8. Slovní úlohy na extrémy

V této kapitole naznačíme, jak řešit některé „praktické“ (většinou geometrické) úlohy související s extrémy funkcí jedné proměnné. Novým prvkem bude nutnost slovně zadanou úlohu nejdříve matematicky *modelovat*, tedy převést do „matematické řeči“. Teprve pak lze problém řešit buď metodami vyloženými v kapitole 7, nebo metodami zcela elementárními, které nejsou založeny na poznatcích diferenciálním počtu. Jako vždy bychom měli dát přednost *jednoduššímu* řešení.

Připomeňme dvě jednoduchá, ale velmi užitečná tvrzení diferenciálního počtu:

Věta 8.1. *Nechť funkce f definovaná v intervalu I s krajními body $a < b$ má v bodě $c \in (a, b)$ extrém* [1]*. Pak je buď $f'(c) = 0$, nebo tato derivace neexistuje.*

Věta 8.2. *Nechť funkce f spojitá v intervalu (a, b) splňuje tyto podmínky:*

1. $f(a+) = f(b-)$*;*
2. *existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f' \neq 0$ všude v $(a, c) \cup (c, b)$.* [2]

Pak nastane právě jedna z těchto situací:

A. $f(c) > f(a+)$, f roste v $(a, c\rangle$, klesá v $\langle c, b)$, a v bodě c má maximum;

B. $f(c) < f(a+)$, f klesá v $(a, c\rangle$, roste v $\langle c, b)$, a v bodě c má minimum.

Příklad 8.1. Existuje-li mezi obdélníky o obvodu $4c \in \mathbb{R}_+$ obdélník s maximálním obsahem [3], najděte délky jeho stran. [4]

Ř e š e n í : Jsou-li x, y délky stran obdélníka, je jeho obvod $2(x + y)$; protože toto číslo má být rovno $4c$, musí být $y = 2c - x$. Máme tedy rozřešit problém, zdali má funkce $f(x) := x(2c - x)$ maximum; z povahy problému ovšem plyne, že nejde o maximum v celém $\mathbb{R}$, ale v intervalu $I := (0, 2c)$ – jinde totiž není buď x, nebo y kladné číslo. V. 7.3 nelze užít, protože I není kompaktní interval; hodí se však V. 8.2 : Protože $f(0+) = f(2c-) = 0$, protože $f'(x) = 2(c - x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$ různá od c a protože $f(c) = c^2 > 0$, je tato hodnota *maximální* hodnotou funkce f v I.

Problém má tedy právě jedno řešení: *Obdélník s daným obvodem $4c$ a s maximálním obsahem je čtverec o straně c.* Dodejme, že obdélník s daným obvodem a minimálním obsahem zřejmě neexistuje.

Příklad 8.2. Z $1\,\mathrm{m}^3$ betonu máme – pokud je to možné – odlít co nejvyšší těleso buď ve tvaru krychle, nebo koule, nebo koule postavené na krychli.

---

[1]) tj. maximum nebo minimum

[2]) Všimněme si, že se nepředpokládá konečnost žádného z čísel a, b, $f(a+)$, $f(b-)$. Je-li však $a \in \mathbb{R}$ (resp. $b \in \mathbb{R}$) a je-li f spojitá v bodě a zprava (resp. v bodě b zleva), lze limitu $f(a+)$ (resp. $f(b-)$) nahradit hodnotou $f(a)$ (resp. $f(b)$). Existence derivace $f'(c)$ se nepředpokládá.

[3]) Bylo by hrubou logickou chybou ignorovat v podobných případech problém existence.

[4]) Mezi obdélníky počítáme ovšem i čtverce, jinak by úloha neměla řešení.

