11. Číselné řady

Písmenem $\mathbb{C}$ značíme *množinu všech* (*konečných*) *komplexních čísel*; pro každé $z \in \mathbb{C}$ znamená $\operatorname{Re} z$ a $\operatorname{Im} z$ *reálnou* a *imaginární část* čísla z. Předpokládáme, že čtenář komplexní čísla zná a umí s nimi provádět běžné algebraické operace.

Připomeňme jen, že algebraická *pole* (neboli *tělesa*) $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ se podstatně liší tím, že na rozdíl od $\mathbb{R}$ není v $\mathbb{C}$ *uspořádání*; proto *nelze psát nerovnosti mezi nereálnými komplexními čísly a neplatí věty, které uspořádání předpokládají.*

Konvergence *komplexní posloupnosti*, tj. posloupnosti komplexních čísel, se definuje takto: Je-li $N \in \mathbb{Z}$, je-li

$$\{a_k\}_{k=N}^{\infty} \tag{1_N}$$

komplexní posloupnost a je-li $a \in \mathbb{C}$, píšeme

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \text{nebo} \quad a_k \to a \quad \text{pro} \quad k \to \infty \tag{2}$$

nebo ještě stručněji $a_k \to a$ a říkáme, že a je **limita** posloupnosti (1_N) nebo že čísla a_k **konvergují k** a, platí-li pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ nerovnost $|a_k - a| < \varepsilon$ pro s.v. $k \geq N$ [1]).

Z nerovností $\max(|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ platných pro každé $z \in \mathbb{C}$ snadno plyne, že

$$a_k \to a \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_k \to \operatorname{Re} a,\ \operatorname{Im} a_k \to \operatorname{Im} a. \tag{3}$$

Říkáme, že komplexní posloupnost (1_N) je **omezená**, existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že nerovnost $|a_k| \leq K$ platí pro všechna $k \geq N$. Podobně jako v $\mathbb{R}$ platí:

Každá konvergentní (*komplexní*) *posloupnost je omezená.*

Protože jsme v $\mathbb{C}$ nezavedli pojem nekonečné limity, jsou „komplexní analogie“ vět 3.1 – 3.3 o něco jednodušší:

1. $a_k \to a \Rightarrow |a_k| \to |a|$; $a_k \to 0 \Leftrightarrow |a_k| \to 0$.

2. $a_k \to a, b_k \to b \Rightarrow a_k \pm b_k \to a \pm b, a_k b_k \to ab$; *je-li navíc* $b \neq 0$, je i $a_k/b_k \to a/b$.

3. *Je-li posloupnost* (1_N) *omezená a je-li* $b_k \to 0$, *je i* $a_k b_k \to 0$. □

Pro každou komplexní posloupnost (1_N) nazýváme číslo

$$s_n := \sum_{k=N}^{n} a_k\,, \tag{4_N}$$

kde $n \geq N - 1$ je celé číslo, n-**tý částečný součet řady**

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k\,; \tag{5_N}$$

---

[1]) Ekvivalentně řečeno: pro všechna k od určitého indexu počínaje.

podle běžných úmluv z algebry je samozřejmě $s_{N-1} = 0$.

Číslo $s \in \mathbb{C} \cup \{-\infty, +\infty\}$ se nazývá **součet řady** (5_N), nastane-li jedna z těchto situací:

A. Posloupnost (1_N) je *komplexní*, $s \in \mathbb{C}$ a

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s; \tag{6}$$

B. posloupnost (1_N) je *reálná*, $s \in \mathbb{R}^*$ a (6) platí podle definice z kapitoly 3.

Je-li $s \in \mathbb{C}$, říkáme, že řada (5_N) **konverguje** (nebo: **je konvergentní**); v ostatních případech se nazývá **divergentní** (a říkáme, že **diverguje**).

Má-li řada (5_N) (konečný nebo nekonečný) součet s, píšeme

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k = s; \tag{7_N}$$

symbolu (5_N) *tedy přiřazujeme číslo* s. (Nemá-li řada (5_N) součet, zůstává (5_N) symbolem beze smyslu, i když mu – trochu paradoxně – stále říkáme řada.)

Členy posloupnosti (1_N) se zároveň nazývají i **členy řady** (5_N); konkrétněji je a_k její k-**tý člen**. Podle toho, zdali je posloupnost (1_N) reálná nebo komplexní, mluvíme o **reálné** nebo **komplexní řadě**.

Úmluva. Pokud nebude výslovně řečeno něco jiného, bude slovo „posloupnost“ resp. „řada“ znamenat „komplexní posloupnost“ resp. „komplexní řadu“.

Poznámka 11.1. Je zřejmé, že *konvergence posloupnosti (a tedy ani řady) se nezmění, jestliže změníme, přidáme nebo ubereme konečný počet členů*; při vyšetřování konvergence řad se proto můžeme omezit na řady tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{5}$$

které souvisejí s posloupnostmi tvaru $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Každé tvrzení o speciálnějších řadách (5) má svou zřejmou analogii pro obecnější řady (5_N); v dalším se nejčastěji setkáme s řadami (5) a řadami (5_0), v nichž se sčítá od 0. $\square$

V mnohých situacích je patrné na první pohled, že daná řada *diverguje*, a to proto, že nesplňuje tuto *nutnou podmínku konvergence*:

Věta 11.1. *Konverguje-li řada (5), je $a_k \to 0$ pro $k \to \infty$.*

Není-li tedy $a_k \to 0$, řada diverguje. Pozor však! Jde jen *o nutnou, ne však postačující* podmínku konvergence; *existují totiž i divergentní řady, které podmínku $a_k \to 0$ splňují* – viz Př. 11.2.

Věta 11.2. *Je-li $a_k \in \mathbb{C}$ a $b_k \in \mathbb{C}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a je-li $A \in \mathbb{C}$, $B \in \mathbb{C}$, je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Aa_k + Bb_k) = A \sum_{k=1}^{\infty} a_k + B \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{8}$$

má-li pravá strana smysl.

Věta 11.3. *Označíme-li $\alpha_k := \operatorname{Re} a_k$, $\beta_k := \operatorname{Im} a_k$, platí tato tvrzení:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje, právě když konvergují řady } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\,,\ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\,; \tag{9}$$

je-li podmínka splněna, je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\,. \tag{10}$$

Dále:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k\,| \text{ konverguje, právě když konvergují řady } \sum_{k=1}^{\infty} |\,\alpha_k\,|,\ \sum_{k=1}^{\infty} |\,\beta_k\,|\,, \tag{11}$$

načež konverguje i řada (5). $\square$

Konverguje-li řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k\,|$, říkáme, že řada (5) **konverguje absolutně**; je-li řada (5) konvergentní a řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k\,|$ divergentní, říkáme, že řada (5) **konverguje neabsolutně**.

Příklad 11.1. Je-li $0 \neq c \in \mathbb{C}$ a $q \in \mathbb{C}$, pak **geometrická řada**

$$\sum_{k=0}^{\infty} cq^k \text{ konverguje, právě když je } |\,q\,| < 1\,, \tag{12}$$

přičemž její konvergence je pak absolutní a platí rovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} cq^k = \frac{c}{1-q}\,. \tag{13}$$

Je-li totiž $|\,q\,| \neq 1$ a $n \in \mathbb{N}$, je

$$\sum_{k=0}^{n} |\,cq^k\,| = |\,c\,|\,\frac{1-|\,q\,|^{n+1}}{1-|\,q\,|}\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} cq^k = c\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,. \tag{13'}$$

Je-li $|\,q\,| < 1$, je $|\,q\,|^{n+1} \to 0$ a $q^{n+1} \to 0$ pro $n \to \infty$, takže obě posloupnosti (13′) mají konečné limity, platí rovnost (13) a řada vlevo konverguje absolutně. Je-li $|\,q\,| \geq 1$, *není* $cq^k \to 0$ (protože limita výrazu $|\,cq^k\,|$ je rovna buď $|c|$, nebo $+\infty$), takže řada z (12) podle V. 11.1 diverguje.

Příklad 11.2. Tak zvaná **harmonická řada**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{14}$$

diverguje do $+\infty$, tj. má součet rovný $+\infty$, *ačkoli její k-tý člen konverguje k* 0.

