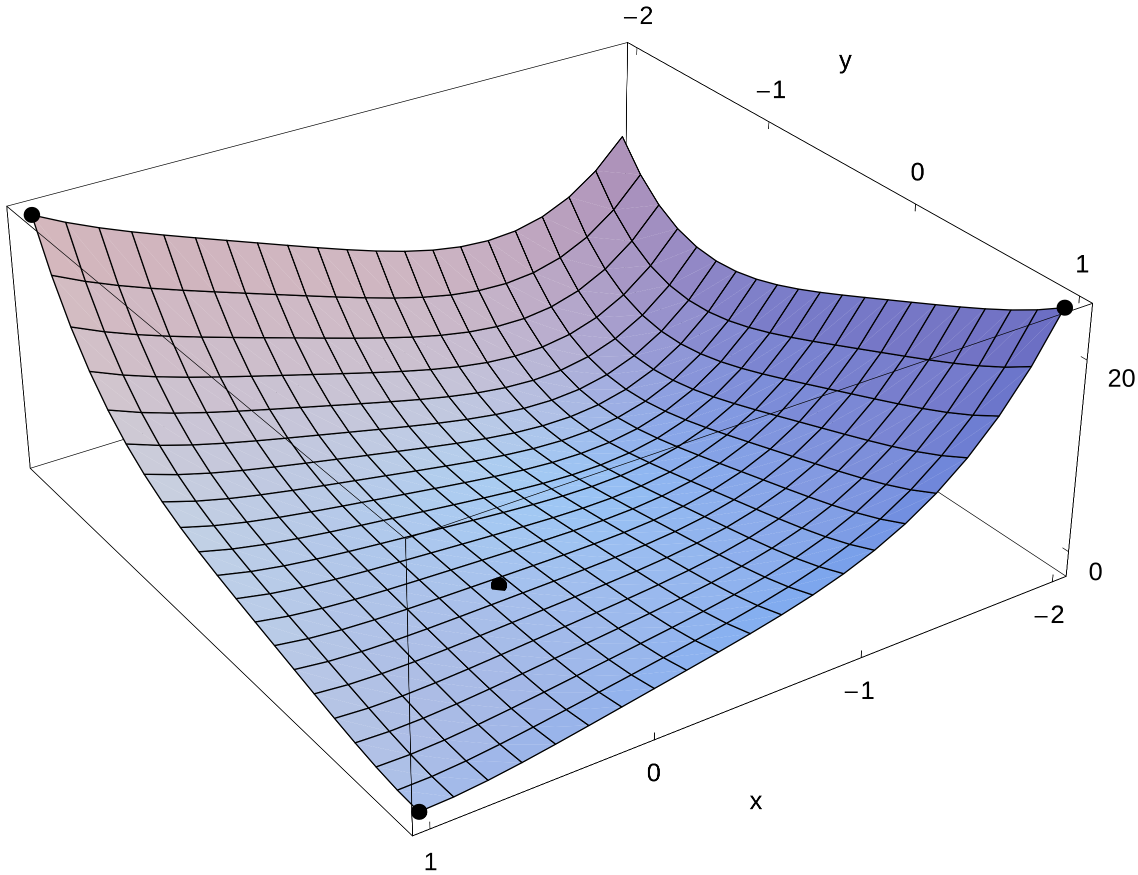
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a dvěma stacionárními body v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.09 na str. 196

$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4,\ X = \langle -2, 1\rangle^2.$

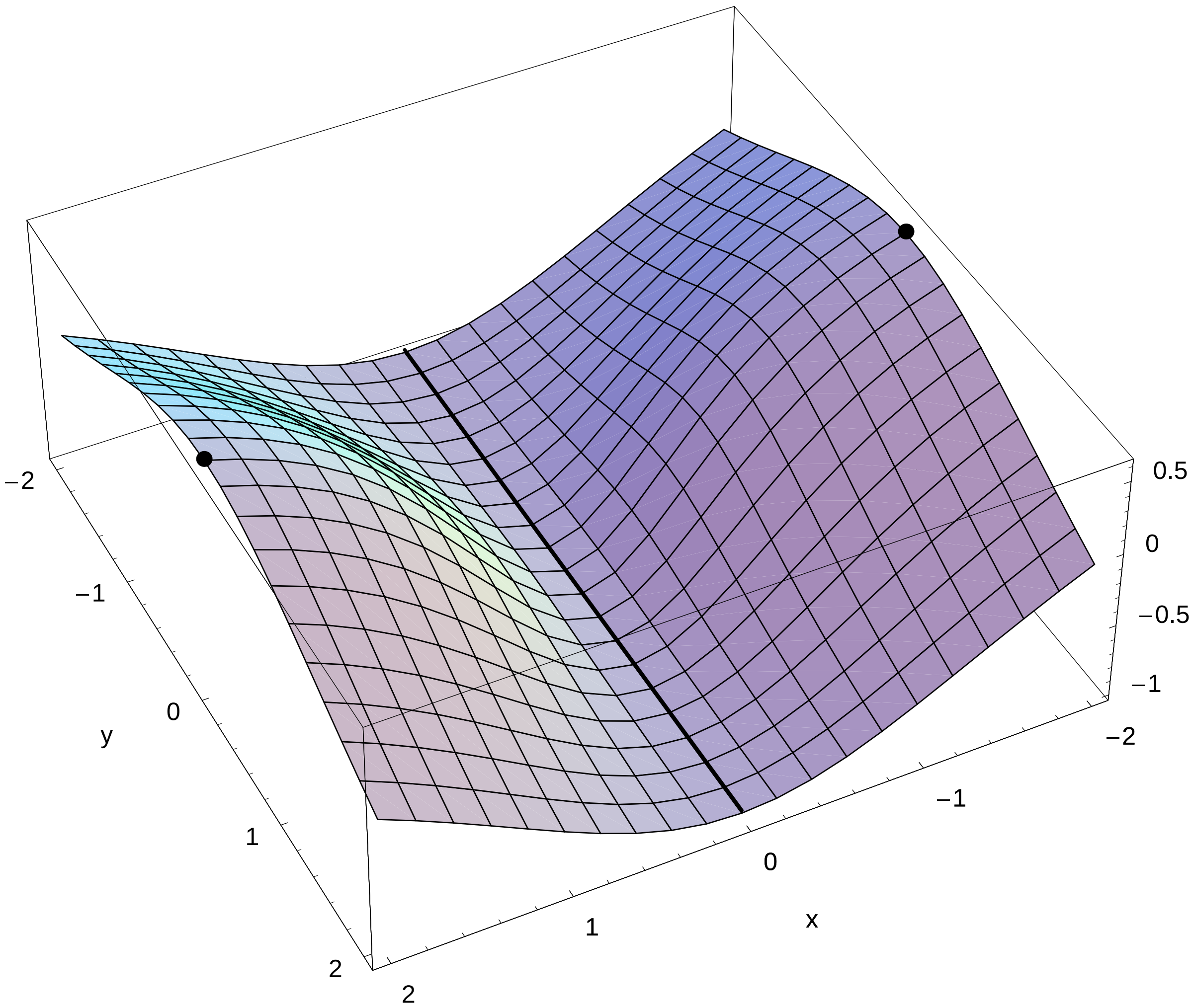
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a jedním stacionárním bodem v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.10 na str. 196

$f(x,y) = (x^2 - y^2 - 1)/(x^2 + y^2 + 1)$, $X = \langle -2, 2 \rangle^2$.

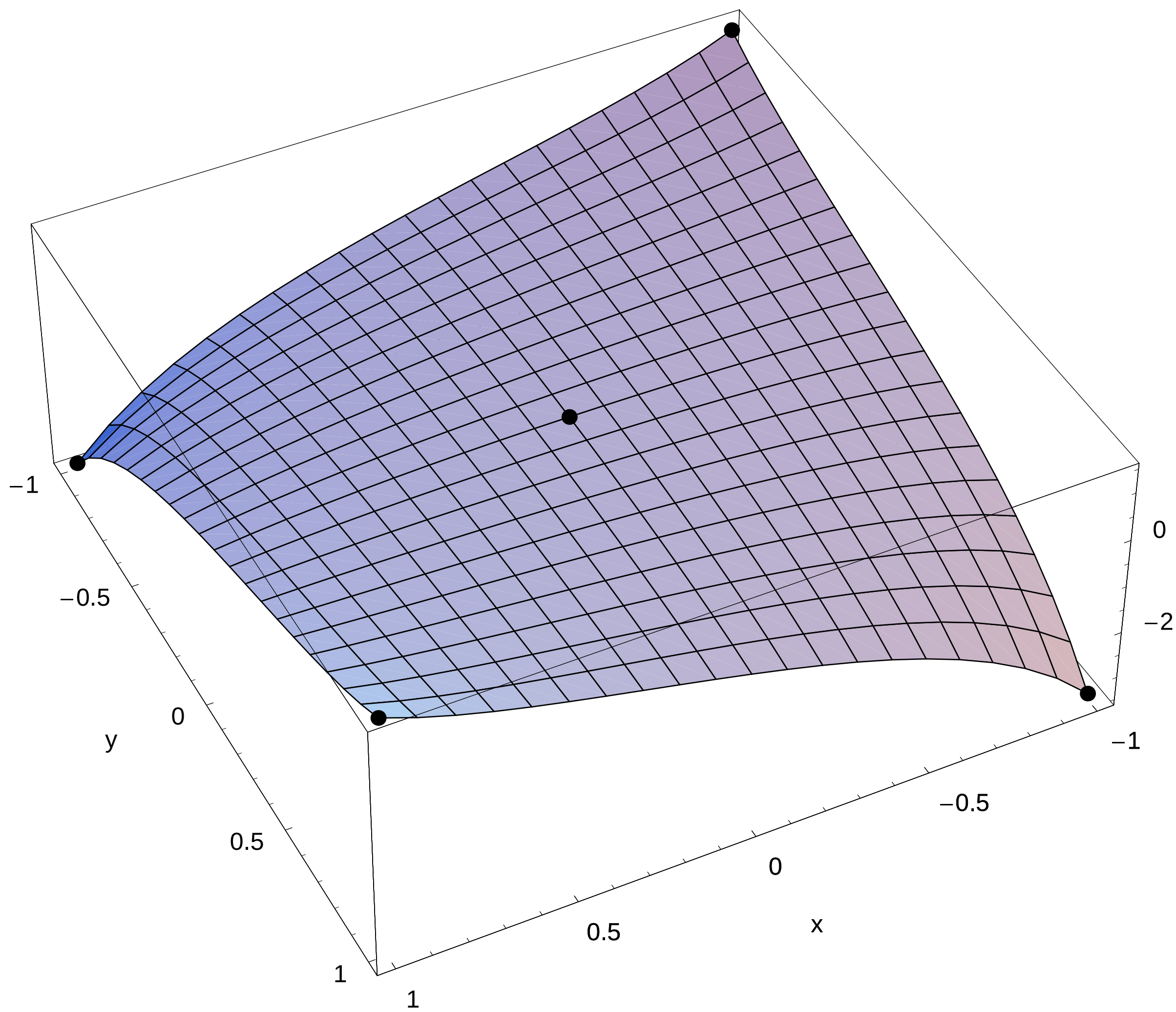
Graf funkce f s vyznačenými extrémy (kterých nabývá ve dvou bodech a na jedné úsečce).



Cvičení 17.11 na str. 196

$f(x, y) = (x^2 - 5xy + y^2)/(x^2 + y^2 - 4)$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

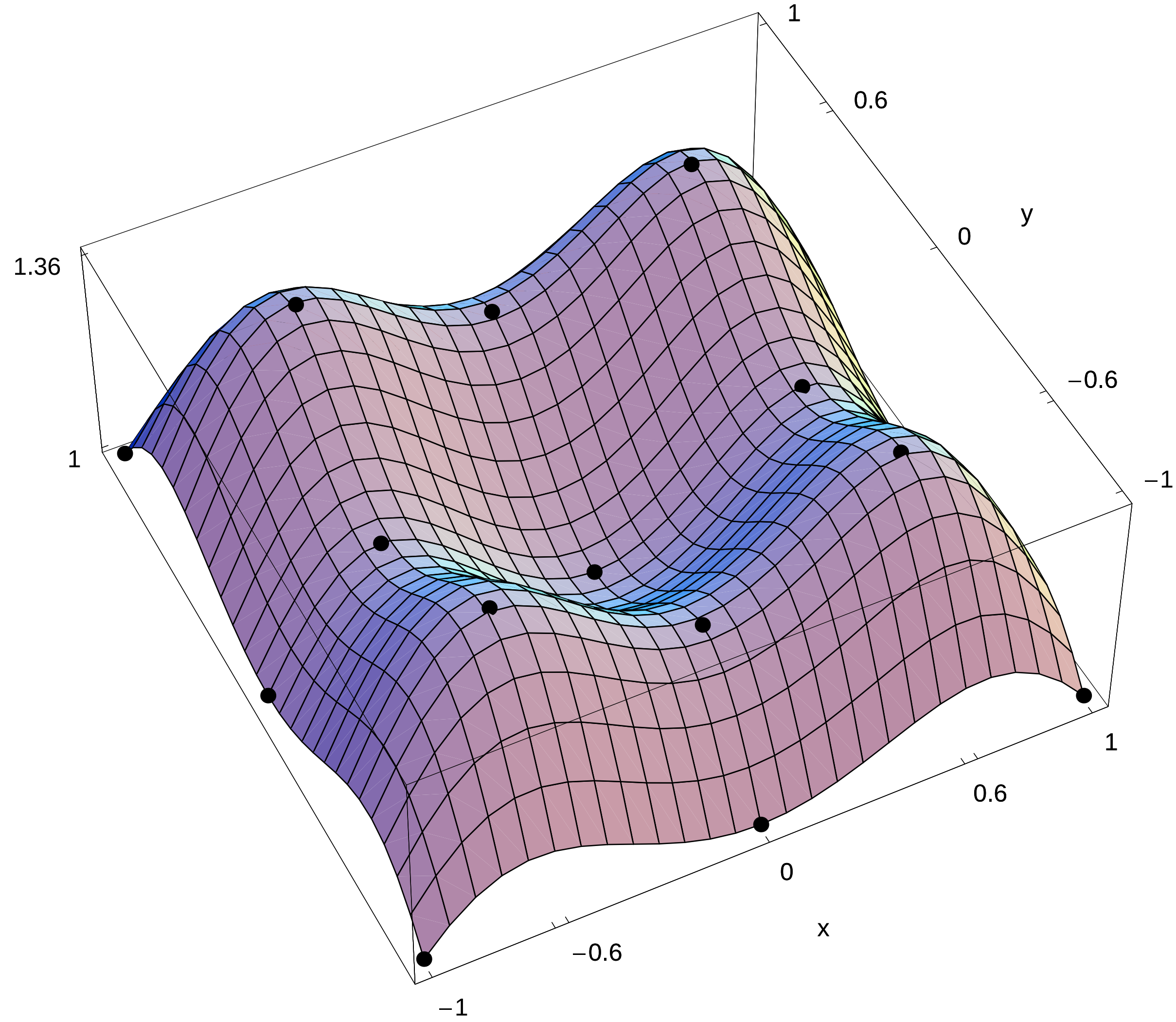
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a jedním stacionárním bodem v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.12 na str. 196

$f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)/(x^4 + y^4 + 1)$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

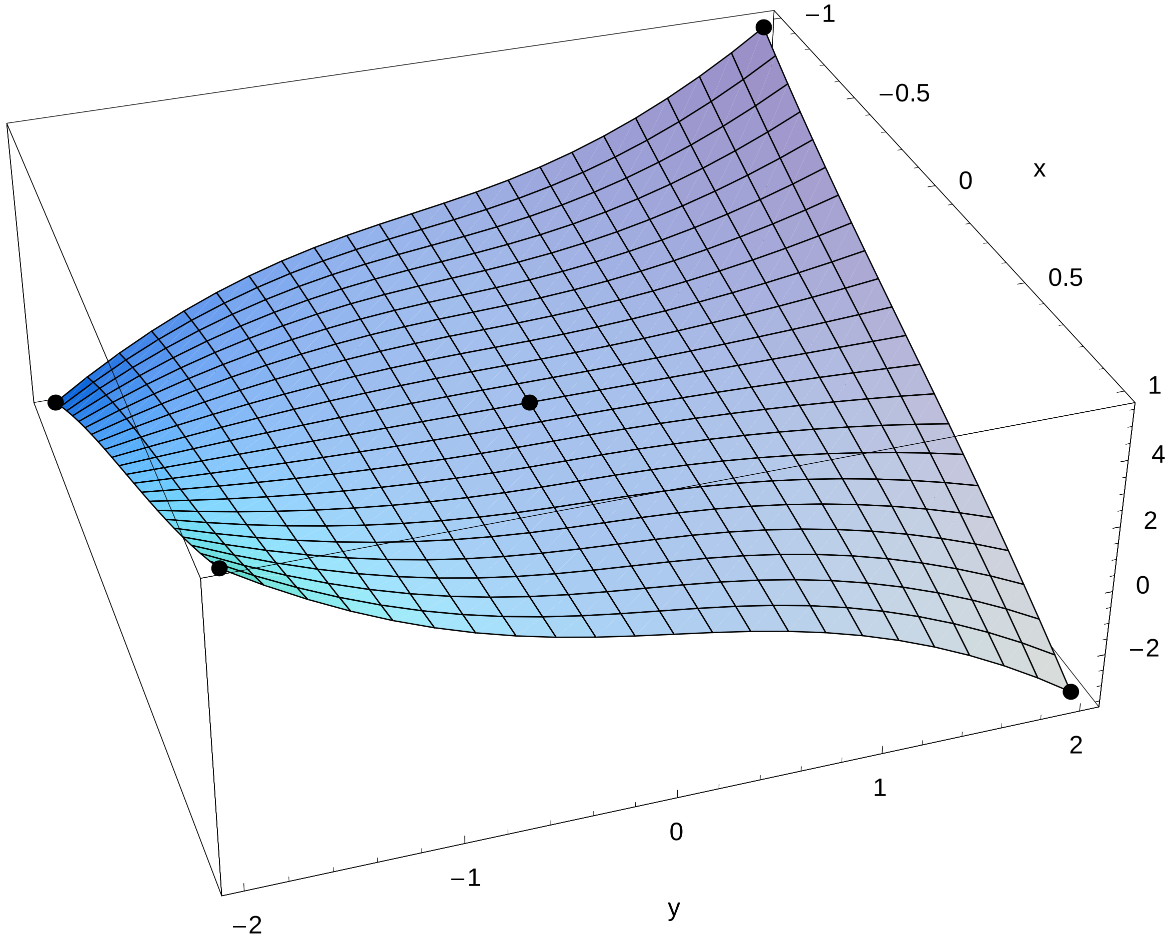
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a pěti dalšími stacionárními body v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.13 na str. 196

$f(x, y) = 1 - xy\sqrt{x^2 + y^2}$, $X = \langle -1, 1\rangle \times \langle -2, 2\rangle$.

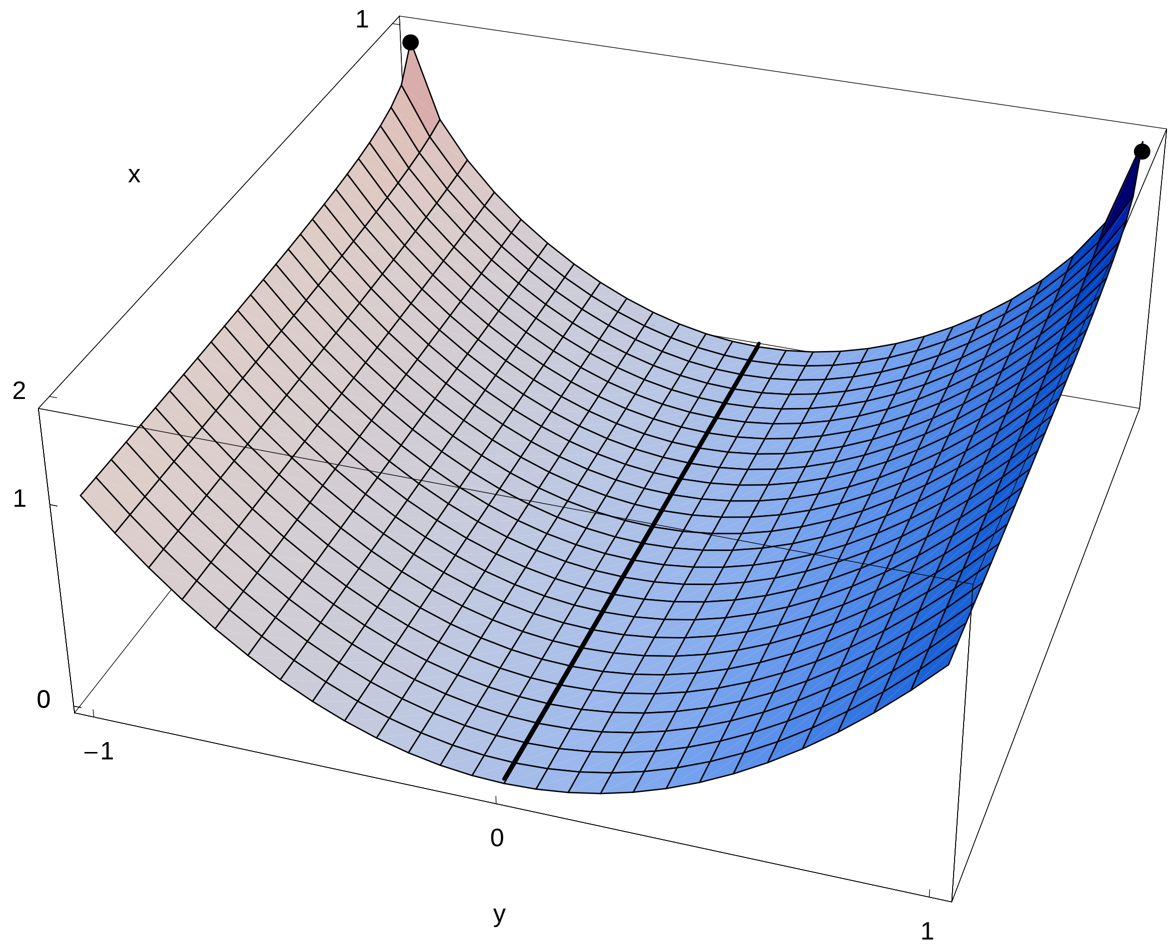
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a jedním stacionárním bodem v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.14 na str. 196

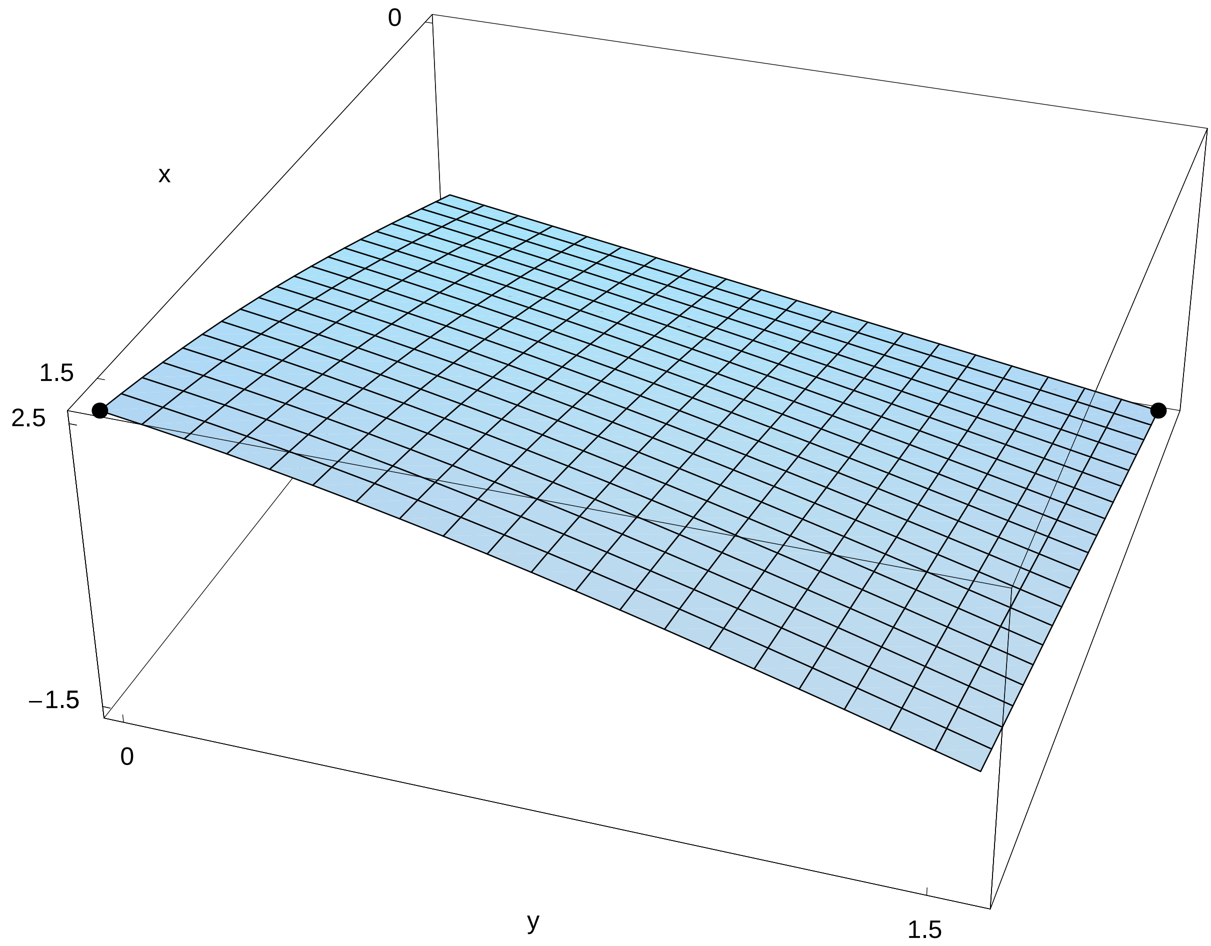
$f(x,y) = x\,(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2-y^2})$, $X = \langle 1,2\rangle \times \langle -1,1\rangle$.

Graf funkce f s vyznačenými extrémy (kterých nabývá ve dvou bodech a na jedné úsečce).



Cvičení 17.15 na str. 196

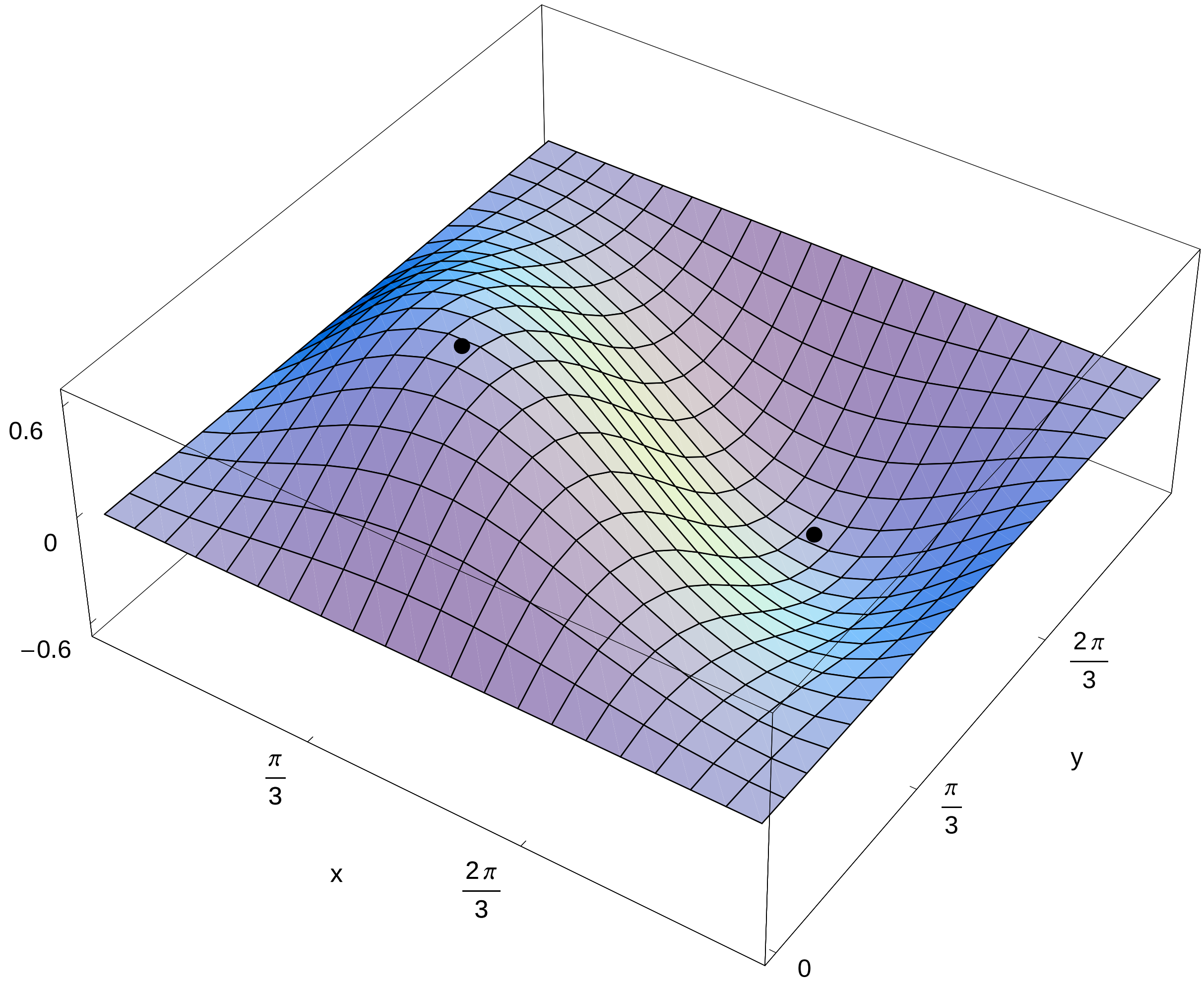
$f(x, y) = x - y + \sin x \cos y$, $X = \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle^2$.
Graf funkce f s vyznačenými extrémy.



Cvičení 17.16 na str. 196

$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y),\ X = \langle 0, \pi\rangle^2.$

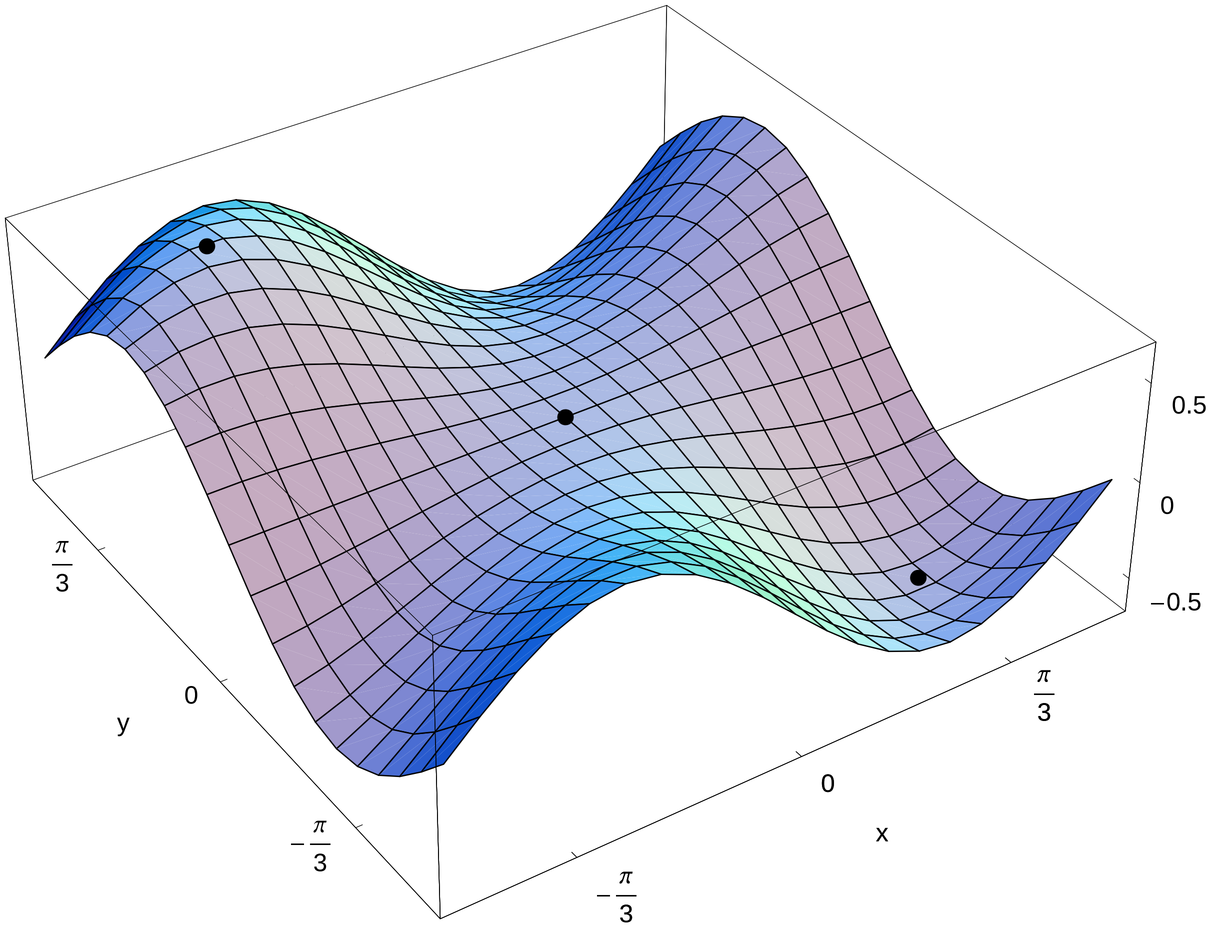
Graf funkce f s vyznačenými extrémy.