Ř e š e n í : Předpokládejme, že se těleso skládá z krychle o délce hrany x a z koule o poloměru r. Připustíme-li $x = 0$ a $r = 0$, budou zahrnuty i případy, že jedno z těchto těles chybí, a je zřejmé, že se pak máme zabývat čísly $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Krychle o hraně x má objem x^3, takže pro kouli zbývá objem $1 - x^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Odtud plyne, že poloměr r a celková výška $f(x)$ tělesa jsou dány rovnostmi

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\,(1 - x^3)} \quad \text{resp.} \quad f(x) = x + 2r = x + \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\,\sqrt[3]{1 - x^3}\,.$$

Derivace

$$f'(x) = 1 + \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\,\frac{-x^2}{\sqrt[3]{(1 - x^3)^2}}$$

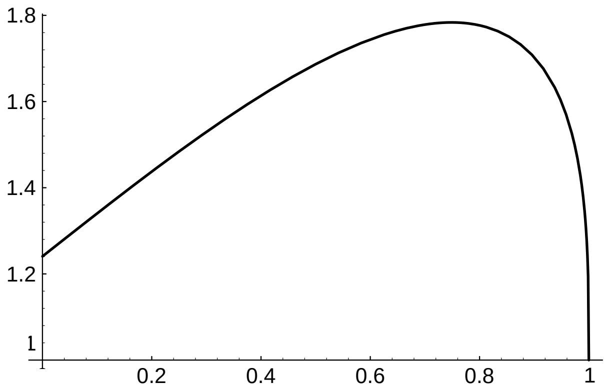
se v $(0, 1)$ anuluje, právě když $\sqrt[3]{(1 - x^3)^2} = x^2 \sqrt[3]{6/\pi}$, tj. právě když $\sqrt[3]{1 - x^3} = x \sqrt[6]{6/\pi}$. Jak snadno zjistíme, je číslo

$$x_0 := \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6} + \sqrt{\pi}}} \doteq 0.7488$$

jediným řešením této rovnice; průměr příslušné koule je roven

$$2r_0 := \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{\pi\,(\sqrt{6} + \sqrt{\pi})}} \doteq 1.0348\,,$$

což vede k úhrnné výšce $x_0 + 2r_0 \doteq 1.7836\,\mathrm{m}$ tělesa.



OBRÁZEK K PŘÍKLADU 8.2

Protože je toto číslo větší než $f(0) = \sqrt[3]{6/\pi} \doteq 1.24$ a také než $f(1) = 1$, je řešením našeho problému: Na krychli o hraně x_0 je třeba postavit kouli o poloměru r_0. Zároveň je patrné, že kdyby nám šlo o útvar s minimální výškou, odlili bychom krychli o výšce 1.

Příklad 8.3. Dokažme, že na každé přímce v trojrozměrném eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ leží právě jeden bod nejbližší počátku $(0,0,0)$.

Ř e š e n í : Předpokládejme, že přímka L je určena bodem (A,B,C) a (nenulovým) vektorem (u,v,w); to znamená, že přímku L tvoří právě všechny body tvaru $X(t) = (A+tu, B+tv, C+tw)$, kde $t \in \mathbb{R}$. Máme rozřešit problém existence právě jednoho t, pro něž je vzdálenost bodů $X(t)$ a $(0,0,0)$ minimální. Protože vzdálenosti jsou nezáporná čísla, je to totéž jako rozřešit analogický problém pro čtverec této vzdálenosti, tj. pro funkci

$$f(t) := (A+tu)^2 + (B+tv)^2 + (C+tw)^2 \,.$$

Nabývá-li f v některém bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ svého minima, je podle V. 8.1

$$f'(t_0) = 2\big(u(A+t_0u) + v(B+t_0v) + w(C+t_0w)\big) = 0\,.$$

Tato podmínka je splněna, právě když je

$$t_0 = -\frac{Au+Bv+Cw}{u^2+v^2+w^2}\,.$$

Aplikujme nyní V. 8.2 : Obě limity $f(\pm\infty\mp)$ jsou rovny $+\infty$ a $t \neq t_0 \Rightarrow f'(t) \neq 0$; v důsledku toho má funkce f v bodě t_0 *opravdu* minimum. Mezi všemi body $X(t)$ má tedy jedině bod

$$X(t_0) = (A,B,C) - \frac{Au+Bv+Cw}{u^2+v^2+w^2}\,(u,v,w)$$

nejmenší vzdálenost od počátku; snadno ověříme, že její čtverec je roven

$$(A+t_0u)^2 + (B+t_0v)^2 + (C+t_0w)^2 = (A^2+B^2+C^2) - \frac{(Au+Bv+Cw)^2}{u^2+v^2+w^2}\,.$$

Poznamenejme ještě, že skalární součin vektorů $X(t_0)$ a (u,v,w) je roven 0. Je-li $(0,0,0) \in L$, je celý náš problém triviální; je-li $(0,0,0) \notin L$, je přímka procházející počátkem a bodem $X(t_0)$ kolmá k L (což je dobře známo z elementární geometrie).

