4. Limity funkcí – 1. část

Je-li $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a je-li $a \in \mathbb{R}^*$, píšeme

(1) $$a \neq a_n \to a \ \text{ resp. } \ a < a_n \to a \ \text{ resp. } \ a > a_n \to a\,,$$

je-li $a_n \to a$ a zároveň $a_n \neq a$ resp. $a_n > a$ resp. $a_n < a$ pro s.v. n.

Reálnou funkcí reálné proměnné rozumíme každé zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Je-li f taková funkce, je-li $a \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in (-\infty, +\infty\rangle$ resp. $a \in \langle -\infty, +\infty)$), je-li $A \in \mathbb{R}^*$ a platí-li implikace

(2) $$a \neq a_n \to a \ \ (\text{resp. } a < a_n \to a \ \text{ resp. } a > a_n \to a) \ \Rightarrow \ f(a_n) \to A\,,$$

říkáme, že A je (**oboustranná**) **limita** (resp. **limita zprava** resp. **limita zleva**) **funkce** f **v bodě** a; tuto limitu pak značíme

(3) $$\lim_{x \to a} f(x) \ \ (\text{resp. } \lim_{x \to a+} f(x) \ \text{ resp. } \lim_{x \to a-} f(x))$$

nebo krátce

(3*) $$f(a\pm) \ \ (\text{resp. } f(a+) \ \text{ resp. } f(a-))\,.$$

Místo $\lim_{x \to +\infty-} f(x)$ resp. $\lim_{x \to -\infty+} f(x)$ se zpravidla píše jen $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ resp. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Limity zprava a zleva se nazývají **jednostranné**.

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, říkáme též, že $f(x)$ pro $x \to a$ **konverguje** k A; je-li $A = \pm\infty$, říkáme, že $f(x)$ k A **diverguje**. Podobné slovní vazby se užívají i v případě jednostranných limit. Často je výhodný i zápis

(4) $$f(x) \to A \ \text{ pro } \ x \to a \ \ (\text{resp. } x \to a+ \ \text{ resp. } x \to a-)\,.$$

Čtenáři je jistě známo, že *limita $f(a\pm)$ existuje, právě když je $f(a+) = f(a-)$, načež $f(a\pm) = f(a+) = f(a-)$.* $\square$

V oddílu „Označení, operace, zkratky" najde čtenář definice okolí

(5) $$U(a, \delta), \ \ U^+(a, \delta), \ \ U^-(a, \delta)\,,$$

která se stručněji značí $U(a)$, $U^+(a)$, $U^-(a)$ a nazývají **oboustranná**, **pravá** a **levá okolí bodu** a. Množiny, které z nich vzniknou odstraněním bodu a, značíme

(6) $$P(a, \delta), \ \ P^+(a, \delta), \ \ P^-(a, \delta)\,,$$

stručněji $P(a)$, $P^+(a)$, $P^-(a)$; jsou to tzv. **prstencová** neboli **redukovaná okolí bodu** a, a to **oboustranná**, **pravá** a **levá**.

Pro limity funkcí (oboustranné, zprava, zleva) platí analogie vět V. 3.1 – V. 3.4; slova „pro s.v. n" je ovšem třeba nahradit slovy „pro všechna x z jistého (oboustranného, pravého, levého) prstencového okolí bodu a".

Kromě toho platí tato *velmi důležitá a často užívaná věta*:

Věta 4.1 (o limitě superpozice). *Nechť existují limity $b := f(a\pm)$ a $c := g(b\pm)$; nechť dále existuje okolí $P(a)$ tak, že pro každé $x \in P(a)$ platí nerovnost $f(x) \neq b$. Pak existuje i limita $(g \circ f)(a\pm)$ a rovná se c.*

Poznámka 4.1. Předpoklad věty 4.1, že existuje $P(a)$ tak, že $b \notin f(P(a))$, je *podstatný* – není-li splněn, *nemusí* rovnost $(g \circ f)(a\pm) = c$ platit.

P ř í k l a d : Je-li $f(x) := 1 - |\operatorname{sgn} x|$, $g(y) := |\operatorname{sgn} y|$, je $f(x) = 0$ pro všechna $x \neq 0$, $g(y) = 1$ pro všechna $y \neq 0$, $g(f(x)) = 0$ pro všechna $x \neq 0$. Je-li tedy $a = 0$, je $b := f(0\pm) = 0$, $c := g(0\pm) = 1$, $(g \circ f)(0\pm) = 0$; tvrzení věty 4.1 tedy *neplatí*.

Je to proto, že *limita $g(b\pm)$ obecně nijak nesouvisí s hodnotou funkce g v bodě b*; *při tvorbě superpozice*, tedy při dosazování $y = f(x)$ do $g(y)$, *se proto $f(x)$ nesmí rovnat b* – stačí v jistém $P(a)$, protože existence ani hodnota limity $f(a\pm)$ nezávisí na tom, jak se funkce f chová „daleko od bodu a".