Cvičení 17.17 na str. 196

$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x-y)$, $X = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle^2$.

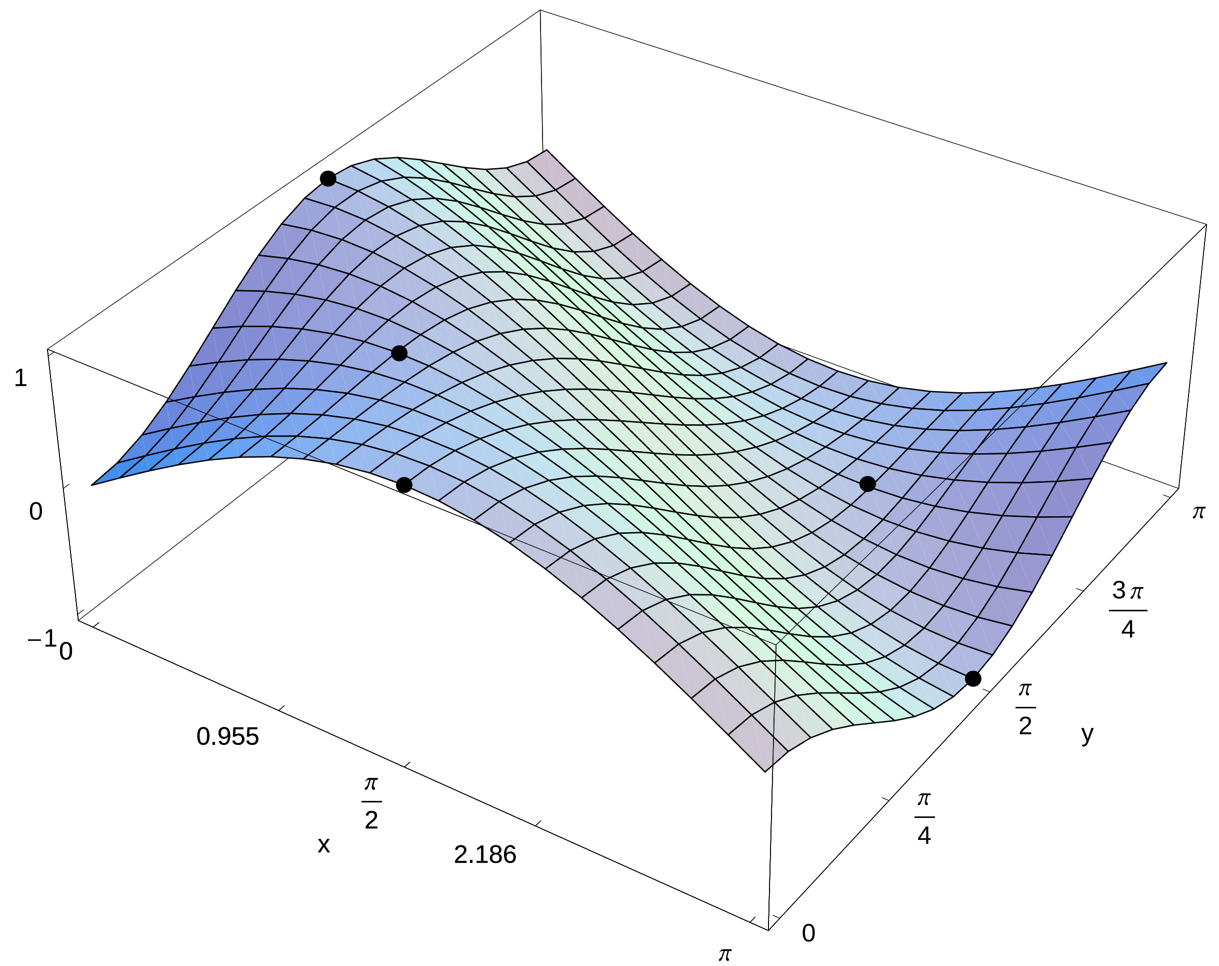
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a jedním dalším stacionárním bodem v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.18 na str. 196

$f(x,y) = \sin x \cos y + \cos x \sin^2 y$, $X = \langle 0, \pi \rangle^2$.

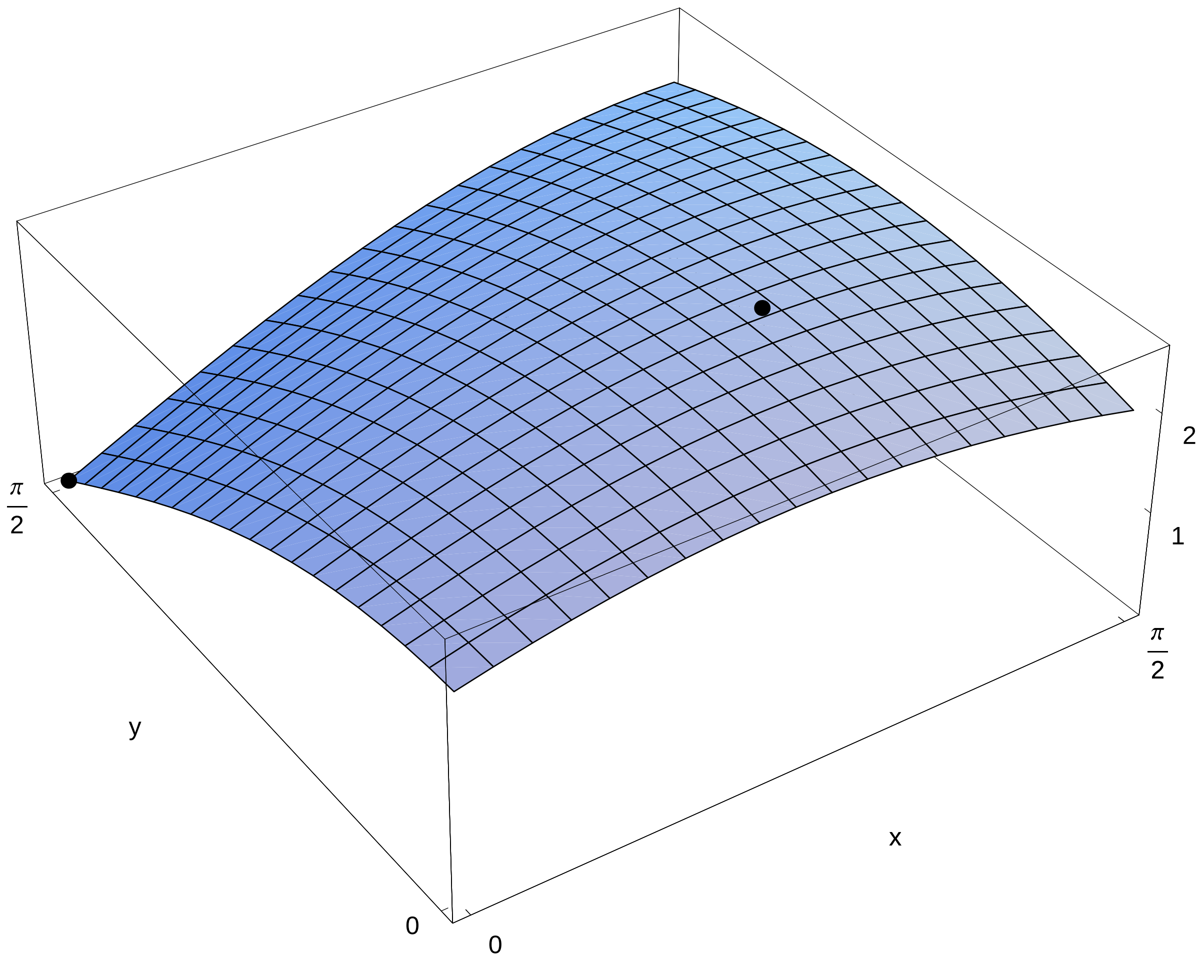
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a dvěma stacionárními body v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.19 na str. 196

$f(x, y) = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $X = \langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle^2$.

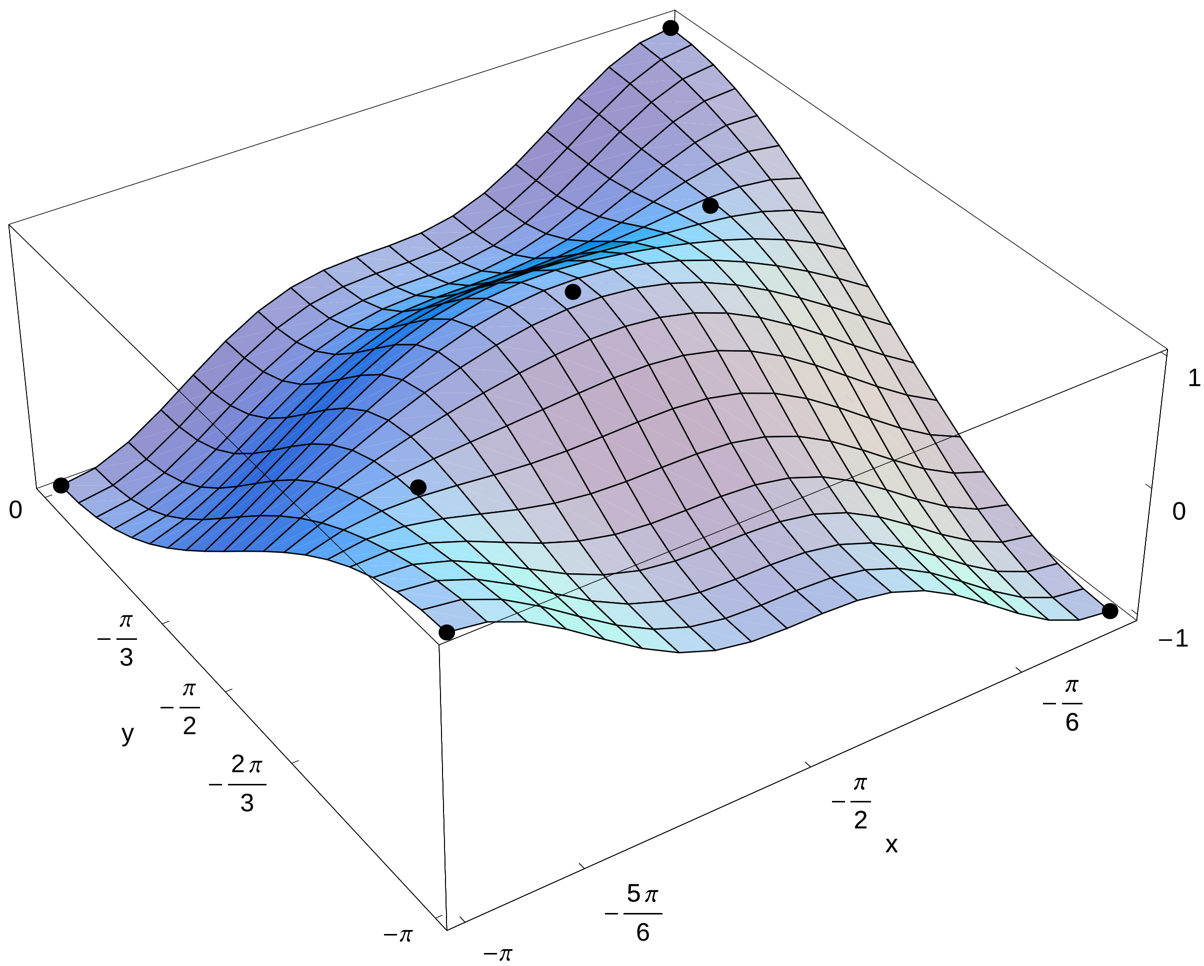
Graf funkce f s vyznačenými extrémy.



Cvičení 17.20 na str. 196

$f(x,y) = \cos^3 x \cos y + \sin x \sin^3 y$, $X = \langle -\pi, 0 \rangle^2$.

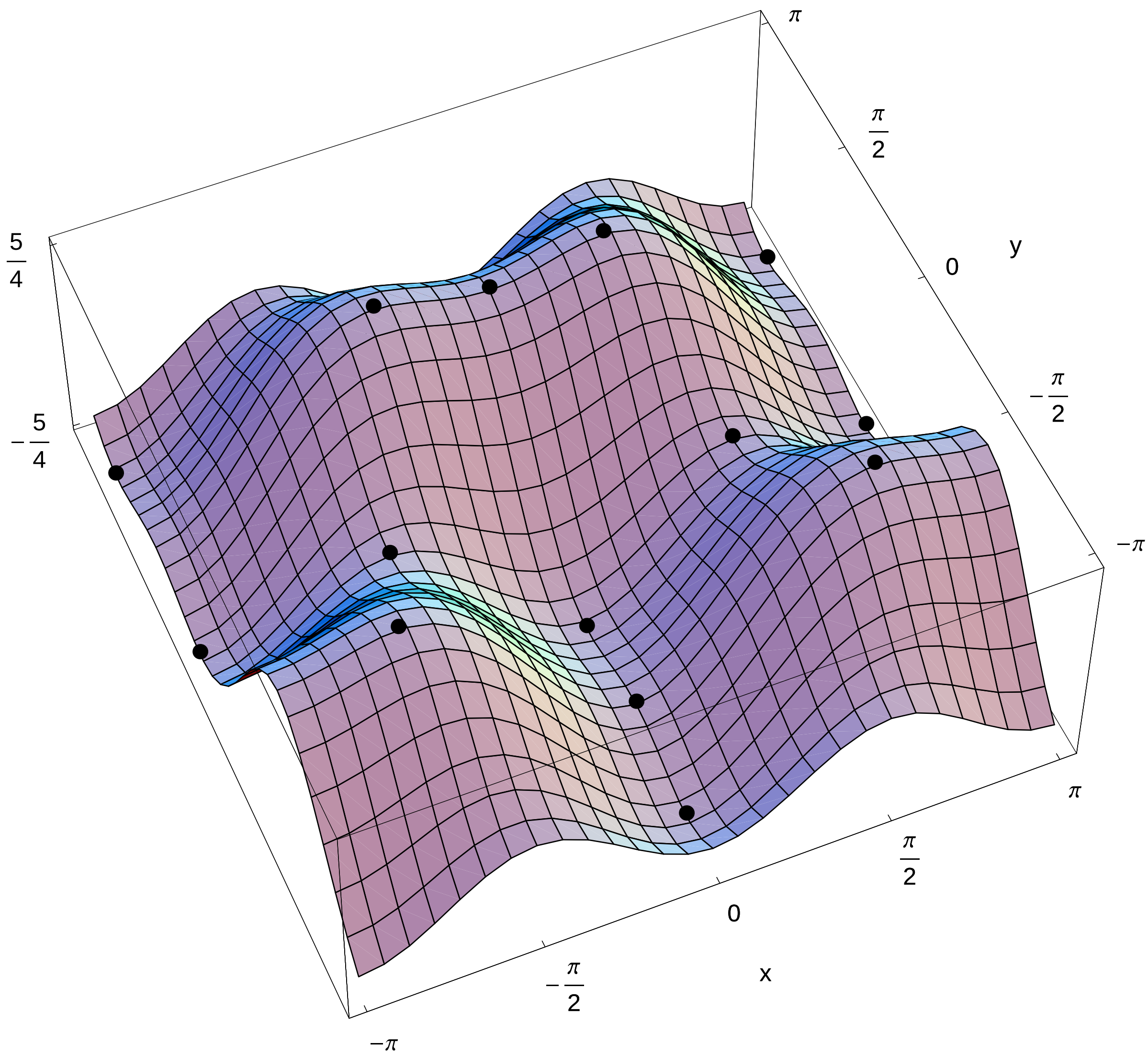
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a třemi stacionárními body v int X.



Cvičení 17.21 na str. 196

$f(x, y) = \sin^2 x + \cos x \sin y - \cos^2 y,\ X = \langle -\pi, \pi \rangle^2.$

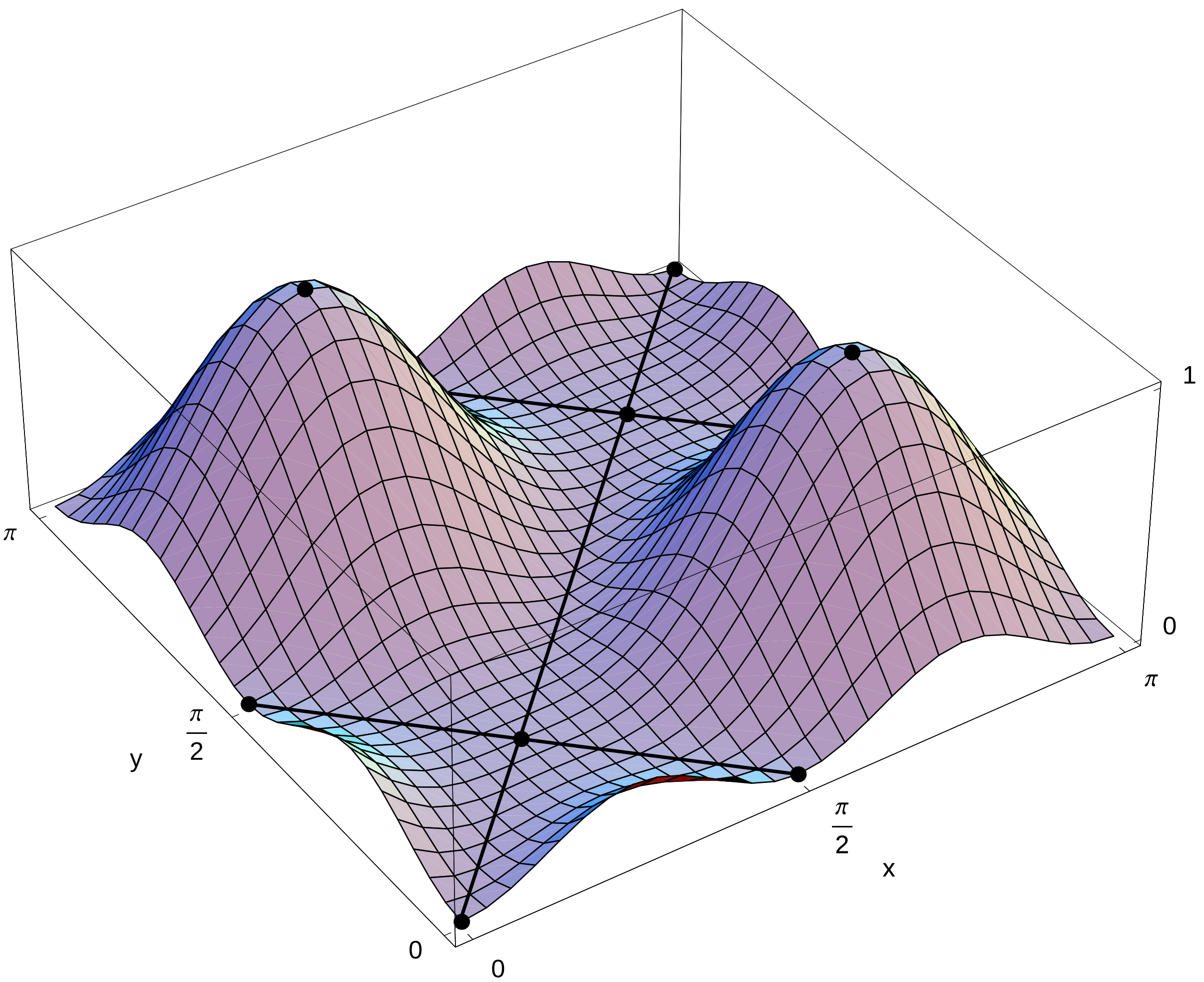
Graf funkce f, která nabývá svého minima v 6 bodech, maxima ve 4 bodech; vyznačeny jsou další 4 stacionární body v int X.



Cvičení 17.22 na str. 196

$f(x, y) = \sin^2(x - y)\cos^2(x + y)$, $X = \langle 0, \pi\rangle^2$.

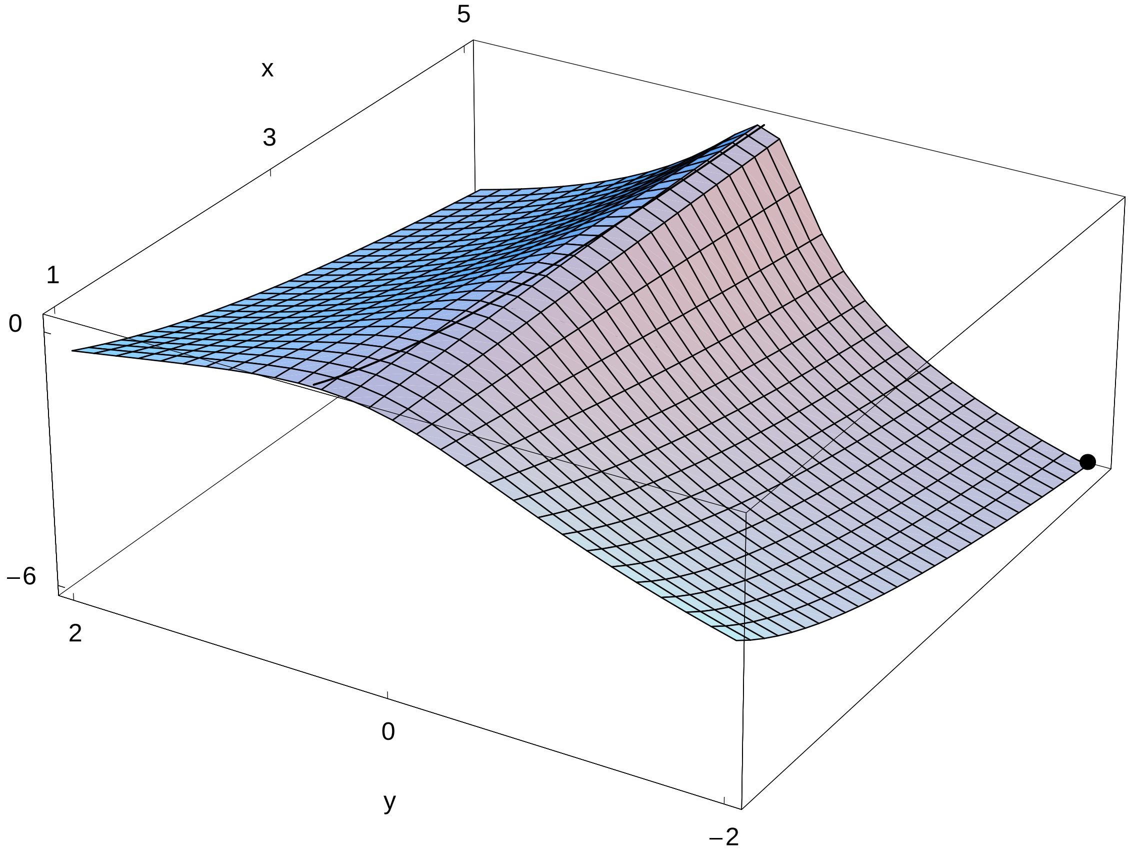
Graf funkce f, která nabývá maxima ve dvou bodech, minima na třech úsečkách.



Cvičení 17.23 na str. 197

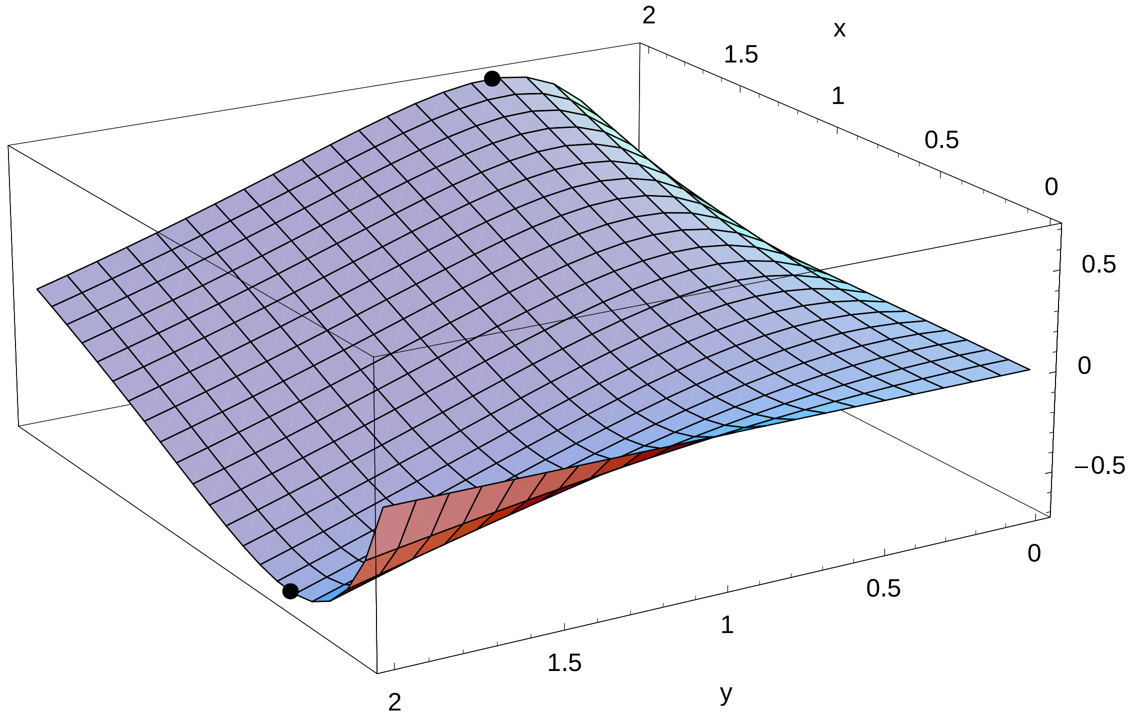
$f(x, y) = \operatorname{arctg} xy - \lg(1 + x^2y^2)$, $X = \langle 1, 5\rangle \times \langle -2, 2\rangle$.

Graf funkce f s vyznačeným minimem; svého maxima nabývá na hyperbole $xy = \frac{1}{2}$.



Cvičení 17.24 na str. 197

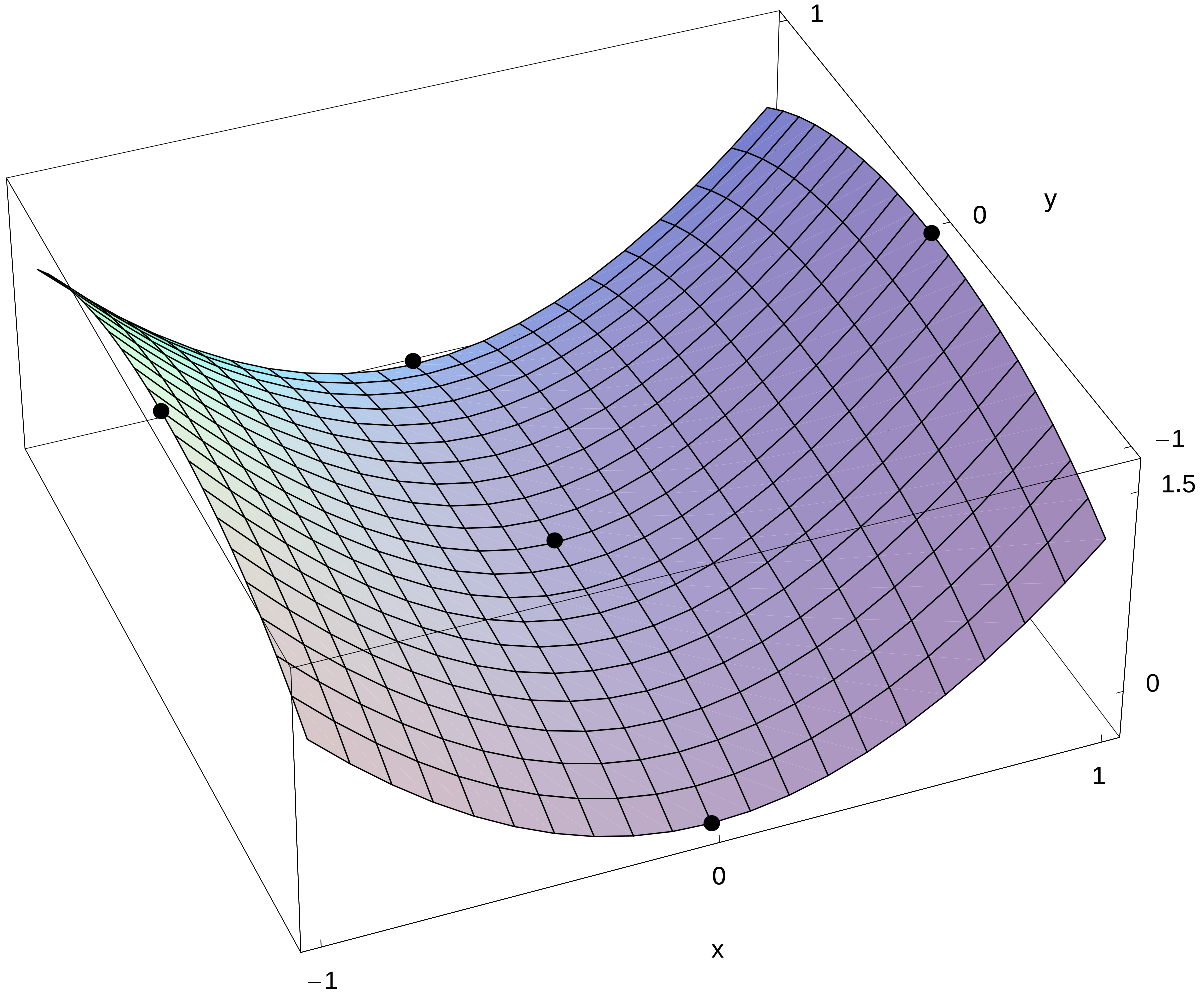
$f(x,y) = \lg(1+x^2y) - \lg(1+xy^2)$, $X = \langle 0,2 \rangle^2$.
Graf funkce f s vyznačeným minimem a maximem.



Cvičení 17.25 na str. 197

$f(x, y) = x^2 - y^2 + \lg(1 + x^2 + y^2)$, $X = \langle -1, 1 \rangle^2$.

Graf funkce f s vyznačenými minimy a maximy a jedním stacionárním bodem v int X.