Příklad 8.4. Rozsáhlý les je z jihu ohraničen přímou cestou vedoucí od západu k východu. Z výchozího místa na této cestě se máme dostat na místo, které je od nás vzdáleno 5 km východně a 2 km severně. Jistou dobu půjdeme po cestě rychlostí 5 km za hodinu, pak (šikmo) lesem rychlostí 3 km za hodinu. Jak dlouho máme jít po cestě, abychom se do cíle dostali co nejdříve? Kolik při tom ujdeme kilometrů a jak dlouho nám cesta bude trvat?

Ř e š e n í : K tomu, abychom po cestě ušli x $(\in \langle 0,5\rangle)$ km, potřebujeme $\frac{1}{5}x$ hodin; další cesta lesem bude pak měřit $y := \sqrt{2^2+(5-x)^2} = \sqrt{x^2-10x+29}$ km a ujdeme ji za $\frac{1}{3}y$ hodin. Celkem tedy bude cesta trvat

$$f(x) := \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{3}\sqrt{x^2-10x+29}$$

hodin. Jak snadno zjistíme, je jediným kořenem derivace

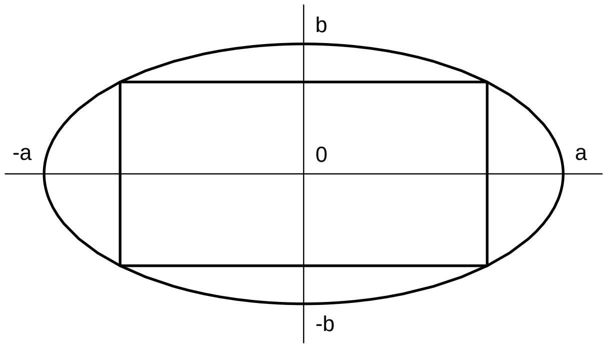
$$f'(x) = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{3}\frac{x-5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$$

číslo $\frac{7}{2}$. Protože $f(\frac{7}{2}) = \frac{23}{15} = 1.5333\ldots$, zatímco $f(0) = \frac{1}{3}\sqrt{29} \doteq 1.795$, $f(5) = \frac{5}{3} = 1.666\ldots$, je zřejmé, že f nabývá v bodě $\frac{7}{2}$ svého minima. Hodnota tohoto minima je $\frac{23}{15}$ hodin, neboli 1 hodina a 32 minut. Po cestě půjdeme 3.5 km (a 42 minut), lesem 2.5 km (a 50 minut); celkem tedy ujdeme 6 km.

Příklad 8.5. Dokažme, že mezi obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami a které jsou vepsány do elipsy

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

kde $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, existuje právě jeden s maximálním obsahem.



Obrázek k příkladu 8.5

Ř e š e n í : Elipsa je geometrickým obrazem křivky [5])

$$\varphi(t) := (a\cos t,\, b\sin t), \quad \text{kde} \quad t \in \langle -\pi, \pi \rangle,$$

a vrcholy vepsaného obdélníka jsou body $\varphi(\pm\alpha)$, $\varphi(\pm(\pi-\alpha))$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ je úhel, který svírá průvodič pravého horního vrcholu s kladným směrem osy x. Obsah

$$f(t) := 2a\cos\alpha \cdot 2b\sin\alpha = 2ab\sin 2\alpha$$

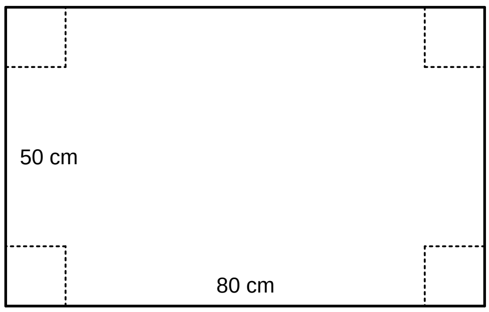
takového obdélníka je zřejmě (sr. s V.8.2) maximální při $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ a rovná se $2ab$. Obdobný obdélník s minimálním obsahem samozřejmě neexistuje.

