2. Indukce

Dokázat platnost nekonečné posloupnosti $\{V(n)\}_{n=1}^{\infty}$ výroků $V(n)$ umožňuje tzv. **indukce** (podrobněji: **úplná** nebo **matematická indukce**):

Věta 2.1. *Nechť platí výrok $V(1)$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne z platnosti výroku $V(n)$ platnost výroku $V(n+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 2.1. Věta 2.1, nazývaná též **princip indukce**, je ekvivalentní s tímto tvrzením:

Věta 2.1*. *Nechť platí výrok $V(1)$ a nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne z platnosti výroků $V(1), \ldots, V(n)$ platnost výroku $V(n+1)$.*

Pak výrok $V(n)$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Dále: *V obou vyslovených větách lze množinu $\mathbb{N}$ nahradit množinou tvaru*

$$\mathbb{N}(N) := \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq N\}, \quad \textit{kde} \quad N \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Předpokládáme pak, že 1) platí výrok $V(N)$ a že 2) pro každé celé číslo $n \geq N$ plyne z platnosti výroku $V(n)$ (nebo : z platnosti výroků $V(N), \ldots, V(n)$) platnost výroku $V(n+1)$. Za předpokladů 1) a 2) platí výrok $V(n)$ pro každé celé číslo $n \geq N$.

Příklad 2.1. Dokažme **binomickou větu**: *Pro každá tři čísla $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ platí identita*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}. \tag{2}$$

D ů k a z. Protože rovnost (2) je pro $n = 1$ zřejmá, zbývá dokázat, že když rovnost (2) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, platí analogická rovnost i pro $n+1$. Užijme (2) a přepišme identitu $(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n$ ve tvaru

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}\, b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\, b^{n+1-j}\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^j\, b^{n+1-j} + \binom{n}{n} a^{n+1}\, b^0 + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a^j\, b^{n+1-j}.$$

Uvážíme-li, že

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}, \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}, \quad \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0},$$

vidíme, že

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j\, b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}\, b^0 \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j\, b^{n+1-j},\end{aligned}$$

tj. že opravdu platí analogie vzorce (2) pro $n+1$.

Tím je binomická věta dokázána.

Cvičení

Dokažte indukcí tato tvrzení:

2.01. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2} n(n+1)$

2.02. $n \in \mathbb{N},\ 1 \neq q \in \mathbb{C} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2.03. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)(2n+1)$

2.04. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

2.05. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

2.06. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \tfrac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

2.07. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

2.08. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

2.09. $n \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

2.10. $n \in \mathbb{N},\ x \geq -1 \Rightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx$ (*Bernoulliho nerovnost*)

2.11. $n \in \mathbb{N},\ 1 \neq x \in \mathbb{C} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x}{1-x}\left(\frac{1-x^n}{1-x} - nx^n\right)$

2.12. $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ (*Moivrův vzorec*)

2.13. $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}n\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha$

2.14. $n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{2}n\alpha \cdot \cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha$

2.15. $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \cos\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$ (n odmocnin)

2.16. $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \sin\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$ (n odmocnin)

2.17. $n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C} \ \Rightarrow\ (1-z)\prod_{k=0}^{n}(1 + z^{2^k}) = 1 - z^{2^{n+1}}$

2.18. $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n \ \Rightarrow\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

2.19. $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 2\sqrt{n}$

2.20. $n > 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$

2.21. $n > 1 \ \Rightarrow\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$

2.22. $n \ge 4 \ \Rightarrow\ 2^n \ge n^2$

2.23. $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

2.24. $n > 2 \ \Rightarrow\ (n!)^2 > n^n$

2.25. $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{n+1}$

2.26. $n \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n \ \Rightarrow\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \le 1 + \frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2$

2.27. $n \ge 0 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \ge \frac{n}{2} + 1$

2.28. $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ 10^n - 1$ je dělitelné číslem 9

2.29. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 10^n - 4$ je dělitelné číslem 6

2.30. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ je dělitelné číslem 9

2.31. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 4^n + 15n - 1$ je dělitelné číslem 9

2.32. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ je dělitelné číslem 11

2.33. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n^3 + 11n$ je dělitelné číslem 6

2.34. $n \in \mathbb{N},\ a_k \geq 0$ pro $k = 1, \ldots, n \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$;
rovnost platí, právě když $a_1 = \ldots = a_n$

2.35. $n \in \mathbb{N},\ \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq n\big(a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1}\big)^{-1}$

2.36. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $b_1, \ldots, b_n$ je permutací kladných čísel
$a_1, \ldots, a_n$. Pak je $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \geq n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \right)^{1/n} = n\,.$

2.37. Je-li $n \in \mathbb{N}$ a jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (komplexní) čísla, je

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ a_1^2, & a_2^2, & \ldots, & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1}, & a_2^{n-1}, & \ldots, & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)\,.$$

(Vlevo je tzv. *Vandermondův determinant* čísel $a_1, \ldots, a_n$.)

* * *

Indukci lze užít i k *definici* posloupnosti:

Příklad 2.2. *Faktoriály* se definují indukcí, a to takto:

$$0! := 1\,, \quad n! := n \cdot (n-1)! \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}\,. \tag{3}$$

Faktoriály se v matematice vyskytují tak často, že není na škodu pamatovat si, že

$1! = 1$,	$6! = 720$,
$2! = 2$,	$7! = 5040$,
$3! = 6$,	$8! = 40320$,
$4! = 24$,	$9! = 362880$,
$5! = 120$,	$10! = 3628800$.

Cvičení

2.38. Položíme-li $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ a definujeme-li $a_{n+2} := a_n + a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, získáme tzv. *Fibonacciho posloupnost*. Vypište prvních 15 jejích členů a přesvědčte se, že čím je n větší, tím je podíl a_n/a_{n+1} blíže tzv. *zlatému řezu* rovnému $z := \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \doteq 0.61803\,39887$. (Pro kontrolu: $a_{14} = 377$, $a_{15} = 610$; čísla $377/610$, z se shodují na pěti místech za desetinnou tečkou, $377/610 - z \doteq 1.2 \cdot 10^{-6}$.)

2.39. Položte

$$(-1)!! := 1\,,\ 0!! := 1 \ \text{ a } \ n!! := n(n-2)!! \ \text{ pro každé } \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Vypočítejte $n!!$ pro $n = 1, \dots, 10$. (Pro kontrolu: $9!! = 945$, $10!! = 3840$.)

2.40. Položte $c_1 := \cos\frac{1}{3}\pi$, $m_1 := 6$ a dokažte, že $a_1 := 3\sin\frac{1}{3}\pi$ je obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice J. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak definujte

$$c_{n+1} := \sqrt{\tfrac{1}{2}(c_n + 1)}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n}{c_{n+1}}, \quad m_{n+1} := 2m_n$$

a dokažte, že 1) pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $a_{n+1} \geq a_n$, 2) a_n je obsah pravidelného m_n-úhelníku vepsaného do J. Vypočtěte pro $n = 1, \dots, 10$ čísla m_n a a_n – druhé z nich aspoň na 10 desetinných míst; všimněte si, že s rostoucím n aproximuje číslo a_n číslo $\pi \doteq 3.14159\,26535$ stále lépe. (Rada: Užijte známý vzorec $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(\cos\alpha + 1)}$ platný např. pro všechna $\alpha \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Pro kontrolu:

$$m_1 = 6,\ a_1 \doteq 2.59807\,62114, \quad m_{10} = 3072,\ a_{10} \doteq 3.14159\,04632\,.)$$