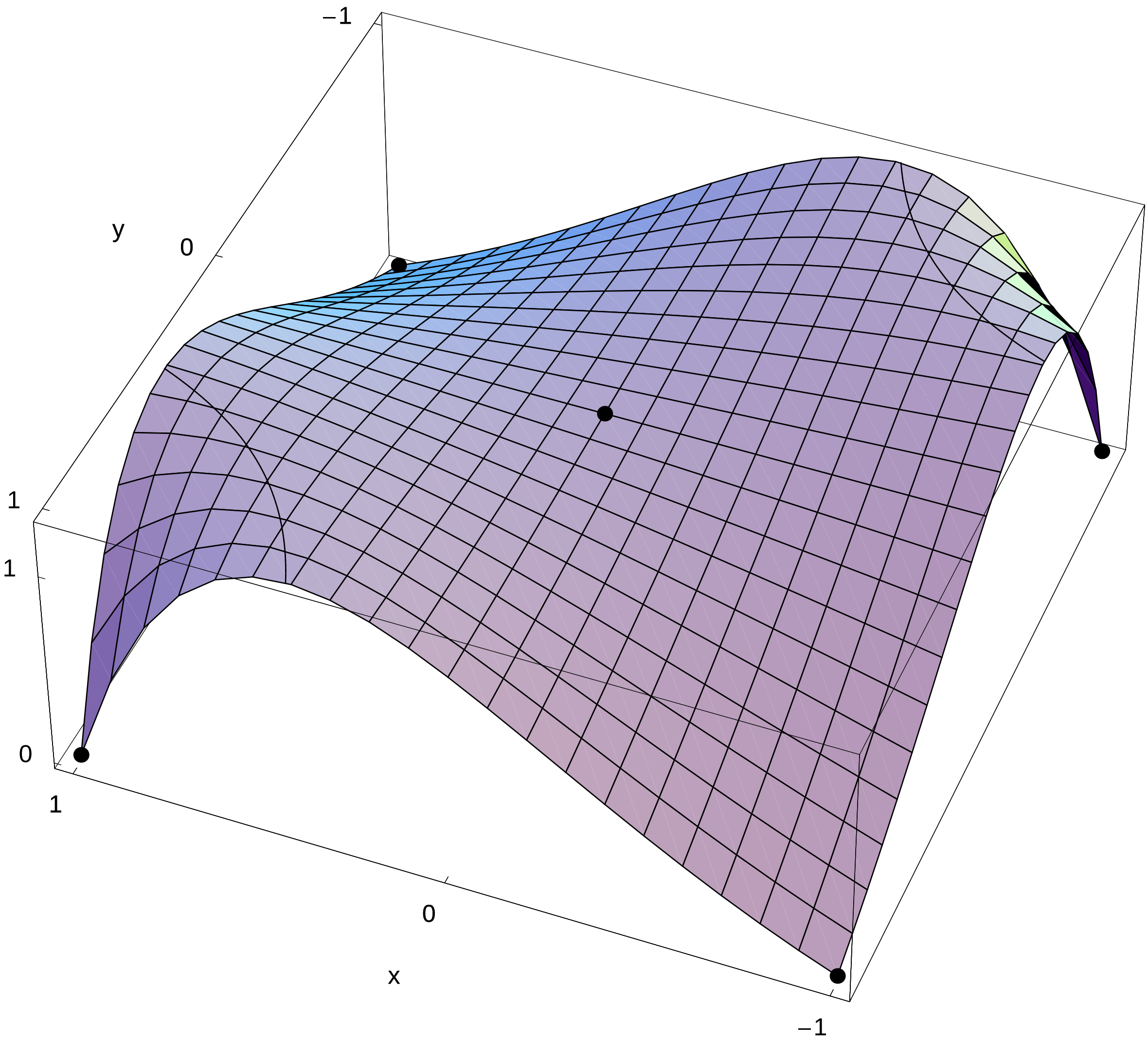


Cvičení 17.26 na str. 197

$f(x, y) = (1 - x^2y^2)e^{-xy}$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

Graf funkce f s vyznačenými 4 minimy a jedním stacionárním bodem v int X;

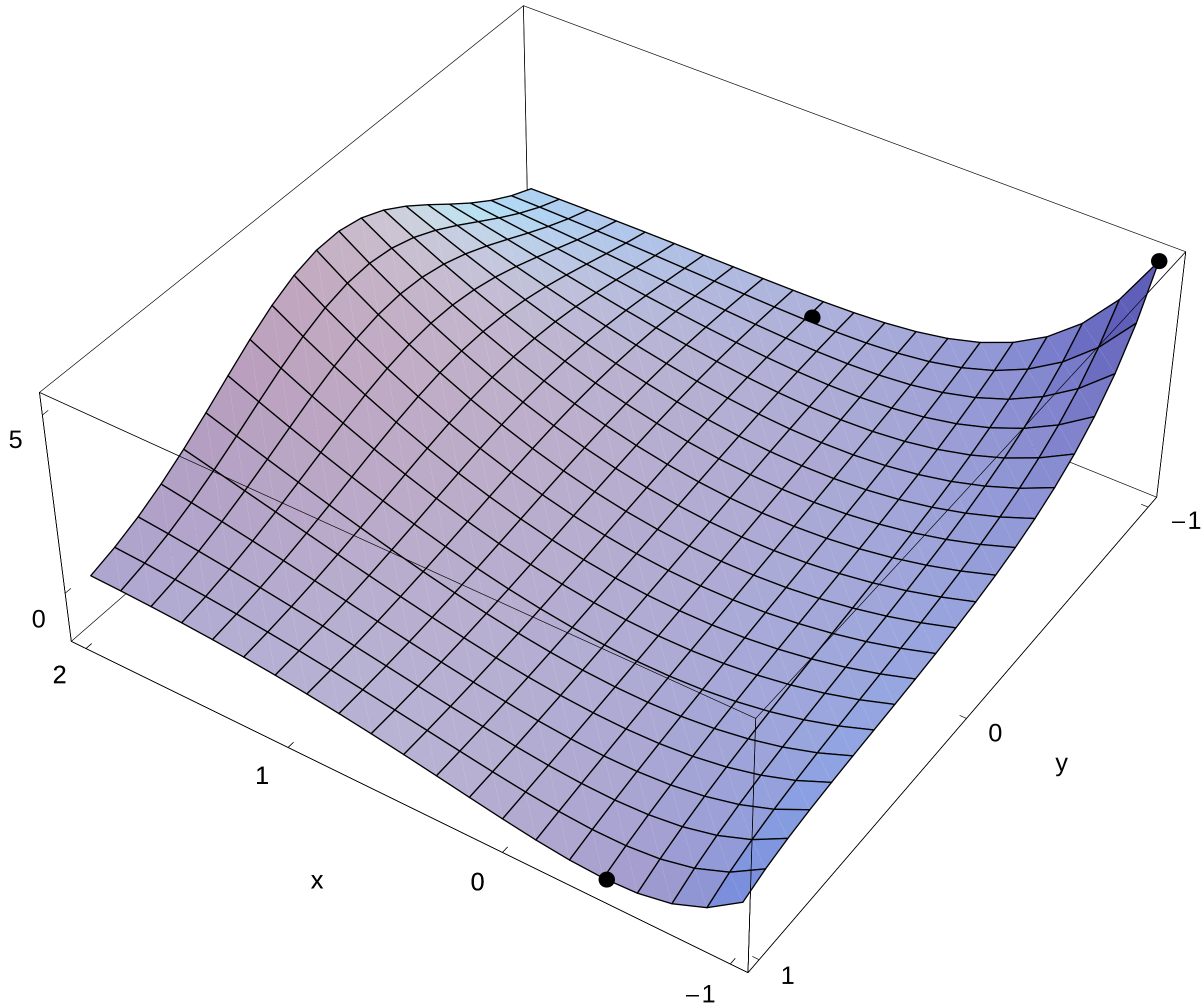
maxima nabývá na dvou hyperbolách.



Cvičení 17.27 na str. 197

$f(x, y) = (x^2 - y)e^{-xy^2}$, $X = \langle -1, 2\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.

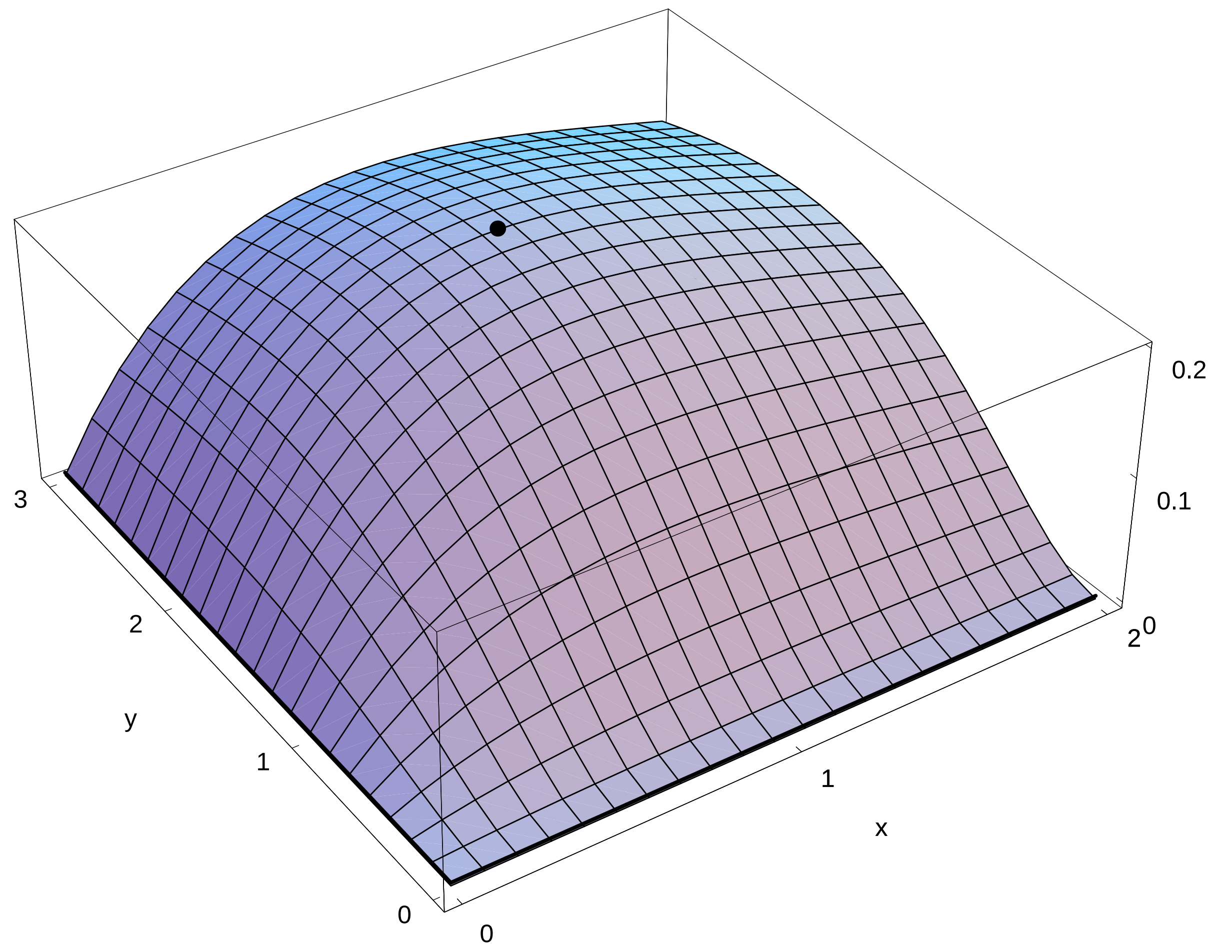
Graf funkce f s vyznačenými extrémy a jedním stacionárním bodem v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.28 na str. 197

$f(x, y) = xy^2\, e^{-x-y}$, $X = \langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 3\rangle$.

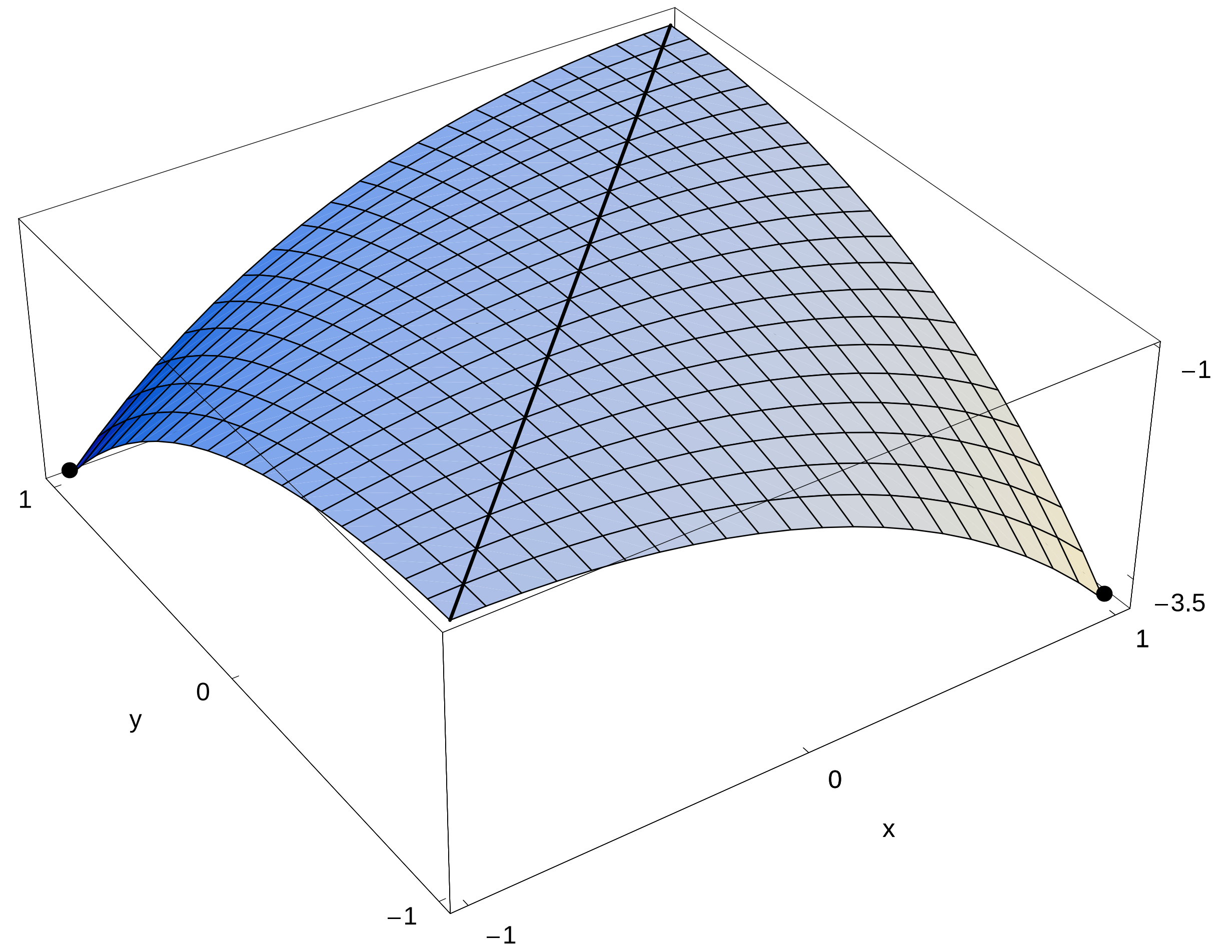
Graf funkce f s vyznačeným maximem; minima nabývá na dvou úsečkách ležících v ∂X.



Cvičení 17.29 na str. 197

$f(x,y) = e^x \sinh y - e^y \cosh x,\ X = \langle -1, 1\rangle^2.$

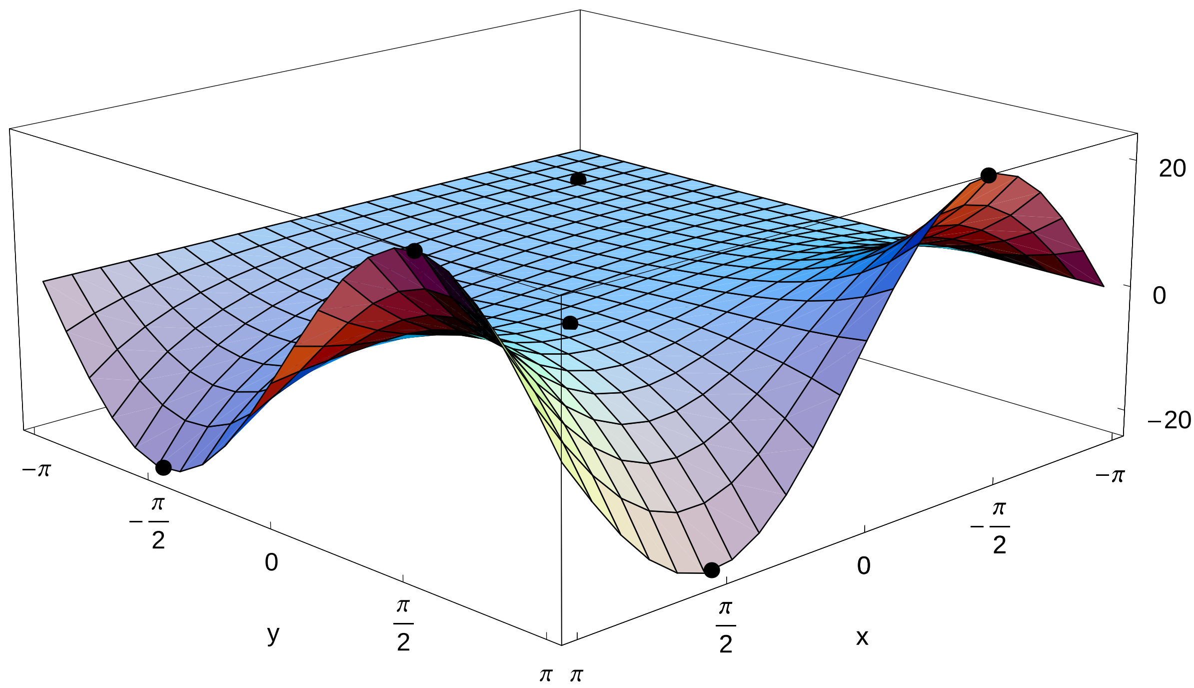
Graf funkce f s vyznačenými minimy; maxima nabývá na diagonále definičního oboru.



Cvičení 17.30 na str. 197

$f(x,y) = e^x \sin y - e^y \sin x,\ X = \langle -\pi, \pi \rangle^2.$

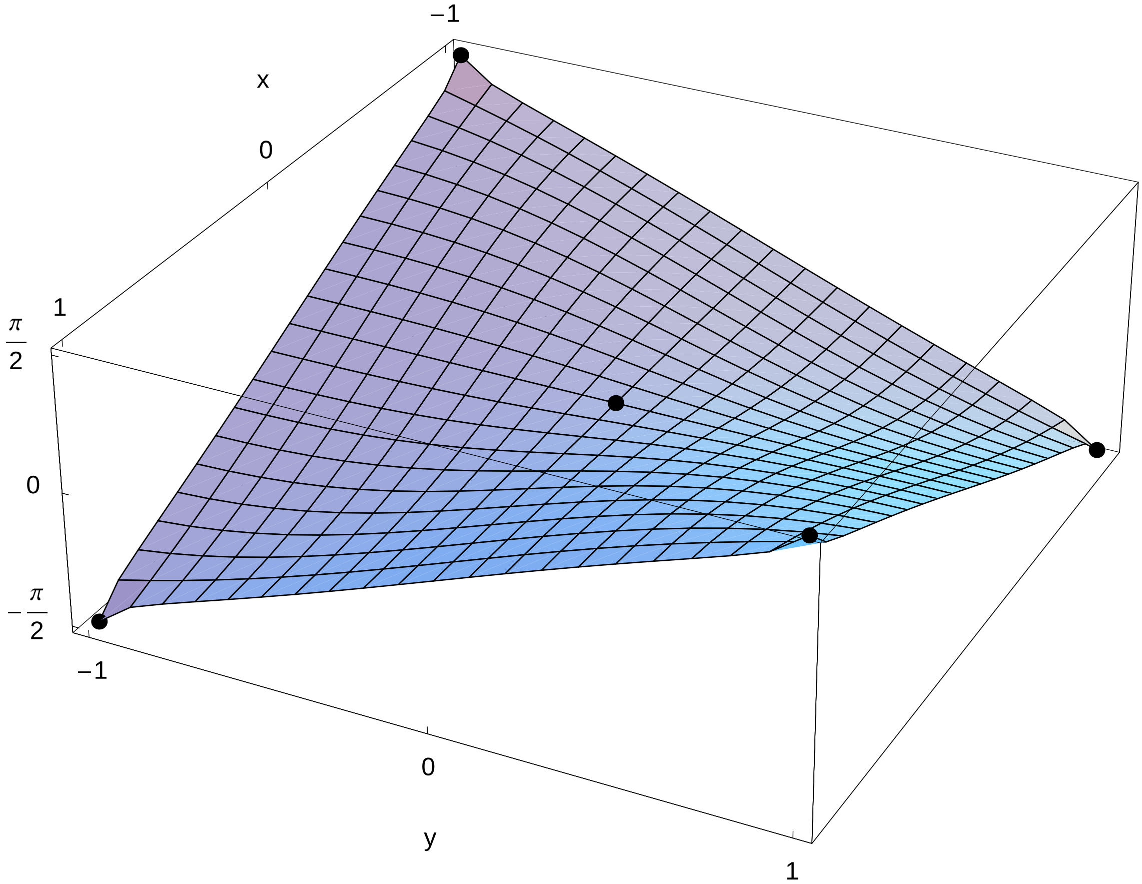
Graf funkce f s vyznačenými minimy a maximy a dvěma stacionárními body v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.31 na str. 197

$f(x,y) = \arcsin(3xy/(1+x^2+y^2)),\ X = \langle -1, 1 \rangle^2.$

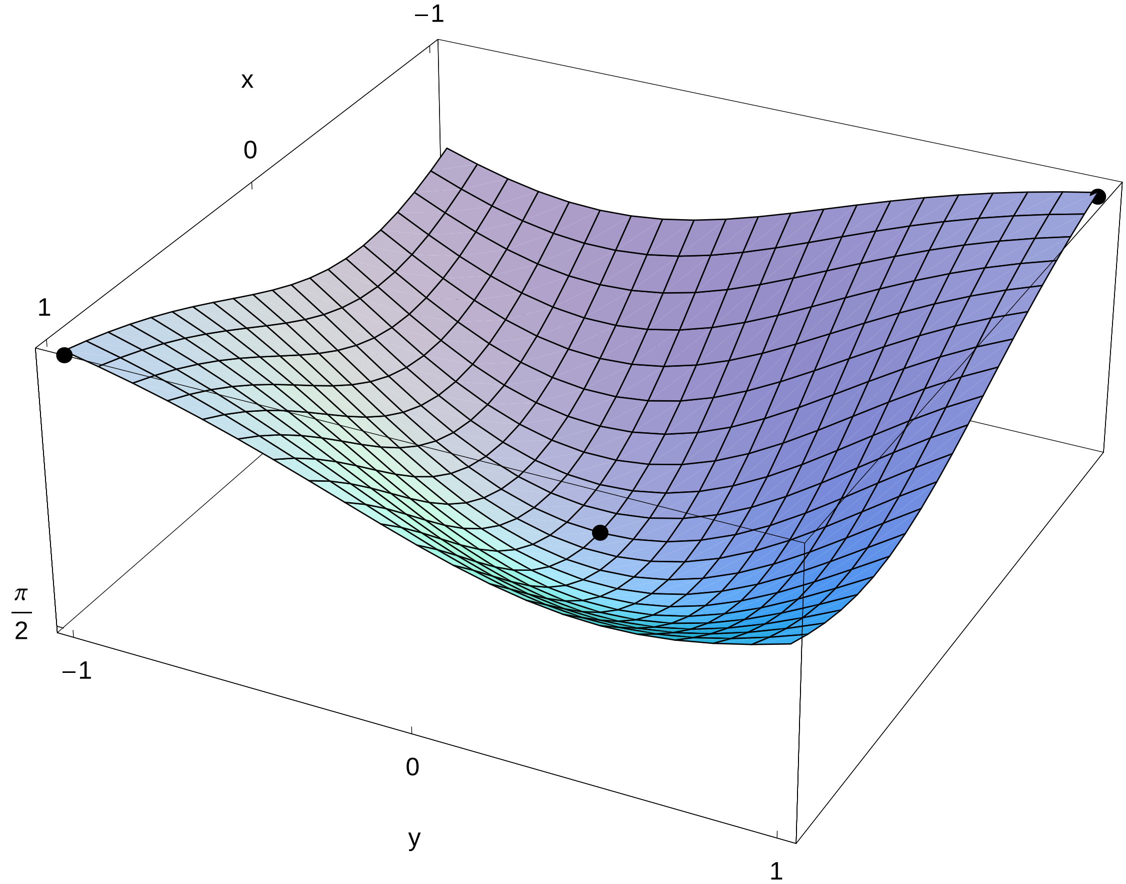
Graf funkce f s vyznačenými minimy a maximy a jedním stacionárním bodem v int X.



Cvičení 17.32 na str. 197

$f(x,y) = \operatorname{arccotg}(xy - x^2 - y^2)$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

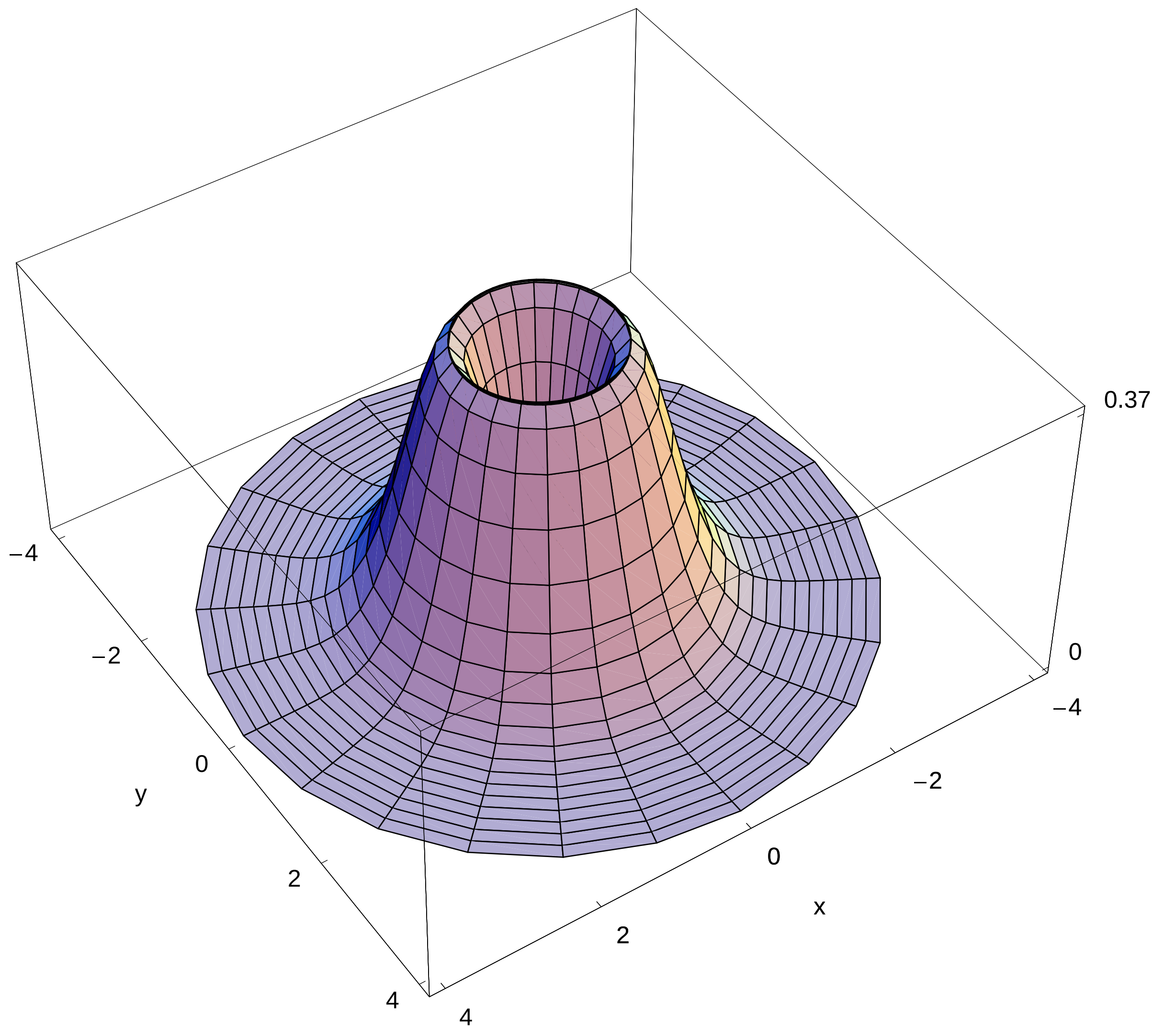
Graf funkce f s vyznačenými maximy a minimem.



Neomezenou množinu X redukujeme ve Cvičeních 17.63 až 17.90 vždy na kruh nebo interval X obsahující všechny extrémy dané funkce.

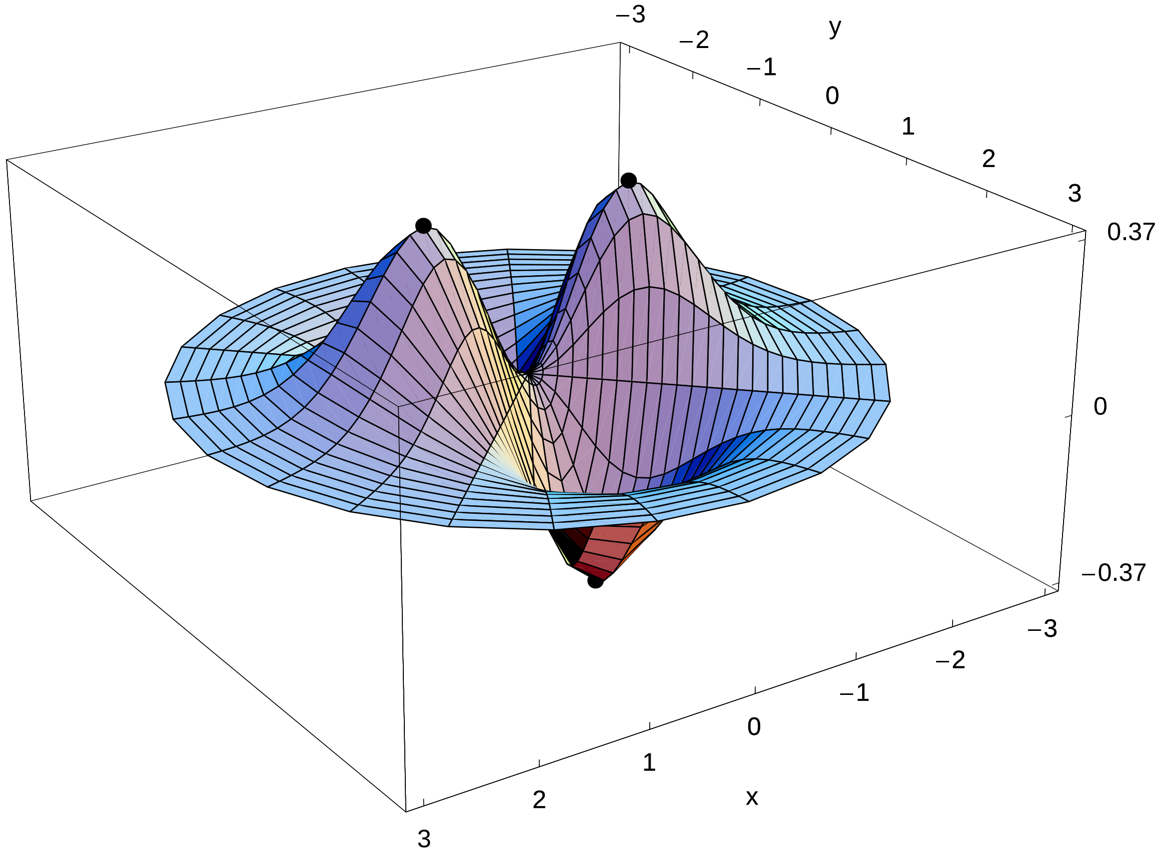
Cvičení 17.63 na str. 198

$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $X = \{(x, y);\, x^2 + y^2 \leq 16\}$.
Cylindrický graf funkce f, která svého maxima nabývá na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ a minima v bodě $(0, 0)$ (které na obrázku není vidět).



Cvičení 17.64 na str. 198

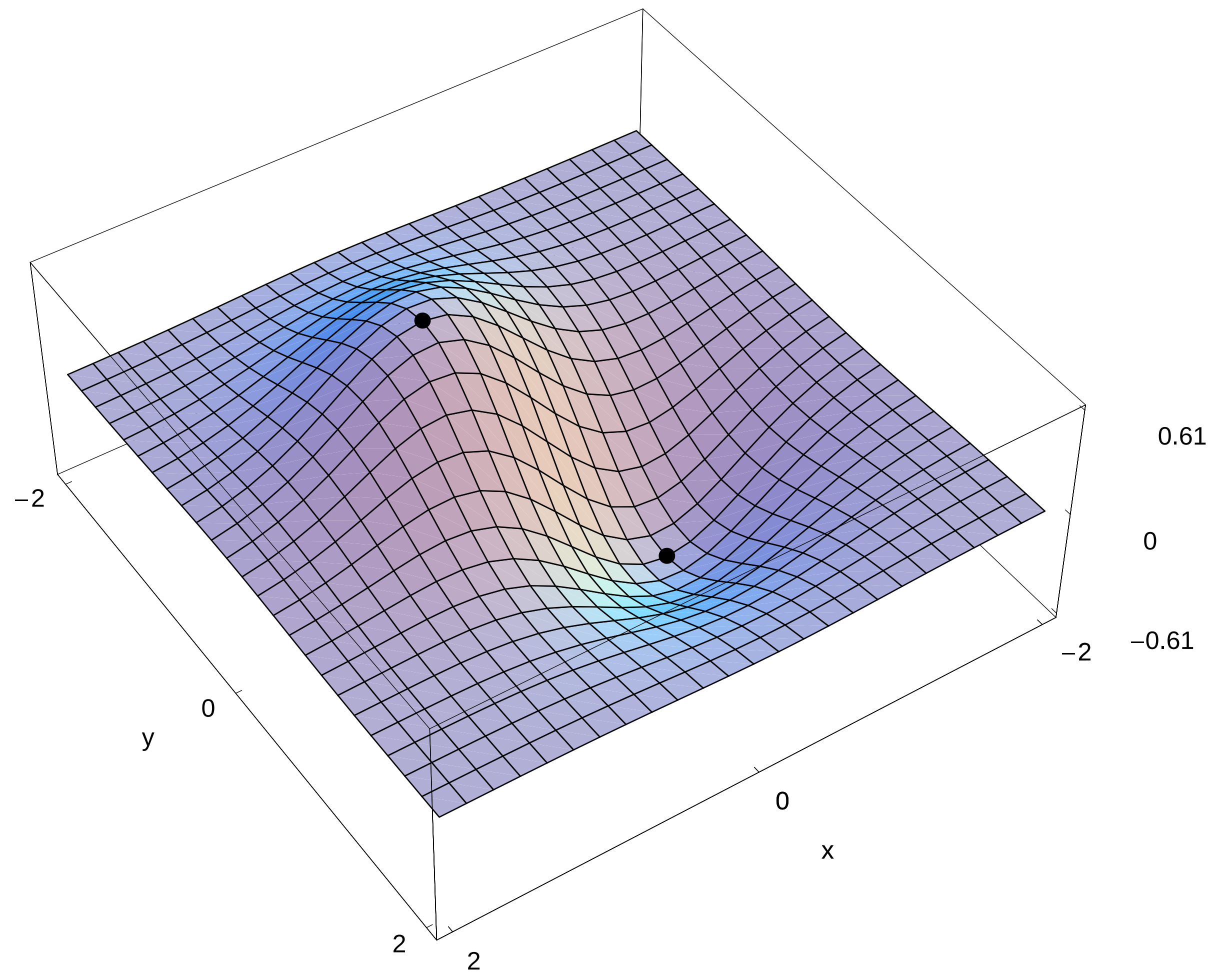
$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $X = \{(x, y);\, x^2 + y^2 \le 9\}$.
Cylindrický graf funkce f, která svého maxima nabývá ve dvou bodech, minima také ve dvou bodech; jedno minimum není vidět.