Abychom to dokázali, uvažme, že členy harmonické řady jsou kladná čísla, takže posloupnost $\{s(n)\}$ jejích částečných součtů je rostoucí; podle věty V.3.6 o limitě monotónní posloupnosti má tedy jistou (konečnou nebo nekonečnou) limitu s a stejnou limitu má i každá posloupnost z ní vybraná. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$s(2^n) - s(2^{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\,,$$

takže

$$s(2^n) = \sum_{k=1}^{n} \big(s(2^k) - s(2^{k-1})\big) + s(1) \geq \tfrac{1}{2}n + 1\,. \tag{15}$$

Z toho ihned plyne, že $s = \lim s(2^n) = +\infty$.

Definice. Bolzano – Cauchyho podmínkou (krátce: **BC podmínkou**) konvergence řady (5) se rozumí výrok:

(16) *Pro každé* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tak, že* $n > n_0,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon\,.$

Věta 11.4. (BC kritérium konvergence řady.) *Řada* (5) *konverguje, právě když splňuje BC podmínku* (16). $\square$

Symboly velké O a $\asymp$ se pro posloupnosti definují podobně jako pro funkce; oboustranná resp. jednostranná okolí bodů $a \in \mathbb{R}^*$ nahradí v příslušných výrocích slova „skoro všechna“:

Existuje-li $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že je $|a_k| \leq K|b_k|$ pro s.v. k, píšeme

$$a_k = O(b_k) \quad \text{pro} \quad k \to \infty \quad (\text{nebo krátce} \quad a_k = O(b_k)) \tag{17}$$

a čteme „a_k je velké O b_k (pro $k \to \infty$)“. Je-li $a_k = O(b_k)$ a zároveň $b_k = O(a_k)$, píšeme

$$a_k \asymp b_k \quad \text{pro} \quad k \to \infty \quad (\text{nebo krátce} \quad a_k \asymp b_k) \tag{18}$$

a říkáme, že (pro $k \to \infty$) jsou a_k, b_k **stejného řádu**.

Nejdůležitějšími kritérii platnosti vztahů (17) a (18) jsou implikace

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R} \Rightarrow a_k = O(b_k)\,, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a_k \asymp b_k\,. \tag{19}$$

Věta 11.5. (Srovnávací kritérium.) 1. *Je-li* $|a_k| \leq |b_k|$ *pro s.v. k, platí implikace*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \ \text{konverguje} \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ \text{konverguje}. \tag{20}$$

2. *Implikace (20) platí obecněji i v případě, že* $a_k = O(b_k)$ *pro* $k \to \infty$.

3. *Z relace* $a_k \asymp b_k$ *pro* $k \to \infty$ *plyne, že*

$$\text{(21)} \qquad \text{řada } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konverguje, právě když konverguje řada } \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|. \quad \square$$

Část 3 právě uvedené věty je tzv. **symetrická verze srovnávacího kritéria** pro řady. *Symetrická verze srovnávacího kritéria se často užívá ke zjednodušení členů dané řady, vyšetřujeme-li její absolutní konvergenci.*

Věta 11.6. (Integrální kritérium.) *Nechť* $f : \langle 1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *je spojitá nezáporná monotónní funkce. Pak*

$$\text{(22)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konverguje, právě když Newtonův integrál } \int_1^{+\infty} f \text{ existuje.}$$

Věta 11.7. (d'Alembertovo kritérium.) 1. *Existuje-li číslo* $q \in \langle 0, 1)$ *tak, že je*

$$\text{(23)} \qquad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \text{pro s.v.}\, k,$$

řada (5) konverguje absolutně; je-li

$$\text{(24)} \qquad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \quad \text{pro s.v.}\, k,$$

řada (5) diverguje.

2. *Dále platí:*

$$\text{(25)} \qquad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \;\Rightarrow\; \text{řada (5) konverguje absolutně;}$$

$$\text{(26)} \qquad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \;\Rightarrow\; \text{řada (5) diverguje.}$$

Věta 11.8. (Cauchyho kritérium.) 1. *Existuje-li číslo* $q \in \langle 0, 1)$ *tak, že je*

$$\text{(27)} \qquad \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \text{pro s.v.}\, k,$$

řada (5) konverguje absolutně; je-li

$$\text{(28)} \qquad \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \quad \text{pro s.v.}\, k,$$

řada (5) diverguje.

2. *Dále platí:*

$$\text{(29)} \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \;\Rightarrow\; \text{řada (5) konverguje absolutně;}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|\,a_k\,|} > 1 \quad\Rightarrow\quad \textit{řada (5) diverguje}. \quad \square \tag{30}$$

Kritéria uvedená ve větách V. 11. 5 – V. 11. 8 *jsou kritéria absolutní konvergence; neabsolutní konvergenci podle nich zjišťovat nelze.*

Neabsolutní konvergenci lze však v řadě případů zjistit pomocí V. 11. 9 – V. 11. 12, které následují. Poznamenejme, že Leibnizovo kritérium je sice speciálním případem Dirichletova kritéria, ale své zvláštní postavení i název si udrželo nejen proto, že je historicky starší, ale zejména pro jednoduché předpoklady, usnadňující jeho aplikaci. Abelovo kritérium, a to zejména jeho symetrická verze, slouží (podobně jako tomu bylo v případě integrálu) ke *zjednodušení členů* vyšetřované řady; Dirichletovo kritérium se zpravidla aplikuje až na řadu dostatečně zjednodušenou.

Definice. Říkáme, že

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \tag{31}$$

je **alternující řada**, je-li $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *monotónní* posloupnost *nezáporných* (reálných) čísel.

Věta 11.9. (Leibnizovo kritérium.) *Alternující řada* (31) *konverguje, právě když je $a_k \to 0$ pro $k \to \infty$.*

Věta 11.10. (Dirichletovo kritérium.) *Je-li posloupnost částečných součtů komplexní řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ omezená a má-li* (*reálná*) *monotónní posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ limitu rovnou* 0, *řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{32}$$

konverguje.

Věta 11.11. (Abelovo kritérium.) *Konverguje-li komplexní řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a je-li $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ omezená* (*reálná*) *monotónní posloupnost, řada* (32) *konverguje.*

Věta 11.12. (Symetrické Abelovo kritérium.) *Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je komplexní posloupnost a nechť dvě posloupnosti kladných čísel b_k, c_k splňují tyto podmínky:*

$$b_k \asymp c_k \;\; \textit{pro} \;\; k \to \infty\,, \quad \left\{\frac{b_k}{c_k}\right\}_{k=1}^{\infty} \; \textit{je monotónní posloupnost}. \tag{33}$$

Pak

$$\textit{řada} \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \; \textit{konverguje, právě když konverguje řada} \; \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k\,. \tag{34}$$

Příklad 11.3. Funkce $f(x) := 1/x^{\alpha}$ je pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ spojitá, monotónní a kladná v $\mathbb{R}_+$, přičemž integrál $\int_1^{+\infty} f$ existuje, právě když je $\alpha > 1$. Z toho podle integrálního kritéria plyne, že

$$(35) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \textit{konverguje, právě když je} \quad \alpha > 1\,.$$

Zároveň je tím dokázáno, že alternující řada

$$(36) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$$

konverguje *absolutně*, právě když je $\alpha > 1$. Je-li $0 < \alpha \le 1$, konverguje její k-tý člen k 0, takže řada podle Leibnizova kritéria konverguje – tentokrát jen *neabsolutně*. Je-li $\alpha \le 0$, nemá její k-tý člen limitu 0 a řada (36) podle V.11.1 *diverguje*.