[5]) *Křivkou* se zde rozumí (jakékoli) spojité zobrazení ω (jakéhokoli) kompaktního intervalu $I \subset \mathbb{R}$ do roviny $\mathbb{R}^2$. Její *geometrický obraz* je množina $\omega(I)$.

Cvičení

Řešte následující slovní úlohy; u některých z nich vystačíte s elementárními metodami, nevyžadujícími znalost diferenciálního počtu.

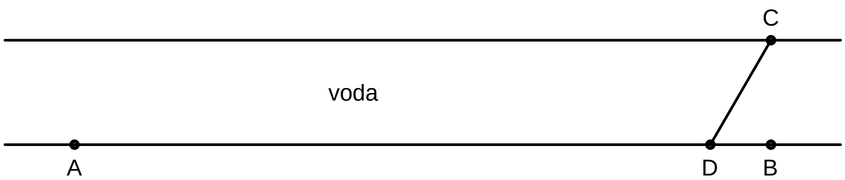
8.01. Z obdélníkového plechu o velikosti $80\,\mathrm{cm} \times 50\,\mathrm{cm}$ se má po odstřižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstřihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem, a jak velký bude tento objem?



Obrázek ke cvičení 8.01

8.02. Úkolem je vyrobit plechové konzervy ve tvaru válce s objemem V ($\in \mathbb{R}_+$) tak, aby byly co nejlehčí. Najděte příslušný poměr výšky h válce a poloměru r jeho podstavy, a to nejdříve pro obecný objem V, pak pro $V = 1000\,\mathrm{cm}^3$.

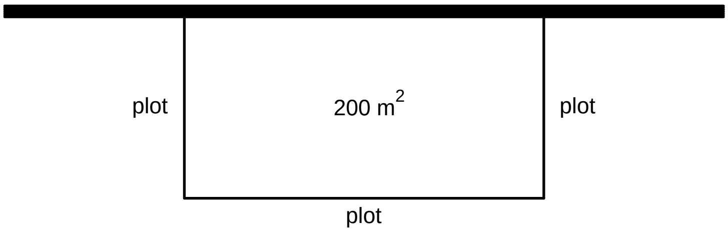
8.03. Válcové nádoby s objemem 20 litrů se budou vyrábět z dvojího plechu: na obě podstavy válce se užije materiál dvakrát dražší než na jeho plášť. Jak se má zvolit poměr výšky h válce a poloměru r jeho podstav, aby cena celé nádoby byla co nejmenší? Stojí-li $1\,\mathrm{m}^2$ materiálu užitého na plášť 360 Kč, kolik bude stát materiál na celou nádobu?



Obrázek ke cvičení 8.04

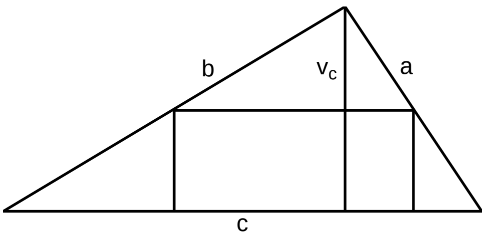
8.04. Přímý vodní kanál je 150 m široký. Místa A a B ležící na jednom z břehů mají vzdálenost 1 km, místo C je na druhém břehu přesně naproti místu B. Z A se má do C vést potrubí, jehož první (přímý) úsek povede z A do jistého místa D na spojnici AB a jehož druhý (také přímý) úsek spojí D s C. Položení 1 m potrubí na břehu stojí 800 Kč, přes kanál je cena dvojnásobná. Jak daleko má být D od A, aby cena celého potrubí byla co nejmenší? Jaká bude jeho délka zaokrouhlená na decimetry a cena zaokrouhlená na celé koruny? Jaký úhel budou svírat úsečky DB a DC?

8.05. Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze $200\,\mathrm{m}^2$, jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Dokažte, že obdélník lze zvolit tak, aby plot měl minimální délku, a najděte délky příslušných stran.



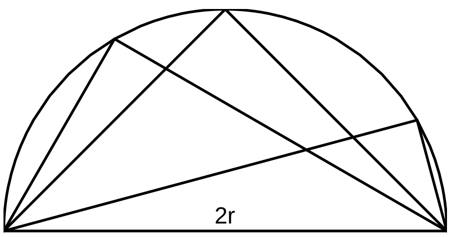
Obrázek ke cvičení 8.05

8.06. Dokažte, že do trojúhelníka, jehož nejdelší stranou je strana c, lze vepsat obdélník se základnou obsaženou v c a s maximálním obsahem; najděte vztah mezi obsahem trojúhelníka a vepsaného obdélníka.