Cvičení 17.65 na str. 199

$f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2+y^2)}$, $X = \langle -2, 2\rangle^2$.

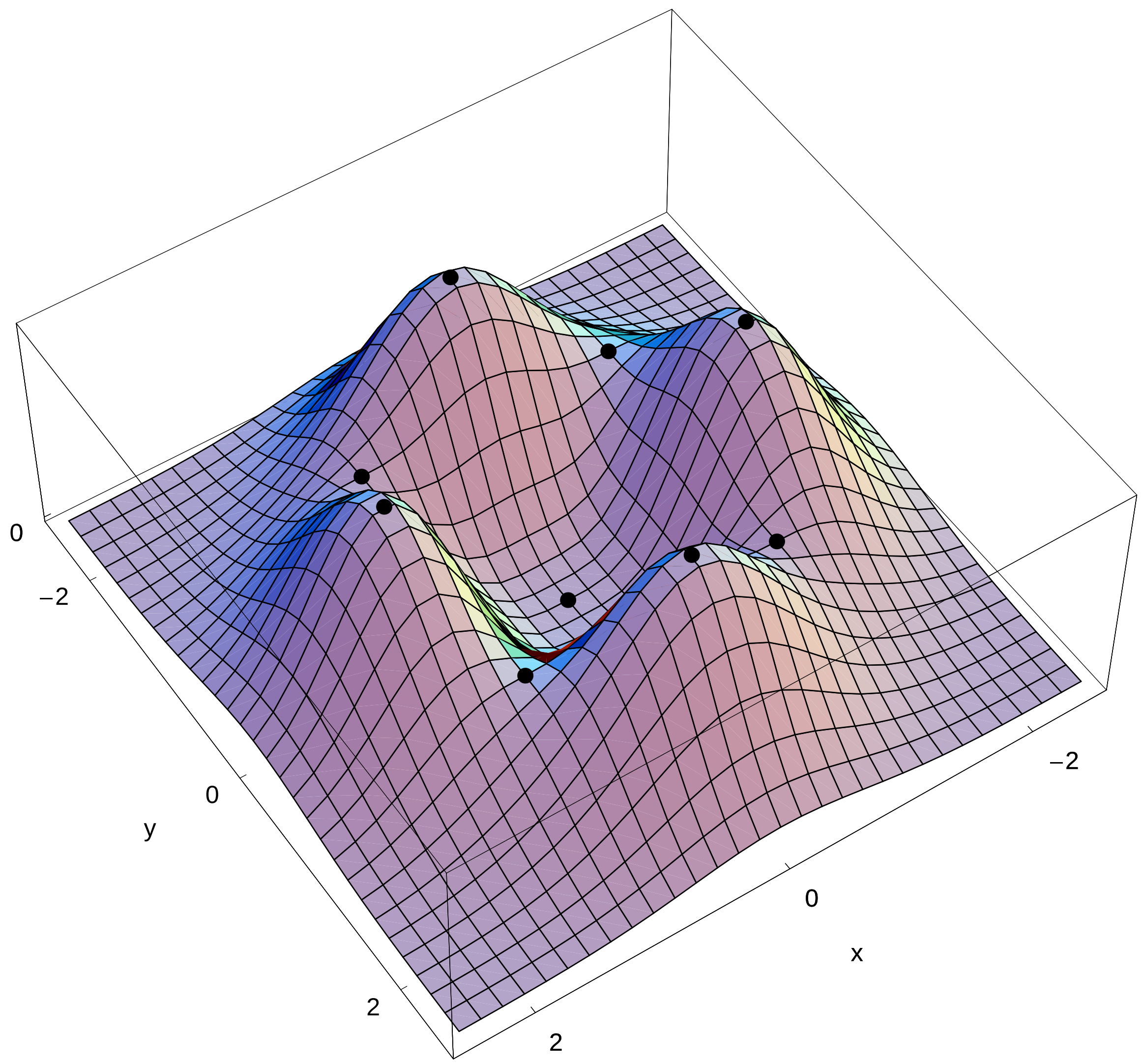
Graf funkce f s vyznačeným maximem a minimem.



Cvičení 17.66 na str. 199

$f(x,y) = (x^4 + y^4)e^{-(x^2+y^2)}$, $X = \langle -2.5, 2.5\rangle^2$.

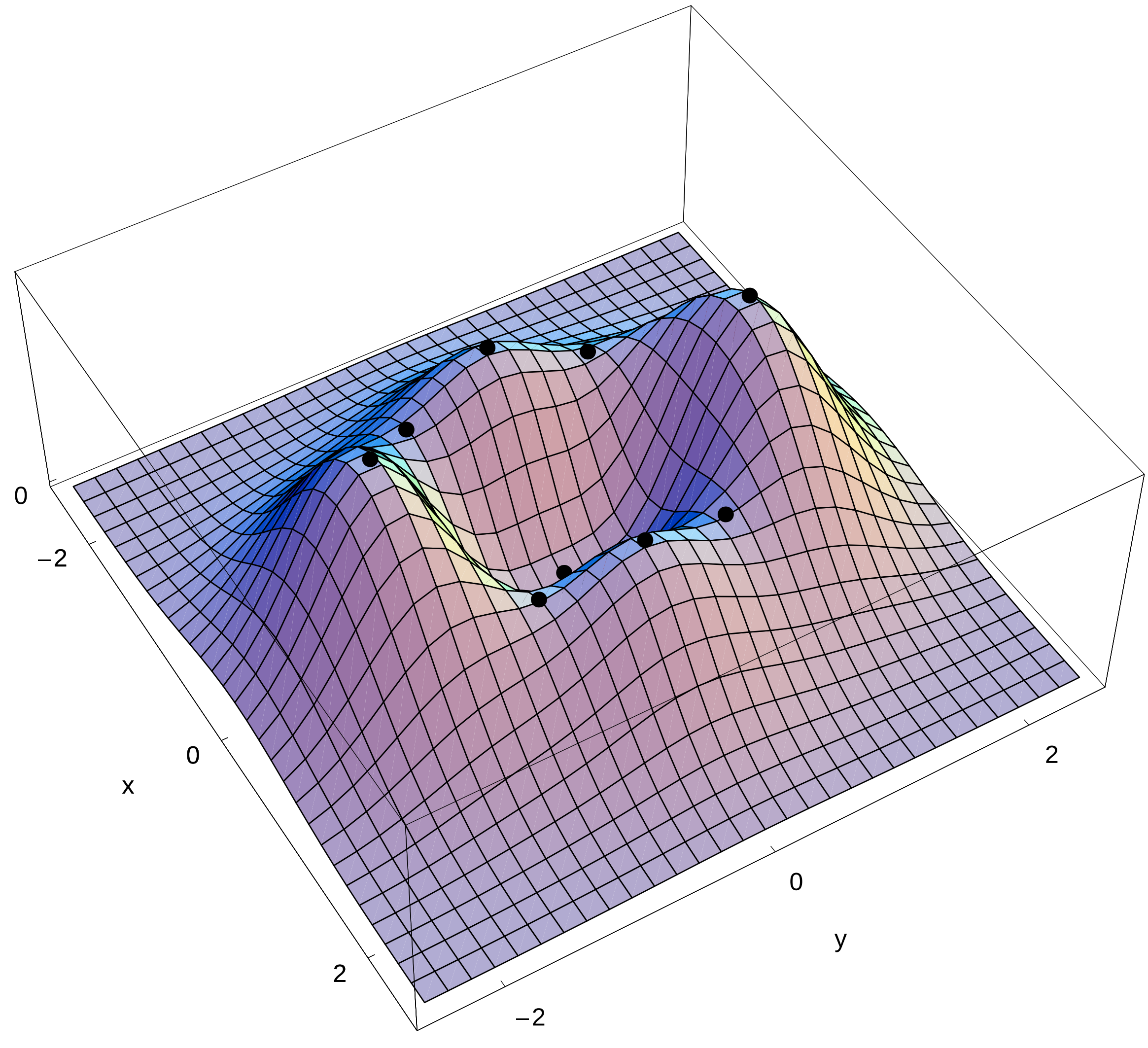
Graf funkce f s vyznačenými 4 maximy, minimem a dalšími 4 stacionárními body v int X.



Cvičení 17.67 na str. 199

$f(x, y) = (x^2 + y^4)e^{-(x^2+y^2)}$, $X = \langle -2.5, 2.5\rangle^2$.

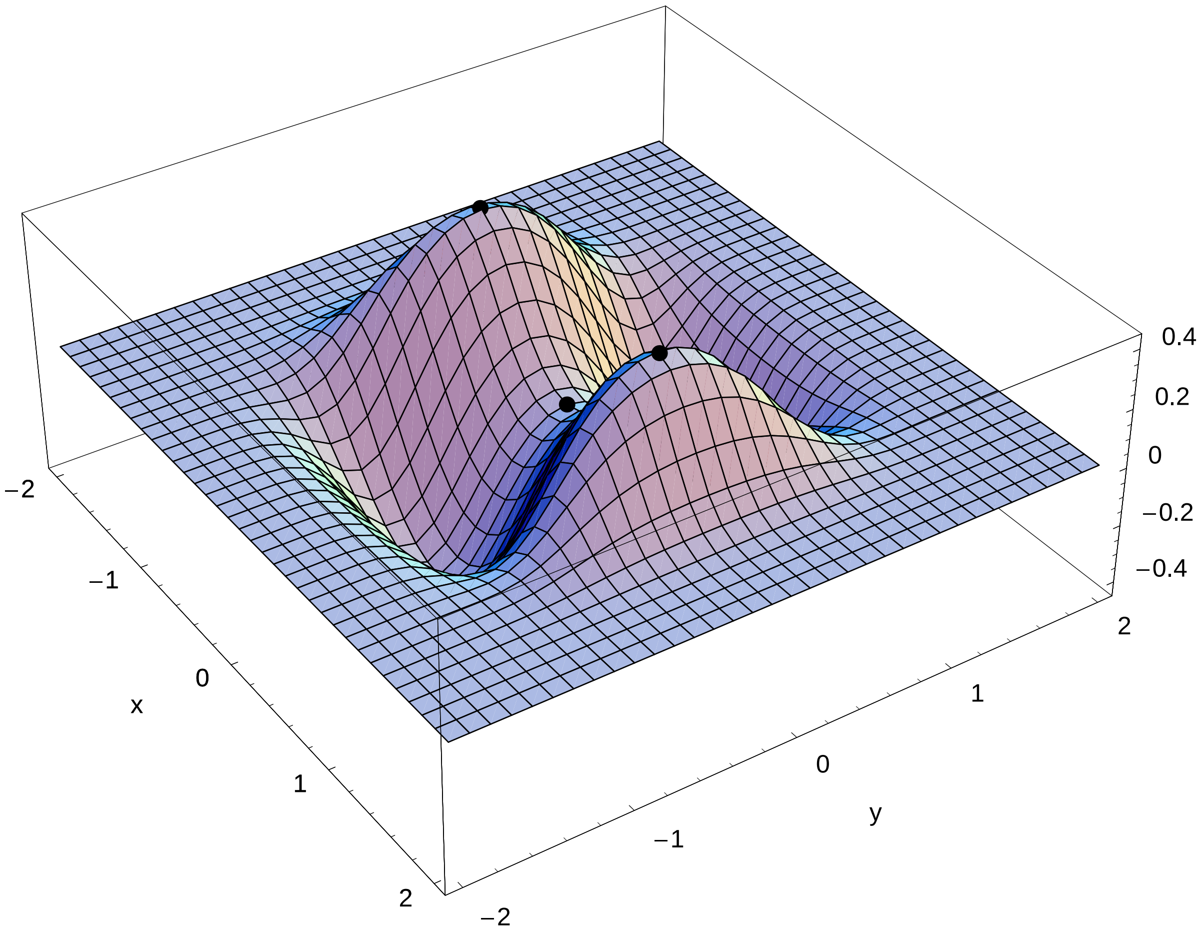
Graf funkce f s vyznačenými 2 maximy, minimem a dalšími 6 stacionárními body v int X.



Cvičení 17.68 na str. 199

$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^4+y^4)}$, $X = \langle -2, 2\rangle^2$.

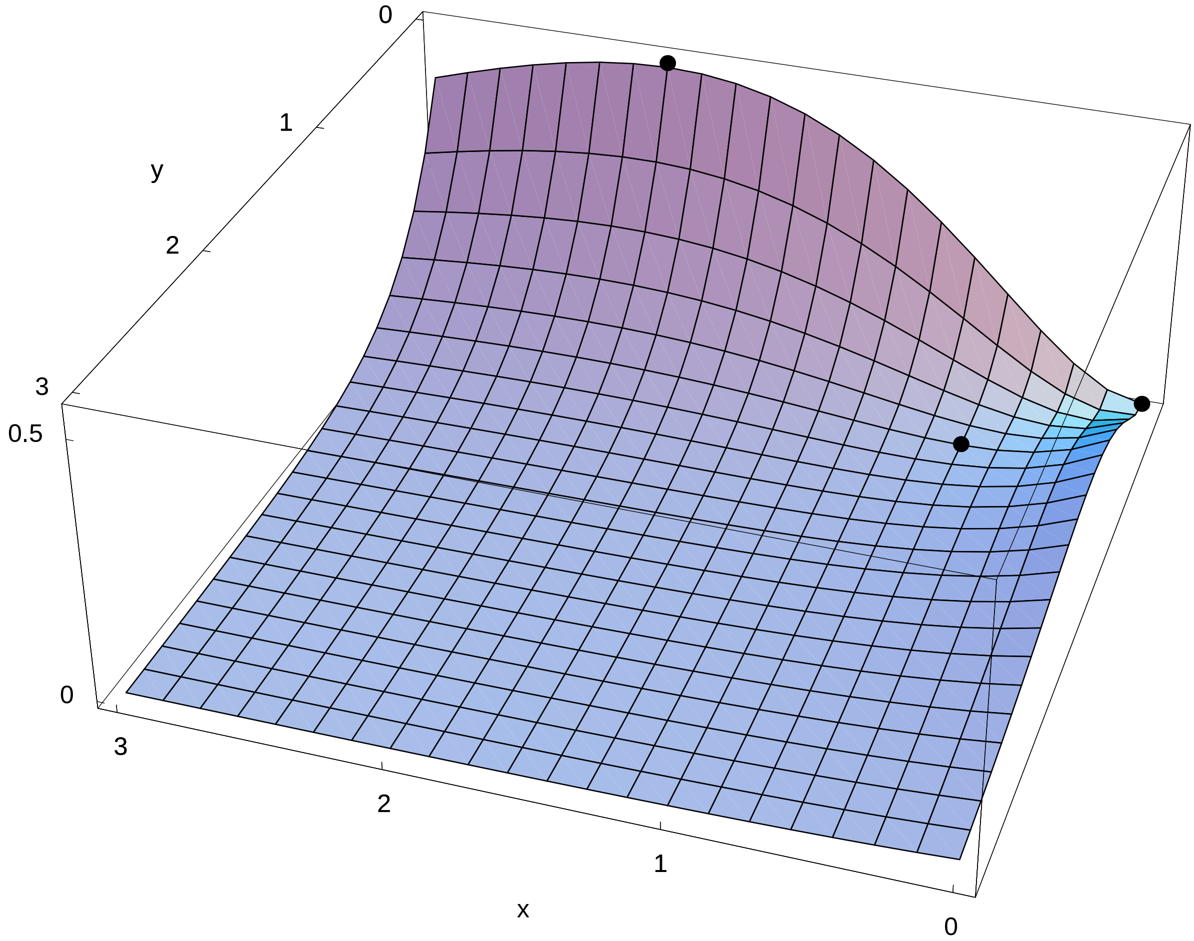
Graf funkce f s vyznačenými 2 maximy, 2 (na obrázku neviditelnými) minimy a stacionárním bodem $(0, 0) \in \operatorname{int} X$.



Cvičení 17.69 na str. 199

$f(x, y) = (x^2 - xy + y^2)\,e^{-(x+2y)}$, $X = \langle 0, 3\rangle^2$.

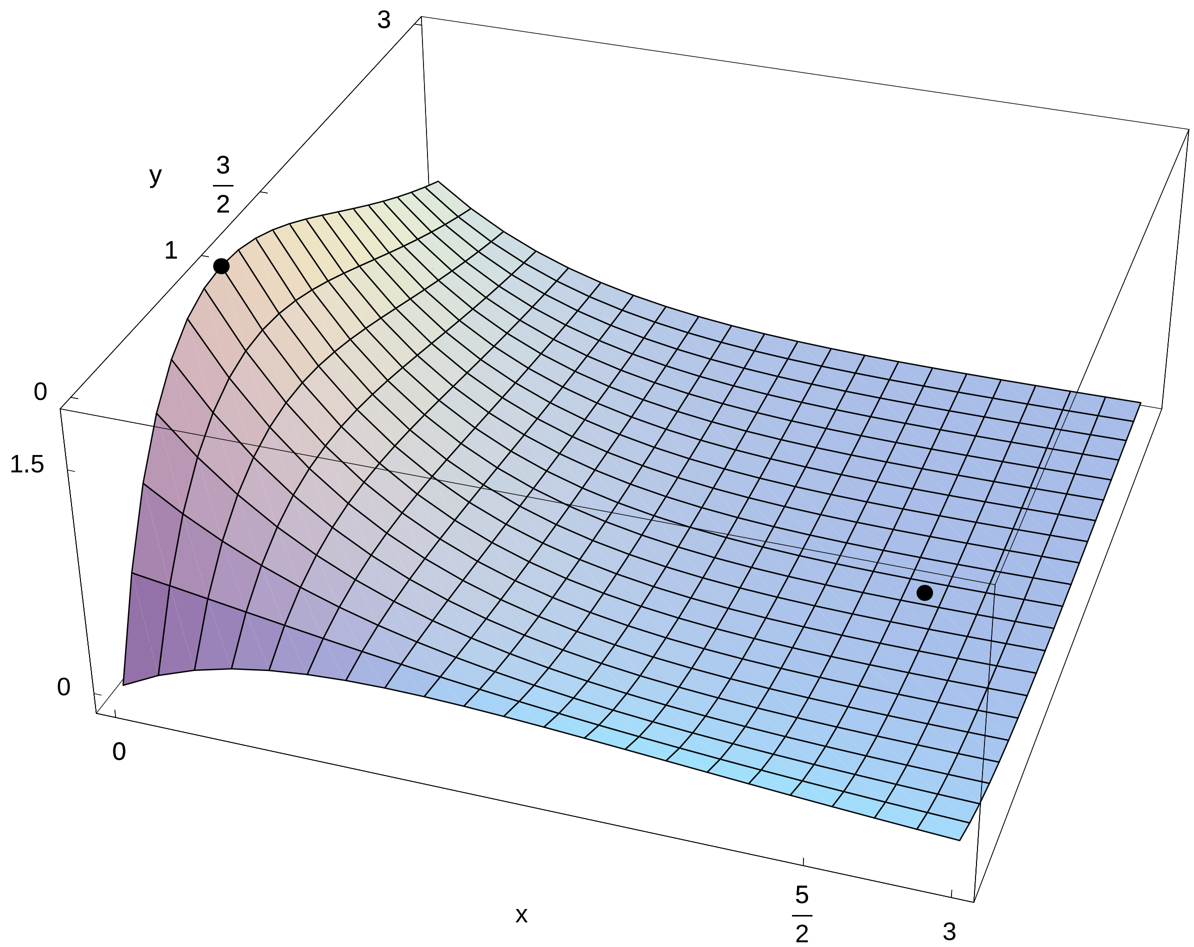
Graf funkce f s vyznačeným maximem, minimem a dalším stacionárním bodem v int X.



Cvičení 17.70 na str. 199

$f(x,y) = (x - 4xy + 5y)\,e^{-(x+y)}$, $X = \langle 0,3\rangle^2$.

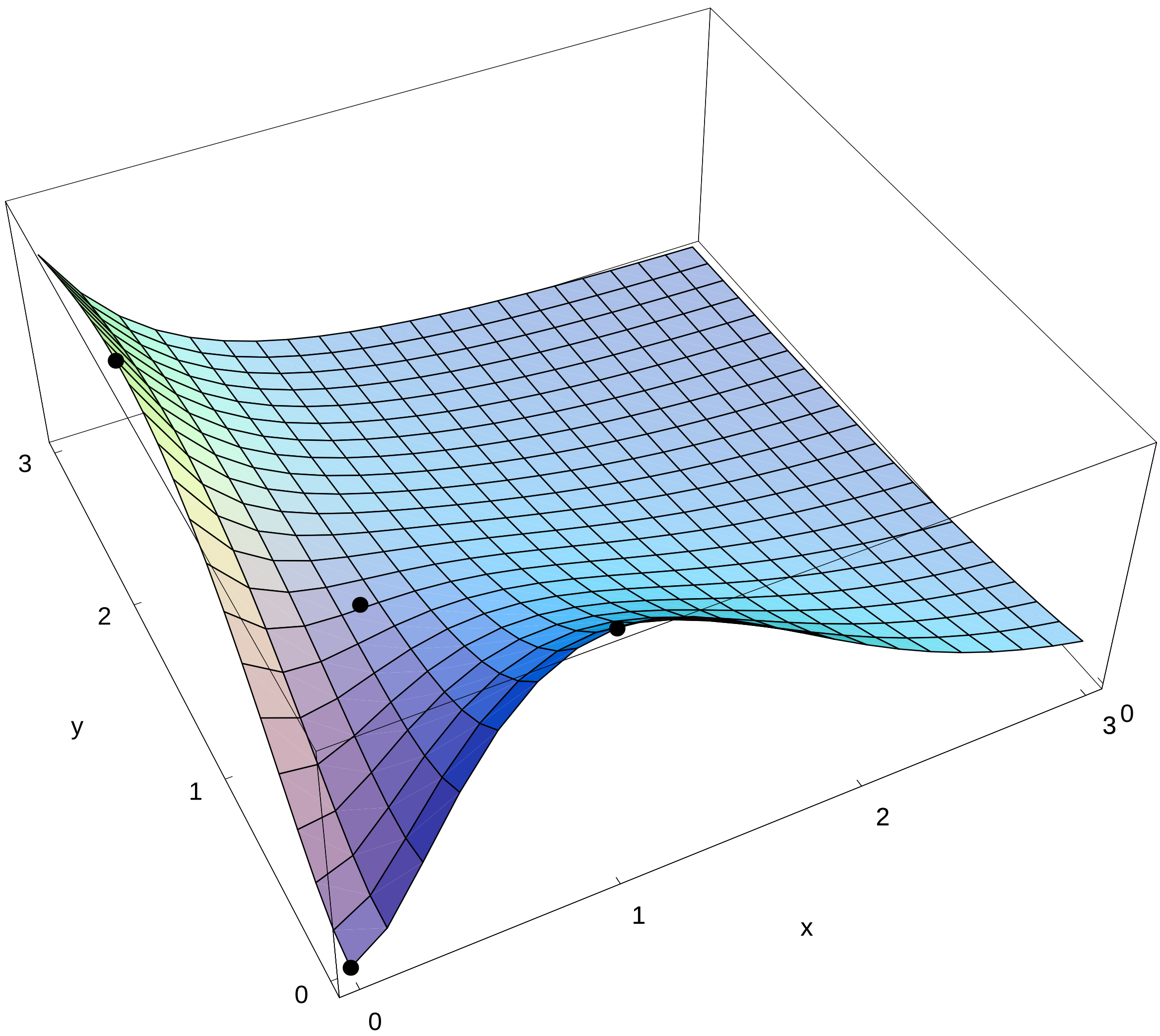
Graf funkce f s vyznačeným maximem a minimem.



Cvičení 17.71 na str. 199

$f(x,y) = (4x^2 + y^2)e^{-(2x+y)}$, $X = \langle 0, 3\rangle^2$.

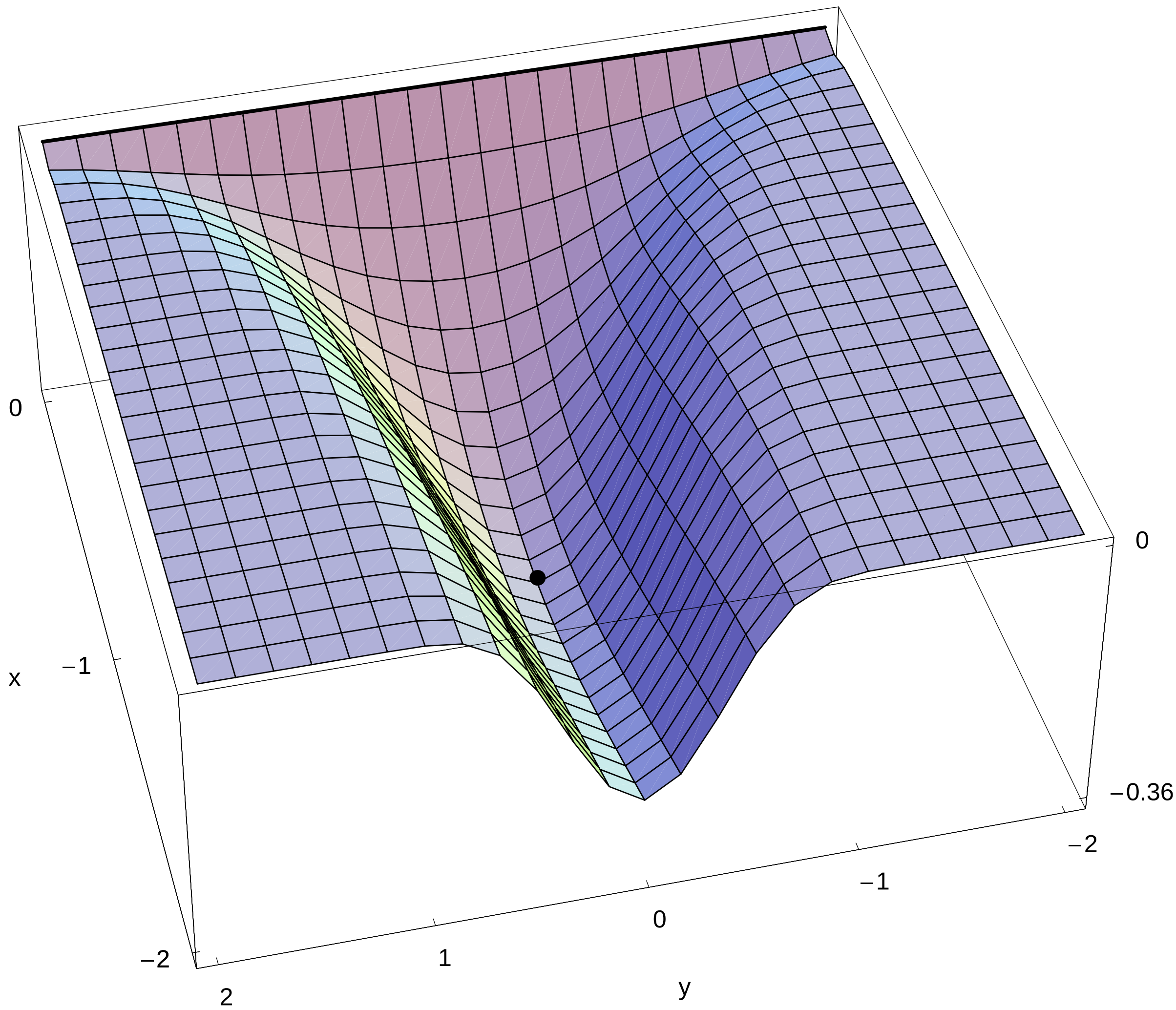
Graf funkce f s vyznačenými 2 maximy, minimem a dalším stacionárním bodem v int X.



Cvičení 17.72 na str. 199

$f(x, y) = x \exp(x(y^2 + 1)^2)$, $X = \langle -2, 0\rangle \times \langle -2, 2\rangle$.

Graf funkce f, která svého minima nabývá v jednom bodě, svého maxima na úsečce $x = 0$.

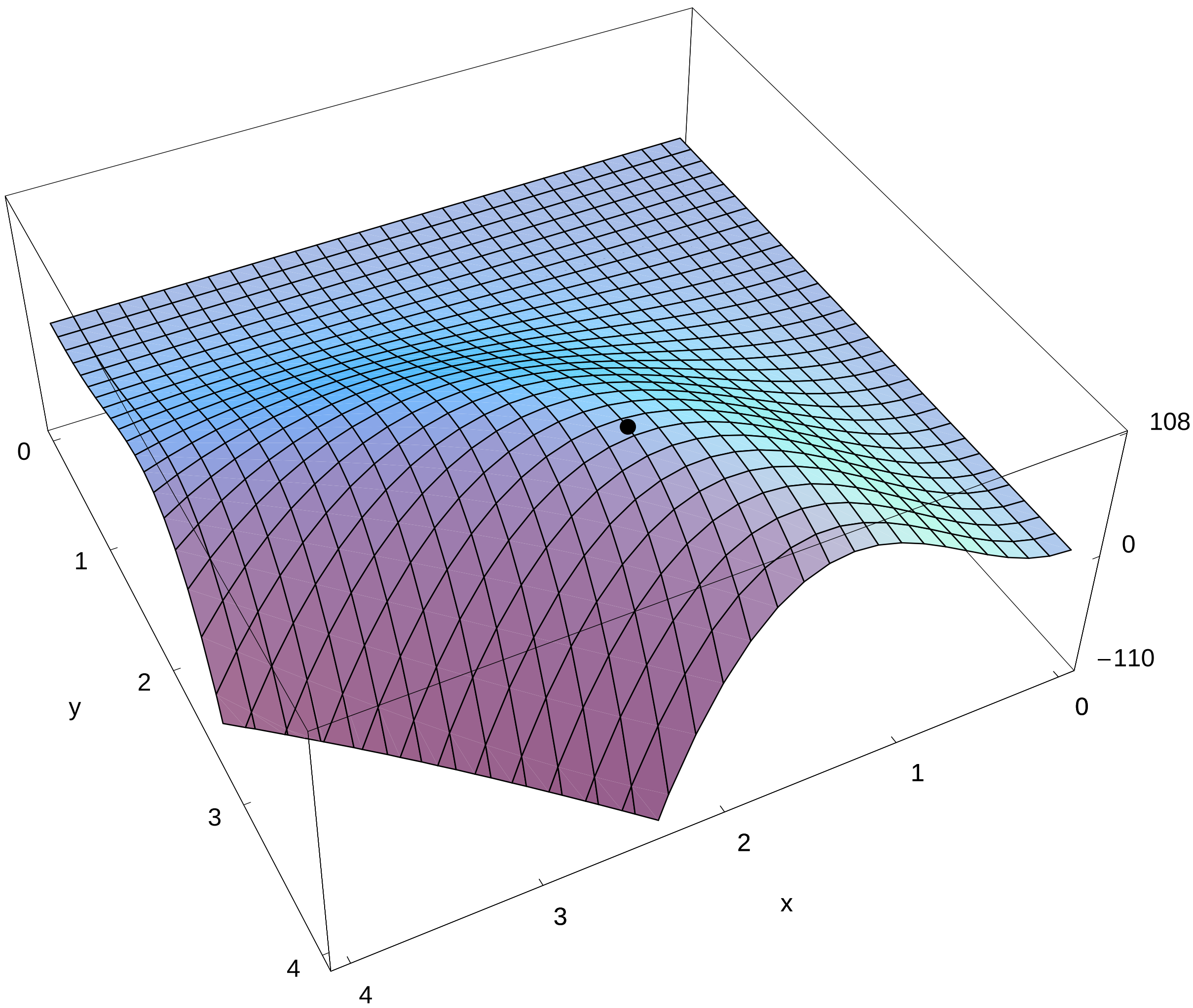


Cvičení 17.73 na str. 199

$f(x, y) = x^2 y^3 (6 - x - y)$, $X = \langle 0, 4 \rangle^2$.

Graf funkce f, jejíž obor hodnot byl restringován na interval $\langle -110, 110 \rangle$.

Zdola neomezená funkce f nabývá v $\mathbb{R}^2_+$ svého maxima v jediném bodě.