Poznamenejme, že *právě dokázaná tvrzení hrají při vyšetřování konvergence řad principiální úlohu.*

Příklad 11.4. Vyšetříme konvergenci řady

$$(37) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \quad \textit{kde} \quad a_k := \frac{\operatorname{arctg} k \ \operatorname{arccotg} k \ \sinh k}{k \ \cosh k}\,;$$

protože je $a_k > 0$ pro všechna k, půjde o konvergenci *absolutní*.
Protože pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$(38) \qquad 0 < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 < k \operatorname{arccotg} k < 1\,, \quad 0 < \frac{\sinh k}{\cosh k} < 1\,,$$

je (pro všechna k)

$$(39) \qquad 0 < a_k < b_k := \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{k^2}\,.$$

Protože $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ podle (35) konverguje, platí podle 1. části V.11.5 totéž o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Aplikujeme-li místo 1. části V.11.5 její 2. část, *vyhneme se zbytečným numerickým odhadům* (38), (39) a výsledek získáme o něco snadněji: Protože je

$$(40) \qquad \operatorname{arctg} k \asymp 1\,, \quad \operatorname{arccotg} k \asymp \frac{1}{k}\,, \quad \frac{\sinh k}{\cosh k} \asymp 1 \quad \text{pro} \quad k \to \infty\,,$$

je $a_k \asymp 1/k^2$; podle (35) řada (37) tedy konverguje.

Příklad 11.5. Hodnoty exponenciály se v ryze imaginárních číslech, tedy v číslech tvaru it, kde i je *imaginární jednotka* a $t \in \mathbb{R}$, definují rovností

$$(41) \qquad e^{it} := \cos t + i \sin t\,,$$

z níž snadno plyne, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$ je

$$(42) \qquad e^{-it} = \cos t - i \sin t\,, \quad e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it}\,, \quad \left(e^{it}\right)^n = e^{int}\,,$$

$$(43) \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\,;$$

kromě toho ještě platí tato ekvivalence:

$$(44) \qquad e^{it} = 1 \Leftrightarrow t \equiv 0 \mod 2\pi\,.$$

Pro každé $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$ a každé $n \in \mathbb{N}$ je v důsledku toho

$$(45) \qquad \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{inx/2}\, \frac{e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$
$$= \left(\cos \tfrac{1}{2}nx + i \sin \tfrac{1}{2}nx\right) \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$$

a přechodem k reálným a imaginárním částem dostaneme identity

$$(46) \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos \frac{1}{2}nx \,\sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \,\sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}\,.$$

Protože $\cos kx = 1$ a $\sin kx = 0$, je-li $x \equiv 0 \mod 2\pi$, je zřejmé, že

(47) *posloupnost* $\left\{ \sum_{k=0}^{n} \cos kx \right\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená, právě když je* $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$,

zatímco

(48) *posloupnost* $\left\{ \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right\}_{n=1}^{\infty}$ *je omezená pro každé* $x \in \mathbb{R}$.

Z toho a z Dirichletova kritéria ihned plyne, že

(49) *řada* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$ *konverguje, je-li* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *a* $x \not\equiv 0 \mod 2\pi$,

zatímco

(50) *řada* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ *konverguje, je-li* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *a* $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $\alpha > 1$, *konvergují obě řady absolutně* podle srovnávacího kritéria. Je-li $0 < \alpha \le 1$, vyšetříme nejdříve některé speciální případy: Je-li $x \equiv 0 \mod 2\pi$ (resp. $x \equiv \pi \mod 2\pi$), je k-tý člen řady ze (49) roven $1/k^\alpha$ (resp. $(-1)^k/k^\alpha$), takže řada *diverguje* (resp. *konverguje neabsolutně*). Pro $x \equiv 0 \mod \pi$ je řada z (50) *nulová* [2]).

[2]) „Nulová řada“ není podle běžně užívané terminologie řada s nulovým součtem, ale řada, *jejíž všechny členy jsou nulové*; taková řada samozřejmě konverguje absolutně.

Dokažme konečně, že *pro každé* $\alpha \in (0, 1\rangle$ *a*

(51) *pro každé* $x \not\equiv 0 \mod \pi$ *konvergují řady* (49) *a* (50) *neabsolutně.*

Protože u obou řad se postupuje podobně, provedeme důkaz jen pro řadu z (50). Protože již víme, že tato řada konverguje, zbývá dokázat, že příslušná řada absolutních hodnot diverguje; k tomu stačí ověřit, že *není* splněna příslušná BC podmínka, tj. že *existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$ *a* $p \in \mathbb{N}$ *tak, že*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \ge \varepsilon .$$

Dokážeme dokonce více, a to že

(52) *existuje* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ *tak, že pro každé* $n \ge 2$ *je* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|\sin kx|}{k^\alpha} \ge \varepsilon .$

Protože funkce $|\sin kx|$ má periodu π, stačí omezit se na čísla $x \in (0, \pi)$; protože však $x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \Rightarrow \pi - x \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ a $|\sin k(\pi - x)| = |\sin kx|$, stačí vyšetřovat dokonce jen čísla $x \in (0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Pro každé takové x obsahuje interval $\langle (n+1)x, 2nx\rangle$ délky $(n-1)x$ nejvýše $(n-1)x/\pi + 1 \le \frac{1}{2}(n+1)$ čísel tvaru $j\pi$, kde $j \in \mathbb{Z}$. Utvoříme-li pro každé $j \in \mathbb{Z}$ otevřený interval $I_j := (j\pi - \frac{1}{2}x, j\pi + \frac{1}{2}x)$ délky x a položíme-li $\delta := \sin \frac{1}{2}x$, je patrné, že každý interval I_j obsahuje nejvýše jeden celý násobek čísla x, že pro každé t ze sjednocení všech I_j je $|\sin t| < \delta$ a že všude v doplňku tohoto sjednocení platí obrácená nerovnost $|\sin t| \ge \delta$.

Protože množina $\{kx;\, n < k \le 2n\}$ obsahuje právě n čísel, existuje v ní aspoň $n - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(n-1)$ čísel, z nichž žádné neleží v žádném intervalu I_j, takže absolutní hodnota příslušného sinu je aspoň rovna číslu δ. Z toho dále plyne, že

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{|\sin kx|}{k^\alpha} \ge \frac{\frac{1}{2}(n-1)\,\delta}{(2n)^\alpha} \ge \frac{\frac{1}{2}(n-1)\,\delta}{2n} \ge \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\Big)\delta \ge \tfrac{1}{8}\,\delta ,$$

protože $n \ge 2$. Nahoře jsme odůvodnili, proč se při důkazu tvrzení (52) můžeme omezit na čísla $x \in (0, \frac{1}{2}\pi\rangle$; je zřejmé, že v tom případě stačí položit $\varepsilon = \frac{1}{8} \sin \frac{1}{2}x$.

Příklad 11.6. Označíme-li

(53) $\displaystyle a_k(z) := \frac{z^k}{k!}$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ pro každé celé číslo $k \ge 0$,

je $\sum_{k=0}^\infty a_k(0) = a_0(0) = 1$. Je-li $z \ne 0$, je

$$\left|\frac{a_{k+1}(z)}{a_k(z)}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{z^k}\right| = \frac{|z|}{k+1} \to 0 \quad \text{pro} \quad k \to \infty ,$$

takže podle d'Alembertova kritéria řada $\sum_{k=0}^\infty a_k(z)$ konverguje absolutně.

Tím je dokázáno, že

$$\text{(54)} \qquad \textit{řada } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \textit{ konverguje absolutně pro každé } z \in \mathbb{C}.$$

Příklad 11.7. Je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, plyne z Cauchyho kritéria, že

$$\text{(55)} \quad \textit{řada } \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} z^k \textit{ konverguje absolutně pro každé } z \in \mathbb{C}\textit{, pro něž je } |z| < 1,$$

protože

$$\sqrt[k]{k^{\alpha} |z^k|} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^{\alpha} |z| \to |z| \text{ pro } k \to \infty$$

(sr. s Př. 3.5). Podle téhož kritéria řada z (55) *diverguje*, *je-li* $|z| > 1$, a to opět pro každé α.

Zbývá vyšetřit čísla $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z| = 1$. Pak je $|k^{\alpha} z^k| = k^{\alpha}$ a podle srovnávacího kritéria řada z (55) *konverguje absolutně pro všechna* $\alpha < -1$. Je-li $z = 1$ a $\alpha \geq -1$, řada podle integrálního kritéria *diverguje* (do $+\infty$). Je-li $z \neq 1$ a $0 > \alpha \geq -1$, existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že $z = e^{it}$, přičemž $t \not\equiv 0 \bmod 2\pi$; podle Př. 11.5 řada z (55) *konverguje neabsolutně*. Je-li $\alpha \geq 0$, nekonverguje k-tý člen k nule, takže řada *diverguje* podle V. 11.1.