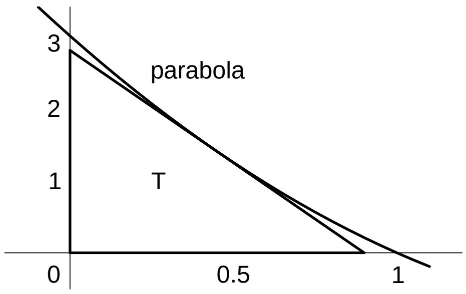
Obrázek ke cvičení 8.06

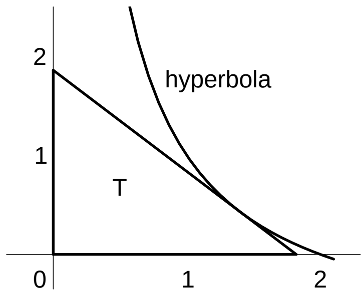
8.07. Existuje mezi trojúhelníky vepsanými do kruhu o daném poloměru $r \in \mathbb{R}_+$, jejichž jednou stranou je průměr kruhu, trojúhelník s maximálním obsahem resp. obvodem? Pokud ano, jaký bude tento obsah resp. obvod?



Obrázek ke cvičení 8.07

8.08. Dokažte, že mezi všemi (pravoúhlými) trojúhelníky T s vrcholem v počátku, jejichž odvěsny jsou částí souřadnicových os a jejichž přepona je částí tečny oblouku paraboly $y = x^2 - 4x + 3$, $0 \le x \le 1$, existuje právě jeden trojúhelník s minimálním resp. maximálním obsahem. Zjistěte, ve kterých bodech se příslušné tečny dotýkají paraboly a najděte oba extrémní obsahy.

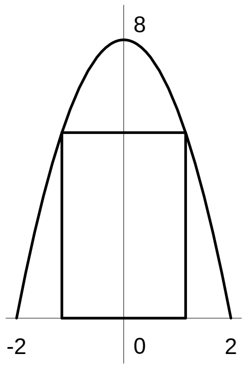


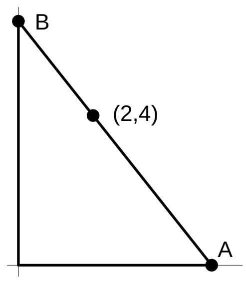


Obrázky ke cvičením 8.08 a 8.09

8.09. Mezi všemi (pravoúhlými) trojúhelníky T, které jsou ohraničeny osami souřadnicovými a tečnou oblouku hyperboly $y = 2/x - 1$, $1 \le x \le 2$, najděte trojúhelníky s extrémními obsahy a příslušné obsahy vypočtěte.

8.10. Mezi obdélníky, jejichž dva vrcholy leží na ose x a další dva na parabole $y = 8 - 2x^2$, najděte obdélník s maximálním obsahem. Určete tento obsah.

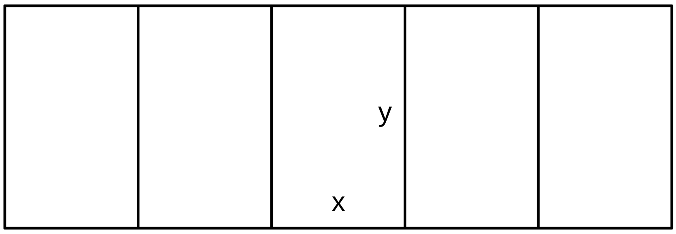




Obrázky ke cvičením 8.10 a 8.11

8.11. Najděte kladná čísla a, b tak, aby body $A := (a, 0)$, $B := (0, b)$, $C := (2, 4)$ ležely na jedné přímce a aby vzdálenost bodů A a B byla minimální. Vypočtěte tuto vzdálenost.

8.12. Obdélníková parcela o rozměrech $5a \times b$ se má oplotit a pak ještě ploty kolmými na první stranu rozdělit na 5 (shodných) parcel o rozměrech $a \times b$. Dokažte, že při dané celkové délce c plotů lze a a b zvolit tak, že rozloha $P = 5ab$ parcely



Obrázek ke cvičení 8.12

je maximální. Čísla a, b a příslušné P najděte nejdříve pro obecné $c \in \mathbb{R}_+$, pak pro $c = 600\,\mathrm{m}$.

