Příklad 1 (7 bodů) Podrobný postup je vyložen v učebnici Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy pro 2. až 4. semestr, autoři Holický a Kalenda, na straně 122 nahoře (část paragrafu 75.). Zde proto jenom stručně. Budeme pracovat na množině $r > 0, 0 < \varphi < \pi/2$, a funkce $f^*(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Potřebnou parciální derivaci získáme derivováním patřičné parciální derivace pomocí řetízkového pravidla.

Příklad 2 (7 bodů)

Nejprve lokálně stejnoměrná konvergence. Na $[0,q], q < 1$ je řada majorizovaná konvergentní řadou $\sum q^n - q^{5n}$, lokální stejnoměrná konvergence tedy plyne z Weierstrassova kritéria.

Hledejme nyní maximum funkce $x^n - x^{5n}$. Derivací zjistíme, že je ho nabyto v bodě $\frac{1}{\sqrt[5n]{5}}$. Hodnota $x^n - x^{5n}$ v bodě $\frac{1}{\sqrt[5n]{5}}$ však pro n jdoucí k nekonečnu nejde k nule a řada tedy nesplňuje nutnou podmínku pro stejnoměrnou konvergenci.

Příklad 3 (6 bodů)

Fundamentální systém je c_1e^x, c_2xe^x, hledáme tedy řešení tvaru $y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$, přičemž předpokládáme, že c_1, c_2 mají druhé derivace. Derivujme.

$$y'(x) = c_1'(x)e^x + c_1e^x + c_2(xe^x + e^x) + c_2'(x)xe^x.$$

$$\text{Položíme } c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0.$$

Dalším derivováním dostáváme $y''(x) = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2(x)(xe^x + 2e^x) + c_2'(x)(xe^x + e^x)$.

Dosadíme do původní rovnice (zadané), skoro všechno se sežere a zbyde nám

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(xe^x + e^x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

porovnáme s tím, co jsme položili rovno nule a můžeme rovnou určit,

že $c_2 = \operatorname{arctg} x + k_1$ a tedy $c_1 = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Celkové řešení je tedy tvaru

$$y(x) = (-\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + k_2)e^x + (\operatorname{arctg} x + k_1)xe^x, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$