Příklad 11.8. Prvním krokem vyšetření konvergence řady

$$\text{(56)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh k \ \operatorname{arccotg}^{\alpha} k}{e^k \, k^{\beta}} \sin k$$

se dvěma parametry $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ bude zjednodušení členů řady pomocí symetrické verze Abelova kritéria: Především uvážíme, že je

$$\text{(57)} \qquad \frac{\sinh k}{e^k} \asymp 1, \quad k \operatorname{arccotg} k \asymp 1 \text{ pro } k \to \infty.$$

Protože funkce $(\sinh x)/e^x = \frac{1}{2}(1 - e^{-2x})$ v $\mathbb{R}_+$ roste, lze výraz $\sinh k/e^k$ podle V. 11.12 vynechat, aniž se na konvergenci řady (56) cokoli změní. Protože i funkce $x \operatorname{arccotg} x$ v $\mathbb{R}_+$ roste, je funkce $(x \operatorname{arccotg} x)^{\alpha}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ v $\mathbb{R}_+$ monotónní, takže výraz $\operatorname{arccotg}^{\alpha} k$ lze nahradit výrazem $k^{-\alpha}$, opět aniž se cokoli na konvergenci řady změní. Z toho je patrné, že *řada* (56) *konverguje, právě když konverguje řada*

$$\text{(58)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^{\alpha+\beta}}.$$

Symetrické Abelovo kritérium dává však ještě tuto další informaci: *Řada* (56) *konverguje absolutně, právě když konverguje absolutně řada* (58).

Absolutní konvergence řady (56) je totiž totéž co konvergence řady

$$(56') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sinh k \ \operatorname{arccotg}^{\alpha} k}{e^k \, k^{\beta}} \, |\sin k|$$

a ta je podle tohoto kritéria ekvivalentní s konvergencí řady

$$(58') \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k^{\alpha+\beta}} \, ,$$

tj. s absolutní konvergencí řady (58).

Tím je náš problém převeden na problém, který jsme vyřešili v Př. 10.5 : *Řada* (58) *konverguje absolutně, je-li* $\alpha + \beta > 1$, *a neabsolutně, je-li* $0 < \alpha + \beta \le 1$*; je-li* $\alpha + \beta \le 0$, *řada* (58) *diverguje. Totéž platí o řadě* (56).

Poznámka 11.2. Rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ znamená, že posloupnost částečných součtů $s(n)$ řady vlevo má limitu s. Nechť $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ je nějaká rostoucí posloupnost nezáporných celých čísel, přičemž $k_0 = 0$. Nechť σ_m znamená m-tý částečný součet řady

$$(a_{k_0+1} + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots + (a_{k_{m-1}+1} + \cdots + a_{k_m}) + \cdots$$

o členech uvedených v závorkách. Pak je $\sigma_m = s(k_m)$ pro všechna m a z toho (podle věty o limitě vybrané posloupnosti – sr. s (16) z kapitoly 3) plyne, že $\sigma_m \to s$.

Tím je (za shora uvedených předpokladů o posloupnosti $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$) dokázáno toto tvrzení:

$$(59) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{k_{j-1}+1} + \cdots + a_{k_j}), \ \textit{má-li levá strana rovnosti smysl.}$$

Toto tvrzení lze považovat za **asociativní zákon** pro nekonečné řady. Všimněme si však, že (na rozdíl od konečných součtů) *k tomu, aby platila rovnost v* (59)*, nestačí, aby řada vpravo měla součet*. Je-li totiž $a_k = (-1)^{k-1}$ a $k_j = 2j$, je řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ divergentní, zatímco $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$ je řada nulová. $\square$

Zabývejme se otázkou, zdali pro nekonečné řady platí nějaký **komutativní zákon**, tedy otázkou, zdali se součet řady nezmění, jestliže řadu nějak přerovnáme, tj. jestliže její členy sečteme „v jiném pořadí“. Nejdříve je ovšem třeba řádně definovat, co „sčítáním členů řady v jiném pořadí“ neboli „přerovnáním řady“ rozumíme.

Definice. Je-li $\varphi : \mathbb{N} \to_{\text{na}} \mathbb{N}$ prosté zobrazení, říkáme, že **řada**

$$(60) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

vznikla z řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **přerovnáním** φ.

Říkáme, že **řada** $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ **vznikla z řady** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **přerovnáním**, existuje-li prosté zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \to_{\text{na}} \mathbb{N}$ tak, že rovnost $b_k = a_{\varphi(k)}$ platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Věta 11.13. 1. *Je-li* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolutně konvergentní řada, platí totéž o každé řadě* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$*, která z ní vznikla přerovnáním; kromě toho pak je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,. \tag{61}$$

2. *Rovnost* (61) *platí i za předpokladu, že je* $a_k \geq 0$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$ (*a že řada* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *vznikla z řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *přerovnáním*).

3. *Je-li* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *reálná neabsolutně konvergentní řada a je-li* $s \in \mathbb{R}^*$ *jakékoli číslo, existuje přerovnání* φ *tak, že*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s\,. \quad \square \tag{62}$$

Součet řady se tedy při přerovnání nezmění, je-li řada buď absolutně konvergentní, nebo jsou-li všechny její členy nezáporné; naopak, vhodnou změnou pořadí členů neabsolutně konvergentní reálné řady lze získat jakýkoli předem určený součet ![3])

Příklad 11.9. Lze dokázat, že součet s (alternující neabsolutně konvergentní) řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{63}$$

je roven $\lg 2$, ale k tomu, abychom ilustrovali, že přerovnáním se součet neabsolutně konvergentní řady může změnit, stačí vzít v úvahu, že

$$s = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\Big) > 0\,. \tag{64}$$

Utvořme řadu

$$\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\Big) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}\Big); \tag{65}$$

porovnáme-li pravé strany identit

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}\,, \quad \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{(2k-1)\cdot 4k}\,,$$

vidíme, že se součet řady (65) rovná $\frac{1}{2}s$.

Nechť σ_n resp. τ_n značí n-tý částečný součet řady (65) resp. řady

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k} + \cdots\,, \tag{66}$$

[3]) I u neabsolutně konvergentních komplexních řad lze přerovnáním měnit součet; příslušná věta však nedává tak elegantní výsledek jako 3. část V. 11.13.

která vznikla přerovnáním řady (63). Protože je $\tau_{3n} = \sigma_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a protože $\tau_{3n-1} - \sigma_n = 1/4n \to 0$, $\tau_{3n-2} - \sigma_n = 1/4n + 1/(4n-2) \to 0$ pro $n \to \infty$, je $\lim \tau_{3n} = \lim \tau_{3n-1} = \lim \tau_{3n-2} = \lim \sigma_n = \frac{1}{2}s$. Z toho plyne, že existuje $\lim \tau_n$ a rovná se $\frac{1}{2}s$.

Řada (66) *vzniklá přerovnáním řady* (63) (*s kladným součtem*) *má tedy poloviční součet.* $\square$

V souvislosti s tím, že součet absolutně konvergentní řady nezávisí (podle 1. části V.11.13) na pořadí, v němž členy řady sčítáme, se zavádí pro sčítání užitečný symbol, v němž pořadí sčítání není určeno. Tento symbol se nazývá *zobecněná řada* a zahrnuje jak nekonečné absolutně konvergentní řady, tak i řady konečné. K jeho definici budeme potřebovat tento velmi důležitý pojem:

Definice. Říkáme, že množina A je **spočetná**, existuje-li prosté zobrazení jedné z množin

(67) $$\emptyset, \quad \{1, 2, \dots, N\}, \ \textit{kde } N \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}$$

na množinu A. $\square$

Množina A je tedy spočetná, právě když nastane jedna z těchto tří situací:

1) A je prázdná množina.

2) A je konečná neprázdná množina; pak lze její prvky při vhodném $N \in \mathbb{N}$ seřadit do prosté (konečné) posloupnosti $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$.