Plné pochopení toho, co jsme právě řekli, je nejen nutným předpokladem pro spolehlivou aplikaci V. 4.1 , ale také východiskem pro samostatnou tvorbu modifikací této věty. Protože každou z oboustranných limit lze v této větě buď ponechat, nebo nahradit jednostrannou limitou, existuje ještě dalších osm tvrzení podobných V. 4.1 a v početní praxi se setkáváme se všemi devíti situacemi. Máme dvě možnosti:

1) *Nerozumět* a buď si pamatovat všech devět tvrzení, nebo (v souladu s praxí bezduchého kalkulu) předpoklady ignorovat a spoléhat, že to přesto „všechno dobře dopadne".

2) *Rozumět* a nezatěžovat si paměť tvrzeními, která v případě potřeby a podle dané situace umíme sami spolehlivě vytvořit.

V případě, že se splní autorovo přání a čtenář se rozhodne postupovat podle bodu 2), zbývá jen uvědomit si, že *limita zprava (zleva) závisí jen na hodnotách, kterých příslušná funkce nabývá v jistém pravém (levém) prstencovém okolí příslušného bodu.* Pak budou jistě zřejmé tyto dvě zásady modifikace věty 4.1:

Nahradíme-li předpoklad existence limity $f(a\pm)$ předpokladem, že existuje limita $f(a+)$ resp. $f(a-)$, dostaneme tvrzení o limitě $(g\circ f)(a+)$ resp. o limitě $(g\circ f)(a-)$. Nahradíme-li předpoklad existence limity $g(b\pm)$ předpokladem, že existuje limita $g(b+)$ $(g(b-))$, budeme předpokládat, že všude v jistém $P(a+)$ resp. $P(a-)$ platí nerovnost $f(x) > b$ $(f(x) < b)$. [1])

Platí tedy např. tato tvrzení:

A. *Nechť existují limity $b := f(a-)$ a $c := g(b+)$; nechť dále existuje okolí $P^-(a)$ tak, že pro každé $x \in P^-(a)$ platí nerovnost $f(x) > b$. Pak existuje i limita $(g \circ f)(a-)$ a rovná se c.*

---

[1]) Tento předpoklad není ovšem nutné *explicite* uvádět, je-li $b = -\infty$ $(b = +\infty)$; je zajímavé, že s nekonečnými limitami se v tomto případě pracuje o něco jednodušeji než s limitami konečnými.

B. *Nechť existují limity* $b := f(a\pm)$ *a* $c := g(b-)$; *nechť dále existuje okolí* $P(a)$ *tak, že pro každé* $x \in P(a)$ *platí nerovnost* $f(x) < b$. *Pak existuje i limita* $(g \circ f)(a\pm)$ *a rovná se* c.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g(1/x)$ (*resp.* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to 0-} g(1/x)$), *má-li jedna strana rovnosti smysl.*

K velmi důležitým existenčním větám patří toto tvrzení:

Věta 4.2 (o existenci jednostranných limit monotónní funkce). *Je-li funkce* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *monotónní* (*v* (a, b)), *existují obě jednostranné limity* $f(a+)$, $f(b-)$.

P o d r o b n ě j i : *Je-li funkce* f *v* (a, b) *neklesající* (*resp. nerostoucí*), *je* $f(a+) = \inf f((a, b))$, $f(b-) = \sup f((a, b))$ (*resp.* $f(a+) = \sup f((a, b))$, $f(b-) = \inf f((a, b))$).

D ů s l e d e k : *Je-li funkce* f *monotónní v intervalu* (a, b), *existují pro každé* $c \in (a, b)$ *konečné limity* $f(c-)$, $f(c+)$. *Pro neklesající* (*resp. nerostoucí*) *funkci* f *je přitom* $f(c-) \le f(c) \le f(c+)$ (*resp.* $f(c-) \ge f(c) \ge f(c+)$).

* * *

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to a} = f(a)$, říkáme, že f je **spojitá v bodě** a; **spojitost zprava** resp. **zleva** se definuje platností rovnosti $\lim_{x\to a+} = f(a)$ resp. $\lim_{x\to a-} = f(a)$. Spojitosti se někdy podrobněji říká **oboustranná spojitost**, zatímco spojitost zprava resp. zleva je spojitost **jednostranná**.