8.13. Drát délky D se rozdělí na dvě části o délkách D_1, D_2; první část se ohne tak, aby vytvořila kružnici, druhá tak, aby vytvořila obvod čtverce. Lze to provést tak, aby součet S obsahů vzniklého kruhu a čtverce byl minimální (maximální)? Pokud ano, jakému poměru $D_1 : D_2$ to bude odpovídat obecně a čemu se budou čísla D_1, D_2, S rovnat pro $D = 2\,\mathrm{m}$?

8.14. Je některý bod paraboly, která leží v souřadnicové rovině xy trojrozměrného prostoru $\mathbb{R}^3$ a je popsána rovnicemi $y = x^2$, $z = 0$, nejblíže bodu $A = (1, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$? Pokud ano, jak velká je příslušná vzdálenost?

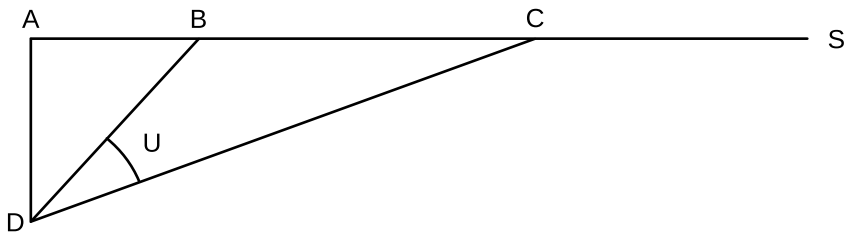
8.15. Body A, B se pohybují v rovině $\mathbb{R}^2$ tak, že v čase $t \in \mathbb{R}$ mají polohy $a + tu$, $b + tv$, kde $a = (6, 4)$, $u = (2, 4)$, $b = (5, 2)$, $v = (-2, 1)$. Dokažte, že existuje právě jedno $t \in \mathbb{R}$, pro něž je vzdálenost bodů A, B minimální; najděte je a vypočtěte příslušnou vzdálenost.

8.16. Vyřešte obdobný problém v prostoru $\mathbb{R}^3$ za předpokladu, že

$$a = (1, -1, -3)\,,\; u = (-1, 1, 2)\,,\; b = (-2, 3, 2)\,,\; v = (2, -2, -1)\,.$$

8.17. Dokažte, že pro každý bod (a, b), kde $a^2 > b$, existují právě dvě tečny paraboly $y = x^2$, od nichž má tento bod minimální vzdálenost; najděte jejich rovnice a příslušnou vzdálenost, a to nejdříve obecně, pak pro $(a, b) = (2, 3)$.

8.18. Existují na parabole $y = x^2 - 6x + 5$ body s minimální vzdáleností od bodu $B = (3, 4)$? Pokud ano, které to jsou a v jaké vzdálenosti leží?



Obrázek ke cvičení 8.20

8.19. Body A, B se pohybují po elipsách tak, že jejich poloha v čase $t \in \mathbb{R}$ je $(2 + 2\cos 8t, \sin 8t)$ resp. $(4\cos 2t, 2\sin 2t)$. Najděte všechna čísla $t \in \mathbb{R}$, pro něž je vzdálenost bodů A, B minimální resp. maximální.

8.20. Na přímé silnici S odstartuje v čase $t = 0$ z místa A chodec B a cyklista C; oba se budou pohybovat od bodu A týmž směrem, a to rychlostmi 5 km a 15 km za hodinu. Na kolmici k přímce S vedené bodem A stojí ve vzdálenosti 300 m od bodu A pozorovatel D a měří zorný úhel U úsečky BC. Dokažte, že v jistém (jednoznačně určeném) okamžiku $t_0 > 0$ bude úhel U maximální, a popište vlastnosti trojúhelníka BCD v tomto okamžiku.

Řešení

8.01. 10 cm.

8.02. $h : r = 2$; při $V = 1000\,\text{cm}^3$ je $r = 5\sqrt[3]{4/\pi} \doteq 5.42\,\text{cm}$, $h = 20/\sqrt[3]{2\pi} \doteq 10.84\,\text{cm}$.

8.03. $h : r = 4$; materiál na celou nádobu bude stát 185 Kč.