3) A je nekonečná množina, přičemž její prvky lze seřadit do prosté (nekonečné) posloupnosti $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Rozumíme-li *prázdnou posloupností* zobrazení prázdné množiny [4]) a značíme-li ji $\{\alpha_k\}_{k=1}^{0}$, vidíme, že *množina A je spočetná, právě když lze její prvky seřadit do prosté posloupnosti tvaru $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$, kde N je buď nějaké nezáporné celé číslo, nebo* ∞.

Uveďme některé vlastnosti spočetných množin:

(68) *Každá část spočetné množiny je spočetná.*

(69) *Sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina.*

(70) *Kartézský součin konečného počtu spočetných množin je spočetná množina.*

(71) *Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná; totéž platí o jejích podmnožinách $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$.*

(72) *Množina $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ všech iracionálních čísel je nespočetná; totéž platí o jejích nadmnožinách $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ a o všech intervalech $I \subset \mathbb{R}$.* $\square$

Předpokládejme, že A je spočetná množina a že každému prvku $\alpha \in A$ je přiřazeno nějaké komplexní číslo a_α. Seřadíme-li všechny prvky množiny A do prosté (prázdné, konečné nebo nekonečné) posloupnosti

(73) $$\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$$

---

[4]) Populárně řečeno: Jde o posloupnost, která nemá žádný člen – podobně jako $\emptyset$ je množina, která nemá žádný prvek.

(kde N je tedy buď celé nezáporné číslo, nebo ∞), lze vytvořit (konečnou nebo nekonečnou) řadu

$$\sum_{k=1}^{N} a_{\alpha_k}\,; \tag{74}$$

je-li tato řada nekonečná, nechť je *absolutně konvergentní*.

Abychom zjednodušili vyjadřování, umluvme se, že *každou konečnou řadu budeme považovat za absolutně konvergentní*. Podstatné je, že *za vyslovených předpokladů nezávisí součet řady* (74) *na tom, jak byly prvky množiny A seřazeny do prosté posloupnosti* (73); pro konečné řady je to důsledek platnosti běžného komutativního zákona, pro nekonečné řady to plyne z 1. části věty 11.13, která kromě toho konstatuje, že ani absolutní konvergence řady (74) nezávisí na způsobu seřazení.

To vše nás vede k zavedení symbolu sčítání, který neobsahuje informaci o pořadí, v němž se prvky dané (spočetné) množiny $A \subset \mathbb{C}$ mají sečíst; bude to symbol

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha\,, \tag{75}$$

který se nazývá **zobecněná řada**.

Jestliže posloupnost (73) vznikla seřazením prvků množiny A do prosté posloupnosti a jestliže příslušná řada (74) konverguje absolutně, budeme říkat, že **zobecněná řada** (75) **konverguje**, nebo také, že **má smysl**; její **součet** pak definujeme jako součet řady (74). Je-li tento součet roven a, píšeme

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = a\,. \tag{76}$$

Jestliže naopak při nějakém seřazení prvků (nekonečné) množiny A do prosté posloupnosti (73) příslušná řada (74) nekonverguje absolutně, budeme říkat, že **zobecněná řada** (75) **nekonverguje** nebo že **nemá smysl**; *takové řadě není pak přiřazen žádný součet*.

Věta 11.14. (Zobecněný asociativní zákon.) *Předpokládejme, že B je spočetná množina a že A_β, $\beta \in B$, jsou disjunktní spočetné množiny. Označíme-li*

$$A := \bigcup_{\beta \in B} A_\beta \tag{77}$$

a je-li $a_\alpha \in \mathbb{C}$ pro každé $\alpha \in A$, je

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = \sum_{\beta \in B} \sum_{\alpha \in A_\beta} a_\alpha\,, \text{ má-li levá strana této rovnosti smysl.} \tag{78}$$

Poznámka 11.3. Asociativní zákon souvisí s tzv. uzávorkováním – sr. s Po. 11.2; u zobecněných řad jej interpretujeme tak, že místo abychom sečetli zobecněnou řadu na levé straně (78) přímo, rozložíme množinu A indexů na spočetně mnoho disjunktních spočetných množin A_β, pro každé β sečteme všechna čísla a_α, $\alpha \in A_\beta$, a výsledky tohoto sčítání sečteme přes všechna β; výsledek bude roven součtu řady vlevo, má-li tato řada smysl.

K tomu, aby levá strana (78) *měla smysl, však nestačí, aby měla smysl pravá strana*; to je zcela analogické tomu, co jsme již (v Po. 11.2) viděli u „obyčejných" řad: Je-li $a_\alpha := (-1)^{\alpha-1}$ pro všechna $\alpha \in A := \mathbb{N}$, zobecněná řada $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha$ nemá smysl. Položíme-li však $B = \mathbb{N}$ a $A_n := \{2n-1, 2n\}$ pro každé $n \in B$, je $\sum_{\alpha\in A_n} a_\alpha = 0$ pro všechna $n \in B$, takže součet na pravé straně (78) má smysl a je roven nule.

Věta 11.15. (Součin zobecněných řad.) *Konvergují-li zobecněné řady* $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha$ *a* $\sum_{\beta\in B} b_\beta$, *konverguje i řada* $\sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_\alpha b_\beta$ *a platí rovnost*

$$\Big(\sum_{\alpha\in A} a_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in B} b_\beta\Big) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A\times B} a_\alpha b_\beta\,. \tag{79}$$

Definice. Konvergují-li obě zobecněné řady vlevo, nazýváme zobecněnou řadu na pravé straně (79) jejich **součinem**. □

V teorii řad hraje důležitou úlohu[5]) tento speciální součin („obyčejných" řad):

Definice. Jsou-li $\{a_j\}_{j=0}^\infty$, $\{b_k\}_{k=0}^\infty$ dvě komplexní posloupnosti, nazýváme řadu

$$\sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}\Big) \tag{80}$$

Cauchyho součinem řad

$$\sum_{j=0}^\infty a_j\,,\quad \sum_{k=0}^\infty b_k\,. \quad \square \tag{81}$$

Definice neobsahuje žádné předpoklady, které by zaručily konvergenci řady (80); zavádí se jen jistý název. *Konvergencí Cauchyho součinu* se však zabývá tato věta:

Věta 11.16. *Z absolutní konvergence jedné z řad* (81) *a z konvergence druhé z nich plyne konvergence jejich Cauchyho součinu a rovnost*

$$\Big(\sum_{j=0}^\infty a_j\Big)\Big(\sum_{k=0}^\infty b_k\Big) = \sum_{n=0}^\infty \Big(\sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}\Big). \tag{82}$$

Konvergují-li obě řady absolutně, platí totéž o jejich Cauchyho součinu.

Příklad 11.10. Označme

$$E(z) := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} \quad \text{pro každé } z \in \mathbb{C}; \tag{83}$$

připomeňme, že podle Př. 11.6 řada vpravo konverguje v celém $\mathbb{C}$, a to absolutně.

[5]) Viz např. dodatek k této kapitole.

Podle V.11.16 platí tedy pro každá dvě čísla $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$ rovnosti

$$E(z)\,E(w) = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j\,!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k\,!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j w^{n-j}}{j\,!\,(n-j)\,!}\Big)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{n\,!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n\,!} = E(z+w)\,.$$

Poznamenejme, že funkce, kterou jsme zde označili $E(z)$, je ve skutečnosti *komplexní exponenciála*, pro niž se užívá (podobně jako pro reálnou exponenciální funkci, která je její restrikcí) většinou označení $\exp z$ nebo e^z. Identita

$$E(z+w) = E(z)\,E(w) \quad \textit{pro všechna} \quad z \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}, \tag{84}$$

kterou jsme dokázali, je jednou z jejích nejdůležitějších vlastností; setkali jsme se s ní již u reálné exponenciály a u exponenciály s ryze imaginárním exponentem (viz Př. 11.5). Další informace o komplexní exponenciále najde čtenář v dodatku k této kapitole.

