Příklad 1 (3 body)

$$xy' - 2y = 2x^3 \cos x.$$

Nejprve separace proměnných. Pro $x \neq 0$ (pak y=0) máme

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{2y};$$

$$2\ln|x| = ln|y| + c, c \in \mathbb{R}, \text{ odtud } y = Kx^2, K \in \mathbb{R}.$$

Variace konstanty. Dosadíme do původní rovnice, na K se nyní koukáme jako na funkci.

$$xK(x)'x^2 + 2K(x)x^2 - 2K(x)x^2 = 2x^3 \cos x,$$

$$K'(x) = 2\cos x, K = 2\sin x + c.$$

Řešení je tedy ve tvaru $(x^2 \sin(x) + c)x^2 + Kx^2 = x^2 \sin(x) + Kx^2$ (c a K schováme do jedné konstanty K, ač to není formálně zcela přesné). Dosazením počátečních podmínek a uvědoměním si, že v nule můžeme bifurkovat, získává řešení tvar

$$f(x) = x^2 \sin(x) + \frac{4}{\pi^2}x^2 \text{ pro } x < -\arcsin\left(\frac{2}{\pi^2}\right), \text{ hodnotu 0 dál až do } -\arcsin\left(\frac{4}{\pi^2}\right)$$

$$\text{a jinak je rovna } x^2 \sin(x) + \frac{8}{\pi^2}x^2.$$

Příklad 2 (3 body)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.0 = 0,$$

řada tedy konverguje dle limitního srovnávacího kritéria ($\sum n^{-\frac{3}{2}}$ konverguje).

Příklad 3 (7 bodů)

Substituuj $t := \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Vyjde

$$\int \frac{1}{3 + 2\sin x}\,dx = \int \frac{2dt}{3t^2 + 4t + 3} = \frac{6}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}t + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Zkontroluj, zda je to derivace na celém intervalu $(0, 2\pi)$.

Příklad 4 (7 bodů)

Použij Větu o implicitní funkci. Funkce je třídy $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, bo je to součin spojitých funkcí. Hodnota v nule je jasná, zbývá ověřit nenulovost parciální derivace.

$$\frac{\partial}{\partial z} z^3 + y - xz|_{(3,-2)} = 3z^2 - x|_{(3,-2)} = 3.2^2 - 3 = 9 \neq 0.$$