Je zřejmé, že f *je spojitá v bodě* a, *právě když je v bodě* a *spojitá zprava i zleva.* Kromě toho platí: f *je spojitá v bodě* a, *právě když*

$$a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a); \tag{7}$$

analogicky: f *je spojitá v bodě* a *zprava* (*zleva*), *právě když*

$$a \le a_n \to a \ \ (a \ge a_n \to a) \Rightarrow f(a_n) \to f(a). \tag{7$\pm$}$$

Důležité upozornění. Bohužel se často stává, že začátečník – mnohdy ovlivněný falešným výkladem pojmů limity a spojitosti ve škole – dostatečně nerozlišuje limitu od hodnoty. Je proto vhodné pamatovat si jednoduchý protipříklad a zároveň vědět, kdy je limitu *opravdu* možné nahradit hodnotou:

P ř í k l a d : Je-li $f(x) := |\operatorname{sgn} x|$, je $f(0) = 0$. Protože však je $f(x) = 1$ pro všechna $x \neq 0$, je i $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq f(0)$.

T v r z e n í : *Výpočet* $\lim_{x\to a} f(x)$ *lze nahradit dosazením* $x = a$ *do* $f(x)$, *právě když je* f *spojitá v bodě* a.

Přímo z definice spojitosti vyplývá, že *v žádném jiném případě nelze limitní přechod nahradit dosazením!* [2]) $\square$

---

[2]) Protože spojitost je definována jen v bodech $a \in \mathbb{R}$, je zřejmé, že *dosazovat nelze v případě, že* $a = \pm\infty$. Říkat například, že „exponenciála je v $-\infty$ rovna 0“, je *nesprávné*, protože symbol $\exp(-\infty)$ nemá smysl. Je ovšem $\exp(-\infty+) = 0$ a „*limita* $\exp x$ *pro* $x \to -\infty$ *je rovna* 0“ resp. „$\exp x$ *konverguje k* 0 *pro* $x \to -\infty$“ jsou správné výroky.

Vzhledem k okolnostem uvedeným v Po. 4.1 jistě uvítáme platnost této jednoduché *modifikace věty o limitě superpozice*:

Věta 4.1*. *Je-li $f(a\pm) = b$ (resp. $f(a+) = b$ resp. $f(a-) = b$) a je-li funkce g spojitá v bodě b, je $(g \circ f)(a\pm) = g(b)$ (resp. $(g \circ f)(a+) = g(b)$ resp. $(g \circ f)(a-) = g(b)$).*

Poznámka 4.1*. Podobně jako tomu bylo u V. 4.1, lze i V. 4.1* modifikovat tím, že předpoklad oboustranné spojitosti funkce g v bodě b nahradíme předpokladem spojitosti jednostranné. Pak je ovšem třeba přidat předpoklad, že všechny hodnoty, kterých funkce f nabývá v jistém $P(a)$ (resp. $P^+(a)$ resp. $P^-(a)$), jsou $\geq b$, je-li g spojitá v bodě b zprava, resp. $\leq b$, je-li g spojitá v bodě b zleva. Čtenář, který myšlenkově plně zvládl obsah Po. 4.1, nebude mít jistě potíže s vytvořením platných vět analogických větě 4.1*, tedy ani např. s touto její modifikací:

D. *Je-li $f(a\pm) = b$, existuje-li $P(a)$ tak, že pro každé $x \in P(a)$ je $f(x) \leq b$, a je-li funkce g spojitá v bodě b zleva, je $(g \circ f)(a\pm) = g(b)$.*

* * *

Říkáme, že funkce f je **spojitá v intervalu** $I \subset \mathbb{R}$, jestliže

$$a_n \in I\,, a_n \to a \in I \;\Rightarrow\; f(a_n) \to f(a)\,. \tag{8}$$

Spojitost funkce f v intervalu I lze (ekvivalentně) popsat i takto:

Funkce f je spojitá v intervalu I s krajními body $a < b$, právě když platí tyto dvě podmínky:

1) *f je spojitá zprava v každém bodě $x \in I$ různém od b,*

2) *f je spojitá zleva v každém bodě $x \in I$ různém od a.* □

Je-li $a \in \mathbb{R}$, je (**oboustranná**) **derivace funkce f v bodě** a definována rovností

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,, \tag{9}$$

existuje-li (konečná nebo nekonečná) limita vpravo; rovnosti

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,,\quad f'_-(a) := \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{9$\pm$}$$

definují – za předpokladu, že příslušná limita existuje – **derivace jednostranné**, konkrétněji **derivaci zprava** a **derivaci zleva**.

Platí tato základní tvrzení:

$f'(x)$ existuje, právě když je $f'_+(x) = f'_-(x)$, načež se $f'(x)$ rovná společné hodnotě $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$.

Z existence konečné derivace $f'(a)$ (resp. $f'_+(a)$ resp. $f'_-(a)$) plyne spojitost funkce f v bodě a (resp. zprava resp. zleva v bodě a).

Poznámka 4.2. *Z existence nekonečné derivace spojitost neplyne*, jak ukazuje příklad funkce sgn, která má v bodě 0 derivaci $+\infty$, ale není v tomto bodě spojitá, a to ani zprava, ani zleva.