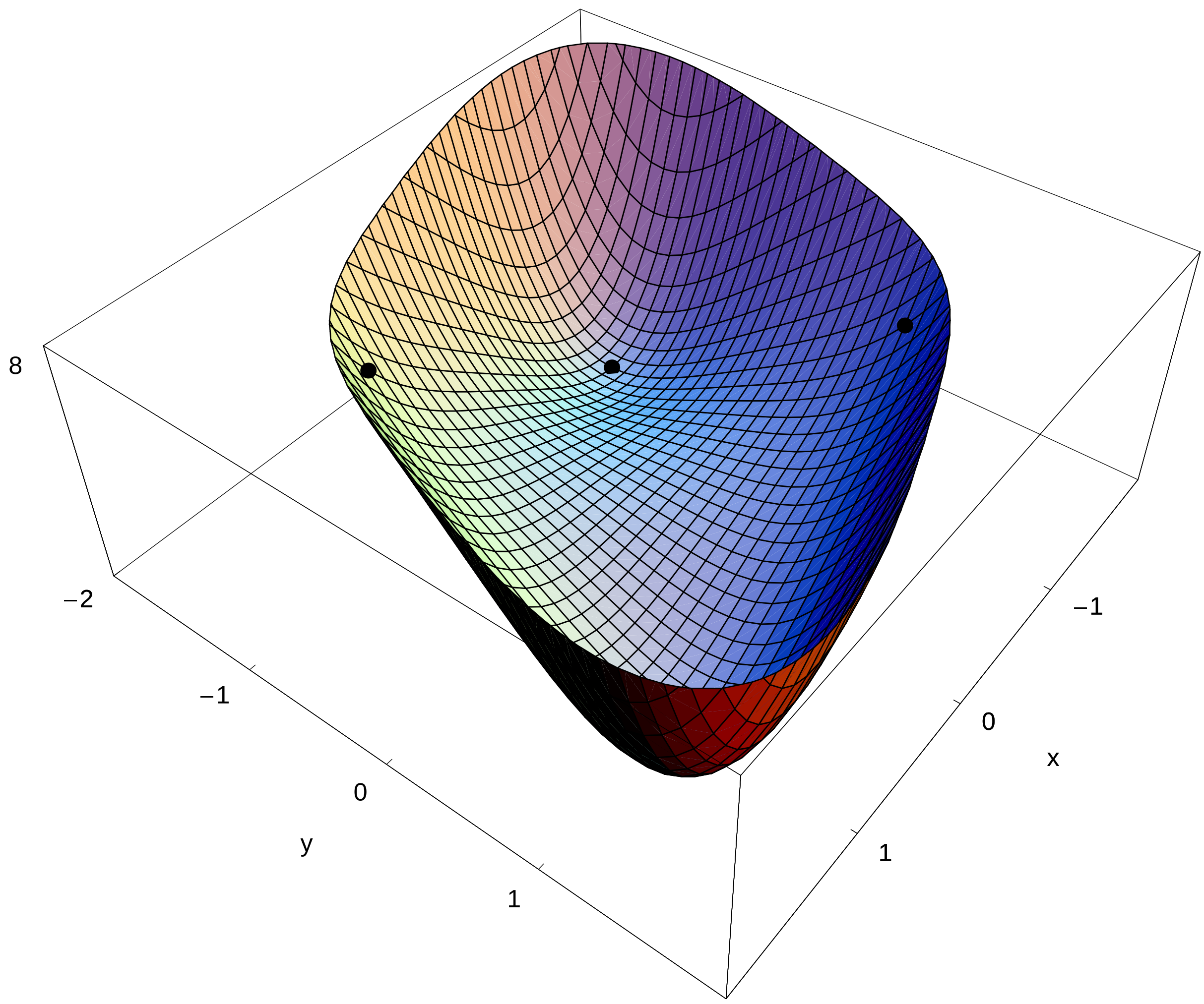


Cvičení 17.74 na str. 199

$f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4,\ X = \langle -2, 2\rangle^2.$

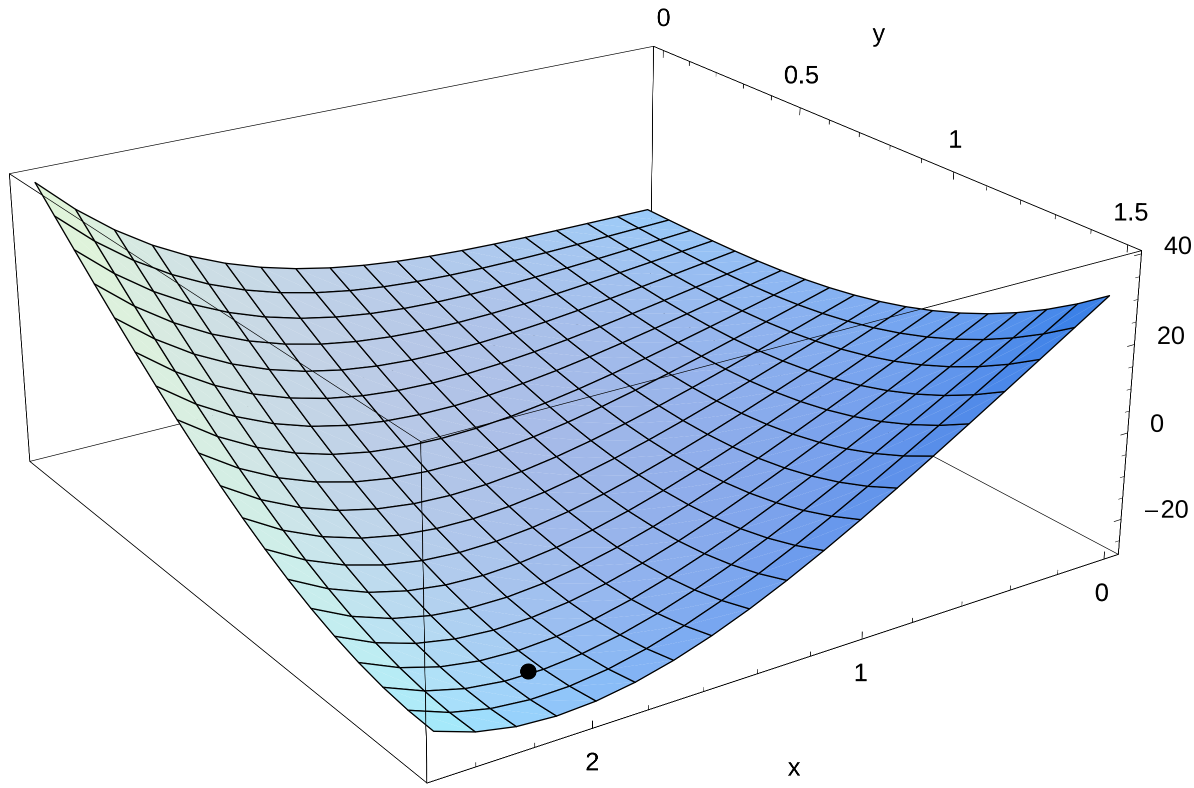
Graf funkce f, jejíž obor hodnot byl restringován na interval $\langle -2, 8\rangle$.

Vyznačena 2 minima (z nichž jedno není vidět) a další 2 stacionární body v $\operatorname{int} X$.



Cvičení 17.75 na str. 199

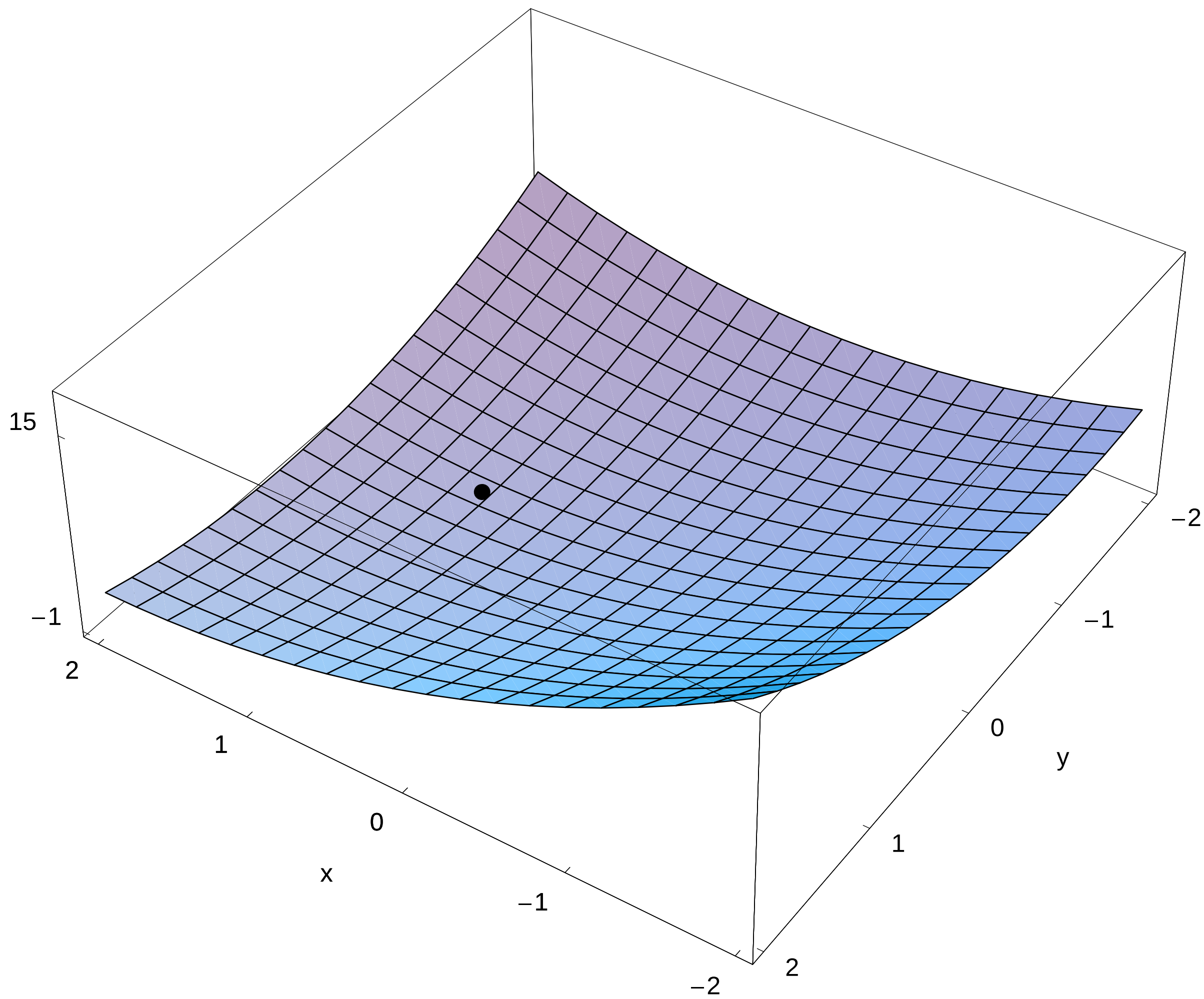
$f(x, y) = x^4 - 24xy + 9y^3,\ X = \langle 0, 2.5\rangle \times \langle 0, 1.5\rangle.$
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.76 na str. 199

$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$, $X = \langle -2, 2 \rangle^2$.

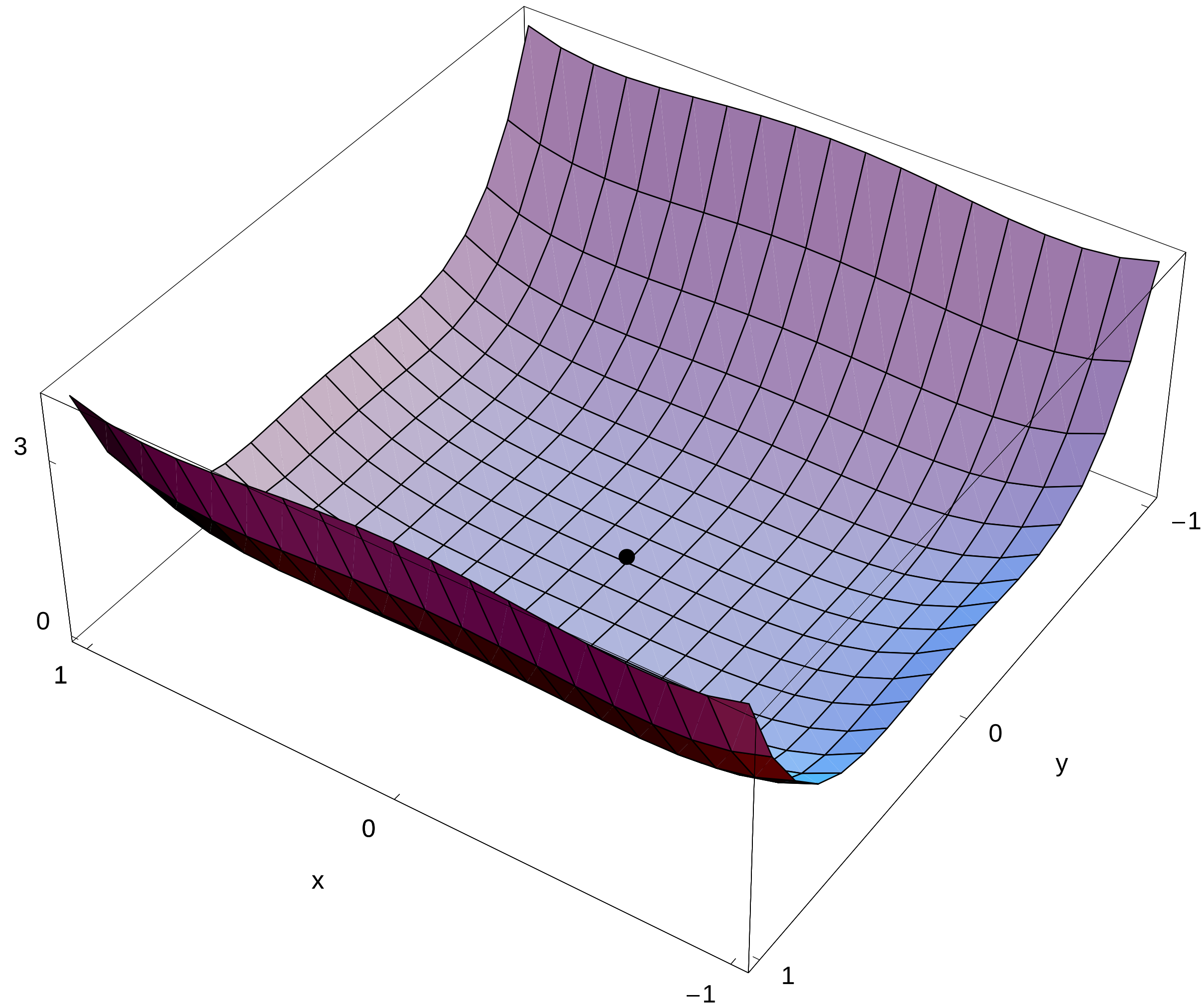
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.77 na str. 199

$f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + 4y^4$, $X = \langle -1, 1\rangle^2$.

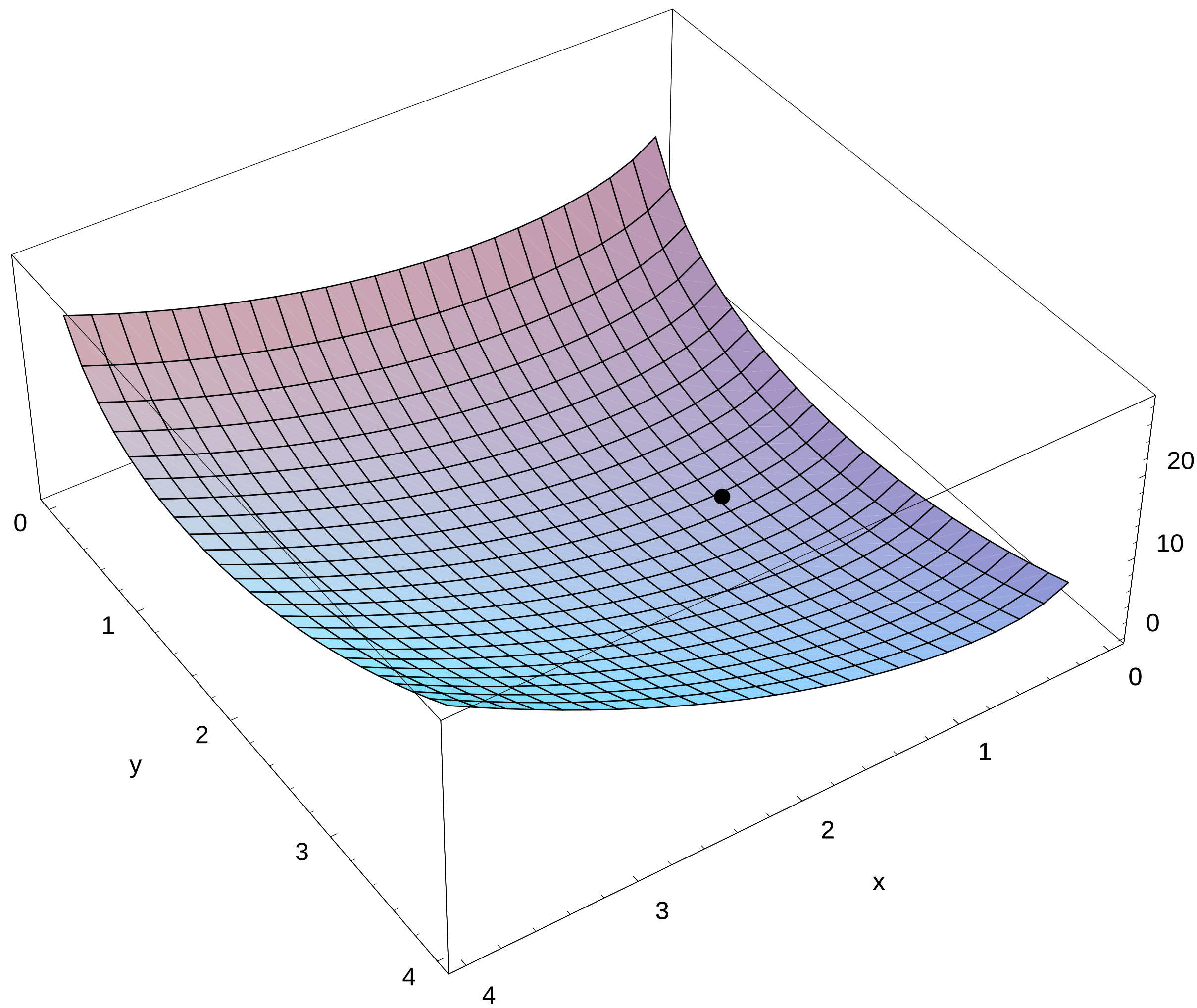
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.78 na str. 199

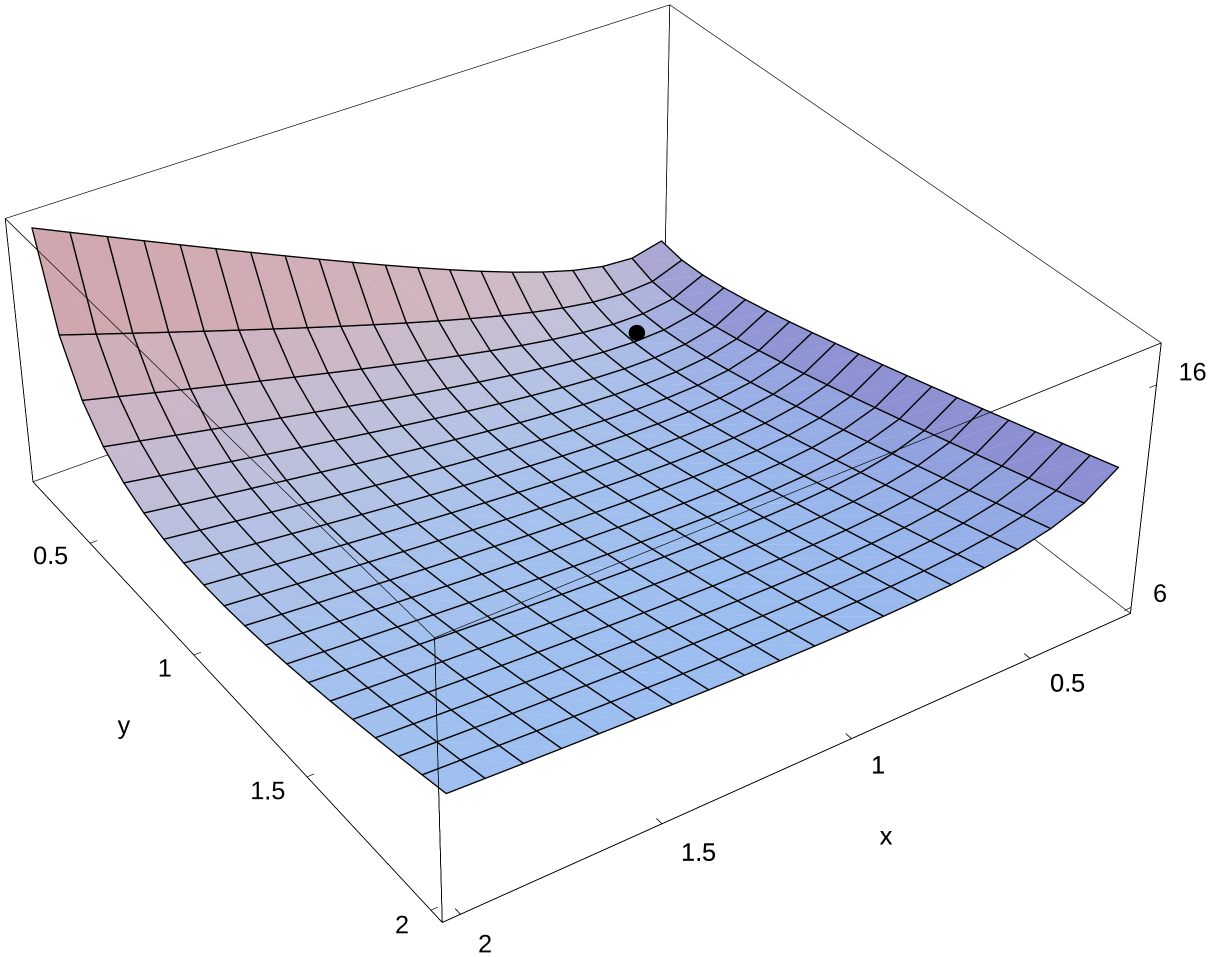
$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\lg x - 10\lg y,\ X = \langle \frac{1}{4}, 4\rangle^2.$

Graf funkce f s vyznačeným minimem.



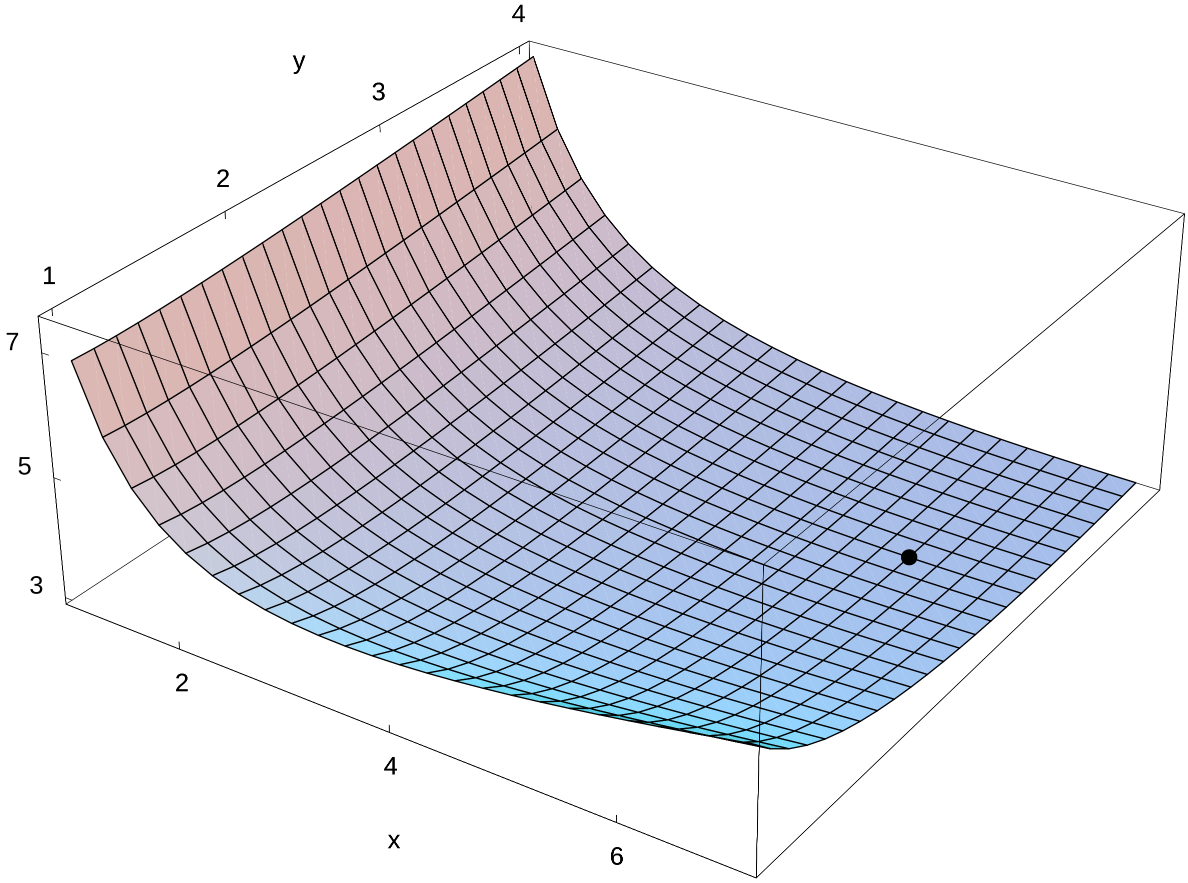
Cvičení 17.79 na str. 199

$f(x,y) = 1/x + 2x/y + 4y$, $X = \langle \frac{1}{4}, 2\rangle^2$.
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



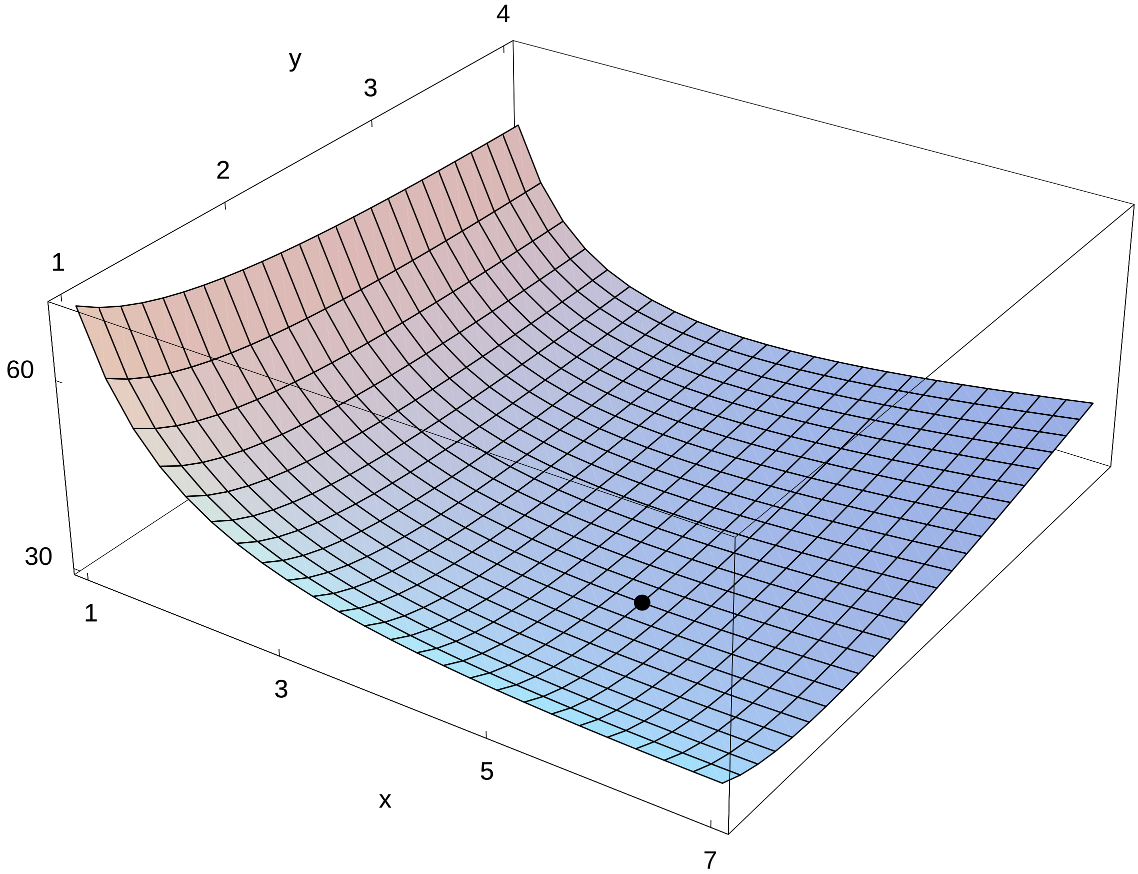
Cvičení 17.80 na str. 199

$f(x, y) = 6/x + x/(2y) + y/3$, $X = \langle 1, 7\rangle \times \langle 1, 4\rangle$.
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.81 na str. 199

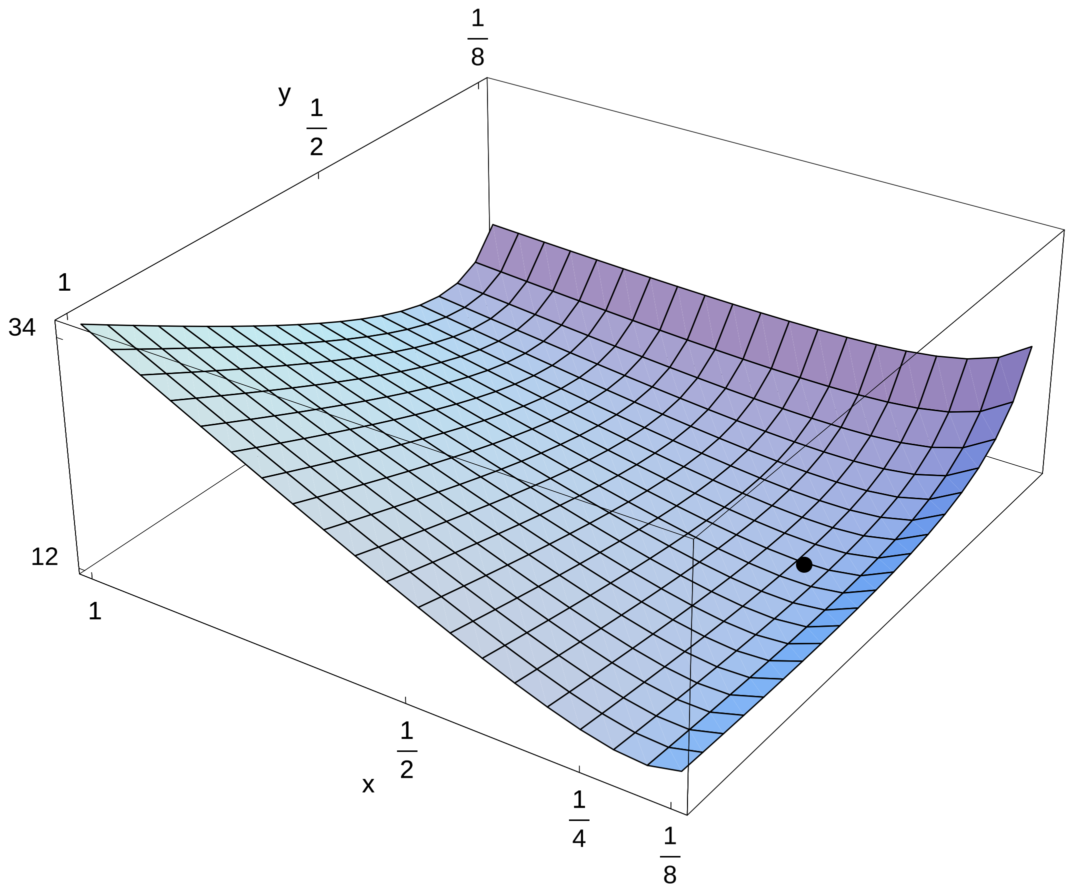
$f(x, y) = xy + 50/x + 20/y$, $X = \langle 1, 7\rangle \times \langle 1, 4\rangle$.
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.82 na str. 199

$f(x, y) = 1/x + 2/y + 32xy$, $X = \langle \frac{1}{8}, 1\rangle^2$.

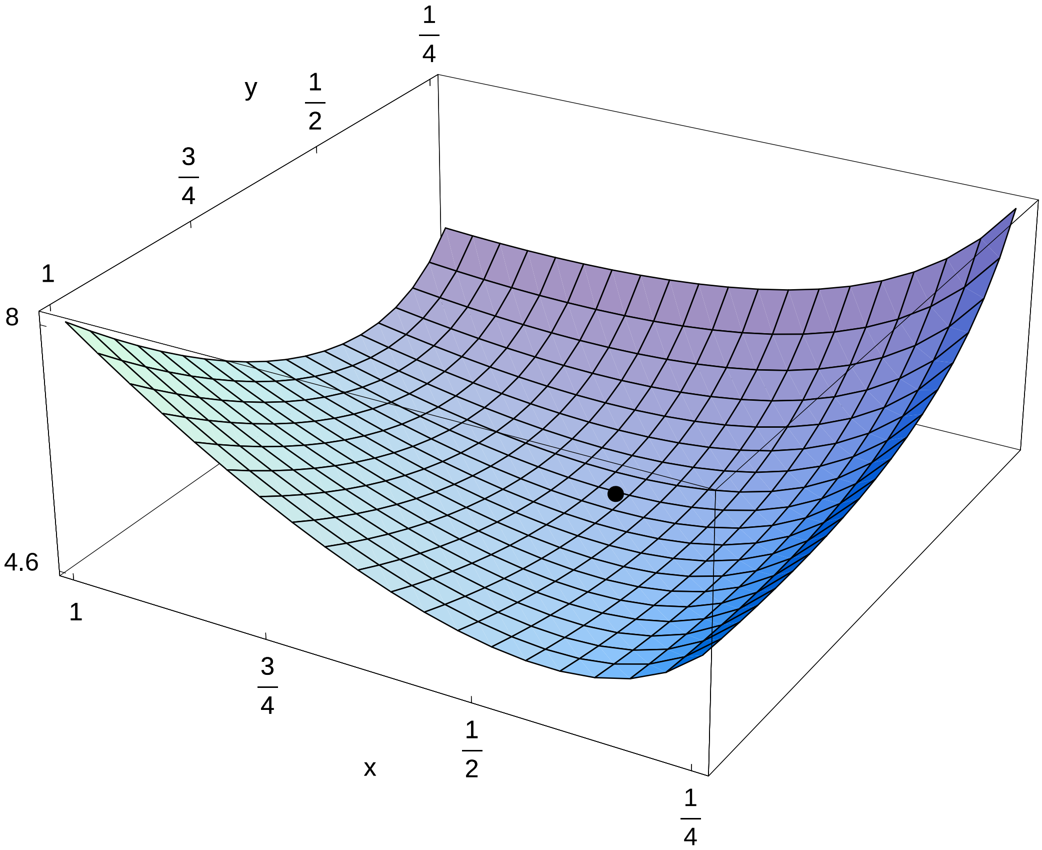
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.83 na str. 199

$f(x,y) = 1/x + 1/y + 3xy(x+y)$, $X = \langle \frac{1}{4}, 1\rangle^2$.