8.04. Vzdálenost AD: $(1000 - 50\sqrt{3})\,\text{m} \doteq 913.4\,\text{m}$; délka celého potrubí: $1000 + 50\sqrt{3}\,\text{m} \doteq 1086.6\,\text{m}$; výlohy: 1 007 846 Kč; úhel: 60 stupňů.

8.05. [6]) 20 m strana přiléhající ke zdi, 10 m strana k ní kolmá.

8.06. [6]) Obsah obdélníka je roven polovině obsahu trojúhelníka.

8.07. V obou případech je řešením rovnoramenný trojúhelník; má obsah r^2, obvod $2(\sqrt{2} + 1)r$.

8.08. Jsou to tečny v bodech 1 a $a := \frac{1}{3}(4 - \sqrt{7}) \doteq 0.45142$; příslušné obsahy jsou 1 a $\frac{4}{27}(7\sqrt{7} - 10) \doteq 1.26226$.

8.09. Obsah je klesající funkcí proměnné $x \in \langle 1, 2\rangle$, takže řešením jsou tečny v bodech 2 (minimum rovné 1) a 1 (maximum rovné $\frac{9}{4}$).

8.10. Základna délky $4/\sqrt{3} \doteq 2.3094$, výška $\frac{16}{3}$, obsah $64/(3\sqrt{3}) \doteq 12.3168$.

8.11. $a = 2(1 + \sqrt[3]{4}) \doteq 5.174802$, $b = 2(2 + \sqrt[3]{2}) \doteq 6.519842$, vzdálenost

$$2\sqrt{5 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}} \doteq 8.323876.$$

8.12. [6]) V obecném případě je řešením dvojice čísel $a = c/20$, $b = c/12$, takže $P = c^2/48$. Hodnotě $c = 600\,\text{m}$ odpovídá $a = 30\,\text{m}$, $b = 50\,\text{m}$, $P = 7500\,\text{m}^2$.

8.13. Minimum existuje a odpovídá poměru $D_1/D_2 = \pi/4$; při $D = 2\,\text{m}$ bude proto $D_1 = 2\pi/(4 + \pi)\,\text{m} \doteq 87.98\,\text{cm}$, $D_2 = 8/(4 + \pi)\,\text{m} \doteq 112.02\,\text{cm}$ a $S = 1/(4 + \pi)\,\text{m}^2 \doteq 1400.25\,\text{cm}^2$.

Maximum neexistuje, musí-li se drát skutečně rozstřihnout; kdyby bylo dovoleno udělat z celého drátu buď kružnici, nebo čtverec (což by odpovídalo volbě $D_2 = 0$ resp. $D_1 = 0$ a o poměru bychom nemluvili), bylo by S maximální při $D_2 = 0$.

[6]) Problém lze řešit elementárně, bez užití diferenciálního počtu.

Příslušný kruh by pak měl obsah $D^2/4\pi$ obecně, tedy $1/\pi\,\mathrm{m}^2 \doteq 3183\,\mathrm{cm}^2$ při $D = 2$. Při $D_1 = 0$ by bylo $S = D^2/16$, tedy $S = 2500\,\mathrm{cm}^2$ pro $D = 2\,\mathrm{m}$, což v žádném případě není extrémní hodnota.

8.14. Nejbližší bod je $\bigl(x_0, x_0^2, 0\bigr)$, kde $x_0 := \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \doteq 1.366025$ (takže $x_0^2 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} \doteq 1.866025$)); příslušná vzdálenost je rovna $(f(x_0))^{1/2}$, kde

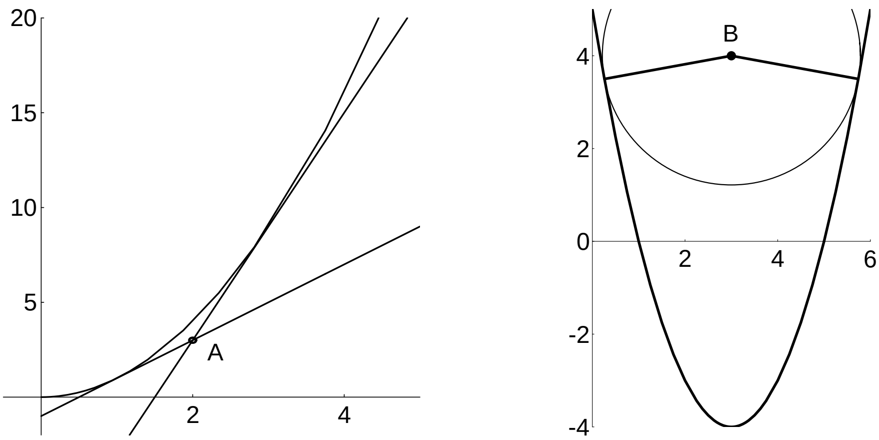
$$f(x) := (x-1)^2 + (x^2-2)^2 + 4 = x^4 - 3x^2 - 2x + 9\,,$$