Za druhé: *Ze spojitosti neplyne existence derivace* (ani konečné, ani nekonečné), jak ukazují tyto dva další příklady:

Funkce $f(x) := |x|$ má pro všechna $x \neq 0$ derivaci $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$; protože $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, $f'(0)$ neexistuje, přestože f je v bodě 0 spojitá.

Poněkud složitější příklad funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definované podmínkami

$$g(x) := x \sin \frac{1}{x} \ \text{ pro } \ x \neq 0\,, \quad g(0) := 0\,, \tag{10}$$

ukazuje, že *ze spojitosti funkce* (v našem případě v bodě 0) *neplyne ani existence kterékoli z jednostranných derivací.* $\square$

Příklad 4.1. Čtenáři je jistě známo, že

$$(\mathrm{Id}^n)' = n\,\mathrm{Id}^{n-1} \ \ \textit{všude v} \ \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}, & \textit{je-li} \ \ n \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+, & \textit{je-li} \ \ n \in \mathbb{Z}, \ n < 0 \end{array} \right\}. \tag{11}$$

Každý *polynom*, tj. každá funkce tvaru $\sum_{k=0}^{n} a_k \,\mathrm{Id}^k$, kde $n \geq 0$ a kde $a_0, \ldots, a_n$ jsou (konečná) reálná čísla, je spojitý v celém $\mathbb{R}$. *Racionální funkce* f je spojitá v každém intervalu obsaženém v jejím definičním oboru, tedy – píšeme-li $f = g/h$, kde g a $h \not\equiv 0$ jsou polynomy – v každém intervalu, který neobsahuje žádný kořen polynomu h. (Seřadíme-li všechny reálné kořeny tohoto polynomu do posloupnosti $x_1 < \ldots < x_n$, kde $n \geq 0$ [3]), a označíme-li ještě $x_0 := -\infty$, $x_{n+1} := +\infty$, jsou (x_k, x_{k+1}), $0 \leq k \leq n$, *maximální* intervaly, v nichž je racionální funkce f spojitá.)

Liché odmocniny jsou spojité v celém $\mathbb{R}$, v bodě 0 mají derivaci rovnou $+\infty$. *Sudé odmocniny* jsou spojité jen v intervalu $\langle 0, +\infty)$ (který je jejich definičním oborem) a v bodě 0 zprava mají derivaci rovnou $+\infty$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ má n-tá odmocnina derivaci

$$\left(\sqrt[n]{x}\,\right)' = \left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n}\, x^{1/n-1} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \tag{12}$$

v každém bodě $x \neq 0$ svého definičního oboru. $\square$

Pro pohodlí čtenářů nyní zopakujeme některé základní vlastnosti funkcí, s nimiž se v elementární analýze nejčastěji setkáváme:

Funkce

$$\sin,\ \cos,\ \mathrm{tg},\ \mathrm{cotg},\ \exp,\ \lg\,,\ \exp_a := \exp \circ (a \lg),\ \lg_a := (\exp_a)_{-1}, \tag{13}$$

kde $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, stejně jako funkce

$$\sinh x := \tfrac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),\ \cosh x := \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{14}$$

[3]) Je-li $n = 0$, jde o „prázdnou posloupnost“, což odpovídá situaci, že $h \neq 0$ všude v $\mathbb{R}$.

tedy **hyperbolický sinus** a **kosinus**, mají v každém bodě x svého definičního oboru (konečnou) derivaci, přičemž

$$\sin' x = \cos x\,,\ \ \cos' x = -\sin x\,,\ \ \mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,\ \ \mathrm{cotg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}\,, \tag{15}$$

$$\exp' x = \exp x\,,\ \ \lg x = \frac{1}{x}\,,\ \ \exp'_a x = \lg a \cdot \exp_a x\,,\ \ \lg'_a x = \frac{1}{x\cdot \lg a}\,, \tag{16}$$

$$\sinh' x = \cosh x\,,\ \ \cosh' x = \sinh x\,. \tag{17}$$

Cyklometrické a **hyperbolometrické funkce** jsou definovány rovnostmi

$$\arcsin := \big(\sin|\langle -\tfrac12\pi, \tfrac12\pi\rangle\big)_{-1}, \qquad \arccos := \big(\cos|\langle 0,\pi\rangle\big)_{-1}, \tag{18}$$

$$\mathrm{arctg} := \big(\mathrm{tg}|(-\tfrac12\pi, \tfrac12\pi)\big)_{-1}, \qquad \mathrm{arccotg} := \big(\mathrm{cotg}|(0,\pi)\big)_{-1}, \tag{19}$$

$$\mathrm{argsinh} := \sinh_{-1}, \qquad \mathrm{argcosh} := \big(\cosh|\langle 0,+\infty)\big)_{-1}, \tag{20}$$

a každá z nich je spojitá ve svém definičním oboru; přitom

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{v}\ \ (-1,1)\,, \tag{21}$$

$$\mathrm{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad \mathrm{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{v}\ \ \mathbb{R}\,, \tag{22}$$

$$\mathrm{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{v}\ \ \mathbb{R}, \qquad \mathrm{argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \text{v}\ \ (1,+\infty)\,. \tag{23}$$