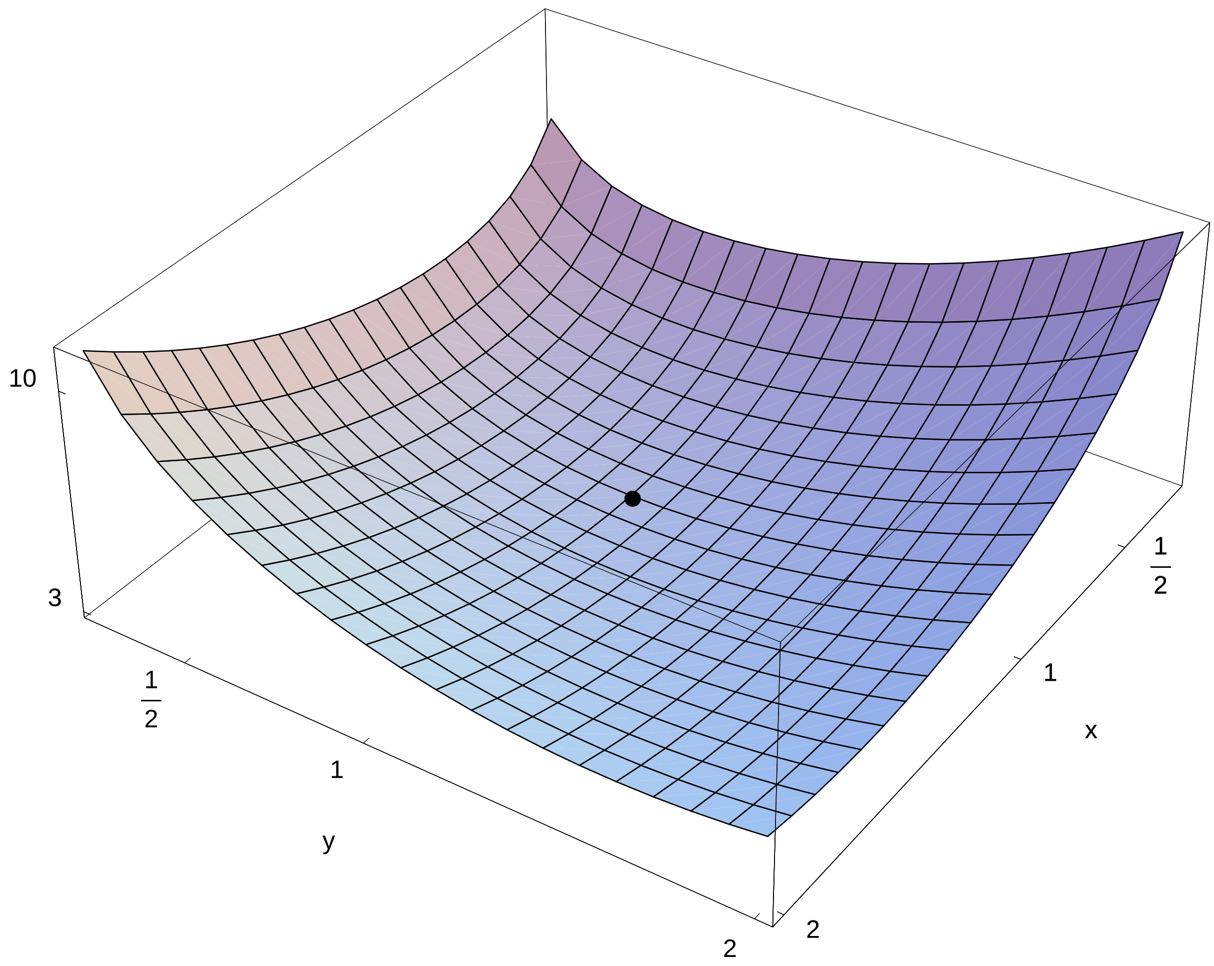
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.84 na str. 199

$f(x,y) = 1/x + 1/y - 7xy + 2\,(x+y)^2,\ X = \langle \frac{1}{4}, 2\rangle^2.$

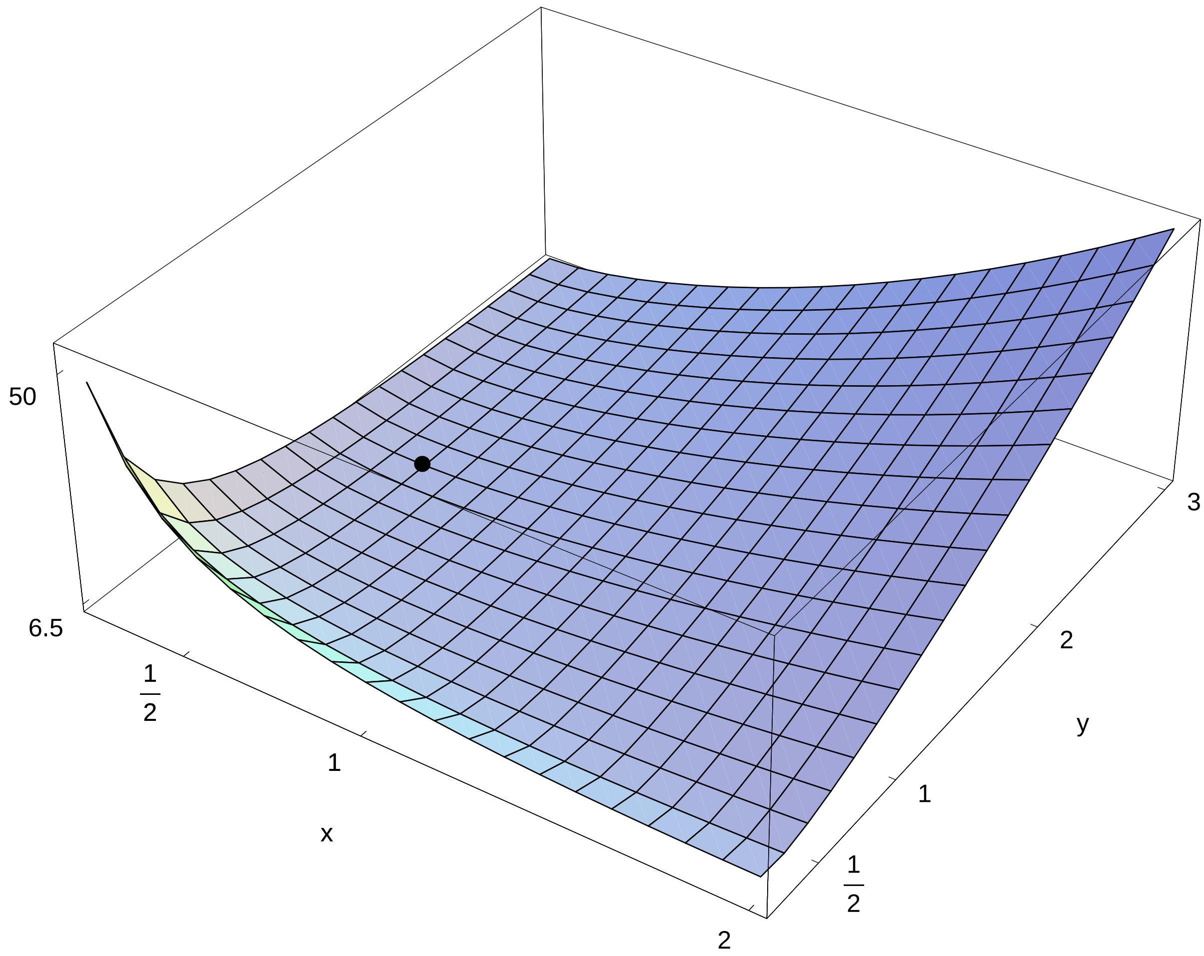
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.85 na str. 199

$f(x, y) = 3/(xy) + xy(3x + y)$, $X = \langle \frac{1}{4}, 2\rangle \times \langle \frac{1}{4}, 3\rangle$.

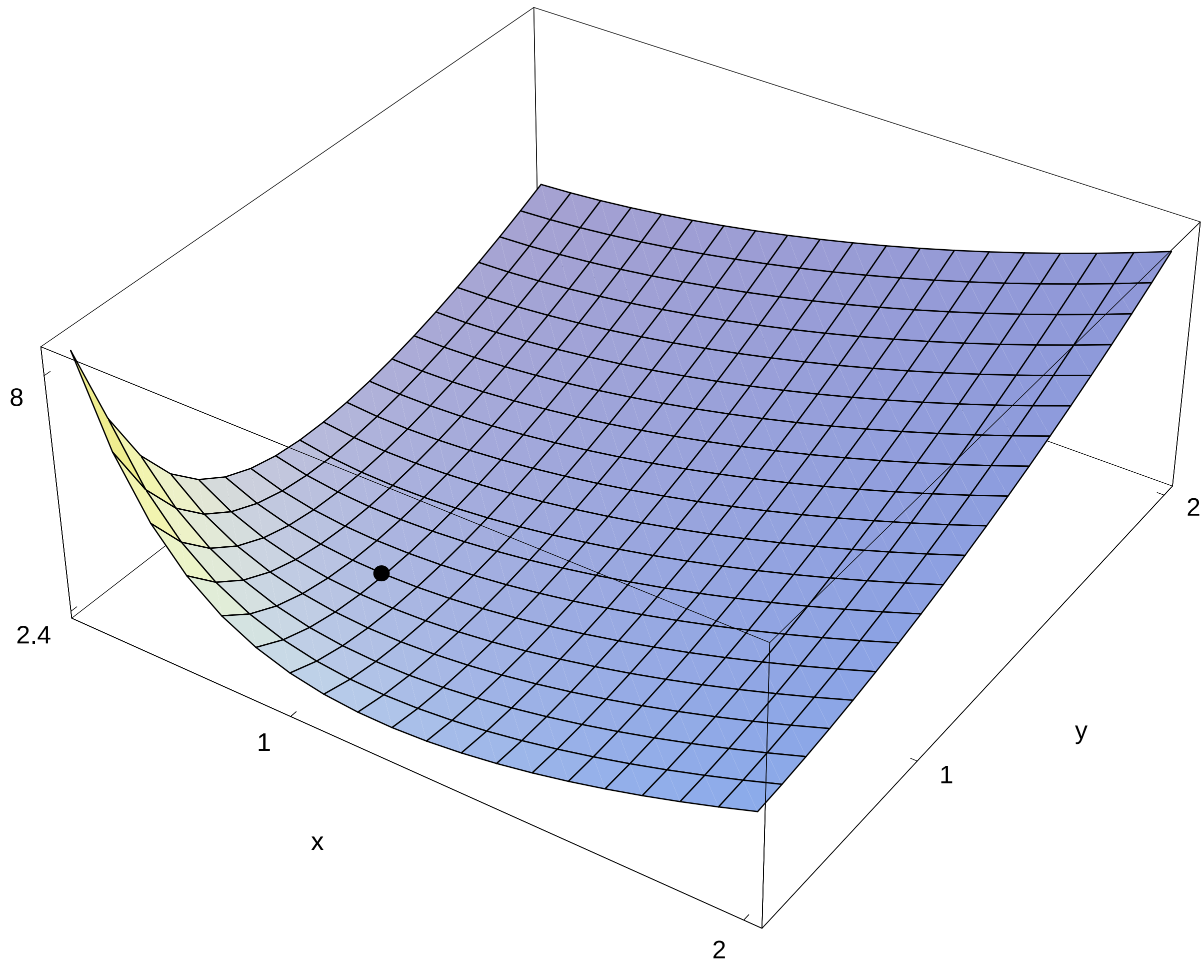
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.86 na str. 199

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1/(xy(x^2 + y^2))$, $X = \langle \frac{1}{2}, 2\rangle^2$.

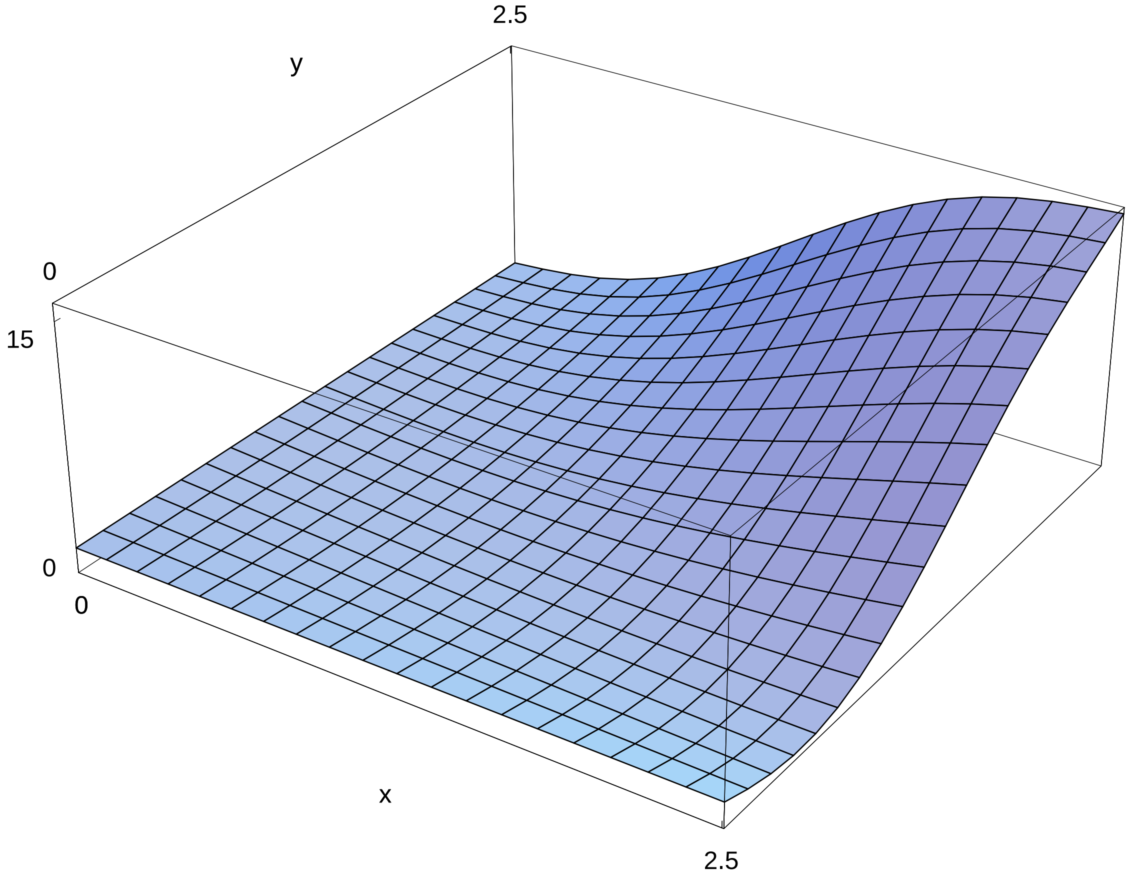
Graf funkce f s vyznačeným minimem.



Cvičení 17.87 na str. 199

$f(x,y) = xy^2 - 2\sin xy$, $X = \langle 0, \sqrt{2\pi}\rangle^2$.

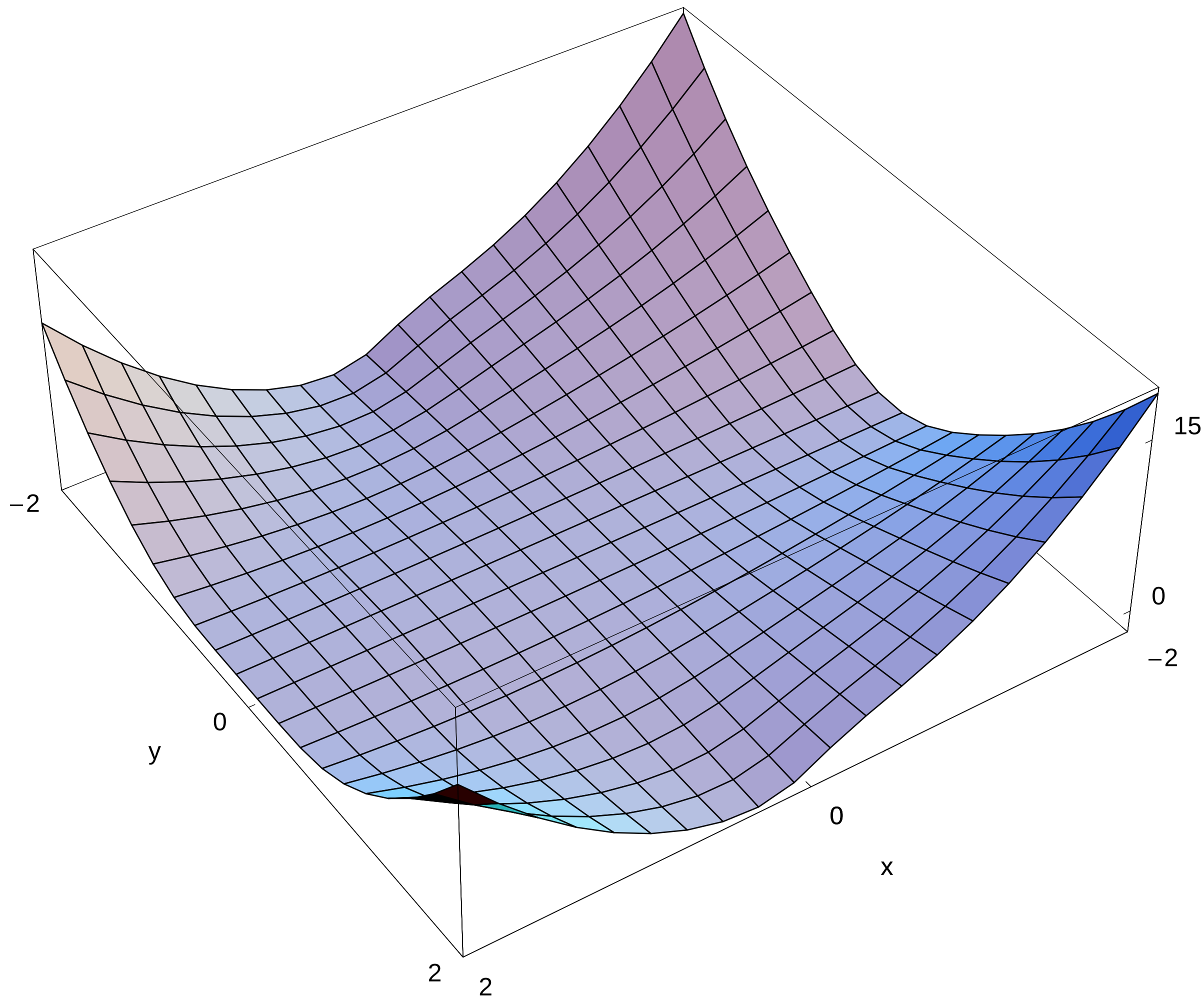
Graf funkce f, která nemá v $\langle 0, +\infty)^2$ ani minimum, ani maximum.



Cvičení 17.88 na str. 199

$f(x,y) = x^2y^2 - 2\,\mathrm{arctg}\,xy^2,\ X = \langle -2, 2\rangle^2.$

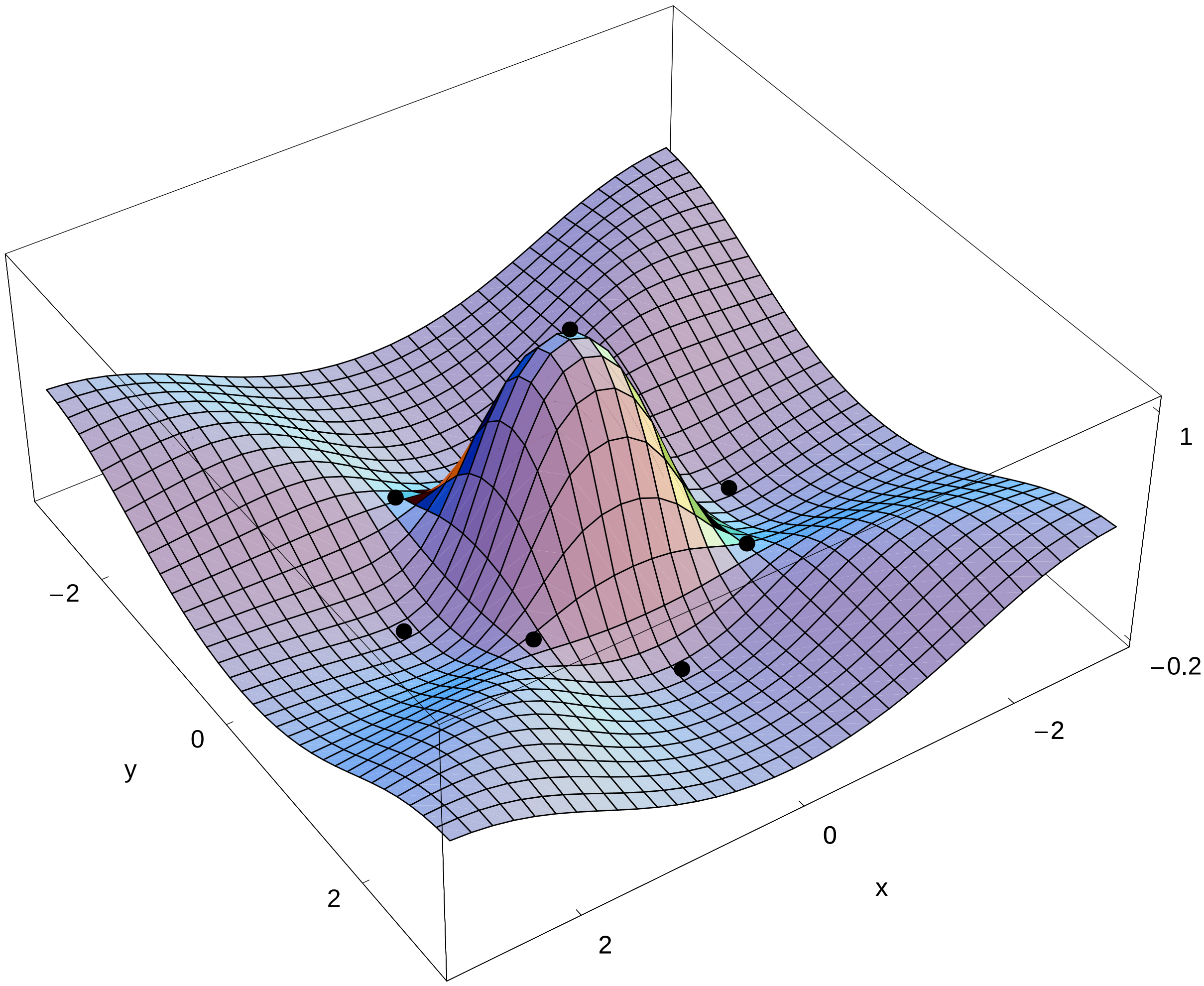
Graf funkce f, která nemá v $\mathbb{R}^2$ ani minimum, ani maximum.



Cvičení 17.89 na str. 199

$f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)/(x^4 + y^4 + 1)$, $X = \langle -3, 3\rangle^2$.

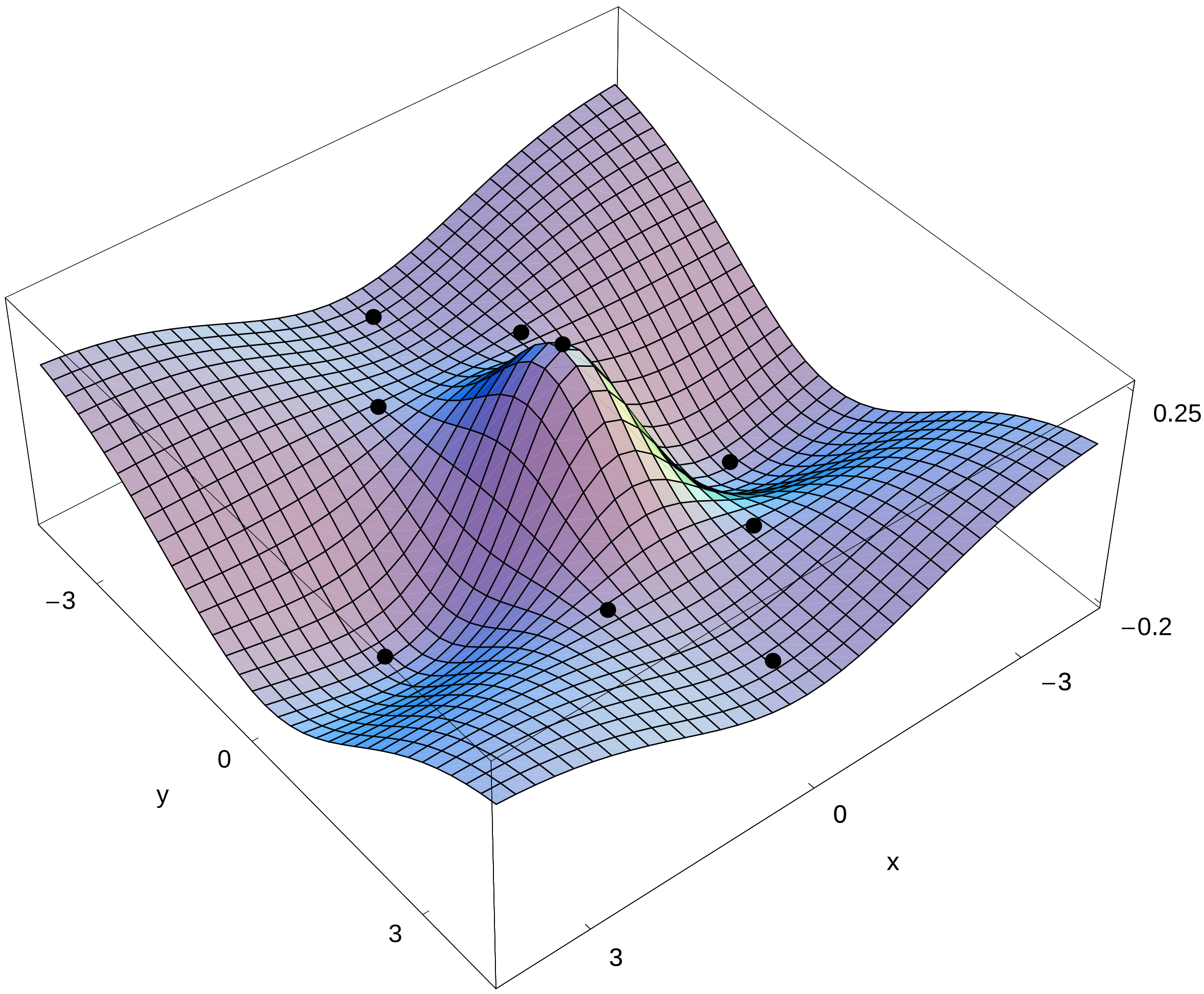
Graf funkce f s vyznačeným maximem, 4 minimy a 4 dalšími stacionárními body v $\operatorname{int} X$; jedno minimum a jeden stacionární bod není na obrázku vidět.



Cvičení 17.90 na str. 199

$f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 4)/(x^2 + y^2 + 4)^2$, $X = \langle -4, 4\rangle^2$.

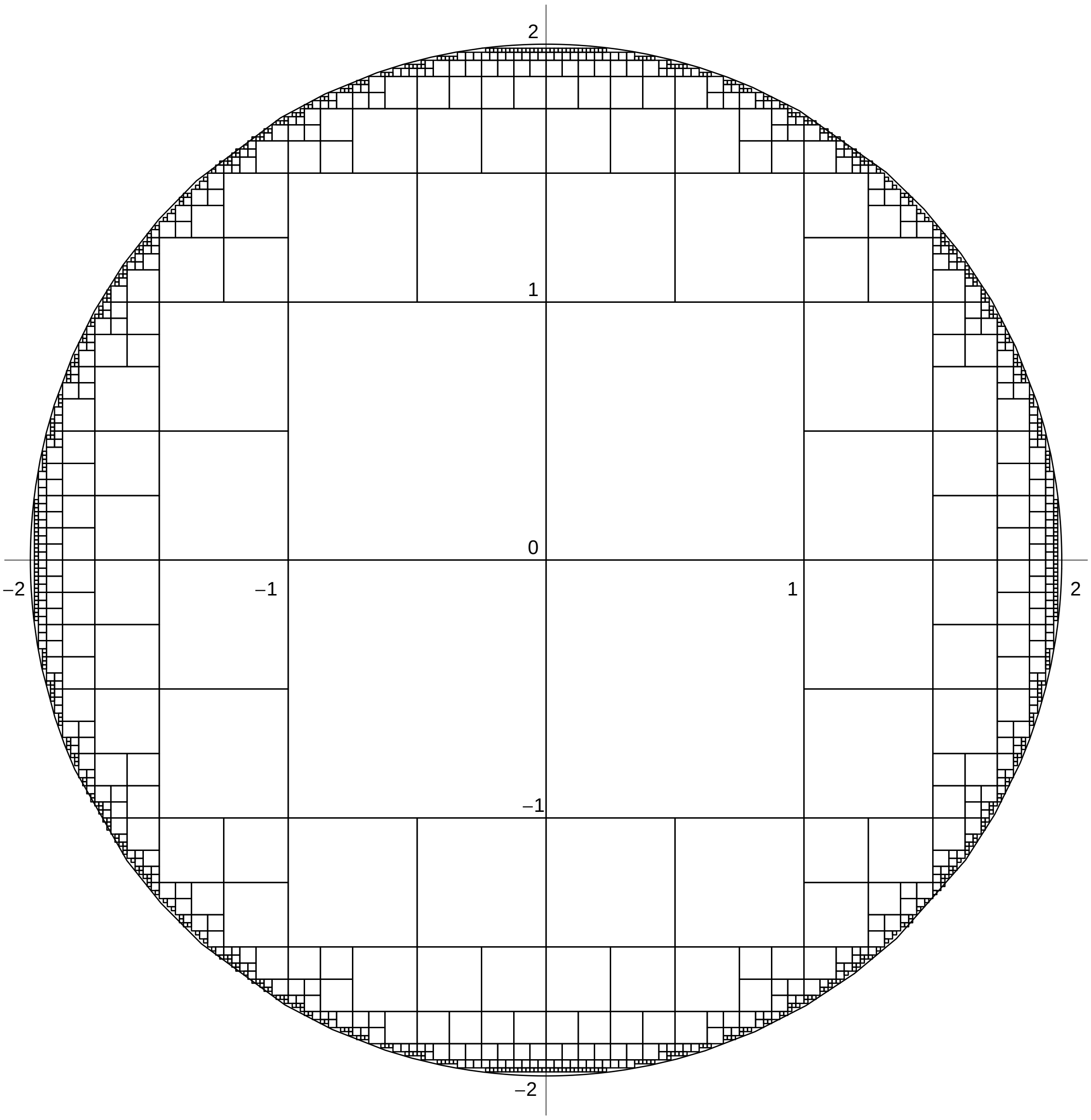
Graf funkce f s vyznačeným maximem, 2 minimy a 6 dalšími stacionárními body v $\operatorname{int} X$.



Obrázky ke kapitole 19

Příklad 19.1 na str. 245.