takže $(f(x_0))^{1/2} = \frac{1}{2}\bigl(3(9-2\sqrt{3})\bigr)^{1/2} \doteq 2.037627$.

8.15. [6]) $t = -\frac{2}{5}$, minimální vzdálenost je 1.

8.16. [6]) $t = \frac{4}{3}$, minimální vzdálenost je $\sqrt{2}$.

8.17. Přímky o rovnicích $y = (a+c)(2x-a-c)$ a $y = (a-c)(2x-a+c)$, kde $c := (a^2-b)^{1/2}$, jsou jediné dvě tečny, které *procházejí* bodem (a,b), a mají tedy od něj vzdálenost 0. Při $(a,b) = (2,3)$ jsou to přímky $y = 6x-9$ a $y = 2x-1$.



Obrázky k řešením cvičení 8.17 a 8.18

8.18. Na parabole leží právě dva body, které mají minimální vzdálenost od bodu $B = (3,4)$. Jejich první souřadnice jsou $\frac{1}{2}(6-\sqrt{30}) \doteq 0.261387$ a $\frac{1}{2}(6+\sqrt{30}) \doteq 5.738613$, jejich druhé souřadnice se rovnají $\frac{7}{2}$. Hledaná vzdálenost je $d := \frac{1}{2}\sqrt{31} \doteq 2.783882$. [7])

8.19. [6]) *Při řešení tohoto příkladu není vhodné hledat stacionární body vzdálenosti $d(t)$ bodů A, B, protože je jich i v intervalu $\langle 0,\pi)$ značné množství* (10) *a až na dva nemají s extrémy funkce $d(t)$ nic společného.*

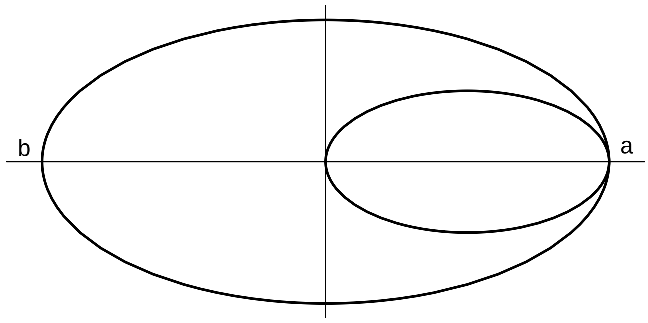
Trajektorie bodů A, B jsou elipsy mající jediný společný bod $a := (4,0)$; mezi všemi body druhé elipsy má zřejmě největší vzdálenost od bodu a bod $b := (-4,0)$.

[7]) Kružnice o středu $(3,4)$ a poloměru d je do paraboly vepsána; její střed je průsečíkem normál paraboly v uvedených bodech.

Stačí tedy rozřešit rovnice

$$(\cos 8t = 1) \wedge (\cos 2t = 1) \quad \text{resp.} \quad (\cos 8t = 1) \wedge (\cos 2t = -1)\,.$$

Řešení: Vzdálenost je minimální, rovná 0, právě když $t \equiv 0 \mod \pi$, a maximální, rovná 8, právě když $t \equiv \frac{1}{2}\pi \mod \pi$.



Obrázek k řešení cvičení 8.19

8.20. $t_0 = \sqrt{3}/50 \doteq 0.034641$ hodiny, tj. cca 2 minuty a 4.7 sekundy. BCD je rovnoramenný trojúhelník o základně CD délky 600 m a ramenech BC a BD délky $200\sqrt{3}$ m; úhly u vrcholů B, C, D jsou po řadě rovny $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, takže $U = \frac{1}{6}\pi$.