Podobně jako je tomu u posloupností, lze limity funkcí často počítat vhodnou úpravou příslušného „výrazu“; podstatnou úlohu při tom ovšem hrají „základní limity“, jako např.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\, x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x} = \\ \lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\, x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{argsinh}\, x}{x} = 1.\end{aligned} \tag{24}$$

Všechny tyto limity jsou zároveň derivacemi příslušných funkcí v bodě 0. Často jsou potřebné i limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\,. \tag{25}$$

V následujících čtyřech limitách se porovnávají „rychlosti růstu“ mocnin a logaritmických resp. exponenciálních funkcí:

$$\alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}_+ \ \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{\lg^\alpha x}{x^\beta} &= \lim_{x\to 0+} x^\beta\,|\lg x|^\alpha = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} &= \lim_{x\to-\infty}|x|^\alpha\, e^{\beta x} = 0 \end{aligned}\right\}. \quad \square \tag{26}$$

Ukažme nyní na několika příkladech, jak lze některé limity počítat *úpravou* příslušného výrazu:

Příklad 4.2. Je-li $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$, $\beta_1 < \cdots < \beta_q$, $a_1 \neq 0 \neq b_1$, lze limitu

$$A := \lim_{x \to 0+} \frac{a_1 x^{\alpha_1} + \cdots + a_p x^{\alpha_p}}{b_1 x^{\beta_1} + \cdots + b_q x^{\beta_q}} \tag{27}$$

vypočítat tím, že vytkneme *nejnižší* mocniny x v čitateli a ve jmenovateli. Dostaneme

$$\lim_{x \to 0+} x^{\alpha_1 - \beta_1} \, \frac{a_1 + \cdots}{b_1 + \cdots}\,, \tag{28}$$

kde tři tečky znamenají výrazy konvergující k 0. Zlomek má tedy limitu a_1/b_1 a podle věty o limitě součinu je

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} a_1/b_1 & \text{při } \ \alpha_1 = \beta_1 \\ 0 & \text{při } \ \alpha_1 > \beta_1 \\ \operatorname{sgn}(a_1/b_1) \cdot (+\infty) & \text{při } \ \alpha_1 < \beta_1 \end{array} \right\}. \tag{29}$$

Postupovali jsme zřejmě podobně jako v případě posloupnosti (sr. s Př. 3.1), kde jsme však vytkli *nejvyšší* mocniny n, protože šlo o limitu pro $n \to \infty$. Zcela analogicky jako u posloupností bychom postupovali, kdyby (27) byla limitou pro $x \to +\infty$ a kdyby bylo $a_p \neq 0 \neq b_q$. Jak je patrné, čitatel i jmenovatel se vždy snažíme upravit tak, aby daný zlomek nabyl tvaru $x^\gamma (c + \dots)$, kde $c \neq 0$ a kde tři tečky představují funkci konvergující k 0.

Příklad 4.3. Užitím identity $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ vypočteme (podobně jako kdyby šlo o posloupnost) limitu

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^4} \left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-1} \right) \tag{30}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+x+1)(x^2+x-1)} + \sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}}\,.$$

Po této úpravě, kterou jsme odstranili nepřehledný rozdíl odmocnin, z nichž každá má limitu $+\infty$, vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem $x^{4/3}$, využijeme spojitosti v bodě 1 každé z výsledných třetích odmocnin ve jmenovateli a ihned vidíme, že hledaná limita je rovna $\frac{2}{3}$. $\square$

V dalších dvou příkladech budeme potřebovat některé z rovností (24) – (26) spolu s větou 4.3 o limitě superpozice; podstatnou roli bude hrát i spojitost.

Příklad 4.4. Abychom mohli při výpočtu limity

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x \cdot \sin 3x)} \tag{31}$$

užít (25), přepíšeme čitatel na tvar

$$1-\cos x+\cos x\,(1-\sqrt{\cos 2x}\,)=(1-\cos x)+\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\,(1-\cos 2x)$$

a po vydělení výrazem x^2 dostaneme identitu

$$\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\cos x}{1+\sqrt{\cos 2x}}\cdot\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot 4\,,$$

jejíž pravá strana má pro $x\to 0$ limitu $\frac12+\frac12\cdot\frac12\cdot 4=\frac32$. Protože identita

$$\frac{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x\cdot\sin 3x)}{x^2}=\frac{\operatorname{arctg}(\arcsin 2x\cdot\sin 3x)}{\arcsin 2x\cdot\sin 3x}\cdot\frac{\arcsin 2x}{2x}\cdot 2\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3$$

platí např. v $P(0,\frac12)$ a protože její pravá strana má limitu $1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 3=6$, je zřejmé, že limita (31) je rovna $\frac32\cdot\frac16=\frac14$.