Cvičení

V příkladech 11.01–11.50 je $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $A \in \langle 0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Úkolem je rozhodnout o absolutní konvergenci každé z následujících řad; v případě, že členy řady obsahují parametr nebo parametry, je třeba nalézt všechny jejich hodnoty, při nichž je konvergence absolutní.

11.01. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,!}{k^k}$

11.02. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\,!)^2}{k^k}$

11.03. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\,!)^2}{(2k)\,!}$

11.04. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k\,!}{k^k}$

11.05. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)\,!}$

11.06. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$

11.07. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)\,!}$

11.08. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$

11.09. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^a \, \lg^b k}$

11.10. $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^a \, \lg^b k \, \lg^c(\lg k)}$

11.11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^k}$

11.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k}$

11.13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \sqrt[k]{k}}$

11.14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$

11.15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k^2}$

11.16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\lg(k+1)}}$

11.17. $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$

11.18. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}$

11.19. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^k \frac{2kx}{x^2+k^2}$

11.20. $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}$

11.21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k^2} x^k}{(k+1)^{k^2}}$

11.22. $\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k \sin^{2k} x)$

11.23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{\sqrt{(k^2-k+1)^{k+1}}}$

11.24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lg(1+\alpha^k)}{\alpha^k}$

11.25. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$

11.26. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{e^{2kx}+1}$

11.27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{e^{2kx}+e^{kx}+1}}$

11.28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+k^a}{1+k^b}$

11.29. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}\right)$

11.30. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-1}\right)$

11.31. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^3+1}-\sqrt{k^3-1}\right)$

11.32. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k-1}\right)$

11.33. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k^2+1}-\sqrt[3]{k^2-1}\right)$

11.34. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lg^a k}{k^b} \operatorname{arccotg}^c k$

11.35. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[n+1]{k^n+1}-\sqrt[n+1]{k^n-1}\right)$

11.36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{k!}} z^k$

11.37. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k$

11.38. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$

11.39. $\sum_{k=2}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{\sqrt{k}\lg k}$

11.40. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{1/(k^2+1)}-1\right)$

11.41. $\sum_{k=2}^{\infty} \sin \frac{1}{k \lg^2 k}$

11.42. $\sum_{k=1}^{\infty} \lg(1+A^k)$

11.43. $\sum_{k=0}^{\infty} kx\, e^{-kx} \cos kx$

11.44. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin \frac{x}{k}\right)^k$

11.45. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos \frac{x}{k}\right)^k$

11.46. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^k x \operatorname{arccotg}^k x$

11.47. $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k x \arccos^k x$

11.48. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k(1-x)^k$

11.49. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}(2-x^2)^k$

11.50. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin^3 x - \cos^3 x)^k}{k^2}$

Nechť je opět $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $A \in \langle 0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. U každé z následujících řad rozhodněte, pro které hodnoty parametrů řada konverguje, a pak zjistěte, kdy je konvergence absolutní a kdy neabsolutní. (Při aplikaci Abelova a Dirichletova kritéria nezapomeňte ověřit monotonii příslušné posloupnosti!)

11.51. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \sin \frac{1}{k}$

11.52. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \cos \frac{1}{k}$

11.53. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k}$

11.54. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\lg k}$

11.55. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt[k]{k^9}}{\lg(\lg k)}$

11.56. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

11.57. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg} k \operatorname{arccotg} \sqrt{k}$

11.58. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(k+k^{-2})}{\lg(\lg k)}$

11.59. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin k}{k^2+1}$

11.60. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin^2 k}{k^2+1}$

11.61. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos^2 k}{\lg k}$

11.62. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$

11.63. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg}^a k \sin k$

11.64. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^a \frac{1}{k} \cos k$

11.65. $\sum_{k=1}^{\infty} \arccos^a \frac{k}{k+1} \sin k$

11.66. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{A^k+1} \sin k$

11.67. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{ak}}{e^{ak}+1} \operatorname{arccotg}^b k$

11.68. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{x^{2k}+1} \cos k$

11.69. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lg\left(1+\frac{1}{k}\right) \cos k$

11.70. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin \frac{1}{\sqrt{k^3}} \cos k$

11.71. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \lg\left(1-\frac{(-1)^k}{k}\right) \sin k$

11.72. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg(1+k)}{\lg(1+k^3)}$

11.73. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-k}{k+1}\right)^{-k} \arccos \frac{k}{k^2+1}$

11.74. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg(1+e^{kx})}{\lg(1+e^{3kx})}$

11.75. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a k}{x^b} \sin kx$

11.76. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lg(1+k^a) \cos kx$

11.77. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sinh kx + \cosh kx}{e^{2kx}}$

11.78. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\lg k}{k^a} \cos k$

11.79. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1} \frac{\cosh k!}{\sinh k!}$

11.80. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^3 k}{k}$

11.81. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+\sqrt{k}}$

11.82. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right) \cos kx$

11.83. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^a \frac{1}{k} \sin kx \cos kx$

11.84. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{1+x^{2k}} \frac{\sin k}{k}$

11.85. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

11.86. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right)$

11.87. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{k^2+1}\right) \sqrt[k]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

11.88. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{cotg}\frac{1}{k} - k\right) \frac{\sin k}{k^a}$

11.89. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^k - e\right) \cos kx$

11.90. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) \frac{\cos k}{k^a}$

Řešení

cvičení	*konverguje absolutně*	*diverguje*
11.01.	ano	ne
11.02.	ne	ano
11.03.	ano	ne
11.04.	$A \in \langle 0, e)$	$A \geq e$
11.05.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.06.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.07.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.08.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.09.	$(a>1) \vee ((a=1) \wedge (b>1))$	jindy
11.10.	$(a>1) \vee ((a=1) \wedge (b>1))$	
	$\vee\, ((a=b=1) \wedge (c>1))$	jindy

11.11.	$\lvert z\rvert > 1$	$0 < \lvert z\rvert \le 1$
11.12.	$\lvert z\rvert \le 1$	jindy
11.13.	ne	ano
11.14.	$x < 0$	$x \ge 0$
11.15.	$x \le 0$	$x > 0$
11.16.	ne	ano
11.17.	$\lvert z\rvert < 1$	$\lvert z\rvert \ge 1$
11.18.	$x = 0$	$x \ne 0$
11.19.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy
11.20.	ano	ne
11.21.	$\lvert x\rvert < e$	$\lvert x\rvert \ge e$
11.22.	$x \not\equiv 0 \mod \pi$	$x \equiv 0 \mod \pi$
11.23.	ano	ne
11.24.	$\alpha > 1$	$0 < \alpha \le 1$
11.25.	$x \ne \pm 1$	$x = \pm 1$
11.26.	$x \ne 0$	$x = 0$
11.27.	nikdy	$x \in \mathbb{R}$
11.28.	$((a \le 0) \wedge (b > 1))$	
	$\vee ((a > 0) \wedge (b > 0) \wedge (b - a > 1))$	jindy
11.29.	ne	ano
11.30.	ne	ano
11.31.	ano	ne
11.32.	ne	ano
11.33.	ano	ne
11.34.	$(b + c > 1) \vee ((b + c = 1) \wedge (a < -1))$	jindy
11.35.	$n > 1$	$n = 1$
11.36.	$z \in \mathbb{C}$	nikdy
11.37.	ne	ano
11.38.	nikdy	$x \in \mathbb{R}$
11.39.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy

11.40.	ano	ne
11.41.	ano	ne
11.42.	$A \in \langle 0, 1)$	$A \geq 1$
11.43.	$x \geq 0$	$x < 0$
11.44.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy
11.45.	nikdy	$x \in \mathbb{R}$
11.46.	$x > \operatorname{tg} \frac{1}{4}(\pi - \sqrt{\pi^2 + 16}\,) \doteq -0.528$	jindy
11.47.	$S < x \leq 1$, kde	
	$S := \sin \frac{1}{4}(\pi - \sqrt{\pi^2 + 16}\,) \doteq -0.467$	$-1 \leq x \leq S$
11.48.	$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}\,) < x < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,)$	jindy
11.49.	$1 \neq \lvert x \rvert < \sqrt{\sqrt{2} + 1} \doteq 1.5538$	jindy
11.50.	$x \in \mathbb{R}$	nikdy