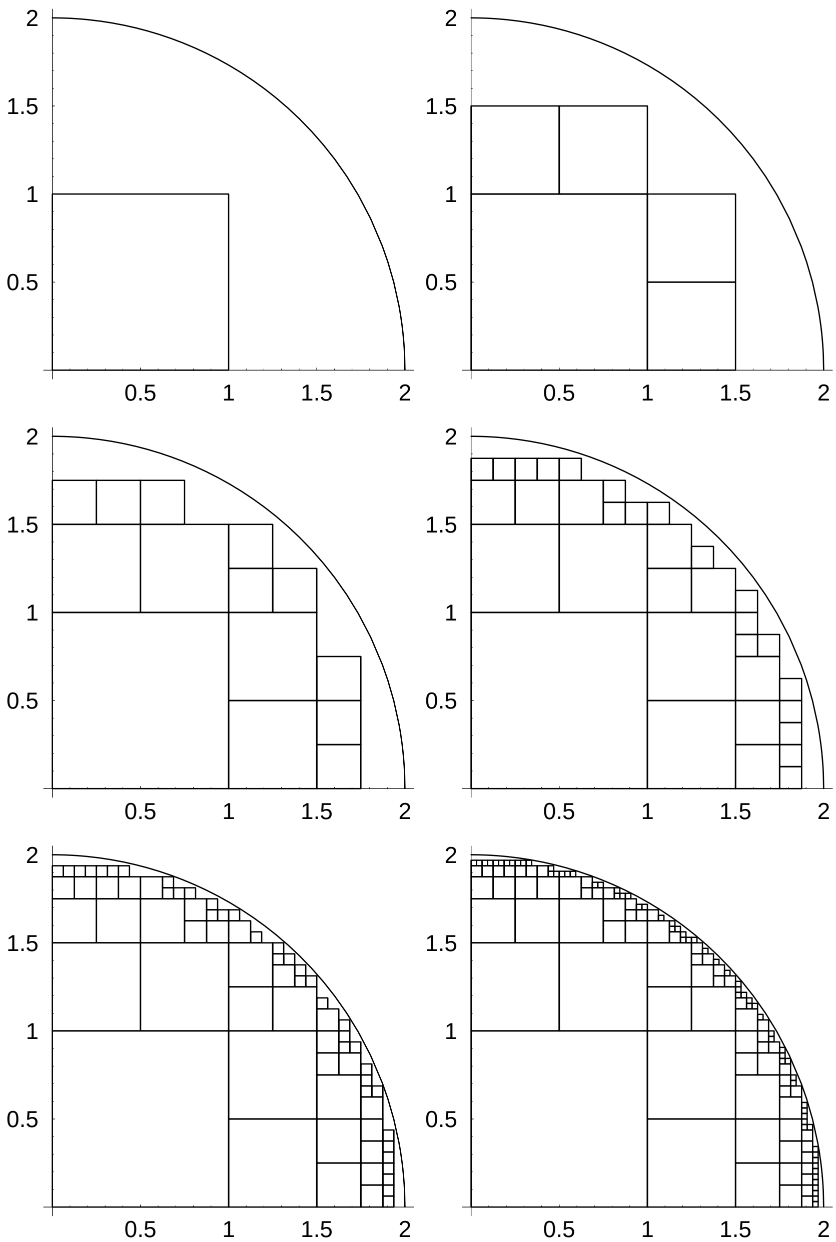
Vyplňování kruhu $G := U((0,0),2)$ intervaly $I_{n;j,k}$; jejich počet je pro $n = 0,\dots,6$ po řadě roven $4, 16, 36, 76, 152, 276, 536$, celkem jich je tedy 1096.
Součet jejich obsahů je $50920/4096 \doteq 12.432$, zatímco obsah kruhu G je $v_2(G) \doteq 12.566$. *)



*) Z toho je patrné, že metoda vyplňování kruhu čtverečky se pro přesnější výpočet čísla π příliš nehodí.

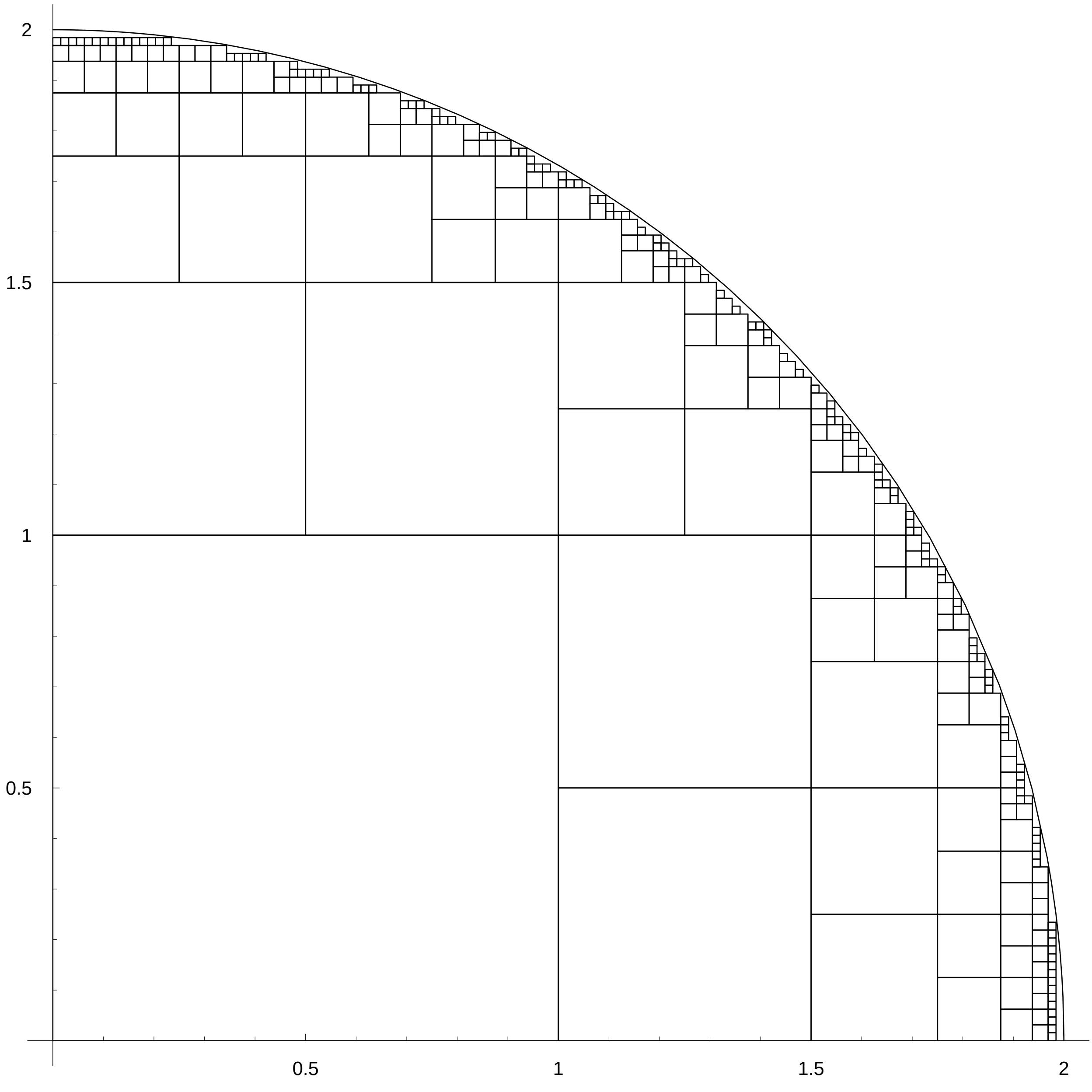
Ještě k příkladu 19.1 na str. 245.

I při největším zvětšení jsou (při zachování rozměrů stránky) nejmenší intervaly a nepokrytá místa v obrázku na str. 512 špatně rozeznatelná; obrázky na této a na další stránce ukazují, jak se postupně vyplňuje průnik kruhu G s uzavřeným prvním kvadrantem.



Ještě k příkladu 19.1 na str. 245.

Množina $G_1 := U((0,0),2) \cap \langle 0,+\infty)^2$ se čtverci $I_{n;i,j} \subset G_1$, $n = 0,1,\ldots,6$.

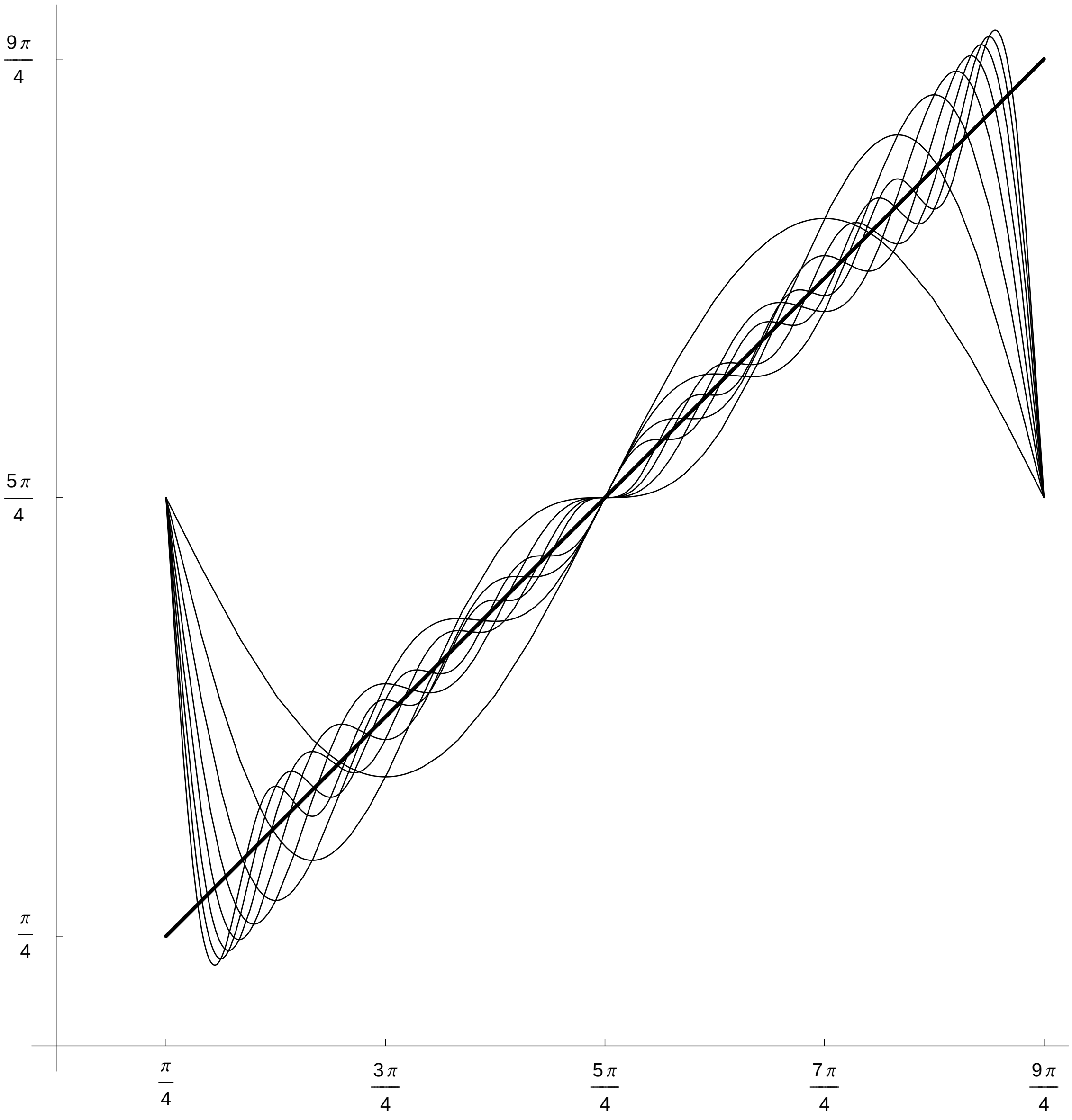


Obrázky ke kapitole 20

Na dalších stránkách jsou spolu s grafem funkce f nakresleny grafy n-tých částečných součtů $s_{f;n}$ Fourierovy řady s_f (případně částečných součtů $s_{f,s;n}$, $s_{f,l;n}$ řad $s_{f,s}$, $s_{f,l}$) pro $n = 1, 2, \ldots, 8$.

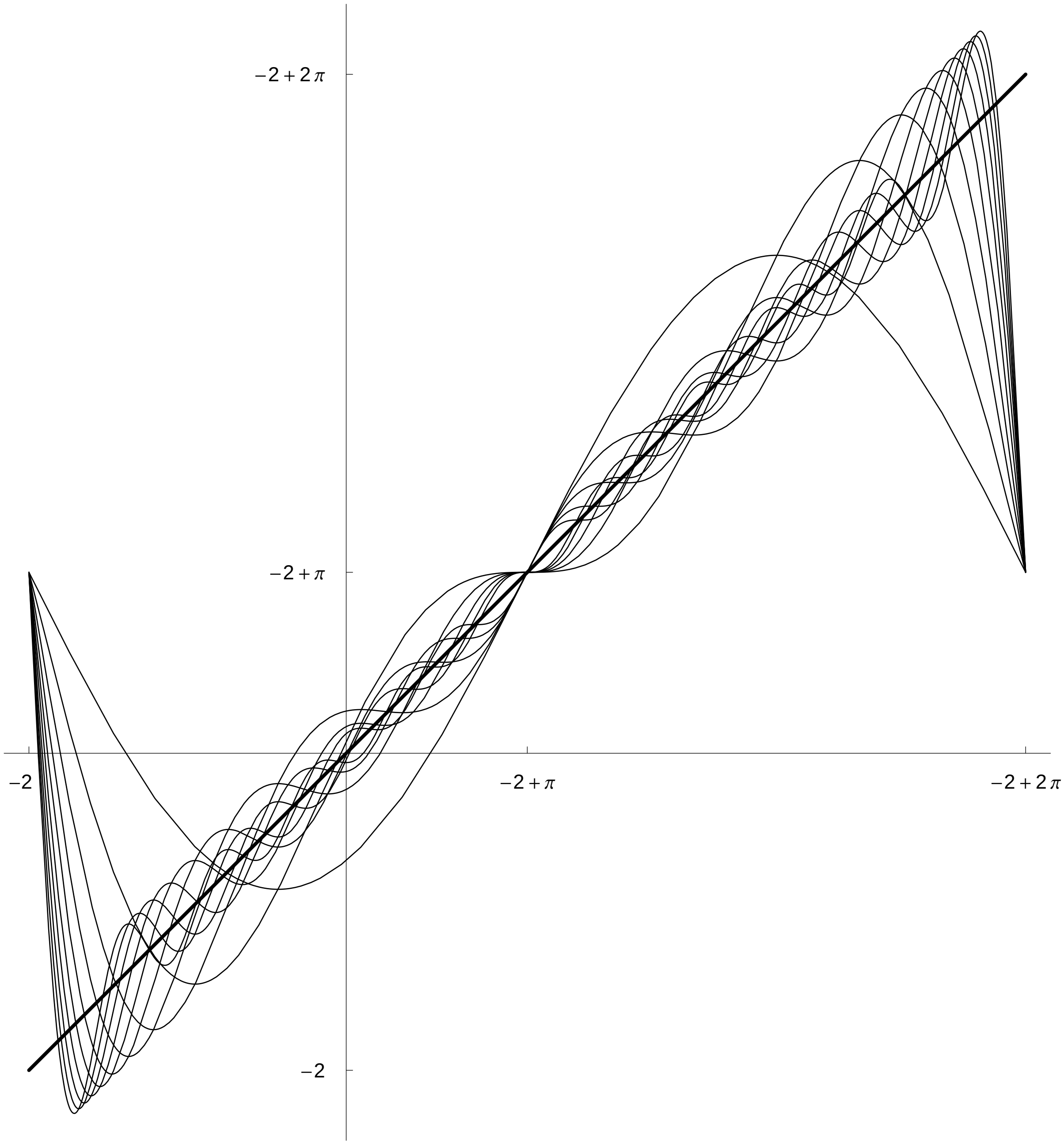
Cvičení 20.08 na str. 315

$f(x) = x$ v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ pro $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.



Ještě ke Cvičení 20.08 na str. 315

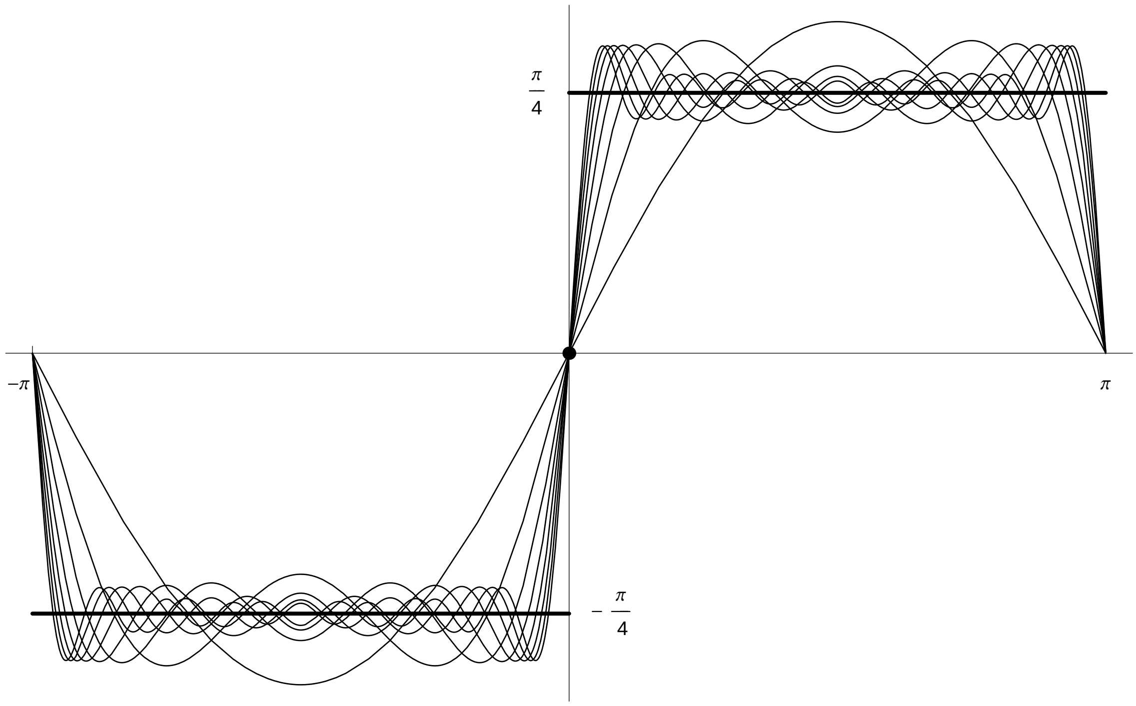
$f(x) = x$ v intervalu $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ pro $\alpha = -2$.

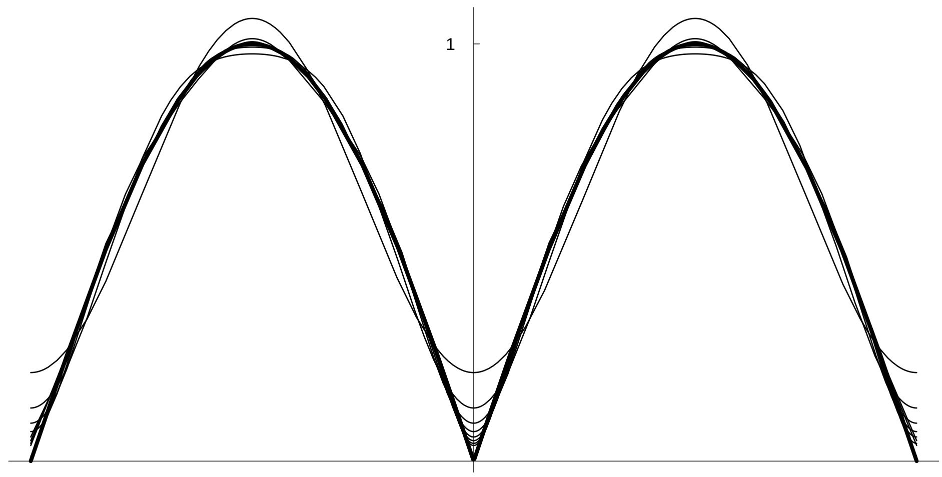


Cvičení 20.09 a 20.10 na str. 315

Nahoře: Fourierova řada funkce $f(x) = \frac{1}{4}\pi \operatorname{sgn} x$ v intervalu $(-\pi, \pi)$.

Dole: Fourierova řada funkce $f(x) = |\sin x|$ v intervalu $(-\pi, \pi)$. *)



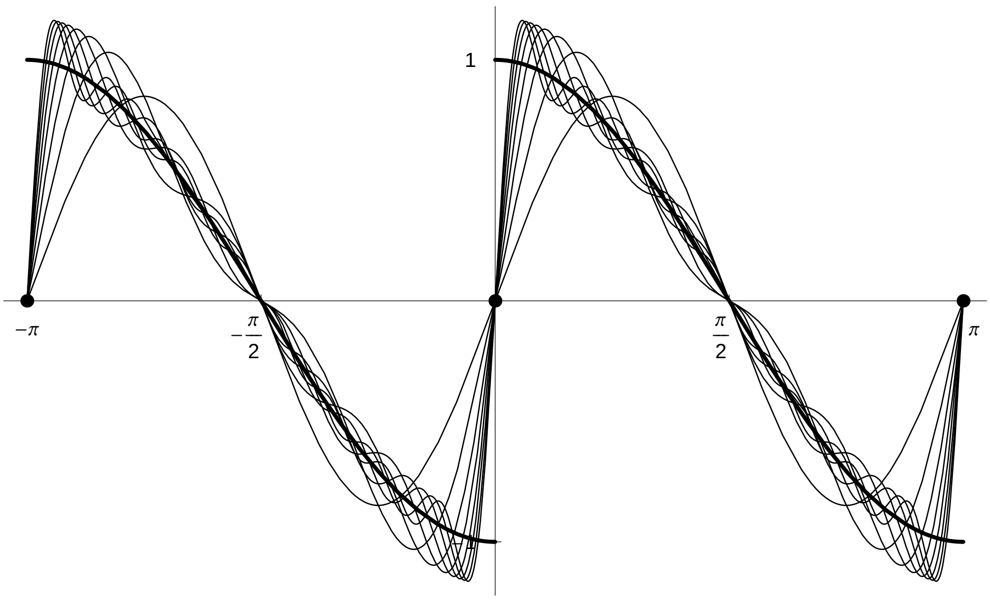


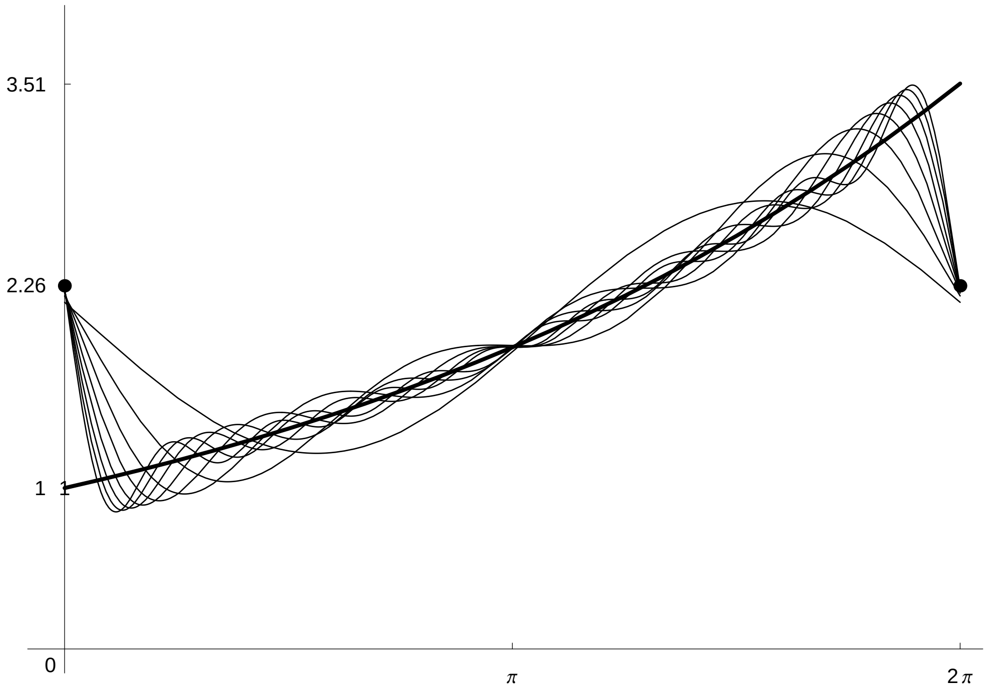
*) V případě, že Fourierova řada funkce f konverguje stejnoměrně v celém $\mathbb{R}$, jsou grafy funkce f a částečných součtů $s_{f;n}$ příslušné řady s_f často i pro malá n tak blízko sebe, že detaily grafů nejsou příliš patrné. „Na pohled zajímavé“ jsou proto jen Fourierovy řady s nespojitostmi.

Cvičení 20.11 a 20.12 na str. 316

Nahoře: Lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x) = \cos x$, $x \in (0, \pi)$.

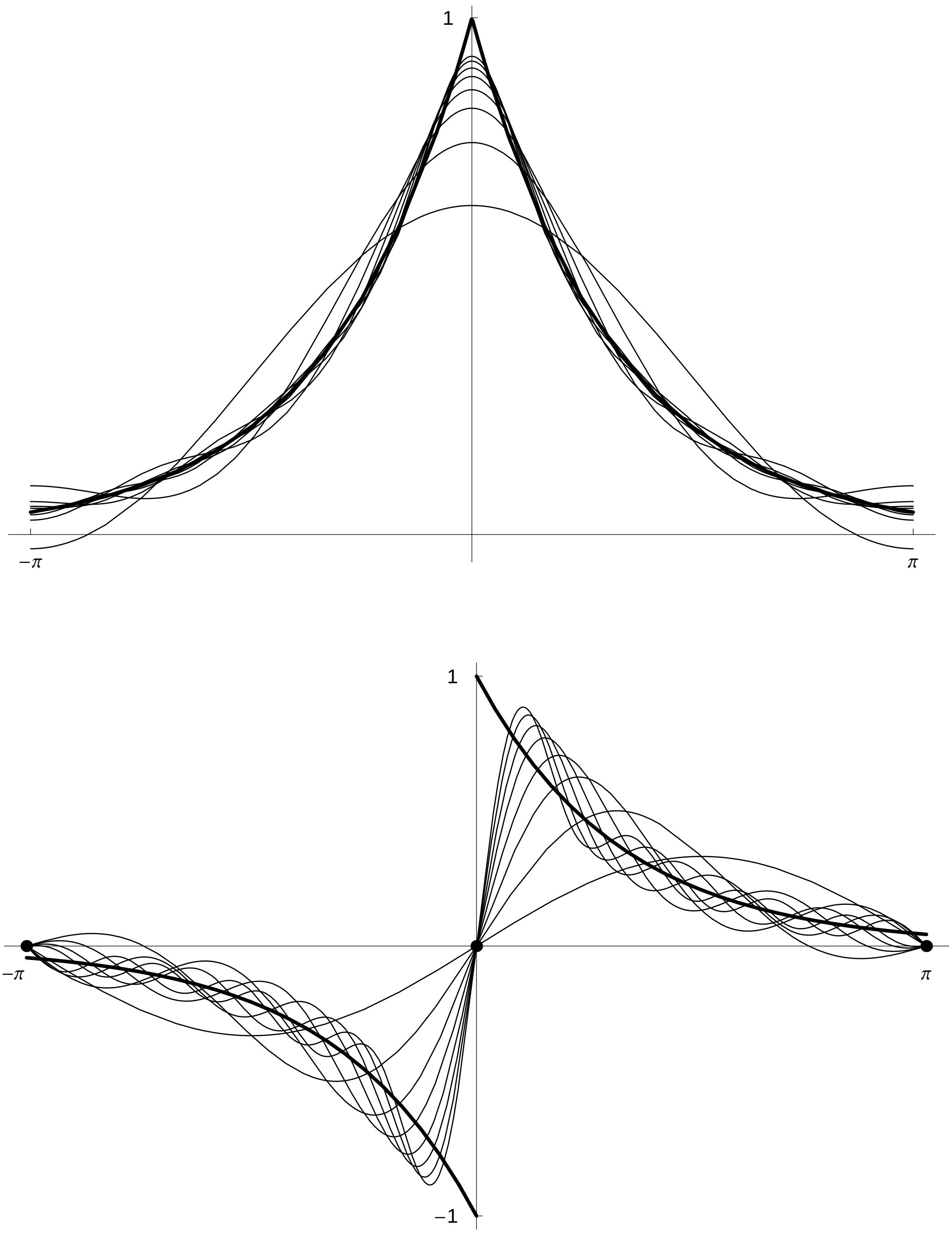
Dole: Fourierova řada funkce e^{ax}, $x \in (0, 2\pi)$ pro $\alpha = \frac{1}{5}$.





Cvičení 20.13 na str. 316

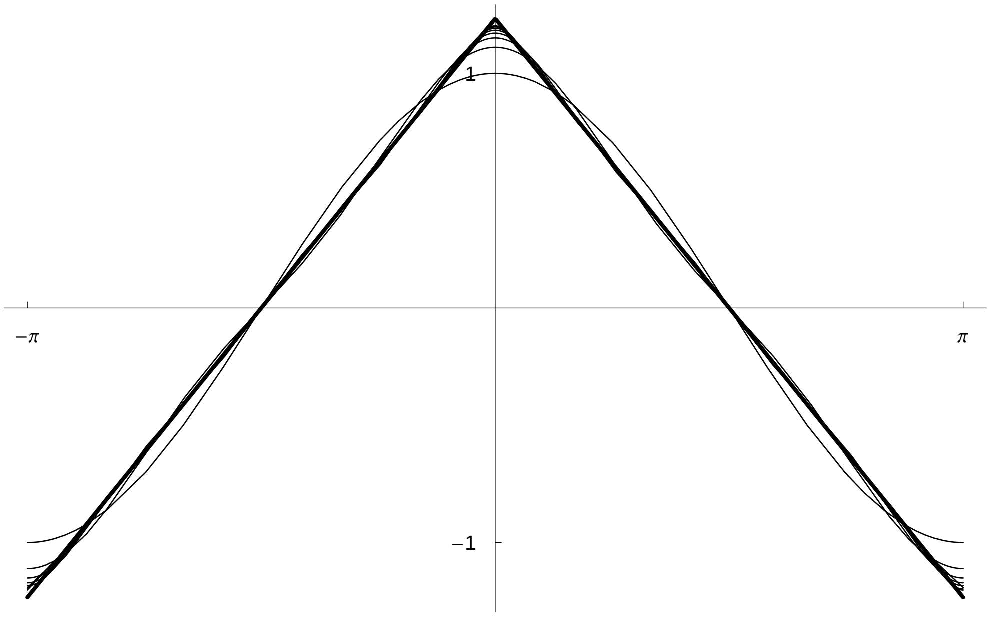
Nahoře sudý, dole lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x) = e^{-x}$, $x \in (0, \pi)$.

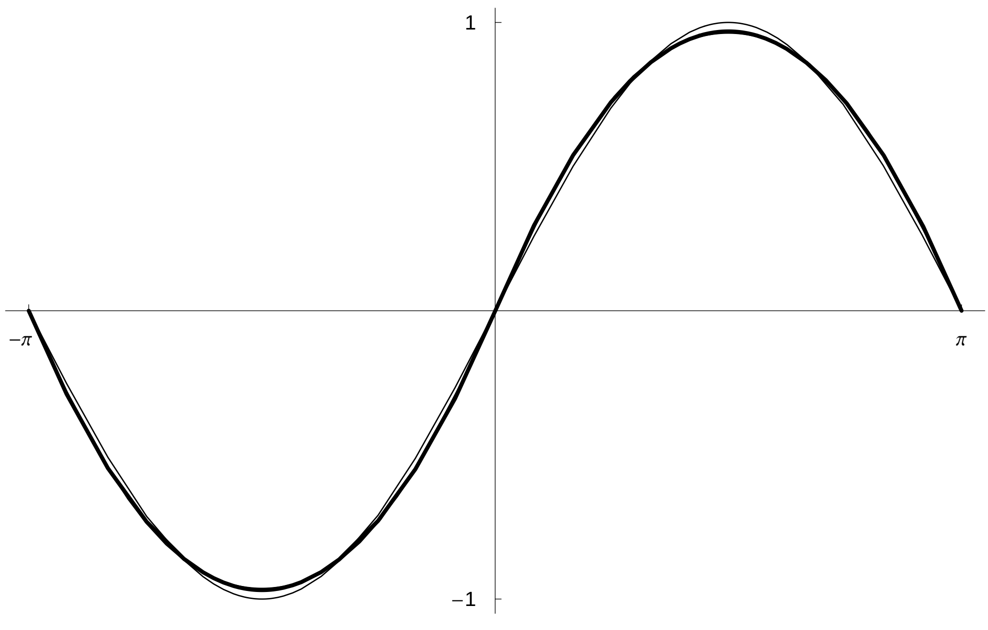


Cvičení 20.14 na str. 316

Nahoře: Fourierův rozvoj funkce $f(x) = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2\pi|x|)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Dole: Fourierův rozvoj funkce $f(x) = \frac{1}{8}x(\pi^2 - \pi|x|)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

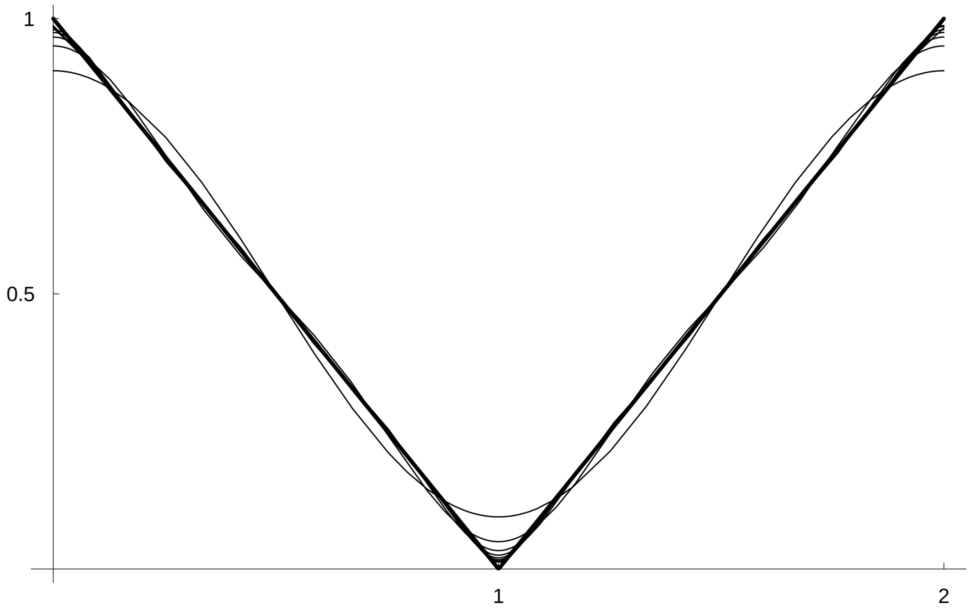


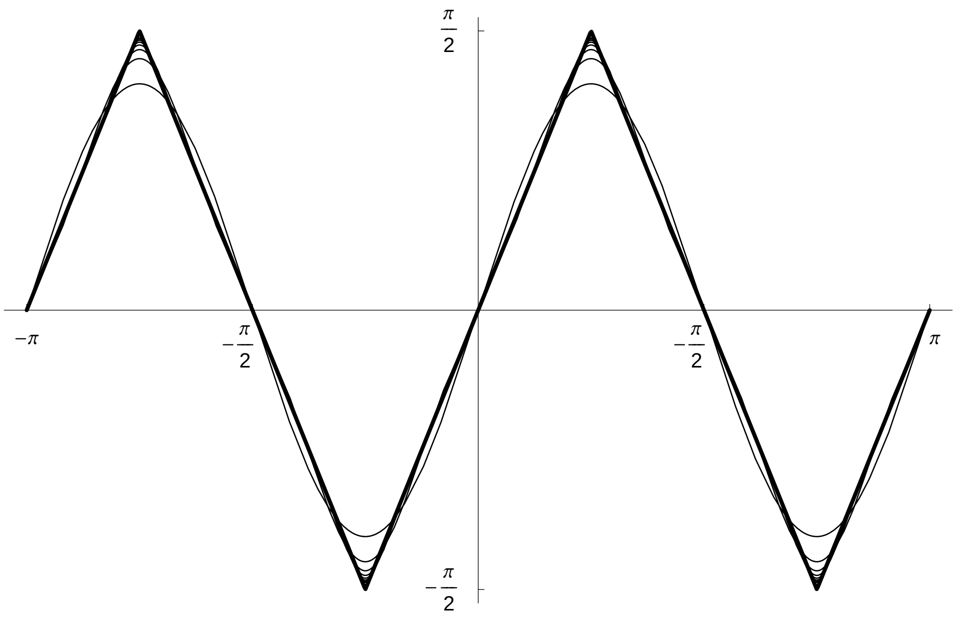


Cvičení 20.15 a 20.16 na str. 316

Nahoře: Fourierova řada funkce $f(x) = |x-1|$ v intervalu $(0,2)$.