Příklad 4.5. Někdy lze limitu vypočítat vhodnou substitucí a aplikací V. 4. 1 resp. V. 4. 1*. Při hledání limity

$$A:=\lim_{x\to+\infty} x\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \tag{32}$$

můžeme uvažovat např. takto: Je-li $t\in(0,\frac12\pi)$, plyne z rovnosti $x=\operatorname{cotg} t$ rovnost $x^2+1=\operatorname{cotg}^2 t+1=1/\sin^2 t$, takže

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\operatorname{cotg} t\cdot\sin t=\cos t\,; \tag{33}$$

kromě toho $t\to 0+\ \Rightarrow\ x=\operatorname{cotg} t\to+\infty$. Podle V. 4. 1 a Po. 4. 1 je tedy

$$A=\lim_{t\to 0+}\operatorname{cotg} t\cdot\arccos(\cos t)=\lim_{t\to 0+}\cos t\cdot\frac{t}{\sin t}=1\,.\quad\square \tag{34}$$

Připomeňme, že výraz

$$f(x)^{g(x)}:=\exp\big(g(x)\lg f(x)\big) \tag{35}$$

je definován v těch intervalech obsažených v průniku definičních oborů funkcí f, g, v nichž je $f(x)>0$. Při výpočtu limit funkcí tvaru (35) najdeme zpravidla nejdříve limitu exponentu $h(x):=g(x)\lg f(x)$ a pak aplikujeme V. 4. 1 s tím, že

$$h(x)\to\left\{\begin{matrix}-\infty\\ A\in\mathbb{R}\\ +\infty\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ \exp(h(x))\to\left\{\begin{matrix}0\\ \exp A\\ +\infty\end{matrix}\right\}. \tag{36}$$

Příklad 4.6. Máme vypočítat limitu

$$A := \lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{1/x}, \tag{37}$$

pokud existuje. Je-li $x \in (-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, je $\sin x + \cos x > 0$ a

$$\frac{1}{x} \lg(\sin x + \cos x) = \frac{\lg(1 + (\sin x + \cos x - 1))}{\sin x + \cos x - 1} \Big(\frac{\sin x}{x} - \frac{1 - \cos x}{x} \Big). \tag{38}$$

První zlomek vpravo přitom konverguje k 1 podle V.4.1, protože $\lg(1+y)/y \to 1$ pro $y \to 0$ a protože funkce $\sin x + \cos x - 1$ má limitu 0 a neanuluje se nikde v $P(0, \frac{1}{4}\pi)$; první zlomek ve velkých závorkách vpravo konverguje k 1, druhý k 0. Z toho plyne, že se limita funkce (38) rovná 1, takže $A = e$.

Poznámka 4.3. Autor by čtenáře rád upozornil na *nebezpečný souběh okolností, který je častým zdrojem hrubých chyb*: Podle definice je sice $0^0 = 1$, ale

$$\textit{z podmínek } \lim f(x) = \lim g(x) = 0 \ \underline{\textit{neplyne}}\textit{, že } \lim f(x)^{g(x)} = 1, \tag{39}$$

a to zejména proto, že

$$\lim f(x)^{g(x)} \ \underline{\textit{není obecně totéž co}} \ (\lim f(x))^{\lim g(x)}. \tag{40}$$

Příklad 4.7. Triviálním příkladem ilustrujícím (39) je konstantní funkce

$$x^{1/\lg x} = \exp(\lg x/\lg x) \equiv e \ \text{ v } \mathbb{R}_+, \tag{41}$$

která má v bodě 0 zprava limitu e, ačkoli $\lim_{x\to 0+} x = \lim_{x\to 0+} (1/\lg x) = 0$.

Příklad 4.8. Další varovný příklad: Je

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{1}{e^x + x}\Big)^{-1/\lg x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \Big(\frac{1}{e^x + x}\Big)^{1/\lg x} = 0, \tag{42}$$

i když

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lg x} = 0. \tag{43}$$

První z rovností (42) dokážeme takto: Pro všechna $x > 1$ je

$$-\frac{1}{\lg x} \lg\Big(\frac{1}{e^x + x}\Big) = \frac{\lg(e^x(1 + xe^{-x}))}{\lg x} = \frac{x}{\lg x} + \frac{\lg(1 + xe^{-x})}{\lg x}. \tag{44}$$

Podle (26) je $xe^{-x} \to 0$ pro $x \to +\infty$, z čehož ihned plyne, že poslední zlomek má limitu 0. Podle (26) je také $\lim_{x\to+\infty}(\lg x)/x = 0$; protože funkce $(\lg x)/x$ je pro všechna $x > 1$ kladná, plyne z toho, že $\lim_{x\to+\infty} x/\lg x = +\infty$. Výraz (44) má tedy pro $x \to +\infty$ limitu $+\infty$ a podle (36) platí první z rovností (42); druhá z těchto rovností plyne ihned z první.