* * *

cvičení	*konvergence*	*divergence*
11.51.	neabs.	ne
11.52.	ne	ano
11.53.	neabs.	ne
11.54.	neabs.	ne
11.55.	neabs.	ne
11.56.	abs.	ne
11.57.	neabs.	ne
11.58.	neabs.	ne
11.59.	neabs.	ne
11.60.	neabs.	ne
11.61.	neabs.	ne
11.62.	neabs.	ne
11.63.	abs., je-li $a > 1$, neabs., je-li $0 < a \leq 1$	je-li $a \leq 0$
11.64.	abs., je-li $a > 1$, neabs., je-li $0 < a \leq 1$	je-li $a \leq 0$
11.65.	abs., je-li $a > 2$, neabs., je-li $0 < a \leq 2$	je-li $a \leq 0$

11.66.	abs., je-li $0 \le A < 1$	je-li $A \ge 1$
11.67.	abs., je-li $(a < 0) \vee (b > 1)$	
	neabs., je-li $(a \ge 0) \wedge (0 < b \le 1)$	jindy
11.68.	abs., je-li $x \ne \pm 1$	je-li $x = \pm 1$
11.69.	neabs.	ne
11.70.	abs.	ne
11.71.	neabs.	ne
11.72.	ne	ano
11.73.	neabs.	ne
11.74.	nikdy	je-li $x \in \mathbb{R}$
11.75.	abs., je-li $(x \equiv 0 \bmod \pi) \vee (a + b > 1)$	
	neabs., je-li $(x \not\equiv 0 \bmod \pi) \wedge (0 < a + b \le 1)$	jindy
11.76.	abs., je-li $a < -1$	
	neabs., je-li $(x \not\equiv 0 \bmod 2\pi) \wedge (-1 \le a < 0)$	jindy
11.77.	abs., je-li $x > 0$	je-li $x \le 0$
11.78.	abs., je-li $a > 1$, neabs., je-li $0 < a \le 1$	je-li $a \le 0$
11.79.	neabs.	ne
11.80.	neabs.	ne
11.81.	abs., je-li $\lvert z \rvert < 1$, neabs., je-li $\lvert z \rvert = 1 \ne z$	jindy
11.82.	neabs., je-li $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$	jindy
11.83.	abs., je-li $(x \equiv 0 \bmod \frac{1}{2}\pi) \vee (a > 1)$	
	neabs., je-li $(x \not\equiv 0 \bmod \frac{1}{2}\pi) \wedge (0 < a \le 1)$	jindy
11.84.	abs., je-li $x \ne \pm 1$, neabs., je-li $x = \pm 1$	nikdy
11.85.	ne	ano
11.86.	neabs.	ne
11.87.	ne	ano
11.88.	abs., je-li $a > 0$, neabs., je-li $-1 < a \le 0$	je-li $a \le -1$
11.89.	neabs., je-li $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$	jindy
11.90.	abs., je-li $a > -2$, neabs., je-li $-3 < a \le -2$	je-li $a \le -3$

Dodatek ke kapitole 11

Říkáme, že komplexní funkce f komplexní proměnné [6]) je **spojitá v bodě** $a \in \mathbb{C}$, platí-li implikace $z_n \to a \Rightarrow f(z_n) \to f(a)$. Slovy **spojitá funkce** budeme v tomto dodatku rozumět funkci spojitou v každém bodě $a \in \mathbb{C}$.

Říkáme, že $A \in \mathbb{C}$ je **limita funkce** f **v bodě** $a \in \mathbb{C}$, jestliže $a \neq z_n \to a \Rightarrow f(z_n) \to A$; píšeme pak $\lim_{z\to a} f(z) = A$ nebo $f(z) \to A$ pro $z \to a$.

Existuje-li limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{85}$$

nazýváme ji **derivace funkce** f **v bodě** a („podle komplexní proměnné"). V tomto dodatku ji budeme značit $f'(a)$; k záměně s analogickým symbolem pro „derivaci podle reálné proměnné" nedojde, protože se zde tato derivace nikde neobjeví.

Podobně jako je tomu v reálném oboru, platí tato dvě tvrzení:

(86) $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$, *právě když je funkce f spojitá v bodě a.*

(87) *Z existence $f'(a)$ plyne spojitost funkce f v bodě a.*

Poznamenejme, že na rozdíl od $\mathbb{R}^*$ leží v množině $\mathbb{C}$ leží pouze „konečná čísla", takže i *všechny limity v komplexním oboru jsou podle naší definice „konečné", a totéž tedy platí i o derivacích „podle komplexní proměnné".* $\square$

Zcela analogicky, jako jsme v Př. 11.6 dokázali, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ konverguje absolutně pro každé $z \in \mathbb{C}$, se ověří, že totéž platí o řadách $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}/(2k)!$ a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!$. Proto lze v $\mathbb{C}$ definovat funkce E, C a S rovnostmi

$$E(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad C(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}; \tag{88}$$

jsou to po řadě: **komplexní exponenciála**, **komplexní kosinus** a **komplexní sinus**. (Neužíváme zde pro ně běžné označení $\exp z$, $\cos z$ a $\sin z$, aby nemohlo dojít k záměně se stejnojmennými reálnými funkcemi reálné proměnné. [7]))

Připomeňme, že v Př. 11.10 jsme dokázali identitu

$$E(z)E(w) = E(z+w) \quad \text{pro všechna } z \in \mathbb{C},\ w \in \mathbb{C}. \quad \square \tag{84}$$

[6]) tj. zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$

[7]) Důkaz, že reálná exponenciála a reálný sinus a kosinus jsou restrikce funkcí (88) a že rovnost $e^{it} = E(it)$ platí pro všechna $t \in \mathbb{R}$ (sr. se (41)), najde čtenář ve druhém dílu této knihy. Lze však postupovat i jinak: V Jarníkově Diferenciálním počtu I se na začátku kapitoly 6 zavádějí (reálné) funkce sinus a kosinus spolu s číslem π „axiomaticky", na základě čtyř jednoduchých podmínek. Všechny tyto podmínky čtenář najde i v tomto dodatku – viz zejména cvičení 11.93, 11.91, 11.96 a 11.94.

Cvičení 11.91–11.100 mohou sloužit nejen k individuálnímu procvičení operací s řadami, ale např. i jako referáty, v nichž studenti po korektním zavedení exponenciály, kosinu a sinu sami postupně odvodí základní vlastnosti těchto funkcí. Kromě jiného se též dovědí, jak lze korektně definovat číslo π, a přesvědčí se, že všechny tyto informace lze snadno získat, přejdeme-li z reálného oboru do oboru komplexního.

Cvičení

11.91. Jistě je zřejmé, že *funkce* C *je sudá, funkce* S *lichá* a že

$$E(0) = 1\,, \quad C(0) = 1\,, \quad S(0) = 0\,. \tag{89}$$

Odvoďte z (84), že

$$z \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; E(z) \neq 0\,,\; E(-z) = \frac{1}{E(z)}\,. \tag{90}$$

11.92. Pro každé $z \in \mathbb{C}$ dokažte tyto identity:

$$E(\pm iz) = C(z) \pm i\,S(z)\,, \tag{91}$$

$$C(z) = \frac{E(iz) + E(-iz)}{2}\,, \quad S(z) = \frac{E(iz) - E(-iz)}{2i}\,, \tag{92}$$

$$C^2(z) + S^2(z) = 1\,. \tag{93}$$

Označte $x := \operatorname{Re} z$, $y := \operatorname{Im} z$ a ukažte, že (pro všechna $z \in \mathbb{C}$) je

$$E(z) = E(x + iy) = E(x) \cdot (C(y) + i\,S(y))\,, \tag{94}$$

přičemž $E(x)$, $C(y)$ a $S(y)$ jsou *reálné funkce reálné proměnné.*

R a d a . (91) plyne přímo z definic funkcí E, C a S, (92) pak vznikne z rovnic (91) sečtením resp. odečtením. K důkazu (93) a (94) se užije (91), (92) a (84).

11.93. Pomocí (84), (92) a (93) dokažte, že *identity* (tzv. *součtové vzorce*)

$$C(z + w) = C(z)C(w) - S(z)S(w)\,, \quad S(z + w) = S(z)C(w) + C(z)S(w) \tag{95}$$

platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$.