Dole: Fourierova řada funkce $f(x) = \arcsin(\sin 2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

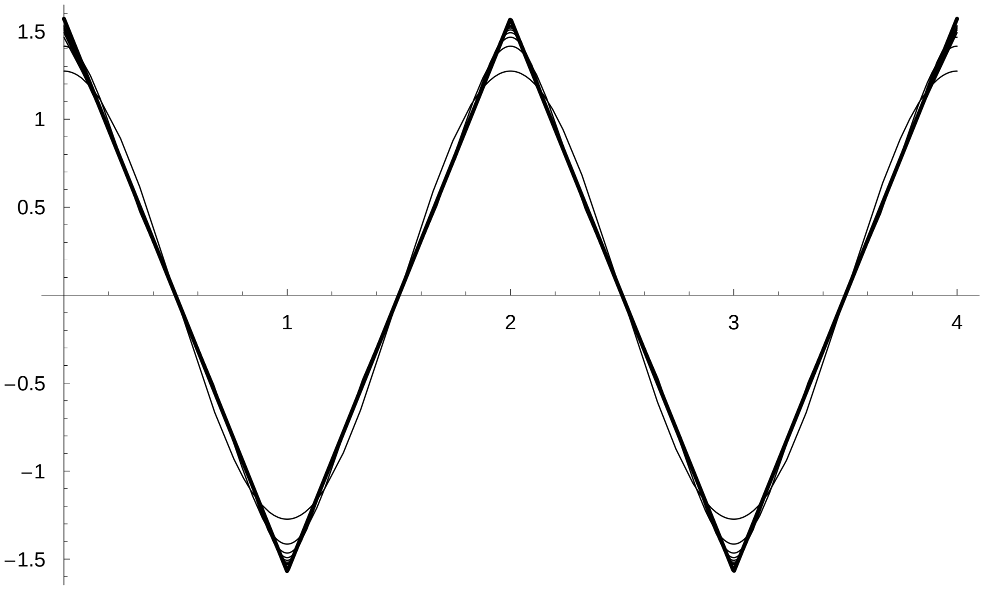


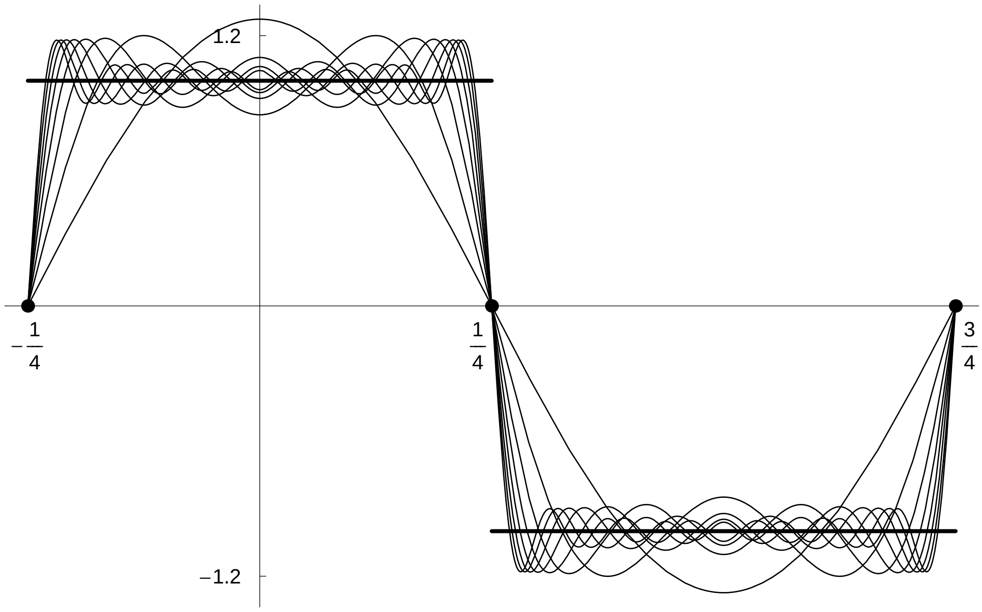


Cvičení 20.17 a 20.18 na str. 316

Nahoře: Fourierova řada funkce $f(x) = \arcsin(\cos \pi x)$.

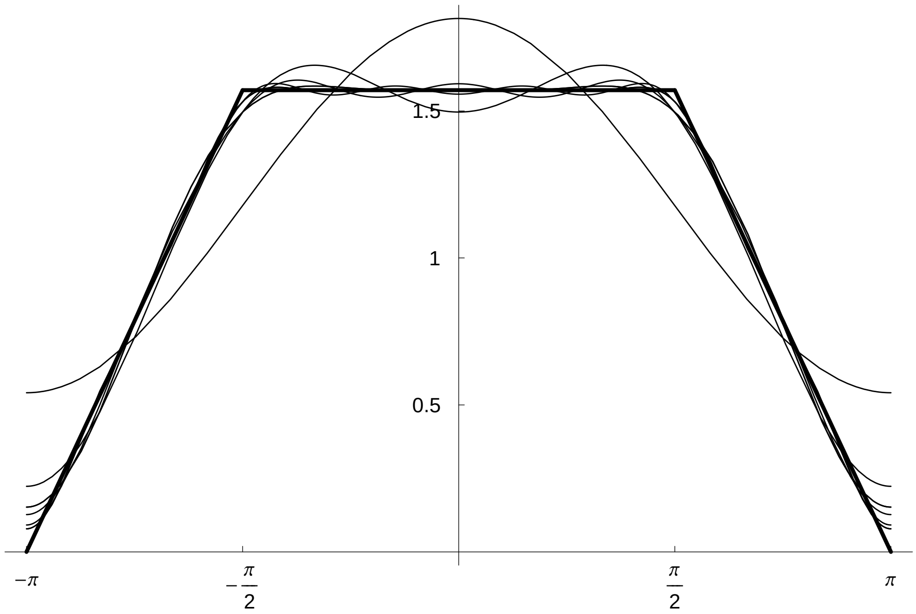
Dole: Fourierova řada funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos 2\pi x)$.

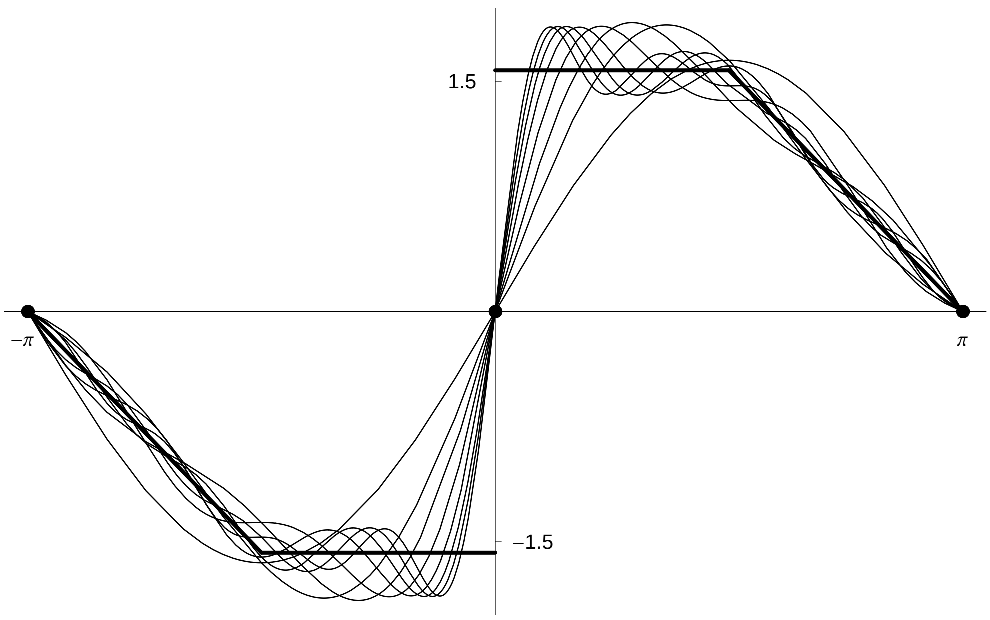




Cvičení 20.19 na str. 316

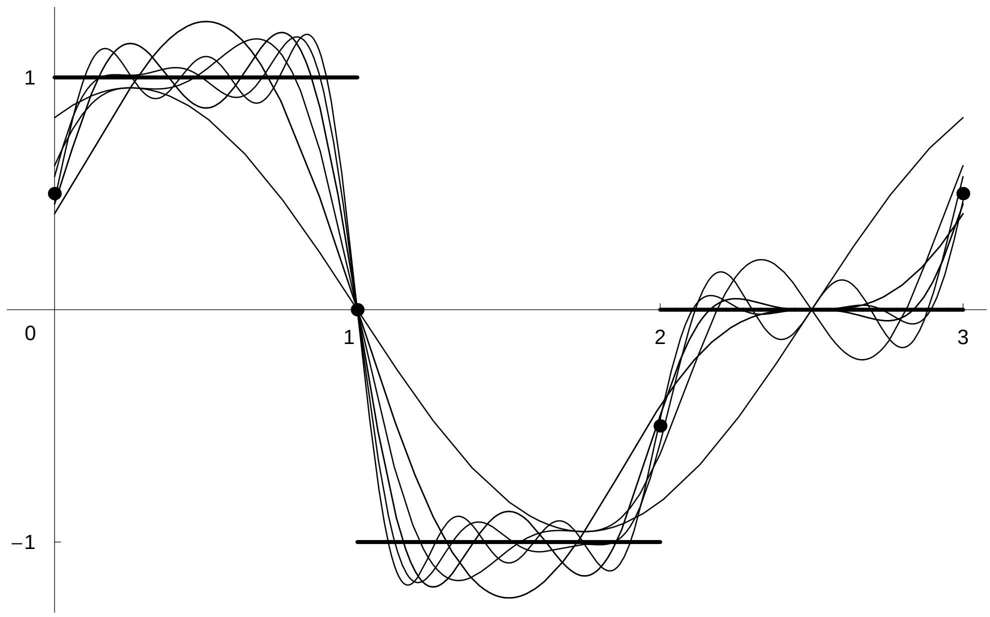
Nahoře sudý, dole lichý Fourierův rozvoj funkce $f(x)$ rovné $\frac{1}{2}\pi$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$ a $\pi - x$ v $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$.

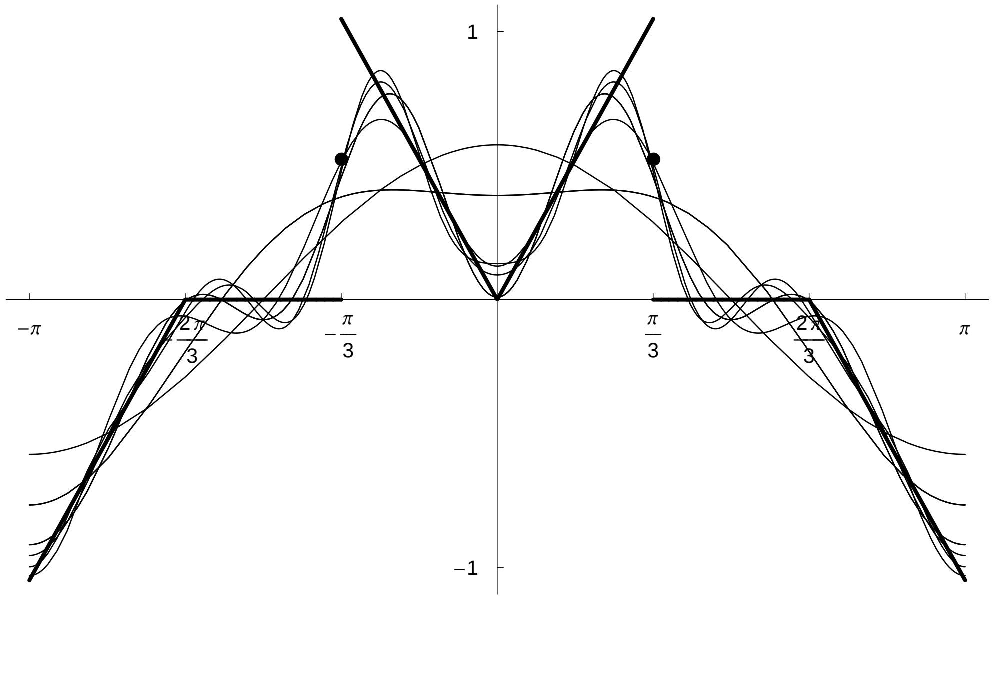




Cvičení 20.20 a 20.21 na str. 316

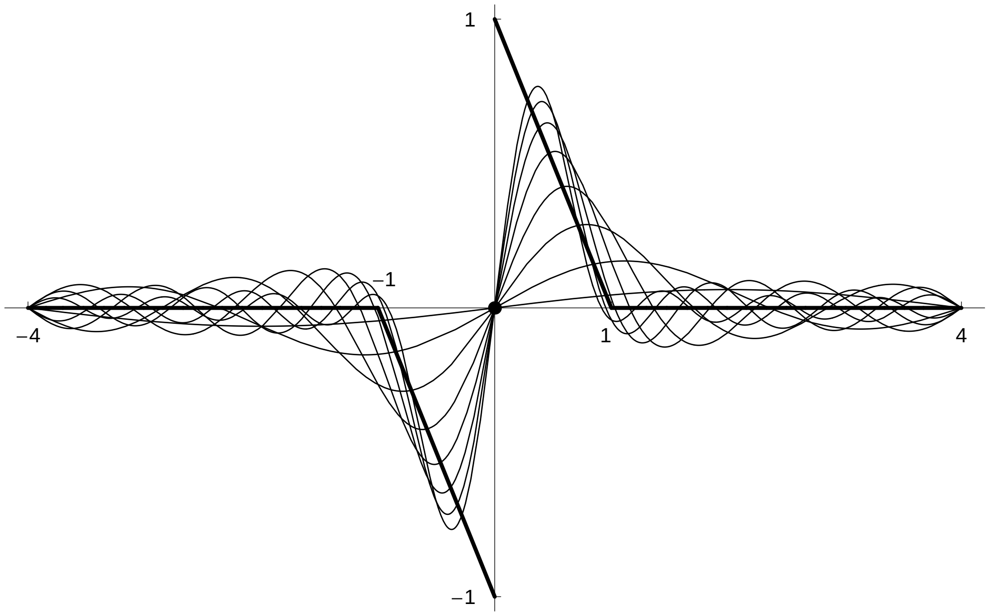
Nahoře: Fourierův rozvoj 3-periodické funkce $f(x)$ rovné 1, -1, 0 po řadě v $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$.
Dole: Sudá Fourierova řada funkce $f(x)$ rovné x, 0, $\frac{2}{3}\pi - x$ po řadě v $(0, \frac{1}{3}\pi)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$, $(\frac{2}{3}\pi, \pi)$.

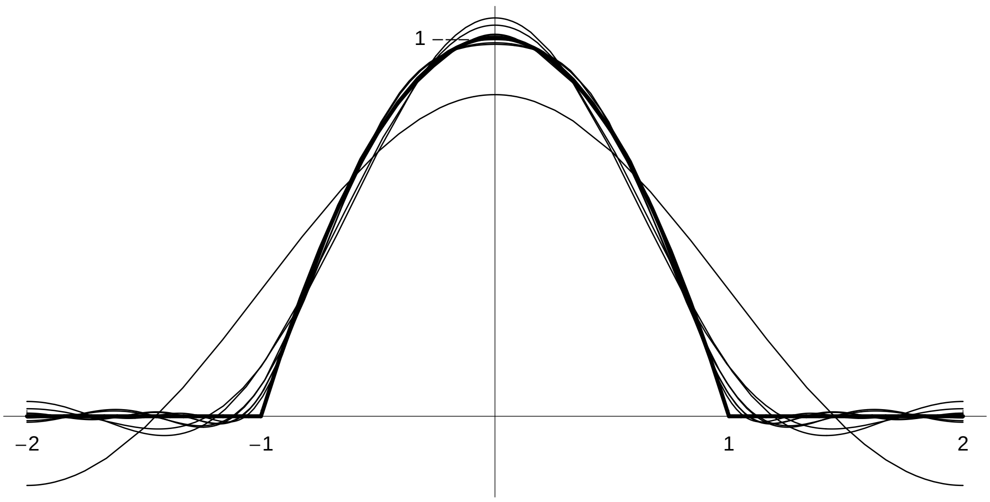




Cvičení 20.22 a 20.23 na str. 316

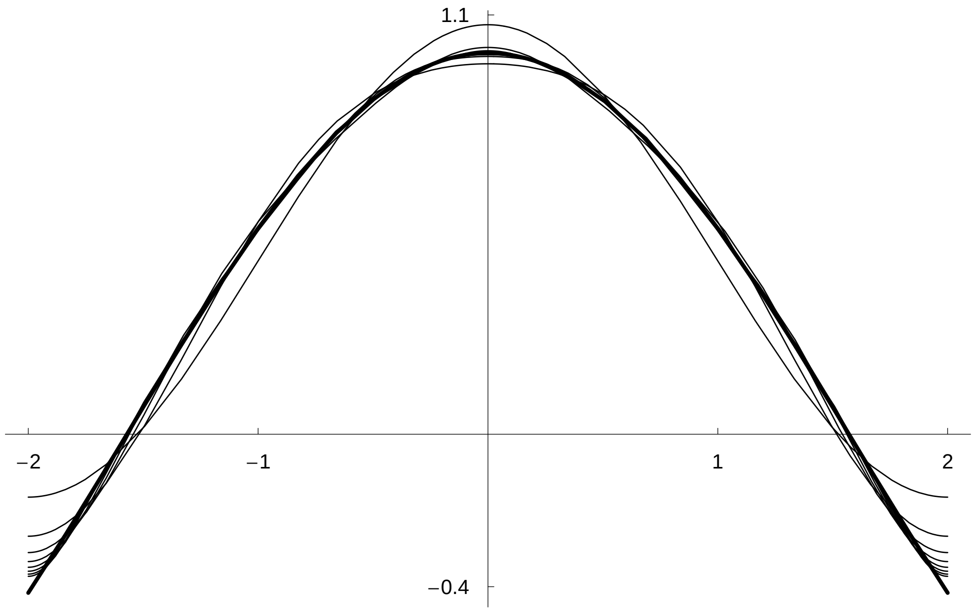
Nahoře: Fourierova řada liché, 8-periodické funkce $f(x)$ rovné $1 - x$ v $(0, 1)$ a 0 v $(1, 4)$.
Dole: Fourierova řada 4-periodické funkce $f(x)$ rovné $1 - x^2$, je-li $|x| \leq 1$, a 0, je-li $1 \leq |x| \leq 2$.

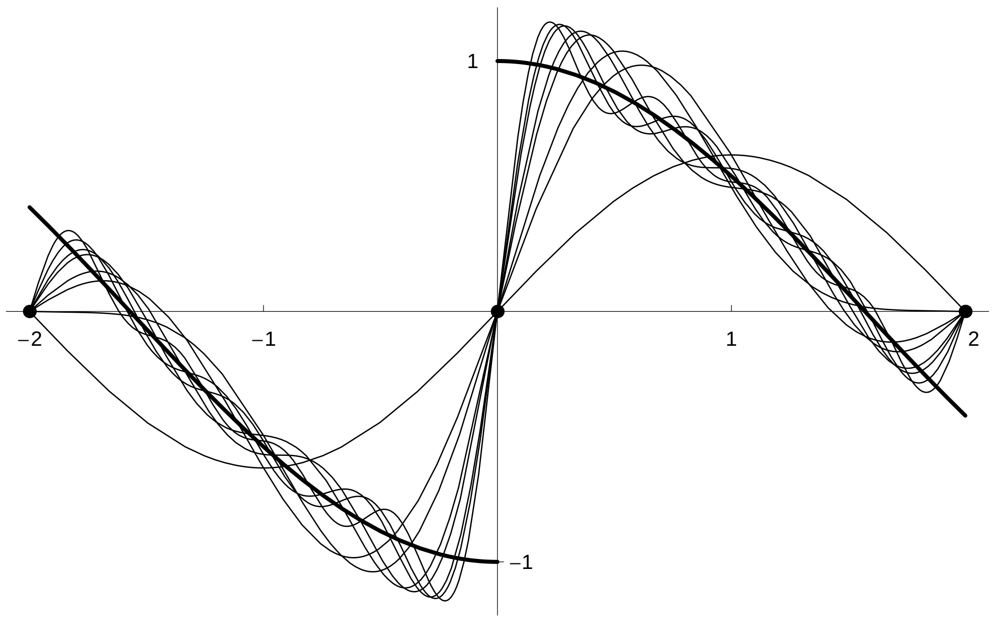




Cvičení 20.24 na str. 317

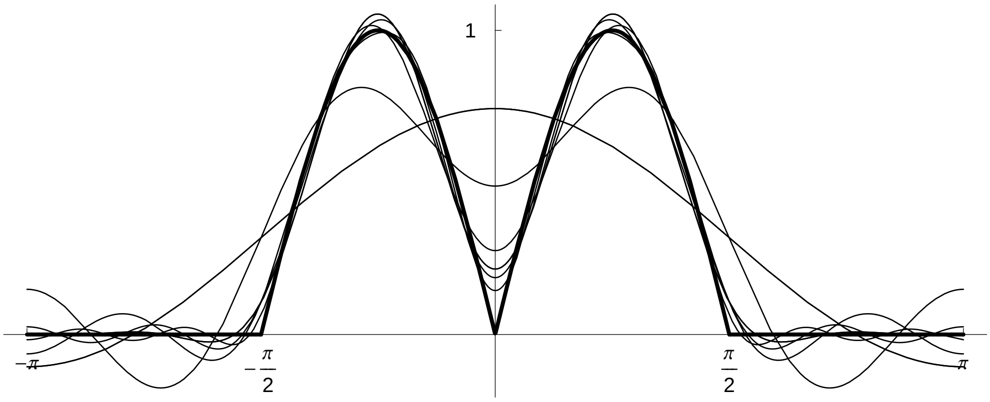
Nahoře sudá, dole lichá Fourierova řada funkce $f(x) = \cos x$ v $(0, 2)$.

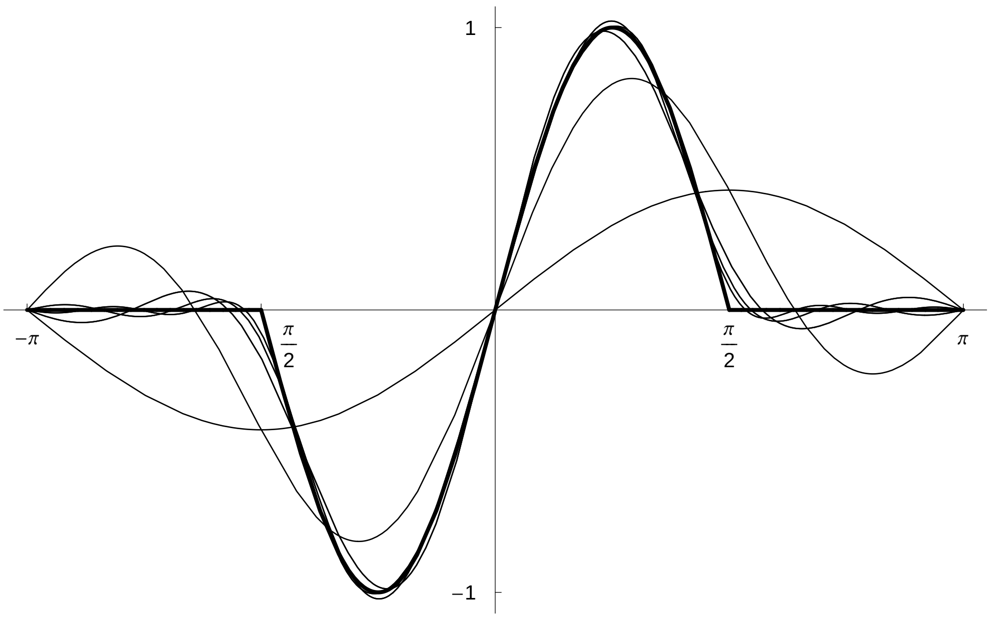




Cvičení 20.25 na str. 317

Nahoře sudá, dole lichá Fourierova řada funkce $f(x)$ rovné $\sin 2x$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$ a 0 v $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$.





Rejstřík obrázků

přidaných do elektronického vydání Inteligentního kalkulu 2

Kapitola 13

Př. 13.9 331
Cv. 13.01 – 13.08 332
Cv. 13.09 – 13.16 333
Cv. 13.17 – 13.24 334
Cv. 13.25 – 13.32 335
Cv. 13.33 – 13.40 336
Cv. 13.41 – 13.48 337
Cv. 13.49 – 13.56 338
Cv. 13.57 – 13.60 339
Cv. 13.61 – 13.64 340
Cv. 13.65 – 13.68 341
Cv. 13.69 – 13.72 342
Cv. 13.73 – 13.76 343
Cv. 13.77 – 13.80 344
Cv. 13.81 – 13.84 345
Cv. 13.85 – 13.86 346
Cv. 13.87 – 13.88 347
Cv. 13.89 – 13.92 348
Cv. 13.93 – 13.94 349
Cv. 13.95 – 13.96 350
Cv. 13.106 351
Cv. 13.107 352
Cv. 13.108 353
Cv. 13.109 354
Cv. 13.110 355
Cv. 13.111 356
Cv. 13.113 357
Cv. 13.114 358
Cv. 13.115 359
Cv. 13.116 360
Cv. 13.119 361
Cv. 13.120 362

Kapitola 14

Př. 14.1 363
Př. 14.2 364
Př. 14.3 – 14.4 365
Cv. 14.26 366
Cv. 14.27f 367
Cv. 14.27g 368
Cv. 14.27h 369
Př. 14.7 370
Cv. 14.03 – 14.04 371
Cv. 14.05 – 14.06 372
Cv. 14.16 373
Cv. 14.17 374
Cv. 14.18 375
Cv. 14.19 376
Cv. 14.20 – 14.21 377
Cv. 14.29 – 14.30 378
Cv. 14.31 – 14.32 379
Cv. 14.33 – 14.34 380
Cv. 14.35 – 14.36 381
Cv. 14.67 – 14.68 382
Cv. 14.69 – 14.70 383
Př. 14.8 384

Kapitola 15

Cv. 15.01 385
Cv. 15.02 386
Cv. 15.03 – 15.04 387
Cv. 15.05 – 15.06 388
Cv. 15.07 – 15.08 389
Cv. 15.09, 15.11 390
Cv. 15.10 391
Cv. 15.12 – 15.13 392
Cv. 15.14 – 15.15 393
Cv. 15.16 – 15.17 394
Cv. 15.18 – 15.19 395
Cv. 15.20 – 15.21 396
Cv. 15.22 – 15.23 397
Cv. 15.24 – 15.25 398
Cv. 15.31 – 15.32 399
Cv. 15.33 – 15.34 400
Cv. 15.35 – 15.36 401
Cv. 15.37 – 15.38 402
Cv. 15.39, 15.41 403
Cv. 15.40 404
Cv. 15.42 – 15.43 405
Cv. 15.44 – 15.45 406
Cv. 15.46 – 15.47 407
Cv. 15.48 – 15.49 408
Cv. 15.50 – 15.51 409
Cv. 15.52 – 15.53 410
Cv. 15.54 – 15.55 411
Cv. 15.56 – 15.57 412
Cv. 15.58 – 15.59 413
Cv. 15.60 414
Cv. 15.76 415
Cv. 15.77 – 15.78 416
Cv. 15.79 – 15.80 417
Cv. 15.81 – 15.82 418
Cv. 15.83 – 15.84 419
Cv. 15.88 – 15.89 420
Cv. 15.90 – 15.91 421
Cv. 15.92 422
Cv. 15.93 – 15.94 383

Kapitola 16

Př.16.3	424	Cv.16.34	430	Cv.16.40	436	Cv.16.81	442
Př.16.7	425	Cv.16.35	431	Cv.16.41	437	Cv.16.82	443
Cv.16.31	426	Cv.16.36	432	Cv.16.42	438	Cv.16.83	429
Cv.16.32	427	Cv.16.37	433	Cv.16.43	435	Cv.16.84	445
Cv.16.33	428	Cv.16.38	434	Cv.16.44	440	Cv.16.85	446
Cv.16.33	429	Cv.16.39	435	Cv.16.45	441	Cv.16.96	447

Kapitola 17

Př.17.1	448	Cv.17.13	464	Cv.17.29	480	Cv.17.75	496
Př.17.2	449	Cv.17.14	465	Cv.17.30	481	Cv.17.76	497
Př.17.5	450	Cv.17.15	466	Cv.17.31	482	Cv.17.77	498
Př.17.6	451	Cv.17.16	467	Cv.17.32	483	Cv.17.78	499
Cv.17.01	452	Cv.17.17	468	Cv.17.63	484	Cv.17.79	500
Cv.17.02	453	Cv.17.18	469	Cv.17.64	485	Cv.17.80	501
Cv.17.03	454	Cv.17.19	470	Cv.17.65	486	Cv.17.81	502
Cv.17.04	455	Cv.17.20	471	Cv.17.66	487	Cv.17.82	503
Cv.17.05	456	Cv.17.21	472	Cv.17.67	488	Cv.17.83	504
Cv.17.06	457	Cv.17.22	473	Cv.17.68	489	Cv.17.84	505
Cv.17.07	458	Cv.17.23	474	Cv.17.69	490	Cv.17.85	506
Cv.17.08	459	Cv.17.24	475	Cv.17.70	491	Cv.17.86	507
Cv.17.09	460	Cv.17.25	476	Cv.17.71	492	Cv.17.87	508
Cv.17.10	461	Cv.17.26	477	Cv.17.72	493	Cv.17.88	509
Cv.17.11	462	Cv.17.27	478	Cv.17.73	494	Cv.17.89	510
Cv.17.12	463	Cv.17.28	479	Cv.17.74	495	Cv.17.90	511

Kapitola 19

Př.19.1 512-514

Kapitola 20

Cv.20.08	515	Cv.20.14	520	Cv.20.20 – 20.21	524
Cv.20.08	516	Cv.20.15 – 20.16	521	Cv.20.22 – 20.23	525
Cv.20.09 – 20.10	517	Cv.20.17 – 20.18	522	Cv.20.24	526
Cv.20.11 – 20.12	518	Cv.20.19	523	Cv.20.25	527
Cv.20.13	519				