Cvičení

V následujících příkladech předpokládáme, že $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_1 \in \mathbb{N}, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}_+$, $A \in (1, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$. Některou z elementárních metod (tedy *bez užití l'Hospitalova pravidla a Taylorových polynomů* [4])) vypočtěte tyto limity:

4.01. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

4.02. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$

4.03. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$

4.04. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt[3]{x+2}+x}$

4.05. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

4.06. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$

4.07. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

4.08. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$

4.09. $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

4.10. $\displaystyle\lim_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

4.11. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

4.12. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$

4.13. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

4.14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x^4}}-\sqrt[3]{x^2}\right)$

4.15. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/6} \frac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{2\sin x-1}$

4.16. $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi/2} \frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x+1}$

4.17. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\lg(x+1)-\lg x\right)$

4.18. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(3^{1/x}-2^{1/x}\right)$

4.19. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a}$

4.20. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a}$

4.21. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(e^x+x^3)}{\lg(e^{3x}+x^6)}$

4.22. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(e^x+x^3)}{\lg(e^{3x}+x^6)}$

4.23. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin 2x)-\exp x}{\operatorname{tg} x}$

4.24. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\operatorname{arctg}^2 x)-\exp x}{\sin x}$

4.25. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+xe^x)\sin 2x^3}{\lg(\cos x^2)}$

4.26. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \lg\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

4.27. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+xe^x)}{\lg\left(x+\sqrt{1+x}\right)}$

4.28. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin\gamma x-\cos\gamma x}$

4.29. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{1-\operatorname{cotg}^3 x}{2-\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}^3 x}$

4.30. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \lg(1+A^x)\lg\left(1+\frac{a}{x}\right)$

---

[4]) Příklady na aplikace těchto méně elementárních metod najde čtenář v kapitole 6.

4.31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(2x+\sqrt{1-4x^2})}{\lg(x+\sqrt{1-x^2})}$

4.32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

4.33. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

4.34. $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

4.35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{tg} x^2}$

4.36. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1-\operatorname{cotg} x}$

4.37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\cos ax)}{\lg(\cos bx)}$

4.38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}}{\sin x \arcsin x}$

4.39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

4.40. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{2^x}-2^{x^2}}{2^x-x^2}$

4.41. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\lg(1+\sin^2 x)}{\lg(1+\operatorname{tg}^3 x)}$

4.42. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lg(\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\alpha x))}{\sin \gamma x}$

4.43. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg x-1}{\lg x+1}\right)^{\lg x}$

4.44. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg(\lg x)}{\lg x}\right)^{1/\lg(\lg x)}$

4.45. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(e^{x+1}-e^x\right)^{e^x}$

4.46. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{1}{2}\pi+\operatorname{arctg} x)^{1/x}$

4.47. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$

4.48. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

4.49. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

4.50. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{a^{x^2}+b^{x^2}}\right)^{\alpha/x}$

4.51. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-x^{-a}\right)^{\sqrt{x}}$

4.52. $\lim\limits_{x\to +\pi\pm} \left(\dfrac{x}{\pi}\right)^{1/(\cos x+1)}$

4.53. $\lim\limits_{x\to \pi/2-} (\operatorname{tg} x)^{\sin x-1}$

4.54. $\lim\limits_{x\to 1-} \left(\frac{1}{2}\pi-\arcsin x\right)^{1/\lg(1-x)}$

4.55. $\lim\limits_{x\to 1-} x^{1/\arccos^2 x}$

4.56. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{1/\operatorname{arccotg} x}$

4.57. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{1/(1+\sqrt{x})}$

4.58. $\lim\limits_{x\to 0} \left(5\exp\dfrac{x}{x+2}-4\right)^{x+2/x}$

4.59. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg(x^2+x+1)}{\lg(x^2+x-1)}\right)^x$

4.60. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\lg(x^2+x+1)}{\lg(x^2+x-1)}\right)^{x^2\lg x}$

4.61. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\arccos x}{\operatorname{arctg}(1/x)}\right)^{1/\sin \pi x}$

4.62. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$

4.63. $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{tg} x^a)^{1/\lg x}$

4.64. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1+\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)^{1/(2\sqrt{x})}$

4.65. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{1/\operatorname{arctg}^2 x}$

4.66. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\operatorname{arccotg} x)^{\alpha/\lg x}$

4.67. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx} - n}$

4.68. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cos 2x \cdots \cos nx - 1}{x^2}$

4.69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh x \cosh 2x \cdots \cosh nx - 1}$