11.94. Za předpokladu, že $0 < |h| < 1$, dokažte nerovnosti

$$\Big|\frac{C(h) - 1}{h}\Big| \leq A|h|\,, \quad \textit{kde} \;\; A := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \in \mathbb{R}_+\,, \tag{96$_1$}$$

$$\Big|\frac{S(h)}{h} - 1\Big| \leq B|h|^2\,, \;\; \textit{kde} \;\; B := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \in \mathbb{R}_+\,. \tag{96$_2$}$$

Všimněte si, že z nich ihned plyne, že

$$C'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{C(h) - 1}{h} = 0\,, \quad S'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{S(h)}{h} = 1\,. \tag{97}$$

Užijte (95) a (97) k důkazu, že *pro každé $z \in \mathbb{C}$ existují derivace $C'(z)$, $S'(z)$, přičemž*

$$C'(z) = -S(z)\,, \quad S'(z) = C(z)\,. \tag{98}$$

Podle (87) z toho vyplývá, že *funkce C, S jsou spojité.*

R a d a . Vyjděte z definic čísel $C(h)$ a $S(h)$ a uvažte, že

$$\begin{aligned} C(z+h) - C(z) &= C(z)\,(C(h) - 1) - S(z)\,S(h)\,, \\ S(z+h) - S(z) &= S(z)\,(C(h) - 1) + C(z)\,S(h)\,. \end{aligned}$$

11.95. Dokažte, že $C(2) < 0$, a odvoďte z toho, že *funkce C má v intervalu* $(0, 2)$ (*aspoň jeden*) *kořen*; pak dokažte, že *množina $K := C_{-1}(0) \cap \mathbb{R}_+$ všech kladných kořenů funkce C má minimum.*

R a d a . Ověřte především platnost relací

$$\begin{aligned} C(2) &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \le -1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(2k)!} \\ &\le -1 + \frac{16}{24} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^k \le -1 + \frac{50}{63} < 0\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Pak uvažte, že reálná spojitá funkce $C\,|\,\langle 0, 2\rangle$, splňující podmínky $C(0) = 1 > 0$, $C(2) < 0$, se někde v intervalu $(0, 2)$ anuluje (protože má Darbouxovu vlastnost). Protože její *infimum* A je limitou jisté posloupnosti bodů $A_k \in K$, plyne ze spojitosti funkce C, že A je *minimem* množiny K; je přitom $A > 0$, protože $C(0) = 1$.

11.96. Definujte číslo π rovností

$$\pi := 2 \min\{x \in \mathbb{R}_+\,;\ C(x) = 0\}\,, \tag{100}$$

tedy jako *dvojnásobek nejmenšího kladného kořenu funkce C*, a dokažte tato tvrzení:

A. *Restrikce $S\,|\,\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ je funkce rostoucí, restrikce $C\,|\,\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ funkce klesající v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Kromě toho je*

$$S(\tfrac{1}{2}\pi) = 1\,,\ S(\pi) = 0\,,\ C(\pi) = -1\,,\ S(2\pi) = 0\,,\ C(2\pi) = 1\,. \tag{101}$$

B. *Komplexní funkce C a S jsou 2π-periodické, což znamená, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí identity*

$$C(z \pm 2\pi) = C(z)\,, \quad S(z \pm 2\pi) = S(z)\,. \tag{102}$$

C. *Komplexní funkce E má (ryze imaginární) periodu $2\pi i$,* což znamená, že *pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí identita*

$$E(z \pm 2\pi i) = E(z). \tag{103}$$

R a d y : Ad A. Podle definice čísla π je $S'(x) = C(x) > 0$ v $(0, \frac{1}{2}\pi)$, takže S roste v $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a $S(\frac{1}{2}\pi) > 0$. Podle (93) je $S^2(\frac{1}{2}\pi) = C^2(\frac{1}{2}\pi) + S^2(\frac{1}{2}\pi) = 1$ a vzhledem k rovnosti $C' = -S$ funkce C v $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ klesá. (101) se odvodí z (95).

Ad B. Užijte (95) a (101).

Ad C. Stačí vyjít z (94) a z 2π-periodicity funkcí C a S.

11.97. Pomocí Cauchyho součinu dokažte, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z| < 1$, platí rovnost

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j z^{j-1}. \tag{104}$$

11.98. Položte $a_{jk}(z) := j z^{jk}$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $|z| < 1$, a dokažte, že *zobecněná řada*

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{jk}(z) \tag{105}$$

konverguje. Pak pomocí V.11.14 dokažte identity

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j z^j}{1 - z^j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(1-z^k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n, \tag{106}$$

kde $d(n)$ znamená *součet všech kladných dělitelů* čísla n. Ověřte, že patnáctý částečný součet poslední řady je roven

$$1 \cdot z^1 + 3 \cdot z^2 + 4 \cdot z^3 + 7 \cdot z^4 + 6 \cdot z^5 + 12 \cdot z^6 + 8 \cdot z^7 + 15 \cdot z^8 \\ + 13 \cdot z^9 + 18 \cdot z^{10} + 12 \cdot z^{11} + 28 \cdot z^{12} + 14 \cdot z^{13} + 24 \cdot z^{14} + 24 \cdot z^{15}.$$

R a d a . Seřaďte všechna čísla $a_{jk}(z)$ do prosté posloupnosti, utvořte příslušnou řadu a ukažte, že její částečné součty mají tvar $\sum_{(j,k) \in X} a_{jk}(z)$, kde $X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je jistá konečná množina. Zvolte $n \in \mathbb{N}$ tak, že $(j,k) \in X \Rightarrow j \le n$, $k \le n$, a ověřte, že pak platí odhady

$$\sum_{(j,k) \in X} |a_{jk}(z)| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j|z|^{jk} \le \sum_{j=1}^{\infty}\Big(j \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{jk}\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j|z|^j}{1-|z|} < +\infty.$$

Z toho plyne konvergence řady (105).

První resp. druhý součet v (106) se dostane tím, že se místo $\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{jk}(z)$ (v souladu s obecným asociativním zákonem) napíše

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(z)\Big) \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}(z)\Big);$$

u druhého součtu se potřebuje i (104). Třetí součet ve (106) se získá tím, že se sečtou všechna čísla $a_{jk}(z)$, pro něž je $j+k$ rovno danému číslu $n \in \mathbb{N}$.

11.99. Za předpokladu, že $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, dokažte nejdříve *konvergenci zobecněné řady*

$$\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} z^{jk}\,; \tag{107}$$

pak ukažte, že *její součet lze napsat v těchto dvou tvarech*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} z^{jk}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z^k}\,, \tag{108}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{\min(j,k)=n} z^{jk}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}\,\frac{1+z^n}{1-z^n}\,. \tag{109}$$

Všimněte si, že n-tý člen řady na pravé straně (109) resp. (108) je stejného řádu jako $|z|^{n^2}$ resp. jako $|z|^n$; *řada na pravé straně* (109) *tedy konverguje daleko rychleji než řada na pravé straně* (108). [8])

11.100. Pro všechna celá nezáporná čísla položte

$$a_j := \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \tag{110}$$

a ukažte, že *Cauchyho součin* (*neabsolutně*) *konvergentních řad* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (neboli „čtverec“ řady o členech a_j) *diverguje*.

Porovnáte-li tento výsledek s větou V.11.16, vidíte, že *absolutní konvergence* (*aspoň*) *jedné z řad, z nichž chceme utvořit Cauchyho součin, je podmínkou podstatnou*.

R a d a . Dokažte a pak užijte nerovnost

$$\sqrt{(j+1)(n-j+1)} \le \tfrac{1}{2}(n+2)$$

platnou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $j = 0, 1, \ldots, n$.

---

[8]) Podobná zjištění mají značný význam např. v situacích, kdy potřebujeme znát přibližnou hodnoty součtu nějaké řady – v našem případě řady (107). Záleží na naší šikovnosti, zdali z dané řady dovedeme utvořit jinou řadu s týmž součtem, ale o členech „velmi rychle“ konvergujících k nule.