4.70. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}\,\big(\sin(\lg(x+1)) - \sin(\lg x)\big)$

4.71. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x + \sqrt{x - \sqrt{x}}}\right)$

4.72. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha\big(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}\,\big)$

4.73. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha\big(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+x-1}\,\big)$

4.74. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha\big(\sqrt[4]{(x+1)^3} - \sqrt[4]{(x-1)^3}\,\big)$

4.75. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\sqrt[n]{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n)} - x\big)$

4.76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\big(\sqrt{x^2+1}+x\big)^n - \big(\sqrt{x^2+1}-x\big)^n\Big)$

4.77. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^n}\Big(\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)^n + \big(x-\sqrt{x^2+1}\big)^n\Big)$

4.78. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(\alpha + kx) - n\sin\alpha\Big)$

4.79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(\alpha + k^2x) - n\cos\alpha\Big)$

4.80. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+\alpha_1 x)^{1/k_1}(1+\alpha_2 x)^{1/k_2}\cdots(1+\alpha_n x)^{1/k_n} - 1}{x}$

Řešení

4.01. $\frac{1}{2}$. **4.02.** $\frac{m}{n}$. **4.03.** $\frac{n}{m}$. **4.04.** $\frac{1}{2}$.

4.05. 1 pro $\alpha = \frac{1}{2}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{1}{2}$; 0 pro $\alpha < \frac{1}{2}$.

4.06. $\frac{2}{3}$ pro $\alpha = \frac{2}{3}$; $+\infty$ pro $\alpha > \frac{2}{3}$; 0 pro $\alpha < \frac{2}{3}$.

4.07. $1/n$. **4.08.** $\frac{1}{2}(m-n)$. **4.09.** $112/27$. **4.10.** $-1/\sqrt{2a}$. **4.11.** $\frac{3}{2}$.

4.12. $+\infty$. **4.13.** $-\frac{1}{2}$. **4.14.** $\frac{1}{3}$. **4.15.** $-\frac{1}{2}$. **4.16.** -3. **4.17.** 1.

4.18. $\lg\frac{3}{2}$. **4.19.** $a^a(\lg a+1)$. **4.20.** $a^a(\lg a-1)$. **4.21.** $\frac{1}{3}$. **4.22.** $\frac{1}{3}$.

4.23. 1. **4.24.** -1. **4.25.** -4. **4.26.** $-\infty$. **4.27.** $\frac{2}{3}$. **4.28.** $1/\gamma$.

4.29. $\frac{3}{4}$. **4.30.** $a\lg A$. **4.31.** 2. **4.32.** $\frac{1}{4}$. **4.33.** 1. **4.34.** $\sqrt{2}$.

4.35. $-\frac{1}{12}$. **4.36.** 1. **4.37.** a^2/b^2. **4.38.** $-\frac{1}{8}$. **4.39.** $\sqrt{2}$. **4.40.** $16\lg 2$.

4.41. $-\infty$. **4.42.** $2\alpha/\gamma$. **4.43.** e^{-2}. **4.44.** e^{-1}. **4.45.** 1.

4.46. 1. **4.47.** $\sqrt[3]{abc}$. **4.48.** $e^{-(a+b)}$. **4.49.** e. **4.50.** $(ab)^{\alpha/2}$.

4.51. e^{-1} pro $a=\frac{1}{2}$; 0 pro $a\in(0,\frac{1}{2})$; 1 pro $a>\frac{1}{2}$.

4.52. $+\infty$ zprava, 0 zleva. **4.53.** 1. **4.54.** $e^{1/2}$. **4.55.** $e^{-1/2}$.

4.56. e^{-1}. **4.57.** 1. **4.58.** e^5. **4.59.** 1. **4.60.** e. **4.61.** 1. **4.62.** $e^{3/2}$.

4.63. e^a. **4.64.** $e^{1/2}$. **4.65.** e. **4.66.** $e^{-\alpha}$. **4.67.** $2/n(n+1)$.

4.68. $-\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$. **4.69.** $12/n(n+1)(2n+1)$. **4.70.** 0. **4.71.** 0.

4.72. 1 pro $\alpha=0$; $+\infty$ pro $\alpha>0$; 0 pro $\alpha<0$.

4.73. $\frac{2}{3}$ pro $\alpha=\frac{4}{3}$; $+\infty$ pro $\alpha>\frac{4}{3}$; 0 pro $\alpha<\frac{4}{3}$.

4.74. $\frac{3}{2}$ pro $\alpha=\frac{1}{4}$; $+\infty$ pro $\alpha>\frac{1}{4}$; 0 pro $\alpha<\frac{1}{4}$.

4.75. $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)/n$. **4.76.** $2n$. **4.77.** 2^n. **4.78.** $\frac{1}{2}n(n+1)\cos\alpha$.

4.79. $-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\sin\alpha$. **4.80.** $\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j/k_j)$.